Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen
Journal for Analysis and its Applications
Volume 24 (2005), No. 3, 581–592

Parametrix du Problème de Cauchy C^∞ Hyperbolique Muni d'un Système d'Ordres de Leray–Volevîc

Bekkai Messirdi et Abderrahmane Senoussaoui

Abstract. Using algebrically conditions of localization and strict hyperbolicity, we construct a matrix of Fourier integral operators. The symbols of these operators and their traces allow to deduce the parametrix of C^∞ associated Cauchy problem with order system of Leray-Volecîc type. We obtain the explicit expression of the solution of this problem.

Résumé. A partir de conditions algébriques de localisation et de stricte hyperbolicité, on construit des opérateurs matriciels intégraux de Fourier. Les symboles de ces opérateurs et leurs traces permettent d'en déduire la parametrix du problème de Cauchy C^∞ muni d'un système d'ordres de Leray-Volevîc et l'expression explicite de la solution convenable.

Keywords: *Parametrix du problème de Cauchy C^∞, stricte hyperbolicité, ordres de Leray-Volevîc, opérateurs matriciels intégraux de Fourier*

MSC 2000: Primary 35S30, 35S05, secondary 47A10, 35P05

1. Introduction

La résolution des équations différentielles elliptiques repose essentiellement sur la théorie des opérateurs pseudo-différentiels (cf. [11, 17]). Cependant, cette théorie ne peut être adaptée dans le cas des équations de type hyperbolique (cf. [15, 19]), une nouvelle classe d'opérateurs intégraux appelés opérateurs intégraux de Fourier est alors introduite à ce propos (cf. [2, 7, 8]).

Cet article est consacré à l'application des résultats de Berzin-Messirdi [2] concernant les opérateurs intégraux de Fourier. On construit la parametrix du

Bekkai Messirdi: Université d'Oran Es-sénia, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, B.P. 1524 El-Mnaouer, Oran, Algerie ; `bmessirdi@univ-oran.dz`
Abderrahmane Senoussaoui: Université Libre de Bruxelles, Boulevard du Triomphe, Campus Plaine CP 214, B1050 Bruxelles, Belgique ; `asenouss@ulb.ac.be`

ISSN 0232-2064 / $ 2.50

problème de Cauchy C^∞ (cf. [16]), pour un opérateur matriciel (m,m) fortement hyperbolique muni d'un système d'ordres de Leray–Volevîc $\{n_A,\, m_B\}$ (cf. [10]):

$$(\mathcal{C})\quad \begin{cases} hu = f & \big(u = (u^B)_{1\le B\le m},\ f = (f^A)_{1\le A\le m}\big) \\ \partial_0^{\widetilde{h_B}} u^{\widetilde{B}} = g^{(\widetilde{B},\widetilde{h_B})} & \big(\partial_0 = \dfrac{\partial}{\partial x_0},\ x = (x_0, x_1 \dots, x_n)\big)\,, \end{cases}$$

où les r-couples $(\widetilde{B},\widetilde{h_B})$ sont choisis parmis les couples (B,h_B), $1\le B\le m$, $0\le \widetilde{h_B}\le h_B\le N-m_B-1$, avec $N=\max_A n_A$ et $r=\sum_A n_A-\sum_B m_B$.

On utilise les résultats de Delcambre [5], mais au lieu de s'appuyer sur les techniques des inégalités d'énergie, on se propose de construire les noyaux des opérateurs intégraux qui resolvent le problème de Cauchy C^∞. Cette construction de la parametrix est faite au moyen des opérateurs intégraux de Fourier suivant la méthode adaptée par Berzin [1], Berzin–Vaillant [3] et Chazarin [4].

Les hypothèses de localisation par rapport aux facteurs irréductibles du déterminant de la matrice caractéristique de h et celles de stricte hyperbolicité données au second paragraphe assurent respectivement la construction au paragraphe trois des relations canoniques homogènes et des opérateurs intégraux de Fourier associés (cf. [2, 7]). Leurs symboles et leurs traces sont complètement déterminés, ils permettent d'en déduire au dernier paragraphe la parametrix du problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ et la solution de classe C^∞ convenable.

2. Hypothèses et résultats

Soit X' une variété réelle C^∞, connexe , compacte sans bord, de dimension n, $X=\mathbb{R}\times X'$ la variété produit. On considère h un opérateur différentiel linéaire matriciel de classe C^∞ sur X, $h=(h_B^A)_{1\le A,B\le m}$:

$$h_B^A(x,D)=\sum_{|\alpha|\le\delta_B^A} a_{B,\alpha}^A(x)D^\alpha.$$

On suppose qu'il est associé à h un système d'ordres de $2m$ entiers $\{n_A,m_B\}$ tels que $\delta_B^A\le n_A-m_B$, dans ce cas on définit la matrice caractéristique $H(x,\xi)=(H_B^A(x,\xi))$ de h par

$$H_B^A(x,\xi)\ \begin{cases} \text{est le symbole de } h_B^A & \text{si}\ \ \delta_B^A=n_A-m_B \\ =0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$\det(H_B^A(x,\xi))$ est une fonction C^∞ en x, polynômiale en ξ de degré $r=\sum_A n_A-\sum_B m_B$. Dans une carte locale de X, l'opérateur h s'écrit

$$h(x,\partial)=H(x,\partial)+H^*(x,\partial)+\ldots+H^{*(j)}(x,\partial)+\ldots+H^{*(r)}(x,\partial),$$

où $H^{*(j)}(x,\partial)=(H_B^{*(j)A}(x,\partial))_{1\le A,B\le m}$ est la partie d'ordre $(r-j)$ de $h_B^A(x,\partial)$, $1\le A,B\le m$.

