UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option :
Modélisation, Contrôle et Optimisation

Thème :
Tests de Contrôlabilité des Systèmes Linéaires Positifs à Temps Continu de Lyapunov

Présenté par :

Wiam MIMOUNI

Soutenu le 21 /06/ 2023 devant les membres du jury :

Zineb	**KAISSERLI**	**Président**	M C A	**U. de Mostaganem**
Horiya	**DIALA**	**Examinateur**	M A A	**U. de Mostaganem**
Khadidja	**BECHAOUI**	**Encadreur**	M A A	**U. de Mostaganem**

Dedicaces

Dieu merci pour tout le bien et les privilèges que vous m'avez procuré toute ma vie, lesquels m'ont permis d'atteindre ce savoir-faire.

Je dédie ce travail à :

Mon père Allah yerahmou et ma très chère mère qui se sont tant sacrifiés pour les besoins de mes études. Vous trouverez à travers ce travail, l'expression de toute mon affection, ma gratitude et ma reconnaissance.

Mes frères, **Mohammed**, **Abdelkader**, **Fouad**, **Samir** et **Kheireddine**.

Ma soeur **Djamila**.

A mes trés chères amies **Amel**, **Sarra, Khadidja, Samira, Fatima, Wassila, Kehla** et toutes mes amies qui m'aiment.

Madame **Bechaoui Khadidja** pour sa disponibilité et sa patience.

A toute ma famille **MIMOUNI**, et à tous mes proches.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier du fond du coeur "Allah" qui m'a donné la force, la volonté pour achever ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur madame **Khadidja BECHAOUI** pour tout l'effort qu'elle a fournis pour faciliter et aider à accomplir mon travail de fin d'étude.

Je tiens aussi à remercier Madame **Zineb KAISSERLI**, pour l'honneur qu'elle ma fait en présidant le jury de ce mémoire.

J'exprimes vifs remerciements à Madame **Horiya DIALA** d'avoir accepté d'éxaminer ce mémoire.

Je tiens à saisir cette occasion pour remercier l'ensemble des enseignants de l'Université de Mostaganem. Ils m'ont fourni les outils nécessaires pour la réussite dans mes études universitaires.
Un grand merci à **mon père** Allah yarahmou et à **ma mère**, à mes frères et ma soeur pour leurs
amour, leurs conseils ainsi que leur soutien inconditionnel, à la fois moral et financier, qui m'a permis de réaliser les études que je voulais et par conséquent ce mémoire.

Je remercie beaucoup ma grande mère pour tous ses efforts et sa motivation tout au long de mon parcours universitaire.

Je n'oublie pas de remercier tous mes camarades de la promotion 2022-2023.

Merci à tous.

RÉSUMÉ

Le but de notre travail est l'étude de la contrôlabilité des systèmes dynamyques linéaires positifs à temps continu de Lyapunov. Dans un premier temps nous fournissons des conditions nécessaires et suffisantes pour la positivité de cette classe des systèmes. Ensuite nous utilisons deux tests de contrôlabilité afin d'étudier cette dernière et pour ce faire nous nous sommes basés sur les résultats déduits des systèmes dynamiques linéaires positifs standards.
Tout au long de ce mémoire, le travail est illustré par des exemples numériques

Mots clés : Systèmes dynamiques linéaires, systèmes de Lyapunov, positivité, contrôlabilité.

ABSTRACT

The aim of this work is the study of the controllability of positive linear Lyapunov continuous-time dynamic systems. First we provide necessary and sufficient conditions for the positivity of this class of systems. Then we use two controllability tests in order to study it. To achieve the desired results we will use the results deduced from the standard positive linear systems.
Throughout this manuscript, numerical examples are used to illustrate our results .

Keywords : Linear dynamic systems, Lyapunov systems, positivity, controllability.

Table des matières

Notations

I_n	:	Matrice identité de dimension n.
$\otimes$	:	Produit de Kronecker.
$\exp(A)$ ou e^A	:	Exponentielle de la matrice A.
A^{-1}	:	Inverse de la matrice A.
$\det(A)$	:	Déterminant de la matrice A.
$rg(A)$	:	Rang de la matrice A.
$\ker(A)$	:	Noyau de la matrice A.
$\mathrm{Im}(A)$	:	Image de la matrice A.
$P_\lambda(A)$	:	Le polynôme caractéristique de la matrice A.
$\langle . \, ; . \rangle$	:	Le produit scalaire.
$\lvert\lvert \, . \, \rvert\rvert$	:	La norme euclidienne.
$\underline{n}$	:	L'ensemble des n premiers entiers naturels, $1, ..., \; n$.
$\mathbb{R}$	:	Corps des nombres réels.
$\mathbb{k}$	:	Corps des nombres réels ou complexes.
$\mathbb{R}^+$	:	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{N}$	:	Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{R}^n$	:	Espace des valeurs à n entiers réels.
$\mathbb{R}^{n\times n}$	:	Espace des matrices carrées de dimension $n \times n$.
$\mathbb{R}^{m\times n}$	:	Espace des matrices de dimension $m \times n$.

Introduction

En Mathématiques, le contrôle désigne la théorie qui vise à comprendre la façon dont une commande permet aux humains d'agir sur un systéme qu'ils souhaitent maîtriser. Cette définition recouvre naturellement de trés nombreux domaines d'applications dans touts les domaines des sciences et de l'ingénierie.

La théorie de contrôle est une science mathèmatique qui analyse les propriétés d'un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'une commande ou contrôle dans le but de l'amener d'un ètat initial donné à un état final souhaité.

L'étude de contrôlabilité des systèmes linéaires est un domaine de recherche trés actif. Son histoire remonte aux travaux de Kalman en 1960. De nombreux problèmes fondamentaux de la théorie du contrôle (stabilité et stabilisation, contrôle optimal) ne peuvent être résolus que sous l'hypothèse que le système soit contrôlable.

