Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

THESE

Pour l'Obtention du Diplôme de Doctorat en Sciences délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Mathématiques"

présentée par :

Mansouria SAIDANI

Contribution à l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions de certaines équations différentielles à coefficients fonctions complexes

soutenue publiquement devant le jury composé de :

Président :	Dr. Ahmed MEDEGHRI	Professeur à l'université de Mostaganem
Examinateurs :	Dr. Mouffak BENCHOHRA	Professeur à l'université de Sidi Bel Abbès
	Dr. Abdelkader SENOUCI	Professeur à l'université de Tiaret
	Dr. Slimane BELAICHA	Professeur à l'université d'Oran 1
	Dr. Saada HAMOUDA	Professeur à l'université de Mostaganem
Encadreur :	Dr. Benharrat BELAÏDI	Professeur à l'université de Mostaganem

Année Universitaire : 2018 / 2019

DOCTORAT

Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Monsieur Benharrat Belaïdi qui fut pour moi un directeur de thèse attentif et disponible malgré ses nombreuses charges. Sa disponibilité, ses conseils et ses réponses m'ont beaucoup aidé durant ces années de thèse.

Je suis également très honorée que Monsieur Ahmed MEDEGHRI, professeur à l'université de Mostaganem soit le président de mon jury de thèse.

J 'exprime mes plus sincères remerciements aux examinateurs Messieurs : Mouffak BENCHOHRA (Professeur à l'université de Sidi Bel Abbès), Abdelkader SENOUCI (Professeur à l'université de Tiaret), Slimane BELAICHA (Professeur à l'université d'Oran 1) et Saada HAMOUDA (Professeur à l'université de Mostaganem) qui me font l'honneur d'examiner et de juger ce travail.

J'adresse mes plus vifs remerciements à l'ensemble des membres du département de mathématiques, mes amis proches ainsi que toutes les personnes qui de près ou de loin ont aidé à la réalisation de cette thèse.

Mes remerciements vont également à toute ma famille.

Table des matières

Introduction

En 1925, le mathématicien finlandais R. Nevanlinna a développé sa fameuse théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes (également appelée théorie de Nevanlinna) en prouvant son premier et deuxième théorème fondamental qui sont des outils quantitatifs puissants utilisés dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe.

Cette théorie a des applications dans plusieurs domaines des mathématiques tels que les équations différentielles ([4],[58],[80],...etc), la théorie des nombres [64] et même la logique mathématique [52].

En 1942, H.Wittich était le premier qui a fait une étude systématique de l'application de la théorie de Nevanlinna en analyse complexe. Au fil du temps, grâce aux efforts de S.Bank, I. Laine et d'autres, cette théorie s'est améliorée par besoins des problèmes posés dans la théorie des fonctions, en conséquent, ces applications dans ce domaine ont suscité un intérêt croissant.

Dans l'étude des solutions des équations différentielles complexes, la croissance d'une solution est une propriété très importante. K. H. Kwon dans [57] a traité l'hyper ordre des solutions de l'équation différentielle homogène

$$f'' + A_1(z)f' + A_2(z)f = 0,$$

où A_1 et A_2 sont des fonctions entières et pour le cas non homogène, Chen et Yang dans [32] ont étudié la croissance des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes du deuxième ordre.

D'autres résultats sur la croissance des solutions entières et méromorphes des équations d'ordre 2 et d'ordre supérieur de type

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \ldots + A_1 f' + A_0 f = 0 \tag{1}$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \ldots + A_1 f' + A_0 f = F(z), \tag{2}$$

ont été obtenus par plusieurs chercheurs (voir [4],[24], [32],[39], [46], [47], [51],[77]). Dans le cas où les coefficients A_j, $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ sont des polynômes, la croissance des solutions de (1) a été largement étudiée [40].

En 1992, Hellerstein (voir[51]) a prouvé que toutes les solutions transcendantes de (2) sont d'ordre infini, s'il existe un certain $d \in \{0, 1, \ldots k-1\}$ tel que

$$\max_{j \neq d}\{\rho(A_j), \rho(f)\} < \rho(A_d) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Dans [4], Belaïdi a étendu les résultats de ([32],[57]) consacrés à des équations homogènes du deuxième ordre aux équations différentielles linéaires d'ordre supérieur (1) en étudiant l'hyper-ordre des solutions de l'équation (1).

En 2014, Wang et Liu ont traité, dans [77], l'hyper- ordre des solutions de l'équation non homogène (2) pourvu qu'il existe un coefficient dominant.

Pour autant que nous connaissons, Bernal [21] a introduit tout d'abord l'idée d'ordre itératif pour exprimer la croissance rapide des solutions d'équations différentielles linéaires complexes. Par la suite, de nombreux auteurs ont obtenu de nouveaux résultats sur l'ordre itératif des solutions de (1) et (2), voir par exemple [6],[10],[21],[23],[33],[56],[75].

En s'inspirant de ces travaux, dans ce travail, nous avons étudié quelques propriétés des solutions de certaines équations différentielles à coefficients fonctions de la variable complexe.