Remarque 1. Si a et b sont deux opérateurs différentiels matriciels d'ordres respectifs p et q, on note dans une carte locale quelconque de X, la partie d'ordre $(p+q-1)$ de $(a \circ b)(x, \partial)$ par $(a \circ b)^*(x, \partial)$. Alors $(a \circ b)^*(x, \partial)$ est donnée par

$$(a \circ b)^*(x, \partial) = [AB^* + \partial^\alpha A \partial_\alpha B + A^* B](x, \partial)$$

où A et B sont les matrices caractéristiques respectives de a et b, avec la convention d'Einstein

$$\partial^\alpha A \partial_\alpha B = \sum_{\alpha=0}^{n} \partial^\alpha A \partial_\alpha B$$

qu'on utilisera par la suite sauf mention contraire.

Le terme d'ordre $(p+q-2)$ de $(a \circ b)$ est

$$(a \circ b)^{**}(x, \partial) = \Big[AB^{**} + \partial^\alpha A \partial_\alpha B^* + \frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta} A \partial_{\alpha\beta} B + \partial^\alpha A^* \partial_\alpha B + A^* B^*\Big](x, \partial).$$

On note (x_0, x') un point de X dans une carte locale, un point du fibré cotangent $T^*(X)$ est exprimé par (x, ξ), $\xi = (\xi_0, \xi') = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ et $\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq n$.

Le déterminant caractéristique de h est décomposé en facteurs irréductibles dans l'anneau des polynômes en ξ, H est ensuite localisé par rapport à l'ideal engendré par chacun de ces facteurs, h est finalement supposé hyperbolique par rapport à un champs de vecteur donné. Ces conditions expriment le comportement de h et permettent de caracteriser le problème de Cauchy dans la classe des fonctions indéfiniment différentiables.

(H1) On suppose qu'il existe des entiers strictement positifs $\nu_0, \ldots, \nu_\sigma$ et des fonctions C^∞ en x, polynômiales en ξ, $H_0, \ldots, H_\sigma$ telles que en chaque point x de X, H se décompose en facteurs irréductibles:

$$\det(H) = \prod_{\delta=0}^{\sigma} [H_\delta]^{\nu_\delta}$$

où pour tout $\delta = 0, \ldots, \sigma$, le degré τ_δ de H_δ est constant. On pose $\tau = \sum_{\delta=0}^{\sigma} \tau_\delta$, on a alors $r = \sum_{\delta=0}^{\sigma} \tau_\delta \nu_\delta$.

(H2) Pour tout x dans X et pour tout $\delta = 0, \ldots, \sigma$, on désigne par Φ_δ l'anneau localisé de l'anneau des polynômes à $(n+1)$ variables $\mathbb{R}[\xi_\alpha]$, $0 \leq \alpha \leq n$, par rapport à l'idéal engendré par H_δ (cf. [18]). Pour tout $\delta = 0, \ldots, \sigma$, la matrice H considérée comme matrice d'éléments de Φ_δ est équivalente à une matrice diagonale de la forme

$$(H_B^A) \sim \begin{pmatrix} H_\delta & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & & & & & . \\ . & & . & & & & . \\ . & & & H_\delta & & & . \\ . & & & & 1 & & . \\ . & & & & & . & . \\ . & & & & & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \nu_\delta \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} m-\nu_\delta \\ \\ \end{array}$$

(H3) $\left[\prod_{\delta=0}^{\sigma} H_\delta\right]$ est strictement hyperbolique par rapport à la direction $N=(1,0,\ldots 0)$; c'est à dire:

(i) $[\prod_{\delta=0}^{\sigma} H_\delta](x,N) \neq 0$

(ii) pour tout (x,ξ), $\xi=(\xi_0,\xi')$, $\xi'\neq 0$, l'équation $\left[\prod_{\delta=0}^{\sigma} H_\delta\right](x,\xi_0,\xi')=0$ en ξ_0 admet τ racines réelles distinctes $\xi_0^\rho(x,\xi')$, $1\leq\rho\leq\tau$. On ordonne ces racines comme dans [18], de la manière suivante:

pour $1\leq\rho\leq\tau_1$; les τ_1 racines proviennent de H_1

pour $\tau_1+1\leq\rho\leq\tau_1+\tau_2$; les τ_2 racines proviennent de H_2

. . . .

pour $\tau_1+\ldots+\tau_{\delta-1}+1\leq\rho\leq\tau_1+\ldots+\tau_\delta$; les τ_δ racines issues de H_δ

. . . .

on pose $q_\rho(x,\xi_0,\xi')=\xi_0-\xi_0^\rho(x,\xi')$, $1\leq\rho\leq\tau$.