L'objectif de ce mémoire est l'étude de la contrôlabilité des systèmes dynamiques linéaires positifs de Lyapunov à temps continu. Cette dernière est d'une grande importance dans la théorie du contrôle et est une propriété de base dans l'analyse des systèmes dynamiques.

Tout au long de ce travail, une analogie entre un système linéaire standard et un système linéaire de Lyapunov tous deux à temps continu a été faite car tous les résultats sur le contrôle des systèmes linéaires standards sont étendus au cas des systèmes linéaires de Lyapunov.

Notre travail a été structuré en trois chapitres, en plus le résumé, l'introduction et la conclusion.

Le premier chapitre est consacré à donner quelques notions de bases et des définitions qui sont très utiles dans notre travail.

Dans le deuxième chapitre, nous définissons les systèmes linéaires positifs à temps continu, nous fournissons les conditions nécessaires et suffissantes pour la positivité, ainsi nous présentons les tests de contrôlabilté de cette classe de systémes.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la contrôlabilté des systémes linéaires positifs de Lyapunov à temps continu, pour ce faire nous nous somme basés sur les résultats donnés dans le chapitre précédent.

Ce manuscrit est clôturé par une conclusion et une bibliographie contenant les différents ouvrages et articles utilisés pour élaborer ce travail.

Chapitre 1

Préliminaires et notions de base

Dans ce chapitre, nous citons quelques préliminaires et notions de base qui représentent des outils de l'algèbre linéaire qui sont très utiles dans notre travail.
Pour ce faire nous nous sommes basées sur les références suivantes [1], [5], [6] et [8].

1.1 Notions sur le produit de kronecker

Le produit de Kronecker est une opération portant sur les matrices, jôue un rôle important dans les mathématiques et dans les applications trouvées en physique théorique.

Définition 1.1.1 *[8]Soient $A = [a_{ij}]$ une matrice de taille $m \times n$ et $B = [b_{ij}]$ une matrice de taille $p \times q$, alors le produit de Kronecker de A par B est la matrice $mp\times$ nq notée $A \otimes B$, définie par :*

$$A \otimes B = [a_{ij}B] = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.1.1 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
A \otimes B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Propriétés :
1. Pour toutes matrices A et B, avec $\alpha \in \Bbbk$:
–

$$(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B).$$

2. Le produit de Kronecker est associatif, pour tout triplet de matrices A, B, C :

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) = A \otimes B \otimes C.$$

3. Soient A et B deux matrices du même dimension, C et D deux matrices deux même dimension, alors :

$$(A + B) \otimes (C + D) = (A \otimes C) + (A \otimes D) + (B \otimes C) + (B \otimes D).$$

4. Le produit de Kronecker n'est pas commutatif :
–

$$A \otimes B \neq B \otimes A.$$

5. On a aussi :
–

$$I_{np} = I_n \otimes I_p = I_p \otimes I_n.$$

6. Le produit de Kronecker est également distributif par rapport au produit matriciel standard : pour tout quadruplet A, B, C, D tel que, AC et BD existent on obtient :

$$(AC) \otimes (BD) = (A \otimes B)(C \otimes D).$$

7. Soient A et B deux matrices inversibles :

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

8. Soient A et B deux matrices carrées, alors :

–

$$tr\,(A \otimes B) = tr(A)tr(B).$$

9. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{p\times p}$, alors :

–

$$\det(A \otimes B) = (\det(A))^p(\det(B))^n.$$

1.2 Polynôme caractéristique

Définition 1.2.1 *On appelle polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ le polynôme $P_A(\lambda)$ d'ordre n définit par :*

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

Ce polynôme admet donc n racines qui peuvent être simples ou multiples. Ces racines sont appelées valeurs propres de A.

Exemple 1.2.1 *Soit B la matrice suivante :*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de B est :

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - B) &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 6 & 11 & \lambda+6 \end{vmatrix}, \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3). \end{aligned}$$

Donc, les valeurs propres de la matrice B sont $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = -3$.

1.3 Vectorisation d'une matrice

La vectorisation d'une matrice est une transformation qui convertit la matrice dans un vecteur de colonne.

Définition 1.3.1 *[8]Soit $A = [A^1 ... A^p]$ une matrice de taille $n \times p$. On définit l'opérateur vec d'empilement des colonnes de A par :*

$$vec(A) = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^p \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^{np}.$$

Exemple 1.3.1 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

alors

$$vec(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

1. Soient A et B deux matrices de même dimension, alors :

$$vec(\alpha A + \beta B) = \alpha vec(A) + \beta vec(B), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}.$$

2. Soient A, B et C des matrices, telles que ABC existe, alors :

$$vec(ABC) = (C^T \otimes A) vec(B).$$

3. Cas particulier :

$$vec(AB) = (I_n \otimes A) vec(B).$$

1.4 Matrices Particulières

Soient $A = (aij)_{i,j}$ et $B = (bij)_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\underline{n}$ l'ensemble des n premiers entiers naturels,1, 2, 3, ..., n.

Définition 1.4.1 *[6] Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$.*
A est une matrice ***non-négative*** *si $\forall i \in \underline{n}$, $\forall j \in \underline{m}$: $a_{ij} \geqslant 0$, autrement dit toutes ses entrées sont non-négatives. Nous noterons une telle matrice par : $A \geqslant 0$ ou encore, $A \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$.*

Exemple 1.4.1 *La matrice A :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

est une matrice non-négative.