Le premier chapitre est essentiellement destiné à rappeler quelques définitions, notions et résultats de la théorie de Nevanlinna nécessaires par la suite pour les autres chapitres.

Le deuxième chapitre est consacré aux résultats obtenus dans l'article [65], où nous avons étudié la croissance des solutions de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)\, e^{P(z)} f^{(k-1)} + \ldots + A_0(z)\, e^{P(z)} f = e^{P(z)} F_1(z) + e^{Q(z)} F_2(z),$$

où $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ et $Q(z) = b_n z^n + \ldots + b_0$ sont des polynômes $(n \geq 1)$ avec a_q, b_q, $(q = 0, 1, \ldots, n)$ sont des nombres complexes tels que $a_n b_n \neq 0$ et $b_q = c a_q, c > 1, q = 0, \ldots, n$, $A_j (\not\equiv 0)$, $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$, F_i, $(i = 1, 2)$ sont des fonctions entières d'ordre fini. Nous avons étudié, également, l'hyper ordre des solutions de l'équation différentielle linéaire non homogène

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)\, e^{P_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + \ldots + A_1(z)\, e^{P_1(z)} f' + A_0(z)\, e^{P_0(z)} f = e^{Q(z)} F(z),$$

où $A_j (\not\equiv 0)$, $(j = 0, 1, \ldots, k-1)\, et\ F \not\equiv 0$ sont des fonctions entières d'ordre inférieur strictement à n, $P_j(z) = a_{j,n} z^n + \ldots + a_{j,0}$ et $Q(z) = b_n z^n + \ldots + b_0$ sont des polynômes $(n \geq 1)$, avec $a_{j,q}, b_{j,q}$, $j = 0, 1, \ldots, k; q = 0, 1, \ldots, n$ sont des nombres complexes

Nos résultats généralisent les résultats précédents dus à Habib et Belaïdi [17], [42].

Le troisième chapitre est un résultat de l'article [68], dans lequel nous avons étudié la croissance des solutions méromorphes de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + (A_{k-1,1}(z) e^{P_{k-1}(z)} + A_{k-1,2}(z) e^{Q_{k-1}(z)}) f^{(k-1)} + \ldots + (A_{0,1}(z) e^{P_0(z)} + A_{0,2}(z) e^{Q_0(z)}) f = F(z)$$

où $A_{i,j} \not\equiv 0$, $(j = 0, 1, \ldots k-1)$ et F sont des fonctions méromorphes d'ordre fini et P_j, Q_j $(j = 0, 1, \ldots, k-1; i = 1, 2)$ sont des polynômes de degré $n \geqslant 1$. Sous certaines conditions, nous avons prouvé que si $F \equiv 0$, alors toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée est d'ordre infini et satisfait $\rho_2(f) = n$ et si $F \not\equiv 0$, alors il existe au plus une solution exceptionnelle f_0 d'ordre fini, et toute autre solution méromorphe transcendante satisfait $\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty$ et $\overline{\lambda_2}(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) \leqslant \max\{n, \rho(F)\}$. Nos résultats étendent les résultats précédents de Zhan et Xiao [84].

Les résultats de l'article [66] sont les donnés du chapitre 4, où nous avons étudié la croissance des solutions des équations différentielles linéaires (1) et (2) où $A_0 \not\equiv 0, A_1$

,...,A_{k-1} et $F \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini. Nous avons amélioré et étendu certains résultats de Belaïdi et Andasmas obtenus dans [2], [13] en utilisant le concept d'ordre itératif et en considérant un certain coefficient dominant $A_s (s = 0, 1, ..., k-1)$. Sous certaines conditions sur les coefficients, nous avons obtenu une estimation de l'ordre p-itératif et de l'exposant de convergence p-itératif des zéros des solutions des équations précédentes.

Le cinquième chapitre de cette thèse donne les résultats de l'article [67] où nous avons travaillé sur l'ordre p-itératif des solutions des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes d'ordre supérieur

$$A_k f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + ... + A_1 f' + A_0 f = 0 \tag{3}$$

et

$$A_k f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + ... + A_1 f' + A_0 f = F(z) \tag{4}$$

où $A_0 \not\equiv 0, A_1, ..., A_k \not\equiv 0$ et $F \not\equiv 0$ sont des fonctions entières d'ordre p-itératif fini. Aussi, un résultat plus général que ceux de Belaïdi [4], Long et Zhu [63] a été établi en utilisant le concept de l'ordre itératif et nous avons obtenu des estimations générales de l'exposant de convergence p-itératif des zéros et de l'ordre p-itératif des solutions des équations (3) et (4).

Le sixième chapitre traite les résultats de l'article [70] ; où nous avons étudié l'ordre itératif des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes d'ordre supérieur

$$A_k f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + ... + A_1 f' + A_0 f = F(z),$$

où $A_0 \not\equiv 0, A_1, ... et A_k \not\equiv 0$ sont des fonctions entières d'ordre p-itératif fini et $F \not\equiv 0$ est une fonction entière d'ordre p-itératif infini. Nous avons amélioré quelques résultats de Chen [25] et El Farissi [34] en utilisant l'ordre itératif et nous avons obtenu des estimations générales de l'exposant de convergence itératif des zéros, l'ordre p-itératif des solutions et l'exposant de convergence itératif des zéros des dérivées d'ordre arbitraire des solutions de l'équation (4).