Pour $t_0\in\mathbb{R}$, $\xi'\neq 0$, $x_0\in\mathbb{R}$, et $x'\in X'$, considérons la fonction de phase $\psi_{\xi'}(t_0,x')=\langle x',\xi'\rangle=\sum_{j=1}^n x_j\xi_j$ notée $\psi_{\xi'}(x')$. D'après la théorie d'intégration des équations caractéristiques [9], il existe τ fonctions φ_ρ de classe C^∞ solutions du problème

$$\begin{cases} q_\rho(x,\operatorname{grad}\varphi_\rho(x))=0 \\ \qquad \varphi_{\rho|x_0=t_0}=\psi_{\xi'} \\ \qquad \partial_0\varphi_\rho(x)=\xi_0^\rho(x,\operatorname{grad}\psi_{\xi'}(x')) \quad \text{sur } x_0=t_0 \end{cases}$$

alors pour $\rho=1,\ldots,\tau$; φ_ρ est solution de $\left[\prod_{\delta=0}^{\sigma} H_\delta\right](x,\operatorname{grad}\varphi_\rho(x))=0$. On notera $X_{t_0}=\{x\in X\ ;\ x_0=t_0\}$ une hypersurface non caractéristque pour h.

On sait (cf. [5], Théorème 1, page 30) que sous ces hypothèses, il existe un choix de r couples $(\widetilde{B},\widetilde{h_B})$ pris parmi les (B,h_B) où $1\leq B\leq m$, $0\leq h_B\leq n-m_B-1$, $n=\sup_A n_A$, tels que le système

$$h_B^A(x,D)u^B(x)=f^A(x), \quad A,B=1,\ldots,m,$$

ait localement une solution formelle et une seule sous forme de somme d'ondes asymptotiques formelles, vérifiant les r données de Cauchy $\partial_0^{\widetilde{h_B}} u^{\widetilde{B}}(t_0, x') = g^{(\widetilde{B},\widetilde{h_B})}(x')$, $x' \in X'$, les fonctions $g^{(\widetilde{B},\widetilde{h_B})}$ sont données de classe C^∞ sur X' et indexées par les r couples $(\widetilde{B}, \widetilde{h_B})$, les fonctions f^A sont $C^\infty(X)$.

3. Construction des relations canoniques homogènes et des opérateurs intégraux de Fourier associés

Nos hypothèses permettent la construction d'opérateurs intégraux de Fourier nécessaires à la résolution du problème de Cauchy C^∞ associé à h.

Ces opérateurs sont définits par des variétés Lagrangiennes coniques du fibré cotangents $T^*X\setminus\{0\}\times T^*X'\setminus\{0\}$ appelées relations canoniques homogènes que nous rappelons ici d'après [1, 2, 4, 7]. Leur fonction de phase est obtenue d'après la structure locale des relations canoniques, les symboles associés sont les solutions d'un système d'équations différentielles du premier ordre en imposant des conditions de traces sur X'.

Nous définissons une *relation canonique homogène* $C_\rho(t_0)$ de la façon suivante:

$$C_\rho(t_0) = \left\{(x,\xi,y',\eta') : \begin{array}{l} (x,\xi) \text{ appartient à la bande caractéristique de } q_\rho \\ \text{issue de } (t_0,y',\eta_0,\eta') \text{ avec } \eta_0 = \xi_0^\rho(t_0,y',\eta') \end{array}\right\}.$$

Par conséquent, si on définit la fonction de phase ϕ_ρ par $\phi_\rho(x,y',\eta') = \varphi_\rho(x,\eta') - \langle y',\eta'\rangle$, alors la variété Lagrangienne définie par ϕ_ρ est localement le graphe de $C_\rho(t_0)$, de plus $C(t_0) = \bigcup_{\rho=1}^{\tau} C_\rho(t_0)$ réunion disjointe de relations canoniques homogènes est aussi une relation canonique homogène dans $T^*(X)\diagdown\{0\} \times T^*(X')\diagdown\{0\}$ (cf. [7]).

$I^\lambda(X, X', C_\rho(t_0))$ désigne l'espace des opérateurs intégraux de Fourier de X dans X', d'ordre $\lambda \in \mathbb{R}$, et de relation canonique homogène $C_\rho(t_0)$. $L^\lambda(X')$ est l'espace des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre λ sur X', $I^{-\infty} = \bigcap_{\lambda\in\mathbb{R}} I^\lambda$, et $L^{-\infty} = \bigcap_{\lambda\in\mathbb{R}} L^\lambda$.

Théorème 1. *Soit $n = \max_A n_A$. Il existe un choix de r couples notés $(\widetilde{B}_1, \widetilde{h_1})$, $\ldots, (\widetilde{B}_r, \widetilde{h_r})$, pris parmi les couples (B, h_B) où $1 \le B \le m$, $0 \le h_B \le n - m_B - 1$ et $\widetilde{h_1} < \widetilde{h_2} < \ldots < \widetilde{h_r}$, tels que pour tout $l = 1, \ldots, r$, il existe τ opérateurs matriciels intégraux de Fourier $F_{\widetilde{h_l},\rho}(t_0) = F_{l,\rho}(t_0) = (F^B_{l,\rho,C}(t_0))_{1\le B,C\le m}$ dans $I^{-\widetilde{h_l}-\frac{1}{4}}(X, X', C_\rho(t_0))$, $\rho = 1, \ldots, \tau$, tels que*

$hF_{l,\rho}(t_0) \equiv 0$

modulo un opérateur à noyau C^∞ de X' dans X

vérifiant les r données de Cauchy:

$\gamma_s\Big[\sum\limits_{\rho=1}^{\tau} F_{l,\rho}(t_0)\Big] \equiv (i)^{\widetilde{h_s}-1}\widetilde{\delta}_{s,l}I \quad (1 \le s \le r)$

modulo un opérateur à noyau C^∞ de X' dans X'.