Définition 1.4.2 *[7]A est une matrice* ***positive*** *si A est non-négative et $\exists k \in \underline{n}, \exists l \in \underline{m}$: $a_{kl} \geqslant 0$, c'est à dire toutes ces entrées sont non négatives avec au moins une entrée (strictement) positive. Nous noterons une telle matrice par : $A > 0$.*

Définition 1.4.3 *[7]A est une matrice* ***strictement positive*** *si $\forall i \in \underline{n}$, $\forall j \in \underline{m}$: $a_{ij} > 0$, i.e, toutes ses entrées sont strictement positives. Nous noterons une telle matrice par : $A >> 0$.*

Définition 1.4.4 *[7]A est une matrice* ***monomiale*** *si les entrées de A sont toutes nulles sauf une, dans chaque ligne et chaque colonne, qui est strictement positive.*

Exemple 1.4.2 *La matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

est une matrice monomiale.

Remarque 1.4.1 *une matrice de permutation est une matrice monomiale dans laquelle chaque entrée non nulle est égale à 1.*

Définition 1.4.5 *[7] Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A est définie positive si seulement si*

$$x^T A x \geq 0, \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ x \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Exemple 1.4.3 *Soit la matrice A*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} x^T A x &= (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \\ &= (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}, \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 > 0. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la matrice A est définie positive..

Définition 1.4.6 *La matrice carrée A est symétrique si seulement si*

$$A^T = A.$$

Définition 1.4.7 *[7]A est une matrice de* ***Metzler*** *si $\forall i \in \underline{n}, \forall j \in \underline{m}$, $i \neq j : a_{ij} \geqslant 0$, i.e : toutes ses entrées hors diagonale sont non négatives.*

Exemple 1.4.4 *La matrice A est une matrice de Metzler,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.4.1 *[7]A est une matrice de* ***Metzler*** *si et seulement si*

$$\forall t \geqslant 0,\ e^{At} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}.$$

Ou de manière équivalente,$\forall t > 0$, l'orthant positif $\mathbb{R}_+^n$ est e^{At}-invariant c'est à dire

$$\forall t \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^n,\ e^{At}x \in \mathbb{R}_+^{n\times n}.$$

Preuve. □

Nécessité :

Supposons que A est une matrice de Metzler, on peut trouver un réel $\lambda > 0$ telle que $(A + \lambda I_n) > 0$.

Sachant que

$$A + \lambda I_n - \lambda I_n = (A + \lambda I_n) - \lambda I_n,$$

il s'ensuit que,

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{(A+\lambda I_n)t+(-\lambda I_n)t}, \\ &= e^{(A+\lambda I_n)t} e^{(-\lambda I_n)t}, \end{aligned}$$

du fait que $e^{(A+\lambda I_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ et $e^{(-\lambda I_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.

Suffisance :

Supposons que $\forall t \geqslant 0,\ e^{At} \geqslant 0$, ainsi,

$$A = \frac{d}{dt}(e^{At})_{t=0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{At} - I}{t}.$$

Prenons comme e_j le j^{ième} vecteur de la base canonique, nous obtenous pour $i \neq j$:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\langle e^{At}e_j - e_j,\ e_i\rangle}{t}, \\ &= \lim_{t\to 0^+} \left\{ \frac{\langle e^{At}e_j - e_j,\ e_i\rangle}{t} - \frac{\langle e_j,\ e_i\rangle}{t} \right\}, \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\langle e^{At}e_j - e_j,\ e_i\rangle}{t} \geq 0, \end{aligned}$$

puisque $\langle e_j, e_i\rangle = 0$. Dés lors $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$, ainsi, la matrice A est donc une matrice de Metzler.

1.5 Exponentielle d'une matrice

Définition 1.5.1 *[7]L'exponentielle d'une matrice carrée A de dimension n se définit par son développement en série entière*

$$e^A = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i}{i!} = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots.$$

Il est clair que e^A est de même dimension que A.

Proposition 1.5.1 *Soient A et B deux matrices de dimension n,*

1. Si les matrices A et B commutent, i.e, $AB = BA$, alors
$$e^A e^B = e^{A+B}.$$
2. $\frac{d}{dt}(e^A) = Ae^{At}$.
3. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
4. $\det(e^A) = e^{tr(A)}$.

1.6 Quelques méthodes de calcul de l'exponentielle d'une matrice

Plusieurs techniques existent pour calculer e^A parmis elles, citons les méthodes suivantes :

1.6.1 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 1.6.1 *(Cayley-Hamilton) Toute matrice A de dimension n satisfait son équation caractéristique*

$$P_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 I_n = 0.$$

On déduit du théorème la relation suivante :

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - ... - a_1 A - a_0 I_n.$$

Les $a_i, i \in \underline{n}$ sont des constantes réelles.

Exemple 1.6.1 *On considère la matrice A suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors, les valeurs propres de la matrice A sont :$\lambda_1 = -1$ *et* $\lambda_2 = -3$.

D'aprés le théorème de Cayley-Hamilton, on a :

$$e^A = \alpha_0 I_2 + \alpha_1 A.$$

Calculons α_0, α_1 :

Exemple 1.6.2 *α_0, α_1 sont les solutions du système suivant :*

$$\begin{cases} e^{-3} = \alpha_0 - 3\alpha_1 \\ e^{-1} = \alpha_0 - \alpha_1 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \alpha_0 = -\frac{1}{2}e^{-3} + -\frac{3}{2}e^{-1}, \\ \alpha_1 = -\frac{1}{2}e^{-1} + -\frac{1}{2}e^{-3}, \end{cases}$$

Donc

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-3} & 0 \\ e^{-t} - e^{-3} & e^{-1} \end{pmatrix}$$

1.6.2 Le cas d'une matrice diagonale

Si D est une matrice diagonale, c'est à dire :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Alors, son exponentielle est obtenue en calculant l'exponentielle de chacun des termes de la diagonale principale :

