UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
Filière : Mathématiques

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option :
Modélisation, Contrôle et Optimisation

Thème :
Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire au sens de φ-Hilfer

Présenté par :

HAMADACHE Fatima

Soutenu juin 2023 devant les membres du jury :

TABHARIT	**Louiza**	**Présidente**	M C A	**U. de Mostaganem**
BOUANANI	**Oussama**	**Examinateur**	M C B	**U. de Mostaganem**
KAID	**Mohammed**	**Encadreur**	M C A	**U. de Mostaganem**
FATOUCHE	**Houari**	**Co-Encadreur**	M C A	**U. de Mostaganem**

Année Universutaire 2022-2023

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail en signe de respect, reconnaissance et de remerciement :
A mes chers **parents** qui ont été toujours avec moi .

A mes chers frères : **M**ohammed, **k**halifa, **A**issa et **R**achid que je les aime beaucoup.

A mes chères copines **H**asna, **S**aïda, **W**assila pour tous les moments qu'on a passé ensemble.

A mes trés chères amies **Wiam**, **Kehla, Fatima, Sarra, Khadidja, Samira,** et tous mes camarades de la promo.

A Madame **BOUBEKEUR Marwa** qui m'a apporté leur soutien moral.

A toute ma famille, qui porte le nom **Hamadache**.

A tous ceux qui ont participé à l'élaboration de ce modeste travail et tous ceux qui nous sont chers.

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie le bon **Dieu**, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

Je ne saurai jamais assez remercier la lumière de ma vie, **mes parents**, qui par leurs prières et leurs encouragements, j'ai pu surmonter tous les obstacles.

Je tiens à remercier mon encadreur **Monsieur KAID Mohammed** pour sa disponibilité et la confiance qu'il m'a accordée. Merci pour sa bonne volonté, sa patience et ses précieux conseils ainsi que pour la pertinence de ses remarques.

Je tiens à remercier **Monsieur FATOUCHE Houari** pour son aide pratique et son soutien moral et ses encouragements.

Je tiens aussi à remercier **Madame TABHARIT Louiza**, Maitre de conférence à l'Universitè Abd El Hamid Ben Badis pour avoir accepter de présider le jury, ses critiques et suggestions me seront utiles.

Je n'oublie pas de remercier également **Monsieur BOUANANI Oussama**, Maitre de conférence à l'Université Abdelhamid Ben Badis Mostaganem a accepté d'examiner mon travail, je lui dit merci beaucoup.

Je tiens à saisir cette occasion pour remercier l'ensemble des enseignants de **l'Université de Mostaganem**. Ils m'ont fourni les outils nécessaires pour la réussite dans mes études universitaires.

Afin de n'oublier personne, mes vifs remerciements s'adressent à tous ceux qui m'ont aidée à la réalisation de ce modeste mémoire.

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires EDFS sont très importantes dans la résolution des problèmes dans différents domaines scientifiques comme la physique, la chimie,...etc.
Nous avons présenté quelques résultats qui consistent à étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème d'équation différentielle fractionnaire. Ce résultat est basé sur le théorème de contraction de Banach.

Mots clés : Dérivée au sens φ–Hilfer ; Point fixe ; Existence et unicité ; Principe de contraction de Banach.

Abstract

Fractional differential equations are very important in solving problems in different scientific elds such as physics, chemistry, etc.
We presented some results which consist in studying the existence and uniqueness of the solution of a fractional differential equation problem. This result is based on Banach's contraction theorem.

Keywords : φ–Hilfer fractional derivative ; Existence and uiniqueness ; Fixed point theorem of Banach.

Table des matières

Notation

$\alpha_1, \overline{\alpha_1}$	:	Deux nombres réels entre 1 et 2.
$\beta_1, \overline{\beta_1}$	:	Deux nombres réels entre 0 et 1.
$[a, b]$	:	Intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'éxtrèmités a et b.
$[0, \infty)$	:	Intervalle semi ouvert de $\mathbb{R}$ d'éxtrèmités 0 et ∞.
(a, b)	:	Intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'éxtrèmités a et b.
$\mathbb{N}$	:	Ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	:	Ensemble des nombres complexes.
$C^n([a, b], \mathbb{R})$	:	$\{f : [a, b] \to \mathbb{R}\,;\ f\ n$–fois dérivables et continue$\}$.
${}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_1, \beta_1; \varphi}$	:	la dérivées fractionnaire φ-Hilfer d'ordres α_1.
${}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1}, \overline{\beta_1}, \varphi}$	:	la dérivées fractionnaire φ-Hilfer d'ordres $\overline{\alpha_1}$.
${}^{C}D_{0^+}^{\overline{\alpha_1}; \varphi}$	:	la dérivée fractionnaire au sens de φ-Caputo d'ordre $\overline{\alpha_1}$.
$\Gamma(.)$	:	Fonction Gamma d'Euler.
$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha; \varphi}$	:	L'intégrale fractionnaire φ-Riemann-Liouville d'ordre α.

Introduction

Depuis le début du calcul fractionnaire en 1695, il existe de nombreuses définitions des intégrales et des dérivées fractionnaires et au fil du temps de nouvelles dérivées et intégrales fractionnaires sont apparus. Récemment, Almeida [1] utilisait l'idée de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo par rapport à une notre fonction. Dans cette perspective, nous utilisons l'idée de dérivée fractionnaire de Hilfer, et proposer un opérateur différentiel fractionnaire d'une fonction par rapport à une autre fonction, le dérivé dit de $\varphi-$Hilfer.

La théorie des équations différentielles fractionnaires est l'un des plus importants champs d'applications de la théorie du calcul fractionnaire, en effet de nombreux phénomènes se modélisent par des équations différentielles fractionnaires (voir, [2], [3]) et l'étude de ces dernières permet certainement une meilleure interprétation des phénomènes physiques.
Dans l'article [4], les auteurs (H. Beddani, M et all) ont étudié l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} {}^{H_i}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_1,\beta_1;\varphi}\psi_p\left({}^{H_i}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi}u\right)(t) = G(t,u(t)), \quad t\in[a,b]\,, \\ u(a)=0, u(b)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i u\left(\zeta_i\right), \\ \psi_p\left({}^{H_i}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi}u\right)(a)=0, \\ \psi_p\left({}^{H_i}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi}u(b)\right) = \mathcal{I}_{a^+}^{\rho;\varphi}u\left(\zeta\right), \;\; a<\zeta,\zeta_i<b, \end{cases}$$

où ${}^{H_i}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_1,\beta;\varphi}$ et ${}^{H_i}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta;\varphi}$ sont des dérivées fractionnaires de type $\varphi-$Hilfer. Dans notre travail, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_1,\beta_1;\varphi}\psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(t) = g(t,v(t)), \quad t\in[0,b]\,, \\ \psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(0)=0, \quad v(0)=0, \\ \psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(b) = \sum\limits_{i=1}^{n}v(t_i), \qquad 0<t_1<...<t_n<b, \\ {}^{C}D_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}v(b) = \sum\limits_{j=1}^{k}{}^{C}D_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}v\left(\lambda_j\right), \quad 0<\lambda_j<b, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

où ${}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_1,\beta_1;\varphi}$ et ${}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1},\varphi}$ sont les dérivées fractionnaire φ-Hilfer d'ordres α_1, $\overline{\alpha_1}$ et ${}^{C}D_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}$ la dérivée fractionnaire au sens de φ-Caputo d'ordre $\overline{\alpha_1}$.