Les $F_{l,\rho}(t_0)$ sont cherchés sous la forme d'un développement asymptotique $F_{l,\rho}(t_0) \sim \sum_{j=0}^\infty F^j_{l,\rho}(t_0)$, $F^j_{l,\rho}(t_0) = (F^{j,A}_{l,\rho,B}(t_0))_{1\le A,B\le m}$, en imposant les deux conditions suivantes:

(i) $h^A_B\Big[\sum\limits_{j<k} F^{j,B}_{l,\rho,C}(t_0)\Big] \in I^{t_A-\widetilde{h}_l-\frac14-k}(X,X',\,C_\rho(t_0))$

$\big(k\in\mathbb{N}^*;\ \rho=1,\dots,\tau\,;\ 1\le A,B,C\le m;\ t_A=\max_B(n_A-m_B)\big)$

(ii) $\gamma_s\Big[\sum\limits_{\rho=1}^{\tau}\sum\limits_{j<k+1} F^j_{l,\rho}(t_0)\Big] - (i)^{\widetilde{h_s}-1}\widetilde{\delta}_{s,l}I \in L^{\widetilde{h_s}-\widetilde{h_l}-1-k}(X')$

où

$$F_{l,\rho}(t_0) \sim \sum_{j=0}^{\infty} F^j_{l,\rho}(t_0) \quad \text{si} \ \Big(F_{l,\rho}(t_0) - \sum_{j<k} F^j_{l,\rho}(t_0)\Big) \in I^{-\widetilde{h}_l-\frac14-k}\big(X,X',C_\rho(t_0)\big)$$

ayant la même propriété par rapport à n'importe quel réarrangement de la série. γ_s est l'opérateur de trace $\partial_0^{\widetilde{h_s}}$ sur l'hypersurface non caractéristique X_{t_0}, $\widetilde{\delta}_{s,l}$ est le symbole de Krönecker $\delta_{\widetilde{h_s},\widetilde{h_l}}$ et I est la matrice identité (m,m).

`Construction des opérateurs` $F^{j,B}_{l,\rho,C}(t_0)$:

$F^j_{l,\rho}(t_0) \in I^{-\widetilde{h}_l-\frac14-j}(X,X',C_\rho(t_0))$, alors il existe un unique opérateur matriciel intégral de Fourier $F_{l,\rho}(t_0) \in I^{-\widetilde{h}_l-\frac14}(X,X',C_\rho(t_0))$ tel que $F_{l,\rho}(t_0) \sim \sum_{j=0}^\infty F^j_{l,\rho}(t_0)$, et on peut écrire d'après [2]

$$\big(F^{j,B}_{l,\rho,C}(t_0)U\big)(x) = (-i)^j \int_{X'}\int_{X'} e^{i\phi_\rho(x,y',\eta')} Y^{j,B}_{l,\rho,C}(t_0)(x,\eta')U(y')\,dy'\,d\eta'\,,$$

$U\in C_0^\infty(X')$, $Y^{j,B}_{l,\rho,C}(t_0)$ étant le symbole de $F^{j,B}_{l,\rho,C}(t_0)$, qu'on doit déterminer pour tout j entier. $Y^{j,B}_{l,\rho,C}(t_0)$ est un symbole d'ordre $(-\widetilde{h}_l-j)$. En effet, d'après [2] il est d'ordre $(-\widetilde{h}_l-\frac14-j)+(\frac{2n+1-2n}{4}) = (-\widetilde{h}_l-j)$.

En utilisant ensuite la transformée de Fourier $\widehat{U}$ de U, on a

$$\big(F^{j,B}_{l,\rho,C}(t_0)U\big)(x) = (2\pi)^{-n}(-i)^j \int_{X'} e^{i\varphi_\rho(x,\eta')} Y^{j,B}_{l,\rho,C}(t_0)(x,\eta')\widehat{U}(\eta')\,d\eta'\,.$$

Pour tout A, il existe au moins un B, tel que h^A_B soit d'ordre égal à (n_A-m_B), ainsi la somme $h^A_B F^{j,B}_{l,\rho,C}(t_0)$ est un opérateur intégral de Fourier d'ordre $t_A + (-\widetilde{h}_l-\frac14-j)$, son symbole est d'ordre $t_A-\widetilde{h}_l-j$ et est défini par

$$e^{-i\varphi_\rho}h^A_B\big[(-i)^j e^{i\varphi_\rho} Y^{j,B}_{l,\rho,C}(t_0)\big],$$

ici $h_B^A F_{l,\rho,C}^{j,B}(t_0)$ désigne la somme d'Einstein $\sum_{B=1}^{m} h_B^A F_{l,\rho,C}^{j,B}(t_0)$. D'après [2, 6] on a aussi