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{d_n} \end{pmatrix}.$$

1.6.3 Le cas d'une matrice diagonalisable

Soit A une matrice diagonalisable, i.e, : (il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $D = diag(\lambda_i)$, $\forall i = 1, ..., n$ telles que, A s'écrit sous la forme : $A = PDP^{-1}$), alors son exponentielle est donnée par :

$$e^A = Pe^D P^{-1}.$$

1.6.4 Le cas d'une matrice nilpotente

Si A est une matrice nilpotente d'indice de nilpotence q, i.e, $A^q = [0]$,
d'où

$$A^m = [0], \forall m \geqslant q$$

Alors, l'exponentielle de la matrice A se calcule directement à partir de son développement en série, puisque celui-ci ne comporte alors qu'un nombre fini de termes :

$$e^A = \sum_{k=0}^{q} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ... + \frac{A^{q-1}}{(q-1)!}.$$

Exemple 1.6.3 *Considérons la matrice A suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

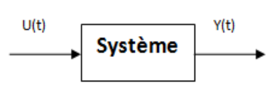
La matrice A est nilpotenete d'indice de nilpotence 2, car $A^2 = [0]$.
Alors son exponentielle est :

$$\begin{aligned} e^A &= I_2 + A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.7 Notion du système dynamique

Définition 1.7.1 *Un système est un ensemble de pièces ou objets qui réalisent une opération spécifique, il y a donc une notion d'action sur l'environnement en fonction d'excitation extèrieur*

Un système est ainsi défini par ses entrées et ses sorties qui le relient à l'environnement extèrieur.



Le système dynamique linéaire est défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases}$$

avec $x(t_0) = x_0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle du système appelé aussi entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie su système.
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice d'état, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrice de commande (d'entrée), $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ matrice de mesure (sortie) et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ matrice de transfert direct.

La trajectoire : Nous cherchons à résoudre l'équation d'état précédemment introduite et qui s'écrit dans le cas général

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t).$$

Le cas des équations différentielles matricielles se traite de manière similaire au cas scalaire.

L'équation homogène associée s'écrit :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t),$$

alors,

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} A dt,$$

Donc

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0).$$

Où t_0 est l'instant initial.
La résolution avec second membre s'effectue comme dans le cas scalaire :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t),$$

ceci implique que :

$$e^{-At}\frac{dx}{dt} = e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t),$$

d'où

$$\begin{aligned} e^{-At}\frac{dx}{dt} - e^{-At}Ax(t) &= e^{-At}Bu(t), \\ &\Longrightarrow \frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)) = e^{-At}Bu(t), \\ &\Longrightarrow e^{-At}x(t) = e^{-At_0}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

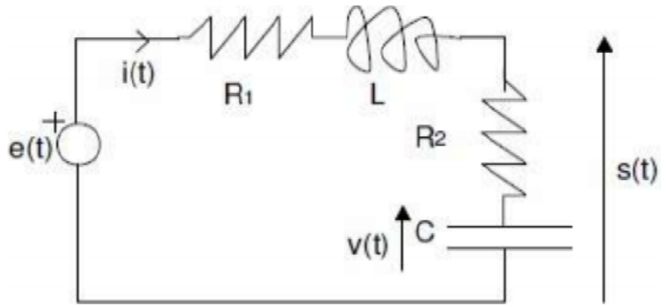
donc

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

En dernier la réponse du système dynamique est

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t).$$

Exemple 1.7.1 *On considère le système dynamique décrit par le circuit RLC :*



Les équations physiques de ce système électronique sont comme suit :

$$\begin{cases} e(t) = (R_1 + R_2)i(t) + L\frac{di}{dt} + v(t) \\ i(t) = C\frac{dv}{dt} \\ s(t) = R_2 i(t) + v(t) \end{cases}$$

avec R_1, $R_2 > 0$, $C > 0$.
Suite à l'application des lois physiques notamment les lois de Kirchhoff, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{(R_1+R_2)}{L}x_1(t) + \frac{1}{L}x_2(t) \\ \dot{x}(t) = \frac{1}{C}x_1(t) \end{cases}$$

On pose $x_1(t) = i(t)$ et $x_2(t) = v(t)$. Et aprés modélisation, le modèle devient

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(R_1+R_2)}{L} & \frac{1}{L} \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y(t) = \begin{bmatrix} R_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

ceci est équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1+R_2}{L} & \frac{1}{L} \\ c & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} R_2 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } D = [0]. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Contrôlabilité des systèmes dynamiques linéaires positifs à temps continu

Dans ce chapitre, nous définissons les systèmes dynamiques linéaires positifs en temps contin. Ausssi nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système dynamique linéaire soit positif. Ensuite, nous présenterons les tests de contrôlabilté de cette classe de systéme.

Pour ce faire nous nous sommes basées sur les références suivantes : [3], [7], [13] et [14].

2.1 Positivité des systèmes linéaires dynamiques à temps continu

Considérons le système dynamique linéaire en temps continu décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \\ \quad x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Définition 2.1.1 *le système est dit positif si à toute entrée positive et une condition initiale positive, correspond un état positif et une sortie positive.*

Alors, par défnition le système 2.1.1 est dit **positif** si et seulement si:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^+,\ \forall u \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n_+ \text{ et } y(t) \in \mathbb{R}^+.$$

Nous présenterons quelques définitions sur la positivité externe et la positivité interne. Nous donnerons la relation qui existe entre ces deux notions.

2.1.1 Positivité externe

Définition 2.1.2 *[7] Le système linéaire 2.1.1 est dit* ***externement positif*** *si la sortie correspondante à l'état initial nul est non-négative pour chaque entrée non-négative, i.e. pour* $x_0 = x(0) = 0$ *et pour tout* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$, $t \geqslant 0$, *on a* $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$, *pour* $t \geqslant 0$.

2.1.2 Positivité interne

Définition 2.1.3 *[7] Le système linéaire 2.1.1 est dit* ***internement positif*** *si pour* $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ *et tout contrôle* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ *pour tout* $t \geqslant 0$ *on a* $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ *et* $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ *pourt* $\geqslant 0$.