Ce mémoire se décompose en quatre chapitres et s'achève par un conclusion générale.
Chapitre 1 : Le premier chapitre contient les principales définitions et notations nécessaires. On rappellera les définitions et les propriétés essentielles correspondantes à la notion de l'intégration et la dérivation fractionnaire de type φ-Hilfer et de type φ-Caputo.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, on trouve la solution de problème 0.0.1.
Chapitre 3 : Ce chapitre est consacré à l'étude d'existence et d'unicité de la solution d'un probléme d'équation différentielle fractionnaire au sens φ-Hilfer qui basé sur le théoréme de point fixe, pour cela nous utilisons le principe de contractante de Banach.
Chapitre 4 : Dans ce dernier chapitre, on donne un exemple pour illustrer les résultats obtenus.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous avons présente quelques outils mathématiques de base essentiel sur la théorie de calcul fractionnaire telles que, la fonction spéciale comme fonction Gamma, l'intégrale fractionnaire au sens de $\varphi-$Riemann–Liouville, la dérivée fractionnaire au sens de $\varphi-$Riemann–Liouville, la dérivée fractionnaire de type $\varphi-$Hilfer, la dérivée fractionnaire de type $\varphi-$caputo. On termine le chapitre par une section réservée les éléments de théorie du point fixe.

1.1 Outils mathématiques de base

Pour tout $s, t \in [0, \infty)$ et $t \geq s$, notons

$$\varphi_\alpha(t,s) = (\varphi(t) - \varphi(s))^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

tel que $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante sur intérvalle $[a,b]$ et $\varphi' \neq 0$.

avec

$$(\varphi(b) - \varphi(0)) = M.$$

1.1.1 Fonctions spéciales pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous présentons la fonctions Gamma, ces fonctions jouent un rôle important dans la thèorie du calcul fractionnaire.

La fonction Gamma

Définition 1.1.1 *[15] Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$. La fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma\left(z\right)=\int_{0}^{\infty}\exp\left(-t\right)t^{z-1}dt,$$

avec $\Gamma\left(1\right)=1$, $\Gamma\left(0^{+}\right)=+\infty$, Γ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0<z<1$.
une propriété importante de la fonction Gamma Γ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z), \tag{1.1.1}$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties :

$$\Gamma(z+1)=\int_{0}^{\infty}\exp\left(-t\right)t^{z}dt=\left[-\exp\left(-t\right)t^{z}\right]_{0}^{\infty}+z\int_{0}^{\infty}\exp\left(-t\right)t^{z-1}dt=z\Gamma\left(z\right).$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1)=n!\ \ \forall n\ \epsilon\mathbb{N}$, en effet $\Gamma(1)=1$ et en utilisant la relation (1.1.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1,\\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2)=2.1!=2,\\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3)=3.2=6,\end{aligned}$$

par récurrence, nous obtenons : $\Gamma(n+1)=n(n-1)!=n!$.

Valeurs particulières

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{1}{2}) &= \sqrt{\pi},\\ \Gamma(\frac{3}{2}) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2},\\ \Gamma(\frac{5}{2}) &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4},\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\Gamma(n+\frac{1}{2}) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\\ &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)...\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi},\end{aligned}$$

mais aussi négatifs, par exemple :

$$\Gamma(-\frac{1}{2})=-2\sqrt{\pi}.$$

1.1.2 Intégrale fractionnaire Riemann–Liouville

Définition 1.1.2 *([12])Soit (a,b) tels que $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ un intervalle fini ou infini de demi-axe $(0,\infty)$ et $\alpha > 0$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville s'appuie sur la formule de Cauchy pour le calcul de l'intégrale répétée n fois qui est donnée par :*

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}u(s)ds.$$

1.1.3 Intégrale fractionnaire $\varphi-$Riemann–Liouville

Définition 1.1.3 *([12])Soit (a,b) tels que $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ un intervalle fini ou infini de demi-axe $(0,\infty)$ et $\alpha > 0$. De plus, soit φ une fonction croissante positive sur $[a,b]$, qui a une dérivée continue φ' sur $[a,b]$. L'intégrale fractionnaire $\varphi-$Riemann–Liouville d'ordre α d'une fonction u par rapport à une autre fonction φ sur $[a,b]$ est défini par :*

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha;\varphi}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \varphi'(s)\varphi_{\alpha-1}(t,s)u(s)ds, \tag{1.1.2}$$

où $\Gamma(.)$ est une fonction Gamma.

1.1.4 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann–Liouville

Définition 1.1.4 *([12]) Soient $n-1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $[a,b]$ est un intervalle tel que $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, on définit la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann–Liouville d'une fonction $u : [a;b] \to \mathbb{R}$ par :*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}u(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}u(t)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}u(s)ds, n-1<\alpha<n.\end{aligned}$$

1.1.5 Dérivée fractionnaire au sens de $\varphi-$Riemann–Liouville

Définition 1.1.5 *[12] Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $\varphi, u \in C^n([a,b],\mathbb{R})$ deux fonctions telle que φ est croissante avec $\varphi' \neq 0$. Pour tout $t \in [a,b]$, la dérivée fractionnaire $\varphi-$Riemann–Liouville d'ordre α d'une fonction u est définie par :*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha;\varphi}u(t) &= \left(\frac{1}{\varphi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha;\varphi}u(t)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{1}{\varphi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n\int_a^t \varphi'(s)\varphi_{n-\alpha-1}(t,s)u(s)ds,\end{aligned}$$

où $n = [\alpha]+1$, $[\alpha]$ représente la partie entière du nombre réel α.

1.1.6 Dérivée fractionnaire de type Hilfer

Définition 1.1.6 *([9], [11]) Soient $n-1<\alpha<n$ avec $n\in\mathbb{N}$ et $[a,b]$ est un intervalle tel que $(-\infty\leq a<b\leq+\infty)$, on définit la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha>0$ au sens de Hilfer d'une fonction $u:[a;b]\to\mathbb{R}$ par :*

$$^{Hi}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta}u(t)=\mathcal{I}_{a^+}^{\beta(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\mathcal{I}_{a^+}^{(1-\beta)(n-\alpha)}u(t)=\mathcal{I}_{a^+}^{\gamma-\alpha}\mathcal{D}_{a^+}^{\gamma}u(t),$$

1.1.7 Dérivée fractionnaire de type $\varphi-$Hilfer

Définition 1.1.7 *([9], [11]) Soient $n-1<\alpha<n$ avec $n\in\mathbb{N}$ et $[a,b]$ est un intervalle tel que $(-\infty\leq a<b\leq+\infty)$ et $\varphi,u\in C^n([a,b],\mathbb{R})$ deux fonctions telle que φ est croissante avec $\varphi'\neq0$. Pour tout $t\in[a,b]$, la dérivée fractionnaire $\varphi-$Hilfer d'une fonction u d'ordre α et $0\leq\beta\leq1$ est définie par :*

$$^{Hi}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\varphi}u(t)=\mathcal{I}_{a^+}^{\beta(n-\alpha);\varphi}\left(\frac{1}{\varphi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n\mathcal{I}_{a^+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\varphi}u(t)=\mathcal{I}_{a^+}^{\gamma-\alpha;\varphi}\mathcal{D}_{a^+}^{\gamma;\varphi}u(t),$$

où $n=[\alpha]+1$ et $\gamma-\alpha=\beta(n-\alpha)$.