$$h_B^A\big[(-i)^j e^{i\varphi_\rho} Y_{l,\rho,C}^{j,B}(t_0)\big] = e^{i\varphi_\rho}\sum_{q=0}^{t_A}(-i)^j (i)^{t_A-q} h_B^{A,q}(\varphi_\rho)\big[Y_{l,\rho,C}^{j,B}(t_0)\big]\,,$$

où $(h_B^{A,q}(\varphi_\rho))_{q,A,B}$ est la famille d'opérateurs matriciels associée sur la variété X à l'opérateur matriciel h et à la fonction réelle φ_ρ de classe C^∞ sur X. Donc,

$$e^{-i\varphi_\rho} h_B^A\big[(-i)^j e^{i\varphi_\rho} Y_{l,\rho,C}^{j,B}(t_0)\big] = (-i)^j (i)^{t_A} h_B^{A,0}(\varphi_\rho)\big[Y_{l,\rho,C}^{j,B}(t_0)\big] + \dots \qquad (*)_j$$

les pointillés designent des symboles $\sum_{q=0}^{t_A}(-i)^j (i)^{t_A-q} h_B^{A,q}(\varphi_\rho)\big[Y_{l,\rho,C}^{j,B}(t_0)\big]$ d'ordre inférieur ou égal à $(t_A - j - 1)$.

`Réalisons les conditions (i):`

`pour` $k = 1$: $h_B^A F_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0) \in I^{t_A - \widetilde{h}_l - \frac{1}{4} - 1}(X, X', C_\rho(t_0))$, cet opérateur est défini par un symbole d'ordre $(t_A - \widetilde{h}_l - 1)$. $(*)_0$ donne alors

$$h_B^{A,0}(\varphi_\rho)\big[Y_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0)\big] = 0 \text{ ou bien } \; H_B^A\big(x, \operatorname{grad}\varphi_\rho(x)\big) Y_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0) = 0$$

d'où, $Y_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0) = U_{l,\rho,C}^{\overline{D}(\rho)} d_{\rho,\overline{D}(\rho)}^B$, où $(d_{\rho,\overline{D}(\rho)}^B(x, \operatorname{grad}\varphi_\rho(x)))_{\overline{D}(\rho)}$ est une base du noyau de $\big(H_B^A(x, \operatorname{grad}\varphi_\rho(x))\big)$, $1 \le \overline{D}(\rho) \le \nu_\delta$ si $\tau_1 + \ldots + \tau_{\delta-1} + 1 \le \rho \le \tau_1 + \ldots + \tau_\delta$.

`pour` $k = 2$: $h_B^A[F_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0) + F_{l,\rho,C}^{1,B}(t_0)] \in I^{t_A - \widetilde{h}_l - \frac{1}{4} - 2}(X, X', C_\rho(t_0))$. En vertu de $(*)_0$ et $(*)_1$, on a

$$(-i)(i)^{t_A} h_B^{A,0}(\varphi_\rho)[Y_{l,\rho,C}^{1,B}(t_0)] + (i)^{t_A-1} h_B^{A,1}(\varphi_\rho)[Y_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0)] = 0.$$

Donc en notant $H_B^A(x, \operatorname{grad}\varphi_\rho(x)) = H_B^A(\varphi_\rho)$, on obtient

$$H_B^A(\varphi_\rho) Y_{l,\rho,C}^{1,B}(t_0) + \partial^\alpha H_B^A(\varphi_\rho)\partial_\alpha Y_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0) + H_B^{*A}(\varphi_\rho) Y_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0) = 0$$

`pour` $k = 3$: En procédant de la même manière, on a d'après $(*)_0$, $(*)_1$, $(*)_2$

$$\begin{aligned} &H_B^A(\varphi_\rho) Y_{l,\rho,C}^{2,B}(t_0) + \partial^\alpha H_B^A(\varphi_\rho)\partial_\alpha Y_{l,\rho,C}^{1,B}(t_0) \\ &+ H_B^{*A}(\varphi_\rho) Y_{l,\rho,C}^{1,B}(t_0) + \frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta} H_B^A(\varphi_\rho)\partial_{\alpha\beta} Y_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0) \\ &+ \partial^\alpha H_B^{*A}(\varphi_\rho)\partial_\alpha Y_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0) + H_B^{**A}(\varphi_\rho) Y_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0) = 0\,, \end{aligned}$$

les symboles $(Y_{l,\rho,C}^{j,B}(t_0))$ vérifient les mêmes équations que celles trouvées dans [5] pour la résolution du problème de Cauchy C^∞ asymptotique. On détermine alors les $(Y_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0))$ par la résolution d'un système d'équations différentielles du premier ordre en imposant les traces des $U_{l,\rho,C}^{\overline{D}(\rho)}$ sur X', ces traces sont données par les conditions (ii) ; puis par récurrence on détermine tous les $Y_{l,\rho,C}^{j,B}(t_0)$.