Théorème 2.1.1 *[7]Le système linéaire 2.1.1 est internement positif, si et seulement si,* A *est une matrice de Metzler et* $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$ *et* $D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$.

Preuve. **Nécessité :**Si le système est internement positif, alors :

$$x(t) \in \mathbb{R}_+^n \text{ et } y(t) \in \mathbb{R}_+^p,$$

□

pour

$$x_0 \in \mathbb{R}_+^n \text{ et } u(t) \in \mathbb{R}_+^m,$$

tel que

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$

et

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Suffisance :
Si on suppose que la matrice A est de Metzler et les matrices B, C et D sont positives, alors $\exp(At)$ est positive.

Théorème 2.1.2 *[7] Le système linéaire à temps continu 2.1.1 est positif si et seulement si la matrice* A *est une matrice de Metzler et* $B \geqslant 0$, $C \geqslant 0$.

Remarque 2.1.1 *[7] La positivité interne implique la positivité externe mais l'inverse n'est pas vrai.*

2.2 Applications

- Des systèmes à variables physiques positives par nature (niveaux, débits, concentrations,. . .).
- Modèles à compartiments : Applications en médecine, cinétique chimiques, ...
- Modèles de dynamiques de population.
- Circuit RLC.
- Sciences de la communication et de l'information.
- Processus industriels impliquant des réacteurs chimiques,...

2.3 Contrôlabilité des systèmes dynamiques linéaires positifs à temps continu

2.3.1 Notion sur la contrôlabilité

Considérons le système dynamique linéaire positif suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \\ \quad x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$, $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$, A est de Metzler et les matrices B, C et D sont positives de dimensions appropriées.

Définition 2.3.1 *Un état x est dit contrôlable s'il existe un moyen u transférant l'état du système de x_0 vers zéro en un temps fini T, i.e,*

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \exists u \text{ tel que } x(t) = 0.$$

2.3.2 Tests de contrôlabilité des systèmes linéaires positifs

Test par la matrice de Kalman

Théorème 2.3.1 (Kalman) *Le système 2.3.1 est contrôlable si et seulement si le rang de la matrice de contrôlabilité*

$$\psi = \left[B,\, AB,\, A^2B, \ldots,\, A^{n-1}B\right]$$

est égale à n.

Exemple 2.3.1 *Conisdérons le système suivant :*

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de Kalman ψ correspondante est :

$$\psi = [A \; AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

par suite,

$$\det \psi = -1 \neq 0.$$

ψ est de rang plein, donc le système est contrôlable.

Test par le grammien de contrôlabilité

Définition 2.3.2 *Le grammien de contrôlabilité dans le cas d'un modèle à temps continu est une matrice $n \times n$ notée $W_c(0, t_f)$ est définie par :*

$$W_c(0, t_f) = \int_0^{t_f} e^{A(t_f - \tau)} B B^T e^{A^T (t_f - \tau)} d\tau.$$

$W_c(0, t_f)$ est une matrice symétrique et définie positive.

Proposition 2.3.1 *La paire (A, B) est dit contrôlable si et seulement si*

$$W_c(0, t_f) = \int_0^{t_f} e^{A(t_f - \tau)} B B^T e^{A^T (t_f - \tau)} d\tau$$

soit inversible.

Preuve. $\square$

Supposon que W_c est inversible, alors il existe le contrôle

$$U(t) = -B^T e^{A^T (t_f - \tau)} W_c^{-1} x_0 e^{A t_f}$$

donc

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{At_f}x_0 + \int_0^{t_f} e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau, \\
&= e^{At_f}x_0 + \int_0^{t_f} e^{A(t-\tau)}B(-B^T e^{A^T(t_f-\tau)}W_c^{-1}x_0 e^{At_f})d\tau, \\
&= e^{At_f}x_0 - \int_0^{t_f} e^{A(t-\tau)}BB^T e^{A^T(t_f-\tau)}W_c^{-1}x_0 e^{At_f}d\tau, \\
&= e^{At_f}(x_0 - \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)}BB^T e^{A^T(t_f-\tau)}W_c^{-1}x_0 d\tau), \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc la paire $(A,\, B)$ est contrôlable.
Inversement, on suppose que le système est contrôlable, alors nous devrons montrer que $W_c(0, t_f)$ est inversible
Si on suppose que W_c n'est pas inversible i.e :

$$\exists\ Z \neq 0 \text{ tel que } W_c Z = 0, \implies Z^T W_c Z = 0$$

$$\begin{aligned}
&\implies Z^T \left(\int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)}BB^T e^{A^T(t_f-\tau)}d\tau \right) Z = 0 \\
&\implies \int_0^{t_f} Z^T e^{A(t_f-\tau)}BB^T e^{A^T(t_f-\tau)}Z d\tau = 0 \\
&\implies \int_0^{t_f} ||Z^T e^{A(t_f-\tau)}Z||^2 d\tau = 0 \\
&\implies ||Z^T e^{A(t_f-\tau)}Z||^2 = 0 \\
&\implies Z^T e^{A(t_f-\tau)}Z = 0 \qquad (2.3.2)
\end{aligned}$$

On a la paire (A, B) est contrôlable alors,

$$\begin{aligned}
\forall\ x_0,\ \exists\ u \text{ tq } x(t) &= 0,\\
&\Longleftrightarrow\ x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = 0,\\
&\Longleftrightarrow\ e^{At}\left[x_0 + \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\right] = 0,\\
&\Longleftrightarrow\ \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau = -x_0,\\
&\Longleftrightarrow\ \int_0^t x_0^T e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau = -x_0^T x_0,
\end{aligned}$$

Si on pose : $x_0 = Z$, alors,

$$\int_{t_0}^t Z^T e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau = -Z^T Z,$$

Par conséquent,

$$-Z^T Z = 0,$$

cette équation est vrai si $Z = 0$ (contradiction avec la supposition).
Donc, la matrice W_c est inversible.