Exemple 1.1.1 *On pose :*

$$\alpha=\frac{1}{2},\quad \beta=0,\ n=1 \text{ donc } \gamma=\frac{1}{2},$$

il vient :

$$^{Hi}\mathcal{D}_{a^+}^{1/2;\varphi}u(t)=\mathcal{D}_{a^+}^{3/4;\varphi}u(t).$$

On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha;\varphi}u(t) &= \left(\frac{1}{\varphi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha;\varphi}u(t)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{1}{\varphi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n\int_a^t\varphi'(s)\varphi_{n-\alpha-1}(t,s)u(s)ds.\end{aligned}$$

Pour $\varphi=t$, $u=c$, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a^+}^{3/4;\varphi}u(t) &= \left(\frac{1}{1}\frac{d}{dt}\right)^1\mathcal{I}_{a^+}^{3/4;t}u(t)\\ &= \frac{1}{\Gamma(1/4)}\left(\frac{1}{1}\frac{d}{dt}\right)^1\int_a^t 1\,[t-s]^{-1/2}\,u(s)ds\\ &= \frac{c}{\Gamma(1/4)}t^{-1/2}.\end{aligned}$$

Donc,

$$^{Hi}\mathcal{D}_{a^+}^{1/2;\varphi}u(t)=\frac{c}{\Gamma(1/4)}t^{-1/2}.$$

Lemme 1.1.1 *Soit* $u \in C^n([a,b],\mathbb{R})$, $n-1<\alpha<n$, $0\leq\beta\leq 1$ *et* $\gamma=\alpha+\beta(n-\alpha)$, *alors*

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha,\varphi}({}^{Hi}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\varphi}u)(t)=u(t)-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\varphi_{\gamma-k}(t,a)}{\Gamma(\gamma-k+1)}\nabla_{\varphi}^{[n-k]}\mathcal{I}_{a^+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\varphi}u(a),\qquad t\in[a,b],$$

où

$$\nabla_{\varphi}^{[n]}u(t):=\left(\frac{1}{\varphi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n u(t).$$

Exemple 1.1.2 *Pour* $n=2$, *il vient :*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha,\varphi}({}^{Hi}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\varphi}u)(t) &= u(t)-\sum_{k=1}^{k=2}\frac{\varphi_{\gamma-k}(t,a)}{\Gamma(\gamma-k+1)}\nabla_{\varphi}^{[n-k]}\mathcal{I}_{a^+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\varphi}u(a)\\ &= u(t)-\left[\frac{\varphi_{\gamma-1}(t,a)}{\Gamma(\gamma)}\nabla_{\varphi}\mathcal{I}_{a^+}^{(1-\beta)(2-\alpha);\varphi}u(a)+\frac{\varphi_{\gamma-2}(t,a)}{\Gamma(\gamma-1)}\mathcal{I}_{a^+}^{(1-\beta)(2-\alpha);\varphi}u(a)\right]\\ &= u(t)+\frac{\varphi_{\gamma-1}(t,a)}{\Gamma(\gamma)}m_0+\frac{\varphi_{\gamma-2}(t,a)}{\Gamma(\gamma-1)}m_1,\end{aligned}$$

où $m_0,m_1\in\mathbb{R}$, *ou bien :*

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha,\varphi}({}^{Hi}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\varphi}u)(t)=u(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}m_0+\frac{(\varphi(t)-\varphi(a))^{\gamma-2}}{\Gamma(\gamma-1)}m_1,$$

tel que $\gamma=\alpha+\beta(2-\alpha)$, *c'est-à-dire* $2-\gamma=(1-\beta)(2-\alpha)$.

Proposition 1.1.1 *Soient* $(n-1<\alpha<n<\sigma)$, $n\in\mathbb{N}$ *et* $0\leq\beta\leq 1$. *Pour tout* $t>a$, *on a :*

$$\begin{aligned}{}^{Hi}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\varphi}\varphi_{\sigma-1}(t,a)(t) &= \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\sigma-\alpha)}\varphi_{\sigma-\alpha-1}(t,a)\\ &= \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\sigma-\alpha)}(\varphi(t)-\varphi(a))^{\sigma-\alpha-1}.\end{aligned}$$

1.1.8 Opérateur $p-$Laplacien

Définition 1.1.8 *[14]Soient* $p\in]1,+\infty[$ *et* $s\in]0,1[$, *alors on définit le p-Laplacien factionnaire par :*

$$(-\Delta)_p^s u(x)=2P.V.\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}dy,\ \forall x\in\mathbb{R}^N$$

avec

$$P.V.\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}dy=\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(x,\epsilon)}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}dy$$

Lemme 1.1.2 *Soit ψ_p un opérateur $p-$Laplacien. Alors on a :*

1. *Si $|\delta_1|, |\delta_2| \geq \rho > 0$, $1 < p \leq 2$, et $\delta_1\delta_2 > 0$, nous trouvons :*
$$\left|\psi_p(\delta_1) - \psi_p(\delta_2)\right| \leq (p-1)\,\rho^{p-2}\,|\delta_1 - \delta_2|\,.$$
2. *Si $p > 2$, $0 < |\delta_1|, |\delta_2| \leq \rho_*$. Il vient :*
$$\left|\psi_p(\delta_1) - \psi_p(\delta_2)\right| \leq (p-1)\,\rho_*^{p-2}\,|\delta_1 - \delta_2|\,.$$

1.1.9 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.1.9 *([12], [1]) Soit $f \in C^n([a,b],\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}^*$, on définit la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha \geqslant 0$ de la fonction f comme suit :*

$${}^{C}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = I^{n-\alpha}_{a^+}\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t).$$

1.1.10 Dérivée fractionnaire au sens de φ–Caputo

Définition 1.1.10 *([12], [1])Soit $f \in C^n([a,b],\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}^*$, on définit la dérivée fractionnaire au sens de φ–Caputo d'ordre $\alpha \geqslant 0$ de la fonction f comme suit :*

$${}^{C}D^{\alpha,\varphi}_{a^+}f(t) = I^{n-\alpha,\varphi}_{a^+}\left(\frac{1}{\varphi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n f(t).$$

Remarque 1.1.1 *La dérivée ${}^{Hi}\mathcal{D}^{\alpha,\beta;\varphi}_{a^+}$ est considérée comme une interpolation entre la dérivée de $\varphi-$**Riemann-Liouville** et la dérivée de $\varphi-$**Caputo** puisque :*

$${}^{Hi}\mathcal{D}^{\alpha,\beta;\varphi}_{a^+}f = \begin{cases} \mathcal{D}^{\alpha;\varphi}_{a^+}f & \beta = 0, \\ {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha;\varphi}_{a^+}f & \beta = 1. \end{cases}$$

Proposition 1.1.2

1. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ avec $\beta > n$, on a :
$${}^{C}D^{\alpha,\varphi}_{a^+}(\varphi(t)-\varphi(a))^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(\varphi(t)-\varphi(a))^{\beta-\alpha-1}.$$
2. $${}^{C}D^{\alpha,\varphi}_{a^+}\,\mathcal{I}^{\alpha;\varphi}_{a^+}f(t) = f(t).$$

Proposition 1.1.3 *[6]Soit les nombres a_i, $i = 1, ..., k$ positives, on a :*

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^q \leq k^{q-1}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^q\right), \; q \geq 1.$$

1.2 Éléments de Théorie du Point Fixe

Les théorèmes de point fixe consistent à transformer un problème donné en un problème du type $x = \varphi(x)$, ainsi ils fournissent des conditions généralement suffisantes pour les quelles l'équation $x = \varphi(x)$ admet une solution.
Ce théorème repose essentiellement sur les définitions suivantes (Voir :[12], [16], [7], [13], [15]).

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1 *([12])(**Espace vectoriel normé**) Soit $\|.\|_X$ une norme associée à un espace vectoriel X, le couple $(X, \|.\|_X)$ est appelé un espace vectoriel normé.*

Définition 1.2.2 *[13])(**Espace Complet**) On dit que X est complet pour la norme $\|.\|_X$ si tout suite de cauchy dans X est convergente.*

Définition 1.2.3 *([16])(**Espace de Banach**) Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.*

Définition 1.2.4 *([7])(**Application contractante**) Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace vectoriel normé. Une application Φ de X dans X est dite contractante s'il existe un nombre positive $K \in [0, 1[$, tel que pour tout x, y, on a :*

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_X \leq K \|x - y\|_X .$$

Définition 1.2.5 *([15])(**Application lipschitzienne**) Soient G une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : G \to \mathbb{R}$ une application et K un nombre réel positif. On dit que f est K-lipschitzienne par rapport à y si*

$$\forall (t, y) \in G, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

Où K est appelée la constante de Lipschitz.
Si $0 \leq K < 1$, on dite que f est contractante.