Remarque 2. $F_{l,\rho}(t_0) \sim \sum_{j=0}^{\infty} F_{l,\rho}^j(t_0)$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} \big(F_{l,\rho}(t_0) - \sum_{j<k} F_{l,\rho}^j(t_0)\big) \in I^{-\widetilde{h}_l-k-\frac{1}{4}}\big(X, X', C_\rho(t_0)\big) \\ h\big(F_{l,\rho}(t_0) - \sum_{j<k} F_{l,\rho}^j(t_0)\big) \in I^{r-\widetilde{h}_l-k-\frac{1}{4}}\big(X, X', C_\rho(t_0)\big)\,. \end{cases}$$

D'après (i), on en déduit que $hF_{l,\rho}(t_0) \in I^{r-\widetilde{h}_l-k-\frac{1}{4}}(X, X', C_\rho(t_0))$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et alors $hF_{l,\rho}(t_0) \in I^{-\infty}$, il constitu un opérateur à noyau C^∞ de X' dans X.

`Réalisons les conditions de traces (ii):`

`pour` $k=1$: $\gamma_s\big[\sum_{\rho=1}^{\tau} F_{l,\rho}^0(t_0) + \sum_{\rho=1}^{\tau} F_{l,\rho}^1(t_0)\big] - (i)^{\widetilde{h_s}-1}\widetilde{\delta}_{s,l} I \in L^{\widetilde{h_s-1-h_l-1}}(X')$, cet opérateur est défini par le symbole d'ordre $(\widetilde{h}_s - \widetilde{h}_l - 2)$, donné par

$$e^{-i\langle x',\eta'\rangle}\partial_0^{\widetilde{h_s}}\Big[\sum_{\rho=1}^{\tau} Y_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0) + (-i)^1 \sum_{\rho=1}^{\tau} Y_{l,\rho,C}^{1,B}(t_0) e^{i\varphi_\rho}\Big]_{\{x_0=t_0\}} - (i)^{\widetilde{h_s}-1}\widetilde{\delta}_{s,l} I$$

car $\varphi_{\rho|X_{t_0}} = \psi_{\eta'}(x') = \langle x', \eta'\rangle$. On obtient alors en notant par $\mathcal{A}_{\widetilde{h_s}}^{q,\rho}$ la famille d'opérateurs associés à l'opérateur différentiel $\partial_0^{\widetilde{h_s}}$ et à la phase φ_ρ:

$$\begin{aligned} &\sum_{\rho=1}^{\tau}\sum_{q=0}^{\widetilde{h_s}} \mathcal{A}_{\widetilde{h_s}}^{q,\rho}\big[Y_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0)\big](t_0, x', \eta')(i)^{\widetilde{h_s}-q} \\ &+ \sum_{\rho=1}^{\tau}\sum_{q=0}^{\widetilde{h_s}} \mathcal{A}_{\widetilde{h_s}}^{q,\rho}\big[Y_{l,\rho,C}^{1,B}(t_0)\big](t_0, x', \eta')(-i)(i)^{\widetilde{h_s}-q} - (i)^{\widetilde{h_s}-1}\widetilde{\delta}_{s,l} I \\ &\quad = \sum_{\rho=1}^{\tau} \mathcal{A}_{\widetilde{h_s}}^{0,\rho}\big[Y_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0)\big](t_0, x', \eta')(i)^{\widetilde{h_s}} + \sum_{\rho=1}^{\tau} \mathcal{A}_{\widetilde{h_s}}^{1,\rho}\big[Y_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0)\big](t_0, x', \eta')(i)^{\widetilde{h_s}-1} \\ &\qquad + \sum_{\rho=1}^{\tau} \mathcal{A}_{\widetilde{h_s}}^{0,\rho}\big[Y_{l,\rho,C}^{1,B}(t_0)\big](t_0, x', \eta')(-i)(i)^{\widetilde{h_s}} + \dots \end{aligned}$$

les pointillés designent des symboles

$$\sum_{\rho=1}^{\tau}\sum_{q=2}^{\widetilde{h_s}} \mathcal{A}_{\widetilde{h_s}}^{q,\rho}\big[Y_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0)\big](t_0, x', \eta')(i)^{\widetilde{h_s}-q} + \sum_{\rho=1}^{\tau}\sum_{q=1}^{\widetilde{h_s}} \mathcal{A}_{\widetilde{h_s}}^{q,\rho}\big[Y_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0)\big](t_0, x', \eta')(i)^{\widetilde{h_s}-q}$$

d'ordre inférieur ou égal à $(\widetilde{h}_s - \widetilde{h}_l - 2)$, à l'ordre $(\widetilde{h}_s - \widetilde{h}_l)$:

$$\sum_{\rho=1}^{\tau} \mathcal{A}_{\widetilde{h_s}}^{0,\rho}\big[Y_{l,\rho,C}^{0,B}(t_0)\big](t_0, x', \eta') = 0\,,$$

à l'ordre $(\widetilde{h_s}-\widetilde{h_l}-1)$:

$$\sum_{\rho=1}^{\tau}\mathcal{A}^{1,\rho}_{\widetilde{h_s}}\big[Y^{0,B}_{l,\rho,C}(t_0)\big](t_0,x',\eta')(i)^{\widetilde{h_s}-1}+\sum_{\rho=1}^{\tau}\mathcal{A}^{0,\rho}_{\widetilde{h_s}}\big[Y^{1,B}_{l,\rho,C}(t_0)\big](t_0,x',\eta')=(i)^{\widetilde{h_s}-1}\widetilde{\delta}_{s,l}I,$$

d'où en prenant les $r=\sum_A n_A-\sum_B m_B$ couples $(\widetilde{B}_s,\widetilde{h}_s)$, on a les deux systèmes suivants $(s,l=1,\dots,r;1\le B,C\le m)$:

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{\rho=1}^{\tau}(\xi_0^\rho)^{\widetilde{h_s}}\big[Y^{0,B}_{l,\rho,C}(t_0)\big]=0\\ \displaystyle\sum_{\rho=1}^{\tau}(\xi_0^\rho)^{\widetilde{h_s}}\big[Y^{1,B}_{l,\rho,C}(t_0)\big]+\sum_{\rho=1}^{\tau}\mathcal{A}^{1,\rho}_{\widetilde{h_s}}\big[Y^{0,B}_{l,\rho,C}(t_0)\big]=\widetilde{\delta}_{s,l}I;\end{cases}$$

ces systèmes sont résolus dans [5], ils fournissent les symboles $Y^{0,B}_{l,\rho,C}(t_0)$, puis par récurrence tous les symboles $Y^{j,B}_{l,\rho,C}(t_0)$.

Remarque 3. On en déduit comme précédemment

$$\gamma_s\Big[\sum_{\rho=1}^{\tau}F_{l,\rho}(t_0)\Big]-(i)^{\widetilde{h_s}-1}\widetilde{\delta}_{s,l}I\in L^{-\infty}(X')\,.$$

4. Résolution du problème de Cauchy C^∞

Dans ce dernier paragraphe on exprime explicitement la solution du problème de Cauchy C^∞ associé à h à l'aide des données intiales et des opérateurs intégraux de Fourier déja construits. Posons pour cela $E_l(t_0)=\sum_{\rho=1}^{\tau}F_{l,\rho}(t_0)$, $l=1,\dots,r$. Alors,

1. $E_l(t_0)\in I^{-\widetilde{h}_l-\frac14}\big(X,X',C(t_0)\big)$
2. $hE_l(t_0)=R_l(t_0)=R_{\widetilde{h_l}}(t_0)$ est un opérateur à noyau C^∞ de X' dans X
3. $\gamma_sE_l(t_0)=(i)^{\widetilde{h_s}-1}\widetilde{\delta}_{s,l}I+R_{s,l}(t_0)$, $R_{s,l}(t_0)=R_{\widetilde{h_s},\widetilde{h_l}}(t_0)$ est un opérateur à noyau C^∞ de X' dans X'; $s,l=1,\dots,r$.

Considérons aussi les opérateurs, corrections des $E_l(t_0)$ en t_0,

$$E'_l(t_0)=E_l(t_0)-\sum_{s=1}^{r}\frac{(x_0-t_0)^{\widetilde{h_s}}}{\widetilde{h_s}!}R_{s,l}(t_0)\,,$$

on a

$$\begin{cases}hE'_l(t_0)=R_l(t_0)-\displaystyle\sum_{s=1}^{r}h\Big[\frac{(x_0-t_0)^{\widetilde{h_s}}}{\widetilde{h_s}!}R_{s,l}(t_0)\Big]=R'_l(t_0)=R'_{\widetilde{h_l}}(t_0)\\ R'_l(t_0)\text{ est un opérateur à noyau }C^\infty\text{ de }X'\text{ dans }X\\ \gamma_sE'_l(t_0)=(i)^{\widetilde{h_s}-1}\widetilde{\delta}_{s,l}\ I\ (s,l=1,\dots,r).\end{cases}$$

Définissons à partir de $E'_r(t_0) = E'_{\widetilde{h_r}}(t_0)$ un opérateur matriciel G par

$$\bigoplus_1^m C^\infty(X) \ni w \mapsto (Gw)(x) = \int_{t_0}^{x_0} E'_r(y_0)w(y_0, x')dy_0 \quad (x = (x_0, x') \in X)$$

on obtient alors

$$\begin{cases} hGw = (I - V)w \\ \gamma_s Gw = 0 \quad (s = 1, \ldots, r) \end{cases}$$

où V est l'opérateur définit sur $\bigoplus_1^m C^\infty(X)$ par

$$(Vw)(x) = -\int_{t_0}^{x_0} R'_r(y_0)w(y_0, x')dy_0.$$

Sachant que le noyau de $R'_r(y_0)$, noté $-R(y_0, x', y')$, est de classe C^∞ de X' dans X, alors

$$(-R'_r(y_0))w(y_0, x') = \int_{X'} R(y_0, x', y')w(y_0, y')dy'$$

d'où,

$$(Vw)(x_0, x') = \int_{t_0}^{x_0} \int_{X'} R(y_0, x', y')w(y_0, y')dy'dy_0 \quad (x = (x_0, x') \in X).$$

D'autre part, puisque X' est compacte alors l'espace $\bigoplus_1^m C^0(X')$ des fonctions vectorielles continues sur X' est un espace de Banach, et l'application

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (V(t)v)(x') = \int_{X'} R(t, x', y')v(y')dy', \quad v \in \bigoplus_1^m C^0(X')$$

est continue à valeurs dans $\mathcal{L}\big(\bigoplus_1^m C^0(X'), \bigoplus_1^m C^0(X')\big)$. Soit l'opérateur

$$C^0\Big(\mathbb{R}, \bigoplus_1^m C^0(X')\Big) \to C^0\Big(\mathbb{R}, \bigoplus_1^m C^0(X')\Big)$$

$$w \mapsto Vw$$

$$(Vw)(t)(x') = \int_{t_0}^{t} V(y_0)w(y_0, x')dy_0 = \int_{t_0}^{t} \int_{X'} R(y_0, x', y')w(y_0, x')dy'dy_0.$$

On en déduit alors d'après le lemme de Volterra (cf. [4]) que l'opérateur $(I - V)$ est inversible dans $\bigoplus_1^m C^\infty(X)$.