Exemple 2.3.2 *Conisdérons le système dynamique linéaire positif à temps continu suivant :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$
\begin{aligned}
W_c(0,\, t_f) &= \int_0^{t_f} \begin{pmatrix} 1 & t_f - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_f - \tau & 1 \end{pmatrix} d\tau \\
&= \int_0^{t_f} \begin{pmatrix} t_f - \tau \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_f - \tau & 1 \end{pmatrix} d\tau \\
&= \int_0^{t_f} \begin{pmatrix} (t_f - \tau)^2 & t_f - \tau \\ t_f - \tau & 1 \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} t_f^3 & \frac{1}{2} t_f^2 \\ \frac{1}{2} t_f^2 & t_f \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Alors,

$$
\det W_c(0, t_f) = \frac{1}{12} t_f^4 \neq 0, \qquad \forall t_f > 0.
$$

Par conséquent le système est contrôlable.

Chapitre 3

Systèmes dynamiques linéaires positifs de Lyapunov en temps continu

Dans ce chapitre, nous allons étudier la contrôlabilité des systèmes dynamiques linéaires positifs à temps continu de Lyapunov. Dans un premier temps, nous allons transformer le système dynamique de Lyapunov à un système linéaire invaraint standard pour faciliter l'étude des propriétés de cette classe de système. Nous nous basons pour ce faire sur les références suivantes :[3], [8], [9] et [10] .

Définition 3.0.3 *[10] Un système différentiel linéaire de Lyapunov est un système décrit par les équations :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + x(t)B + Fu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{3.0.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est l'état, $u(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est le contrôle, $y(t) \in \mathbb{R}^{p\times n}$ est la sortie, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.
Maintenant, en appliquant l'opérateur *vec* au système de Lyapunov 3.0.1, nous aurons :

$$\begin{aligned} vec(\dot{x}(t)) &= vec(Ax(t) + x(t)B + Fu(t)), \\ &= (I_n \otimes A)\, vec\,(x(t)) + \left(B^T \otimes I_n\right) vec\,(x(t)) + (I_n \otimes F)\, vec(u(t)), \\ &= \left[(I_n \otimes A) + \left(B^T \otimes I_n\right)\right] vec\,(x(t)) + (I_n \otimes F)\, vec(u(t)). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} vec(y(t)) &= vec(Cx(t) + Du(t)), \\ &= (I_n \otimes C)\, vec(x(t)) + (I_n \otimes D) vec(x(t)). \end{aligned}$$

Finalement, le système est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \bar{A}\tilde{x}(t) + \bar{B}\tilde{u}(t), \\ \tilde{y}(t) = \bar{C}\tilde{x}(t) + \bar{D}\tilde{u}(t), \\ \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0. \end{cases} \tag{3.0.2}$$

Où
$\tilde{x}(t) = vec(x(t)) \in \mathbb{R}^{n^2}$,$\dot{\tilde{x}}(t) = vec(\tilde{x}(t)) \in \mathbb{R}^{n^2}$, $\tilde{u}(t) = vec(u(t)) \in \mathbb{R}^{nm}$,$\tilde{y}(t) = vec(y(t)) \in \mathbb{R}^{pn}$, $\bar{A} = (I_n \otimes A) + \left(B^T \otimes I_n\right) \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$, $\bar{B} = (I_n \otimes F) \in \mathbb{R}^{n^2 \times nm}$, $\bar{C} = (I_n \otimes C) \in \mathbb{R}^{pn \times n^2}$, $\bar{D} = (I_n \otimes D) \in \mathbb{R}^{pn \times nm}$.

3.1 La trajectoire du système de Lyapunov en temps continu

Définition 3.1.1 *[3]On appelle matrice de transition, l'unique solution de l'équation différentielle*

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \bar{A}\tilde{x}(t), \tag{3.1.1}$$

satisfaisant la condition initiale $\tilde{x}(t_0)$, et qui est donnée par

$$\phi(t, t_0) = \phi_1(t, t_0)\phi_2(t, t_0),$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_1(t, t_0) &= \exp[(I_n \otimes A)(t - t_0)], \\ \phi_2(t, t_0) &= \exp\left[(B^T \otimes I_n)(t - t_0)\right], \end{aligned}$$

donc toute solution de 3.1.1 est de la forme

$$\tilde{x}(t) = \phi(t, t_0)\tilde{x}(t_0),$$

avec est $\tilde{x}(t_0)$ un vecteur constant d'ordre n^2.
Propriétès de la matrice de transition [3]
La matrice de la transition ϕ vérifie :
- $\phi(t,\, t) = I$.
- $(\phi(t,\, t_0))^{-1} = \phi(t_0,\, t)$.
- $\dot{\phi}(t,\, t_0) = \bar{A}\phi(t,\, t_0)$.
- $\phi(t_0,\, t_1)\phi(t_1,\, t) = \phi(t_0, t)$, $\forall(t,\, t_0,\, t_1) \in \mathbb{R}^3$.

Preuve. On considère

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t, t_0) &= \dot{\phi}_1(t, t_0)\phi_2(t, t_0) + \phi_1(t, t_0)\dot{\phi}_2(t, t_0) \\ &= (I_n \otimes A)\phi_1(t, t_0)\phi_2(t, t_0) + (B^T \otimes I)\phi_1(t, t_0)\phi_2(t, t_0) \\ &= (\phi_2(t, t_0) + (B^T \otimes I))\phi_1(t, t_0)\phi_2(t, t_0). \end{aligned}$$

Alors,

$$\dot{\phi}(t, t_0) = \bar{A}\phi(t, t_0)$$

De plus,

$$\phi(t, t) = \phi_1(t, t)\phi_2(t, t) = I_{n^2} I_{n^2} = I_{n^2}$$

□

Alors ϕ est la matrice de transition de 3.1.1 et chaque solution de 3.1.1 est de cette forme.