1.2.2 Théorème de Point Fixe

Nous avons présenté le théorème de principe de contraction de Banach qui assure l'unicité et l'existence de la solution.

Théorème 1.2.1 *([7])(**Principe de contractante de Banach**)Soient X espace de Banach et $\Phi : X \to X$. Si Φ est une application contractante, alors Φ admet un point fixe unique.*

Chapitre 2

Problème aux limites avec la dérivée fractionnaire au sens de φ-Hilfer

Dans ce chapitre, nous étudions le problème d'équation différentielle fractionnaire au sens $\varphi-$Hilfer, et nous trouvons la représentation intégrale de la solution.

2.1 Position de problème

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_1,\beta_1;\varphi}\psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(t) = g(t,v(t)), \quad t\in[0,b]\,, \\ \psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(0)=0, \quad v(0)=0, \\ \psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(b)=\sum\limits_{i=1}^{n}v(t_i), \qquad 0<t_1<...<t_n<b, \\ {}^{C}D_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}v(b)=\sum\limits_{j=1}^{k}\left({}^{C}D_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}v\right)(\lambda_j)\,, \quad 0<\lambda_j<b, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où ${}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_1,\beta_1;\varphi}$ et ${}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1},\varphi}$ sont les dérivées fractionnaire φ-Hilfer de ordres α_1, $\overline{\alpha_1}$ tels que $1<\alpha_1$, $\overline{\alpha_1}<2$ et β_1, $\overline{\beta_1}$ deux paramètres tel que $0\leq\beta_1$, $\overline{\beta_1}\leq 1$, et ${}^{C}D_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}$ la dérivée fractionnaire au sens de φ-Caputo d'ordre $\overline{\alpha_1}$ et

$$\psi_p(z)=|z|^{p-2}z, \tag{2.1.2}$$

désigne l'opérateur $p-$Laplacien et vérifie :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \qquad \left(\psi_p\right)^{-1}=\psi_q. \tag{2.1.3}$$

Aussi $\varphi:[0,T]\to\mathbb{R}$ est une fonction croissante telle que $\varphi'\neq 0$ et $g:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction donnée.

2.2 Solution intégrale

Dans cette section, nous présentons quelques lemmes qui seront utilisés dans le chapitre suivant.

Lemme 2.2.1 *On suppose que* $\Pi \neq 0$, *tel que*

$$\Pi = (\varphi(b) - \varphi(0))^{\overline{\gamma_1} - \overline{\alpha_1} - 1} - \sum_{j=1}^{k} (\varphi(\lambda_j) - \varphi(0))^{\overline{\gamma_1} - \overline{\alpha_1} - 1},$$

et $h : [0, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, alors la solution du problème aux limites fractionnaires suivant :*

$$\begin{cases} {}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_1,\beta_1;\varphi}\psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(t) = h(t), \quad t \in [0,b], \\ \psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(0) = 0, \quad v(0) = 0, \\ \psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(b) = \sum\limits_{i=1}^{n} v(t_i), \qquad 0 < t_1 < \ldots < t_n < b, \\ {}^{C}D_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}v(b) = \sum\limits_{j=1}^{k} {}^{C}D_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}v(\lambda_j), \quad 0 < \lambda_j < b, \end{cases}$$

avec est donnée par l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{\Gamma(\overline{\alpha_1})}\int_0^t \varphi'(s)\varphi_{\overline{\alpha_1}-1}(t,s)X(s,0)\,ds \\ &\quad + \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1}\Gamma(\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1})}{\Pi\ \Gamma(\overline{\gamma_1})} \times \sum_{j=1}^{k} X(\lambda_j, 0) \\ &\quad - \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1}\Gamma(\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1})}{\Pi\ \Gamma(\overline{\gamma_1})} X(b,0), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} X(s,0) &= \psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(s) + \frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n} v(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}, \\ \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(s) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)g(x,v(x))dx, \\ \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^b \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(b,x)g(x,v(x))dx. \end{aligned}$$

Preuve. Soit
$$ {}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_1,\beta_1;\varphi}\psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(t)=h(t), $$
d'où
$$ \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}\left[{}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_1,\beta_1;\varphi}\psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(t)\right]=\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(t). $$
D'après le lemme 1.1.1, nous obtenons :
$$ \begin{aligned} \psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(t) &= \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(t)+\frac{\varphi_{\gamma_1-2}(t,0)}{\Gamma(\gamma_1-1)}c_0+\frac{\varphi_{\gamma_1-1}(t,0)}{\Gamma(\gamma_1)}c_1, \\ &= \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-2}}{\Gamma(\gamma_1-1)}c_0+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{\Gamma(\gamma_1)}c_1, \end{aligned} \tag{2.2.1} $$
tel que
$$ \gamma_1=\alpha_1+\beta_1(2-\alpha_1) \quad \text{ou} \quad 2-\gamma_1=(1-\beta_1)(2-\alpha_1) \;\; \text{et} \;\; c_0,\, c_1\in\mathbb{R}, $$
car $n=[\alpha_1]+1=2$. En utilisant la condition $\psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(0)=0$, on a :
$$ \psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(0)=\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(0)+\left[\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-2}}{\Gamma(\gamma_1-1)}c_0+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{\Gamma(\gamma_1)}c_1\right]_{t\to 0}=0. $$
Puisque on a :
$$ \left\{\begin{array}{l} 0\le\beta_1\le 1, \\ 1<\alpha_1<2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (1-\beta_1)(2-\alpha_1)\ge 0, \\ \gamma_1-2\le 0, \\ \gamma_1-1=(\alpha_1-1)+\beta_1(2-\alpha_1)\ge 0, \end{array}\right. $$
ce qui implique :
$$ \left\{\begin{array}{l} (\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-2}\to\infty, \quad t\to 0, \\ (\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}\to 0, \quad t\to 0. \end{array}\right. $$
Donc
$$ c_0=-\left[\frac{\Gamma(\gamma_1-1)}{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-2}}.\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{\Gamma(\gamma_1)}c_1\right]_{t\to 0}=0. $$
Alors, vue de (2.2.1) on a :
$$ \psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(t)=\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{\Gamma(\gamma_1)}c_1. \tag{2.2.2} $$
Nous utilisons la condition
$$ \psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(b)=\sum_{i=1}^{n}v(t_i), $$
nous trouvons :
$$ \psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(b)=\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)+\frac{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{\Gamma(\gamma_1)}c_1, $$

ce qui implique :

$$c_1 = \frac{\Gamma(\gamma_1)}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n} v(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right],$$

de (2.2.2), il vient :

$$\psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(t) = \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(t) + \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n} v(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right].$$

D'après (2.1.3), on a :

$$\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\overline{\alpha_1},\overline{\beta_1};\varphi}v\right)(t) = \psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(t) + \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n} v(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\},$$

en appliquant l'opérateur $\mathcal{I}_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}$ sur cette formule et utilisant encore le lemme 1.1.1, alors