Soit l'opérateur $G' = G\circ(I-V)^{-1}$, ainsi pour tout $w \in C^0\big(\mathbb{R}, \bigoplus_1^m C^0(X')\big)$:

$$\begin{cases} (h\circ G')(w) = w \\ (\gamma_s \circ G')(w) = 0 \quad (s = 1, \dots, r) \end{cases}$$

on obtient par conséquent le résultat de représentation suivant:

Théorème 2. *La solution du problème de Cauchy* C^∞

$$\begin{cases} hu = f \\ \gamma_s u = g^{(\widetilde{B}_s, \widetilde{h}_s)} = g_s \quad (s = 1, \dots, r) \end{cases}$$

avec les hypothèses précédentes est donnée par

$$u = \sum_{l=1}^{l=r} E_l'(t_0) g_l + G'\Big(f - \sum_{l=1}^{r} R_l'(t_0) g_l\Big).$$

L'unicité de la solution u se démontre par un procédé classique en remarquant que l'opérateur adjoint $\widehat{h}$ de h vérifie aussi les propriétés de h.

Notre travail peut également se completer en montrant que le problème de Cauchy C^∞ est bien posé (cf. [14]). L'étude des propriétés spectrales des opérateurs intégraux de Fourier sur les espaces de Sobolev de type L^2 apparaît aussi nécessaire pour la résolution des équations aux dérivées partielles dans la classe C^∞ (cf. [8, 12, 13]).

Références

[1] Berzin, R.: *Le problème de Cauchy pour un système hyperbolique d'équations linéaires avec une caractéristique double.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, 280 (1975), 443 – 445.

[2] Berzin, R. et Messirdi, B.: *Introduction aux opérateurs intégraux de Fourier.* Publications IRMA de l'Université de Lille I, 7 (1985), Fasicule 2, n°1.

[3] Berzin, R. et Vaillant, J.: *Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples.* J. Math. Pures Appl. 58 (1979)(2), 165 – 216.

[4] Chazarin, J.: *Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante.* Grenoble : Ann. Inst. Fourier 24 (1974)(1), 173 – 202.

[5] Delcambre, A.: *Localisation et conditions d'hyperbolicit é forte pour les opérateurs différentiels matriciels avec les ordres de Leray–Volevîc.* Lille: Thèse de 3ème cycle, janvier 1972.

[6] De Paris, J. C.: *Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples, lien avec l'hyperbolicité.* J. Math. Pures Appl. 51 (1972), 231 – 256.

[7] Duistermaat, J. J.: *Applications of Fourier Integral.* Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole polytechnique (France) 197 (1972).

[8] Hasanov, M.: *A class of unbounded Fourier integral operators.* J. Math. Anal. Appl. 225 (1998), 641 – 651.

[9] Hörmander, L.: *Linear Partial Differential Operators.* Berlin: Springer 1964.

[10] Kajitani, K.: *Cauchy problem for non strictly hyperbolic systems II. Leray-Volevîc's systems and well-posedness.* J. Math. Kyoto University 22 (1982)(2), 261 – 283.

[11] Messirdi, B. et Senoussaoui, A.: *Méthode BKW formelle et spectre des molécules polyatomiques dans l'approximation de Born-Oppenheimer.* Canadian J. Physics 79 (2001)(4), 757 – 771.

[12] Messirdi, B. and Senoussaoui, A.: *On L^2-boundness and L^2-compactness of Fourier integral Operators.* Preprint : Texas mp_arc n° 04 – 149, 2004.

[13] Messirdi, B. and Senoussaoui, A.: *A Spectral Study of Fourier integral operators.* To appear in : Maghreb Mathematical Review "MMR" 2005.

[14] Messirdi, B., Rahmani, A. et Senoussaoui, A.: *Conditions necessaires et suffisantes pour q'un problème de Cauchy C^∞ soit bien posé pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples de multiplicité paire.* Preprint : Texas mp_arc n° 05 – 24, 2005.

[15] Nishitani, T.: *Symmetrization of hyperbolic systems with non degenerate characteristics.* J. Func. Anal. 132 (1995), 251 – 272.

[16] Petkov, V. M.: *On the Cauchy problem for first order hyperbolic systems with multiple characteristics* (in Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR 209 (1973), 795 – 797.

[17] Taylor, M. E.: *Pseudodifferential Operators and Nonlinear Partial Differential Equations.* Boston: Birkhauser 1991.

[18] Vaillant, J.: *Remarques sur les systèmes fortement hyperboliques.* J. Math. Pures et Appl. 50 (1971), 25 – 51.

[19] Vaillant, J.: *Symétrie des opérateurs fortement hyperbolique ayant un point triple caractéristique dans $\mathbb{R}^3$.* Ann. Univ. Ferraza Sez. VII Sc. Math. Suppl. XLV (1999), 339 – 363.

Received 21.06.2004