Théorème 3.1.1 *[3]Soit $\phi(t,\, t_0)$ la matrice de la transition de 3.0.1, alors la solution unique de 3.0.1 satisfisant la condition initiale $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ est*

$$\tilde{x}(t) = \phi(t, t_0)\left[\tilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t, \tau)(I_n \otimes F)\tilde{u}(\tau)d\tau\right].$$

Preuve. Pour cela nous démontrons ceci en deux étapes :
Etape 1 : La solution de l'équation homogéne qui est donnée par :

$$\tilde{x}(t) = \phi(t, t_0)\tilde{x}(t_0)$$

Etape 2 : La solution de l'équation non homogène :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \bar{A}\tilde{x}(t) + \bar{B}\tilde{u}(t) \tag{3.1.2}$$

Dans ce cas, la méthode utilisée pour trouver la solution est la méthode de la variation de la constante, on a donc $\tilde{x}(t) = \phi(t,\, t_0)z(t)$, avec

$$z(t_0) = \tilde{x}(t_0)$$

Par dérivation, on trouve

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{\phi}(t,\, t_0)z(t) + \phi(t,\, t_0)\dot{z}(t)$$

L'équation 3.1.2 devienne

$$(I_n \otimes B) + (B^T \otimes I_n)\phi(t,\, t_0)z(t) + \phi(t,\, t_0)\dot{z}(t_0) = \bar{A}\phi(t,\, t_0)z(t) + \bar{B}\tilde{u}(t)$$

Après simplification on obtient

$$\phi(t,\, t_0)\dot{z}(t_0) = \bar{B}\tilde{u}(t)$$

d'où

$$\dot{z}(t) = \phi(t_0,\, t)\bar{B}\tilde{u}(t)$$

d'après intégration, nous obtenons :

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t_0, \tau)\bar{B}\tilde{u}(t)d\tau$$

d'où

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(t) &= \phi(t,\, t_0)\left[z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t_0, \tau)\bar{B}\tilde{u}(t)d\tau\right] \\
&= \phi(t,\, t_0)\left[\tilde{x}(t) + \int_{t_0}^{t} \phi(t_0, \tau)\bar{B}\tilde{u}(t)d\tau\right]
\end{aligned}$$

□

3.2 Positivité des systèmes dynamiques linéaires de Lyapunov à temps continu

Définition 3.2.1 *[10]Le système de Lyapunov 3.0.1 est dit* ***internement positif*** *si et seulement si $x(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ et $y(t) \in \mathbb{R}_+^{pn}$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^{n^2}$ tout contrôle $u(t) \in \mathbb{R}_+^{nm}$.*

Théorème 3.2.1 *[10]Le système de Lyapunov 3.0.1 est positif si et seulement si A et B sont des matrices de Metzler et $F \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$.*

Preuve. □[10]
Le système de Lyaponov 3.0.1 est positif si et seulement si le système standard équivalent 3.0.2 est positif , Par le théorème de positivité du système standard 2.1.1 à temps continue, La matrice $\bar{A}$ doit être de Metzler et les matrices $\bar{B}$, $\bar{C}$ et $\bar{D}$ doivent être positives.

Exemple 3.2.1 *Soit le système 3.0.1 avec les matrices suivantes :*

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A et B sont des matrices de Metzler.
F, C et D sont des matrices a entrées non négatives.
On peut conclure donc que le système est positif.

3.3 Contrôlabilité des systèmes linéaires positifs de Lyapunov à temps continu

Définition 3.3.1 *[3]Le système de Lyapunov positif est dit contrôlable si et seulment si : $\forall \tilde{x}_0$, $\forall \tilde{x}_f$, $\forall T > 0$ fini ,*

$$\exists \tilde{u}(t) : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n} / \ \tilde{x}(T, \tilde{x}_0, \tilde{u}) = \tilde{x}_f.$$

3.3.1 Tests de contrôlabilité des systèmes linéaires de Lyapunov

Test par la matrice de Kalman

Théorème 3.3.1 *Le système est contrôlable si et seulement si la matrice φ définie par :*

$$\varphi = \left[\bar{B} \ \bar{A}\bar{B} \ \bar{A}^2\bar{B} \quad \bar{A}^{n^2-1}\bar{B}\right],$$

est de rang plein, i.e : $rg(\varphi) = n^2$, *avec* $\bar{A} = I_n \otimes A + B^T \otimes I_n$ *et* $\bar{B} = I_n \otimes F$.
La mtrice φ *est appelée la matrice de contrôlabilité, dans ce cas, la paire* $(\bar{A}, \bar{B})$ *est dite contrôlable.*

Exemple 3.3.1 *On considère le système linéaire positif de Lyapunov suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + x(t)B + Fu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Avec

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \; et \; F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice de Kalman est donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi &= \left[\bar{B} \; \bar{A}\bar{B} \; \bar{A}^2\bar{B} \; \bar{A}^3\bar{B}\right] \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 4 & 11 & 10 & 15 & 12 & 43 & 42 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 4 & 5 & 5 & 16 & 16 & 21 & 21 & 64 & 64 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Le rang de la matrice φ est :

$$rg(\varphi) = 4$$

Par conséquent, le système de Lyapunov 3.3.1 est contrôlable.