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{I}_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}\left[\psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(t) + \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n} v(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}\right] \\ &\quad + \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-2}}{\Gamma(\overline{\gamma_1}-1)}c_2 + \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1}}{\Gamma(\overline{\gamma_1})}c_3, \end{aligned}$$

avec

$$\overline{\gamma_1} = \overline{\alpha_1} + \overline{\beta_1}(2-\overline{\alpha_1}) \quad \text{ou} \quad 2-\overline{\gamma_1} = \left(1-\overline{\beta_1}\right)(2-\overline{\alpha_1}) \quad \text{et} \quad c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}.$$

En utilisant la condition $v(0) = 0$ et les mêmes téchniques nous obtenons : $c_2 = 0$. Alors

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{I}_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}\left[\psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(t) + \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n} v(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}\right] \\ &\quad + \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1}}{\Gamma(\overline{\gamma_1})}c_3. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Maintenant, nous utilisons la condition ${}^{C}D_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}v(b) = \sum\limits_{j=1}^{k} {}^{C}D_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}v(\lambda_j)$. On a :

$$\begin{aligned} v(\lambda_j) &= \mathcal{I}_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}\left[\psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(\lambda_j) + \frac{(\varphi(\lambda_j)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n} v(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}\right] \\ &\quad + \frac{(\varphi(\lambda_j)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1}}{\Gamma(\overline{\gamma_1})}c_3, \end{aligned}$$

et d'après la proposition 1.1.2, il vient :

$$\begin{aligned} {}^{C}D_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}v(\lambda_j) &= {}^{C}D_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}\mathcal{I}_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}\left[\psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(\lambda_j) + \frac{(\varphi(\lambda_j)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n} v(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}\right] \\ &\quad + {}^{C}D_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}\left(\frac{(\varphi(\lambda_j)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1}}{\Gamma(\overline{\gamma_1})}c_3\right), \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} {}^{C}D_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi} v(\lambda_j) &= \sum_{j=1}^{k}\left[\psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(\lambda_j)+\frac{(\varphi(\lambda_j)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}v(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}\right]\\&\quad+c_3\sum_{j=1}^{k} {}^{C}D_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}\left(\frac{(\varphi(\lambda_j)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1}}{\Gamma(\overline{\gamma_1})}\right),\end{aligned}$$

vue la proposition 1.1.2, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} {}^{C}D_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi} v(\lambda_j) &= \sum_{j=1}^{k}\left[\psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(\lambda_j)+\frac{(\varphi(\lambda_j)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}v(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}\right]\\&\quad+\frac{1}{\Gamma(\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1})}c_3\sum_{j=1}^{k}\left(\varphi(\lambda_j)-\varphi(0)\right)^{\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1}-1}.\end{aligned}\tag{2.2.4}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}v(b) &= \mathcal{I}_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}\left[\psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}v(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}\right]_{t=b}\\&\quad+\frac{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1}}{\Gamma(\overline{\gamma_1})}c_3.\end{aligned}$$

Encore une fois, la proposition 1.1.2 donne :

$$\begin{aligned}{}^{C}D_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi} v(b) &= \psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}v(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}_{t=b}\\&\quad+\frac{1}{\Gamma(\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1})}c_3\left(\varphi(b)-\varphi(0)\right)^{\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1}-1}.\end{aligned}\tag{2.2.5}$$

De (2.2.4) et (2.2.5), nous trouvons :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1})}\left((\varphi(b)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1}-1}-\sum_{j=1}^{k}(\varphi(\lambda_j)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1}-1}\right)c_3\\&= \sum_{j=1}^{k}\left[\psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(\lambda_j)+\frac{(\varphi(\lambda_j)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}v(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}\right]\\&\quad-\psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}v(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}_{t=b},\end{aligned}$$

puisque $\Pi \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
c_3 &= \frac{\Gamma(\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1})}{\Pi}\sum_{j=1}^{k}\left[\psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(\lambda_j)+\frac{(\varphi(\lambda_j)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}v(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}\right] \\
&\quad -\frac{\Gamma(\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1})}{\Pi}\psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}v(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}_{t=b},
\end{aligned}$$

en remplacant c_3 dans (2.2.3), il vient :

$$\begin{aligned}
v(t) &= \mathcal{I}_{0^+}^{\overline{\alpha_1};\varphi}\left[\psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}v(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}\right] \\
&\quad +\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1}\Gamma(\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1})}{\Pi\ \Gamma(\overline{\gamma_1})} \\
&\quad \times\sum_{j=1}^{k}\left[\psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(\lambda_j)+\frac{(\varphi(\lambda_j)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}v(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}\right] \\
&\quad -\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1}\Gamma(\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1})}{\Pi\ \Gamma(\overline{\gamma_1})}\psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}v(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}_{t=b}.
\end{aligned}$$

Vue la formule (1.1.2), on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha;\varphi}u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \varphi'(s)\varphi_{\alpha-1}(t,s)u(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \varphi'(s)(\varphi(t)-\varphi(s))^{\alpha-1}u(s)ds.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&v(t) \\
= &\frac{1}{\Gamma(\overline{\alpha_1})}\int_0^t \varphi'(s)\varphi_{\overline{\alpha_1}-1}(t,s)\left[\psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(s)+\frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}v(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}\right]ds \\
&+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1}\Gamma(\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1})}{\Pi\ \Gamma(\overline{\gamma_1})} \\
&\times\sum_{j=1}^{k}\left[\psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(\lambda_j)+\frac{(\varphi(\lambda_j)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}v(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}\right] \\
&-\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1}\Gamma(\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1})}{\Pi\ \Gamma(\overline{\gamma_1})}\psi_q\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}v(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}h(b)\right]\right\}_{t=b}.
\end{aligned}$$

□

Chapitre 3

Existence et unicité d'une solution

Dans ce chapitre, nous étudions l'unicité de la solution en utilisant le théorème de point fixe de Banach et en se basant sur le principe de contraction de Banach (voir théorème 1.2.1).

3.1 Hypothèses

On suppose que :

– (H_1) : La fonction $g : [0, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

– (H_2) : Il existe deux fonctions positives $\pi \in C([0, b], \mathbb{R})$ et $\tau : [0, \infty[\to [0, \infty[$ telles que pour tout $t \in [0, b]$ on a :

$$\begin{cases} |g(t, v(t)| \leq \pi(t) |v(t)|, \\ \pi^* = \underset{t\in[0,b]}{Sup} |\pi(t)|, \end{cases}$$

et

$$\left|\sum_{i=1}^{n} v(t_i)\right| \leq \tau \|v\|_C,$$

$$\left|\sum_{j=1}^{k} X_v(\lambda_j, 0)\right| \leq K |X_v(b, 0)|.$$

– (H_3) : Il existe $\omega > 0$ et une fonction $\theta : [0, \infty[\to [0, \infty[$ telles que pour $t \in [0, b]$, on a :

$$|g(t, v) - g(t, u)| \leq \omega |v - u|,$$

et

$$\left|\sum_{i=1}^{n} v(t_i) - \sum_{i=1}^{n} u(t_i)\right| \leq \theta \|v - u\|_C.$$

– (H_4) : Il existe $k \geq 0$, tel que :

$$\sum_{j=1}^{k} \sup_{\lambda_j \in [0,b]} \left| \left(X_v - X_u \right) (\lambda_j, 0) \right| \leq k \left| \left(X_v - X_u \right) (b, 0) \right| .$$

$$\begin{aligned}
\Omega &= 3^{q-2} \left(\frac{2\pi^* M^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} 1 + \tau \right)^{q-1} . \\
\Lambda_1 &= \frac{(\varphi(b) - \varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1} \Gamma(\overline{\gamma_1} - \overline{\alpha_1})}{\Pi \ \Gamma(\overline{\gamma_1})} . \\
\Lambda_2 &= \left(\frac{M^{\overline{\alpha_1}}}{\Gamma(\overline{\alpha_1}+1)} + \Lambda_1 K + \Lambda_1 \right) \Omega . \\
\Lambda_3 &= (q-1)\, y^{q-2} \left[\frac{2\omega M^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \theta \right] .
\end{aligned}$$

3.2 Transformation le problème

1. L'espace de Banach :

$$C_{\varphi}^{v} = \left\{ v : [0,b] \to \mathbb{R}, v \in C\,[0,b] \right\} ,$$

muni de

$$\| \ v \ \|_{C_{\varphi}^{v}} = \| \ v \ \|_{C} = \sup_{t \in [0,b]} \mid v\,(t) \mid .$$

2. L'application : on considère pour tout $t \in [0,b]$ l'opérateur $T : C_{\varphi}^{v} \to C_{\varphi}^{v}$:

$$\begin{aligned}
Tv(t) &= \frac{1}{\Gamma(\overline{\alpha_1})} \int_0^t \varphi'(s) \varphi_{\overline{\alpha_1}-1}(t,s) X_v\,(s,0)\, ds \\
&\quad + \frac{(\varphi(t) - \varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1} \Gamma(\overline{\gamma_1} - \overline{\alpha_1})}{\Pi \ \Gamma(\overline{\gamma_1})} \times \sum_{j=1}^{k} X_v\,(\lambda_j, 0) \\
&\quad - \frac{(\varphi(t) - \varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1} \Gamma(\overline{\gamma_1} - \overline{\alpha_1})}{\Pi \ \Gamma(\overline{\gamma_1})} X_v\,(b,0) .
\end{aligned}$$

Où

$$X_v\,(s,0) = \psi_q \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s \varphi'(x) \varphi_{\alpha_1 - 1}(s,x) h(x) dx + \frac{(\varphi(s) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}}{(\varphi(b) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}} \left[\sum_{i=1}^{n} v(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} h(b) \right] \right\} ,$$

$$h(x) = g(x, v(x)).$$

On considère $Vr = \left\{ v \in C_{\varphi}^{v} : \|v\|_{C_{\varphi}^{v}} \leq r \right\}$ et $\Lambda_2 \leq r$, nous montrons que $TVr \subset Vr$ pour tout $v \in Vr$ (Voir 1.1.3)

$$
\begin{aligned}
|X_v(s,0)| &= \left| \psi_q \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x) g(x,v(x))dx \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}} \left[\sum_{i=1}^{n} v(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} h(b) \right] \right\} \right| \\
&\leq \sup_{t\in[0,b]} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x) g(x,v(x))dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}} \left[\sum_{i=1}^{n} v(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} h(b) \right] \right|^{q-1} \\
&\leq 3^{q-2} \sup_{t\in[0,b]} \left(\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x) g(x,v(x))dx \right)^{q-1} \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{i=1}^{n} v(t_i) \right)^{q-1} + \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^b \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(b,x) g(x,v(x))dx \right)^{q-1} \right) \\
&\leq 3^{q-2} \left[2 \left(\frac{\pi^* M^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} \|v\|_C \right)^{q-1} \right] + \left(\sum_{i=1}^{n} v(t_i) \right)^{q-1} \\
&\leq 3^{q-2} \left[\left(\frac{2\pi^* M^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} \right)^{q-1} (\|v\|_C)^{q-1} + (\tau \|v\|_C)^{q-1} \right] \\
&\leq 3^{q-2} \left[\left(\frac{2\pi^* M^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} \right)^{q-1} r^{q-1} + (\tau r)^{q-1} \right] \\
&\leq 3^{q-2} \left[\left(\frac{2\pi^* M^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} \right)^{q-1} + \tau^{q-1} \right] r^{q-1} \\
&\leq \Omega r^{q-1}.
\end{aligned}
$$

D'où,

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,b]} |Tv(t)| \\
\leq\ & \sup_{t\in[0,b]} \left| \frac{1}{\Gamma(\overline{\alpha_1})} \int_0^t \varphi'(s)\varphi_{\overline{\alpha_1}-1}(t,s) X_v\,(s,0)\,ds \right. \\
&+ \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1}\Gamma(\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1})}{\Pi\ \Gamma(\overline{\gamma_1})} \times \sum_{j=1}^{k} X_v\,(\lambda_j,0) \\
&\left. + \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1}\Gamma(\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1})}{\Pi\ \Gamma(\overline{\gamma_1})} X_v\,(b,0) \right| \\
\leq\ & \frac{M^{\overline{\alpha_1}}}{\Gamma(\overline{\alpha_1}+1)} |X_v(b,0)| + \Lambda_1 K\,|X_v(b,0)| + \Lambda_1\,|X_v(b,0)| \\
\leq\ & \left(\frac{M^{\overline{\alpha_1}}}{\Gamma(\overline{\alpha_1}+1)} + \Lambda_1 K + \Lambda_1 \right) \Omega r^{q-1} \\
\leq\ & \Lambda_2 r^{q-1} \\
\leq\ & r.
\end{aligned}$$

Donc l'opérateur T est bien définie.

3. Contractante : Soient $u, v \in C_{\varphi}^{v}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|Tv(t) - Tu(t)| \ =\ & \left| \frac{1}{\Gamma(\overline{\alpha_1})} \int_0^t \varphi'(s)\varphi_{\overline{\alpha_1}-1}(t,s)\,(X_v - X_u)\,(s,0)\,ds \right. \\
&+ \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1}\Gamma(\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1})}{\Pi\ \Gamma(\overline{\gamma_1})} \times \sum_{j=1}^{k} (X_v - X_u)\,(\lambda_j,0) \\
&\left. + \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\overline{\gamma_1}-1}\Gamma(\overline{\gamma_1}-\overline{\alpha_1})}{\Pi\ \Gamma(\overline{\gamma_1})} (X_v - X_u)\,(b,0) \right|,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
&X_v\,(s,0) = \psi_q \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x) g(x,v(x))dx \right. \\
&\left. + \frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}} \left[\sum_{i=1}^{n} v(t_i) - \tfrac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^b \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(b,x) g(x,v(x))dx \right] \right\}
\end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
|X_v(s,0)-X_u(s,0)| &= \Bigg|\psi_q\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)g(x,v(x))dx\right.\\
&\left.+\frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^n v(t_i)-\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^b \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(b,x)g(x,v(x))dx\right]\right\}\\
&-\psi_q\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)g(x,u(x))dx\right.\\
&\left.+\frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^n u(t_i)-\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^b \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(b,x)g(x,u(x))dx\right]\right\}\Bigg|.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 1.1.2, on a :

$$\begin{aligned}
|X_v(s,0)-X_u(s,0)| &\leq (q-1)\,y^{q-2}\\
&\Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)g(x,v(x))dx\\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)g(x,u(x))dx\\
&+\frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^n v(t_i)-\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^b \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(b,x)g(x,v(x))dx\right]\\
&-\frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(b)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^n u(t_i)-\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^b \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(b,x)g(x,u(x))dx\right]\Bigg|.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
|X_v(s,0) - X_u(s,0)| \leq\ & (q-1)\, y^{q-2} \\
& \left\{ \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s \varphi'(x) \varphi_{\alpha_1 - 1}(s,x) g(x, v(x)) dx \right. \right. \\
& \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s \varphi'(x) \varphi_{\alpha_1 - 1}(s,x) g(x, u(x)) dx \right| \\
& + \frac{(\varphi(s) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}}{(\varphi(b) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}} \left| \sum_{i=1}^{n} v(t_i) - \sum_{i=1}^{n} u(t_i) \right| \\
& + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^b \varphi'(x) \varphi_{\alpha_1 - 1}(b,x) g(x, v(x)) dx \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^b \varphi'(x) \varphi_{\alpha_1 - 1}(b,x) g(x, u(x)) dx \right| \right\}.
\end{aligned}$$