Test par le grammien de contrôlabilité

Proposition 3.3.1 *Le système 3.0.1 est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité de dimension* $n^2 \times n^2$

$$W_c(0,t_f) = \int_0^{t_f} \phi(t_f,\tau)(I_n \otimes F)(I_n \otimes F)^T \phi^T(t_f,\tau)d\tau,$$

est inversible.
La matrice $W_c(0,t_f)$ *est appelée grammien de contrôlabilité.*

Exemple 3.3.2 *Considèrons le système linéaire positif de Lyapunov suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + x(t)B + Fu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.3.2}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En prennant $t_f = t$ on obtient :

$$\begin{aligned} \phi(0,\tau) &= \exp[(I_2 \otimes A)(t-\tau)] \times \exp[(B^T \otimes I_2)(t-\tau)] \\ \phi(0,\tau) &= \begin{pmatrix} e^{t-\tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t-\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{t-\tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{t-\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2(t-\tau)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (I_2 \otimes F) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\phi(t,\tau)(I_2\otimes F)(I_2\otimes F)^T\phi^T(t,\tau) &= \begin{pmatrix} e^{2(t-\tau)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\\
&\times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{2(t-\tau)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} e^{4(t-\tau)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
W_c(0,t) &= \begin{pmatrix} \int_0^t e^{4(t-\tau)}d\tau & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{4t} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Comme $\det W_c(0,t) = 0$, alors le système 3.3.2 n'est pas contrôlable.

Théorème 3.3.2 *[10]Le système de Lyapunov positif est dit contrôlable si et seulement si la matrice*

$$\omega_c(0,t_f) = \int\limits_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f-\tau)}FF^Te^{A^T(t_f-\tau)}d\tau,$$

est monomiale.

Preuve. $\square$ Si $\omega_c(t_0,t_f)$ est une matrice monomiale, alors $\omega_c^{-1}(t_0,t_f) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existe. Donc il existe le contrôle

$$u(t) = F^Te^{A^T(t_f-t)}\omega_c^{-1}x_fe^{B(t-t_f)}$$

alors,

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{A(t-t_0)}x_0e^{B(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Fu(\tau)e^{B(t-\tau)}d\tau,\\
x(t_f) &= e^{A(t_f-t_0)}x_0e^{B(t_f-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t_f-\tau)}FF^Te^{A^T(t_f-t)}\omega_c^{-1}x_fe^{B(t-t_f)}e^{B(t_f-\tau)}d\tau,
\end{aligned}$$

pour $x_0 = 0$

$$x(t_f) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t_f-\tau)} F F^T e^{A^T(t_f-t)} \omega_c^{-1} x_f d\tau = x_f.$$

Car

$$e^{B(t-t_f)} e^{B(t_f-\tau)} = I_n.$$

Exemple 3.3.3 *Soit le système 3.0.1 avec :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$e^{A(t_f-\tau)} = \begin{pmatrix} e^{(t_f-\tau)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{A^T(t_f-\tau)} = \begin{pmatrix} e^{(t_f-\tau)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Donc

$$\begin{aligned} e^{A(t_f-\tau)} F F^T e^{A^T(t_f-\tau)} &= \begin{pmatrix} e^{(t_f-\tau)} & e^{(t_f-\tau)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(t_f-\tau)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{(t_f-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(t_f-\tau)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{2(t_f-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En prennant $t_0 = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \omega_c(0, t_f) &= \begin{pmatrix} \int_0^{t_f} 2e^{2(t_f-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} -e^{-2\tau}\left(1 - e^{2t_f}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\omega_c(0, t_f)$ n'est pas monomiale, par suite le systéme n'est pas contrôlable.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté les conditions nécessaires et suffissantes pour la positivité des systèmes dynamiques linéaires positifs de Lyapunov. Aussi, nous avons étudié la contrôlabilité de cette classe de systèmes en se basant sur deux critères importants : critère de Kalman et le grammien de contrôlabilité
Tout au long de ce travail, des exemples d'application ont été introduit pour mieux illustrer cette étude.

Bibliographie

[1] Graham. Alexander, Kronecker products and matrix calculus ; with applications, Ellis Horwood Ltd. England, 1981.

[2] P. J.Antsaklis, and, A.N.Michel, A linear systems primer, Birkhauser, 2007.

[3] B.V. Appa Rao, M.S.N. Murty, Controllability and observability of Lyapunov, 2006.

[4] D. Arzelier, Représentation et analyse des systèmes linéaires. Notes de cours.5.2.LAAS-CNRS. France, 2010.

[5] S. Barnett, Introduction to mathematical control theory, Clarenton Press, Oxford, 1975.

[6] D. Bouagada, Cours de théorie de contrôle, année $2019 - 2020$.

[7] D. Bouagada, Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs, Thèse de Doctorat d'état, 19 décembre 2007.

[8] B. Browson, The Kronecher product, UNF Thesis, 2006.

[9] L. Dai, Singular control System, Volume 118 of lecture Notes in control and Information Sciences, Springer-verlag, New York, 1989.

[10] T. Kaczorek, Przemyslaw Przyborowski, Positive Continuous-Time Linear Lyapunov Systems, The International Conference on "Computer as a Tool" Warsaw, September $9 - 12$. 2007.

[11] R. E Kalman and E. Evangelisti : Controlability and Observability. 2011.

[12] Jean-Michel Coron, Controllability and nonlinearity. In CANUM 2006 Congrès National d'Analyse Numérique, volume 22 de ESAIM Proc, pages 2139. EDP Sci, Les Ulis, 2008.

[13] MSN. Murty, B.V. App Rao and G. Suresh Kumar, Contrôlability, Observability, and realizability of matrix Lyapunov systems, Bull Koream Math soc.43/pp$149 - 159$, 2006.

[14] Jean. Paul ING, Contrôlabilité, stabilité, observabilité, le cas des systèmes linéaires. Paris, 2014.

[15] D. Xu, X. Yang, Controllability of Fractional Descriptor Linear System, Advances in Theoretical and AppliMathematics, Volume 11, Number 4(2016), pp. $373 - 382$.