D'autre part, nous trouvons :

$$\sup_{s \in [0,b]} \left| \frac{(\varphi(s) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}}{(\varphi(b) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}} \right| = \frac{(\varphi(b) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}}{(\varphi(b) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}} = 1.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
& \sup_{s \in [0,b]} |X_v(s,0) - X_u(s,0)| \leq (q-1)\, y^{q-2} \\
& \times \sup_{s \in [0,b]} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s \varphi'(x) \varphi_{\alpha_1 - 1}(s,x) \left| g(x, v(x)) - g(x, u(x)) \right| dx \right. \\
& + \left| \sum_{i=1}^{n} v(t_i) - \sum_{i=1}^{n} u(t_i) \right| \\
& \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^b \varphi'(x) \varphi_{\alpha_1 - 1}(b,x) \left| g(x, v(x)) - g(x, u(x)) \right| dx \right],
\end{aligned}$$

ou bien :

$$\begin{aligned}&\sup_{s\in[0,b]}\left|X_v\left(s,0\right)-X_u\left(s,0\right)\right|\leq\left(q-1\right)y^{q-2}\\&\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^b\varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(b,x)\left|g(x,v(x))-g(x,u(x))\right|dx\right.\\&+\left|\sum_{i=1}^n v(t_i)-\sum_{i=1}^n u(t_i)\right|\\&\left.+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^b\varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(b,x)\left|g(x,v(x))-g(x,u(x))\right|dx\right],\end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}&\sup_{s\in[0,b]}\left|X_v\left(s,0\right)-X_u\left(s,0\right)\right|\\\leq\;&\left(q-1\right)y^{q-2}\\&\times\left[\frac{2}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^b\varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(b,x)\left|g(x,v(x)-g(x,u(x)|\right)dx\right.\\&\left.+\left|\sum_{i=1}^n v(t_i)-\sum_{i=1}^n u(t_i)\right|\right],\end{aligned}$$

et d'aprés (H_2) , on a :

$$\begin{aligned}&\sup_{s\in[0,b]}\left|X_v\left(s,0\right)-X_u\left(s,0\right)\right|\\\leq\;&\left(q-1\right)y^{q-2}\times\left[\frac{2\omega}{\Gamma(\alpha_1)}\sup_{t\in[0,b]}\left|v-u\right|\int_0^b\varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(b,x)dx+\theta\left\|v-u\right\|_c\right].\end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^b\varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(b,x)dx=\frac{M^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)},$$

on a aussi :

$$\sup_{t\in[0,b]}\left|v(t)-u(t)\right|=\left\|v-u\right\|_c,$$

il vient :

$$\begin{aligned} \left|X_v(b,0) - X_u(b,0)\right| &\leq (q-1)\, y^{q-2} \times \left[\frac{2\omega M^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \theta\right] \|v-u\|_c \\ &\leq \Lambda_3 \|v-u\|_c . \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} |Tv(t) - Tu(t)| &\leq \sup_{t\in[0,b]} \left| \frac{1}{\Gamma(\overline{\alpha_1})} \int_0^t \varphi'(s)\varphi_{\overline{\alpha_1}-1}(t,s)\left(X_v - X_u\right)(s,0)\,ds \right| \\ &\quad + \sup_{t\in[0,b]} \left| \Lambda_1 \times \sum_{j=1}^k \left(X_v - X_u\right)(\lambda_j,0) \right| \\ &\quad + \sup_{t\in[0,b]} \left|\Lambda_1 \left(X_v - X_u\right)(b,0)\right|, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &|Tv(t) - Tu(t)| \\ \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\overline{\alpha_1})} \int_0^b \varphi'(s)\varphi_{\overline{\alpha_1}-1}(t,s)\left|\left(X_v - X_u\right)(s,0)\right| ds \\ & + \sup_{\lambda_j\in[0,b]} \left| \Lambda_1 \times \sum_{j=1}^k \left(X_v - X_u\right)(\lambda_j,0) \right| + \left|\Lambda_1 \left(X_v - X_u\right)(b,0)\right|, \end{aligned}$$

d'où,

$$\sup_{s\in[0,b]} \left|X_v(s,0) - X_u(s,0)\right| \leq \Lambda_3 \|v-u\|_c .$$

Alors,

$$\begin{aligned} &|Tv(t) - Tu(t)| \\ \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\overline{\alpha_1})} \Lambda_3 \|v-u\|_c \int_0^b \varphi'(s)\varphi_{\overline{\alpha_1}-1}(b,s)ds \\ & + \Lambda_1 \times \sum_{j=1}^k \sup_{\lambda_j\in[0,b]} \left|\left(X_v - X_u\right)(\lambda_j,0)\right| + \Lambda_1 \left|\left(X_v - X_u\right)(b,0)\right|, \end{aligned}$$

puisque,

$$\frac{1}{\Gamma(\overline{\alpha_1})} \int_0^b \varphi'(s)\varphi_{\overline{\alpha_1}-1}(b,s)ds = \frac{M^{\overline{\alpha_1}}}{\Gamma(\overline{\alpha_1}+1)},$$

il vient :

$$\begin{aligned}|Tv(t)-Tu(t)| &\leq \frac{M^{\overline{\alpha_1}}}{\Gamma(\overline{\alpha_1}+1)}\Lambda_3\left\|v-u\right\|_c \\ &+\Lambda_1\times\sum_{j=1}^{k}\sup_{\lambda_j\in[0,b]}\left|\left(X_v-X_u\right)\left(\lambda_j,0\right)\right|+\Lambda_1\Lambda_3\left\|v-u\right\|_c,\end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned}&|Tv(t)-Tu(t)| \\ \leq\ &\left(\frac{M^{\overline{\alpha_1}}}{\Gamma(\overline{\alpha_1}+1)}\Lambda_3+\Lambda_1\Lambda_3\right)\left\|v-u\right\|_c+\Lambda_1\times\sum_{j=1}^{k}\sup_{\lambda_j\in[0,b]}\left|\left(X_v-X_u\right)\left(\lambda_j,0\right)\right|.\end{aligned}$$

On sait que :

$$\sum_{j=1}^{k}\sup_{\lambda_j\in[0,b]}\left|\left(X_v-X_u\right)\left(\lambda_j,0\right)\right|\leq k\left|\left(X_v-X_u\right)(b,0)\right|.$$

Donc,

$$\begin{aligned}&|Tv(t)-Tu(t)| \\ \leq\ &\left(\frac{M^{\overline{\alpha_1}}}{\Gamma(\overline{\alpha_1}+1)}\Lambda_3+\Lambda_1\Lambda_3\right)\left\|v-u\right\|_c+\Lambda_1k\left|\left(X_v-X_u\right)(b,0)\right| \\ \leq\ &\left(\frac{M^{\overline{\alpha_1}}}{\Gamma(\overline{\alpha_1}+1)}\Lambda_3+\Lambda_1\Lambda_3\right)\left\|v-u\right\|_c+\Lambda_1k\left|\left(X_v\left(b,0\right)-X_u(b,0)\right)\right|,\end{aligned}$$

et on a :

$$\sup_{s\in[0,b]}\left|X_v\left(s,0\right)-X_u\left(s,0\right)\right|=\left|X_v\left(b,0\right)-X_u\left(b,0\right)\right|\leq\Lambda_3\left\|v-u\right\|_c.$$

Finalement :

$$\begin{aligned}&|\mathrm{T}v(t)-Tu(t)| \\ \leq\ &\left(\frac{M^{\overline{\alpha_1}}}{\Gamma(\overline{\alpha_1}+1)}\Lambda_3+\Lambda_1\Lambda_3\right)\left\|v-u\right\|_c+\Lambda_1\Lambda_3k\left\|v-u\right\|_c \\ \leq\ &\left(\frac{M^{\overline{\alpha_1}}}{\Gamma(\overline{\alpha_1}+1)}\Lambda_3+\Lambda_1\Lambda_3+\Lambda_1\Lambda_3k\right)\left\|v-u\right\|_c \\ \leq\ &L\left\|v-u\right\|_c,\end{aligned}$$

avec

$$L=\left(\frac{M^{\overline{\alpha_1}}}{\Gamma(\overline{\alpha_1}+1)}\Lambda_3+\Lambda_1\Lambda_3+\Lambda_1\Lambda_3k\right).$$

Si $0\leq L<1$, alors l'opérateur T est contractante.

Théorème 3.2.1 *Soit $\Pi \neq 0$. Supposons que les hypothèses sont vérifiées et*

$$0 \leq L < 1,$$

où

$$L = \left(\frac{M^{\overline{\alpha_1}}}{\Gamma(\overline{\alpha_1}+1)} \Lambda_3 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_1 \Lambda_3 k \right).$$

Alors notre problème admet une unique solution sur $[0, b]$.

3.3 Exemple

Exemple 3.3.1 *On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\frac{3}{2},\frac{1}{5};t} \psi_p \left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\frac{9}{5},\frac{4}{5};t} v \right)(t) = t^3 v(t), \quad t \in \left[0, \frac{1}{10^2}\right], \\ \psi_p \left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\frac{9}{5},\frac{4}{5};t} v \right)(0) = 0, \quad v(0) = 0, \\ \psi_p \left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\frac{9}{5},\frac{4}{5};t} v \right)\left(\frac{1}{10^2}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} v(t_i), \qquad 0 < t_1 < ... < t_n < \frac{1}{10^2}, \\ {}^{C}D_{0^+}^{\frac{9}{5};t} v\left(\frac{1}{10^2}\right) = \sum\limits_{j=1}^{k} {}^{C}D_{0^+}^{\frac{9}{5};t} v\left(\left(\frac{1}{2}\right)^j\right), \end{cases}$$

pour cet exemple, on a

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}, \ \overline{\alpha_1} = \frac{9}{5}, \ \beta_1 = \frac{1}{5}, \ \overline{\beta_1} = \frac{4}{5}.$$

Ainsi que, nous avons

$$\lambda_j = \left(\frac{1}{2}\right)^j, \overline{\gamma_1} = \frac{49}{25}, \ q = 2, \ k = 1,$$

avec

$$g(t, v(t)) = t^3 v \text{ et } \varphi(t) = t,$$

Il est facile de voir que φ est croissante et la fonction f est continue. D'autre part, pour toutes u, $v \in \mathbb{R}^2$, nous trouvons

$$\begin{aligned} \forall t &\in \left[0, \frac{1}{10^2}\right] : \\ |g(t, v(t)) - g(t, u(t))| &\leq \left(\sup_{t \in \left[0, \frac{1}{10^2}\right]} t^3 \right) |v(t) - u(t)| \\ &\leq \omega |v - u|, \end{aligned}$$

tel que

$$\omega = \frac{1}{10^6}.$$

On a aussi

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{10^2}\right] : \varphi\left(b\right) - \varphi\left(0\right) = M,$$

d'où

$$M = \frac{1}{10^2}.$$

$$\begin{aligned} \Pi &= (\varphi(b) - \varphi(0))^{\overline{\gamma_1} - \overline{\alpha_1} - 1} - \sum_{j=1}^{k} (\varphi(\lambda_j) - \varphi(0))^{\overline{\gamma_1} - \overline{\alpha_1} - 1} \\ &= 46.07, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\Pi \neq 0,$$

maintenant, soit

$$\begin{aligned} y &= 1, \quad \theta(t) = t^4 \\ \theta &= \frac{1}{10^8}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{(\varphi(b) - \varphi(0))^{\overline{\gamma_1} - 1} \Gamma(\overline{\gamma_1} - \overline{\alpha_1})}{\Pi \ \Gamma(\overline{\gamma_1})} \\ &= 1.54 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \Lambda_3 &= (q-1)\, y^{q-2} \left[\frac{2\omega M^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} + \theta \right] \\ &= 1.15 \times 10^{-8}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{M^{\overline{\alpha_1}}}{\Gamma(\overline{\alpha_1} + 1)} \Lambda_3 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_1 \Lambda_3 k \right) \\ &= 3.71 \times 10^{-11}. \end{aligned}$$

pour $L = 3.71 \times 10^{-11}$, d'après le théorème 3.2.1 de notre problème admet unique solution.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence et l'unicité des solutions du problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de φ-Hilfer avec conditions initiale contenant la dérivée de Caputo.
L'existence de la solution unique a été prouvée en utilisant le théorème du point fixe, qui basé sur principe de contractante de Banach. Ensuite, les résultats obtenus ont été étayés par des exemples.

Bibliographie

[1] R. Almeida, *A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function.* Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul, 44, 460–481. (2017).

[2] A. Ndiaye, M. Kaid, Z. Dahmani, *Solvability for differential systems of Duffing type involving sequential Caputo derivatives.* Annals of pure and applied mathematical sciences. 1(1), 1–13. (2021).

[3] Z. Baitiche, C. Derbazi, M. Benchohra and Y. Zhou, *A New Class of Coupled Systems of Nonlinear Hyperbolic Partial Fractional Differential Equations in Generalized Banach Spaces Involving the ψ–Caputo Fractional Derivative.* Symmetry 2021, 13, 2412. https ://doi.org/10.3390/sym13122412. (2021).

[4] H. Beddani, M. Beddani and Z. Dahmani, *Nonlinear Differential Problem with p-Laplacian and via Phi-Hilfer Approach : Solvability and Stability Analysis.* Eur. J. Math. Anal. 1 164-181. (2021)

[5] H. Beddani, *(n + 1)-Parameter singular fractional differential equation.* Asia Mathematika. v. 5, p. 11-18. (2021).

[6] K. M. Furati, N. D. Kassim, and N. E. Tatar, *Existence and uniqueness for a problem involving Hilfer fractional derivative*, Comput. Math. Appl. $64(2012), 1616 - 1626$. https ://doi.org/10.1016/j.camwa..01.009.(2012).

[7] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory* ; Springer : New York, NY, USA, (2003).

[8] J. K. Hale and S. V. Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 19.(1999).

[9] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics* ; World Scientific : Singapore, (2000).

[10] R. Hilfer, *Experimental evidence for fractional time evolution in glass forming materials.* J. Chem. Phys. , $284, 399 - 408$.(2002).

[11] R. Hilfer, Y. Luchko and Z. Tomovski, *Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouvill fractional derivatives.* Frac. Calc. Appl. Anal.,$12, 299 - 318$.(2009).

[12] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential.* Elsevier Science B.V. (2006).

[13] F. Mainardi, *Boundary Value Problems for Hilfer Type Sequential Fractional Differential Equations and Inclusions with Integral Multi-Poin Boundary Conditions. In Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* ; Carpinteri, A., Mainardi, F., Eds. ; Springer : Berlin, Germany, ; $p.291 - 348.$(1997).

[14] P. Piersanti and P. Pucci. Existence theorems for fractional p-Laplacian problems. Anal. Appl. (Singap.), in press. Preprint,2015.

[15] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations.* Academic Press. New York, NY, USA, ; v.198.(1999).

[16] A. Samadi, C. Choltiсha, S. K. Ntouyas and J. Tariboon, *A Study of Coupled Systems of y-Hilfer Type Sequential Fractional Differential Equations with Integro-Multipoint Boundary Conditions,* fractal and fractional. , 5, 162. https ://doi.org/ 10.3390/fractalfract5040162.(2021).