Dans le dernier chapitre, nous présentons les résultats de l'article [69] où nous avons traité les solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur de type (3) et (4) dans lesquelles les coefficients sont des fonctions entières d'ordre $[p, q]$ fini. Nous avons obtenu des résultats sur l'ordre $[p, q]$ et le $[p, q]$-exposant de la convergence des zéros des solutions de ces équations. Cette partie est une amélioration des résultats trouvés dans le chapitre cinq (l'article [67]) de l'ordre p-itératif à un ordre $[p, q]$.

Ce travail se termine avec une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre 1

La théorie de Nevanlinna

Le principal outil utilisé tout au long de cette thèse est la théorie de Nevanlinna. Ceci fournit un moyen d'analyser les fonctions méromorphes. Pour cette raison, dans ce chapitre, nous allons donner les définitions de base de la théorie de Nevanlinna sur les fonctions méromorphes et rappeler quelques propriétés sur la croissance de ces fonctions qui sont nécessaires pour ce travail.

Pour ne pas alourdir ce manuscrit, nous laissons le soin aux personnes intéressées de consulter les références ([16], [37], [48], [58], [82]), pour plus de détails.

1 Fonction caractéristique de Nevanlinna

Théorème 1.1 ([58]) *(Formule de Jensen) Soient f une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0, +\infty$ et $a_1, a_2, ..., a_n$ (respectivement $b_1, b_2, ..., b_m$) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors,*

$$\log\left|f(0)\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \log\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r} \log\frac{r}{|a_j|}.$$

Définition 1.1 ([58]) *Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on définit $\log^+ \alpha$ par*

$$\log^+ \alpha = \max(0, \log\alpha) = \begin{cases} \log\alpha, & pour \quad \alpha > 1, \\ 0, & pour \quad 0 < \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

Le lemme suivant contient quelques propriétés du $\log^+$.

Lemme 1.1 *([16]) Soient $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ des nombres réels strictement positifs. Alors, nous avons*

(a) $\log\alpha \leqslant \log^+ \alpha$,

(b) $\log^+ \alpha \leqslant \log^+ \beta$ *pour* $\alpha \leqslant \beta$,

(c) $\log\alpha = \log^+ \alpha - \log^+ \frac{1}{\alpha}$,

(d) $|\log\alpha| = \log^+ \alpha + \log^+ \frac{1}{\alpha}$,

(e) $\log^+ \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \log^+ \alpha_i$,

(f) $\log^+ \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \leqslant \log n + \sum_{i=1}^{n} \log^+ \alpha_i$.

Preuve Les propriétés (a), (b) sont des conséquences immédiates de la définition 1.1 et la monotonie de la fonction logarithme.

Montrons (c), (d), (e) et (f). Pour (c), Nous avons

$$\begin{aligned}\log\alpha^{+}-\log^{+}\frac{1}{\alpha} &= \max(\log\alpha,0)-\max\left(\log\frac{1}{\alpha},0\right)\\ &= \max(\log\alpha,0)-\max(-\log\alpha,0)\\ &= \log\alpha.\end{aligned}$$

(d) est obtenue comme suit

$$\begin{aligned}\log\alpha^{+}+\log^{+}\frac{1}{\alpha} &= \max(\log\alpha,0)+\max\left(\log\frac{1}{\alpha},0\right)\\ &= \max(\log\alpha,0)+\max(-\log\alpha,0)\\ &= |\log\alpha|.\end{aligned}$$

Pour (e), si $\prod_{j=1}^{n}\alpha_j\leqslant 1$, alors l'inégalité est évidente. Supposons que $\prod_{j=1}^{n}\alpha_j>1$. Alors,

$$\begin{aligned}\log^{+}\left(\prod_{j=1}^{n}\alpha_j\right) &= \log\left(\prod_{j=1}^{n}\alpha_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\log\alpha_j\\ &\leq \sum_{j=1}^{n}\log^{+}\alpha_j,\ \text{d'après }(a).\end{aligned}$$

Enfin, nous avons (f) en utilisant (b) et (e). En effet

$$\begin{aligned}\log^{+}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right) &\leqslant \log^{+}\left(n\max_{1\leq j\leq n}\alpha_j\right)\\ &\leqslant \log n+\log^{+}\left(\max_{1\leq j\leq n}\alpha_j\right)\\ &\leqslant \log n+\sum_{j=1}^{n}\log^{+}\alpha_j.\end{aligned}$$

Définition 1.2 ([48], [58]) *Soit f une fonction méromorphe non constante. Pour tout nombre complexe a. On définit $N(r,a,f)$ (respectivement $\overline{N}(r,a,f)$) la fonction a-points (respectivement a-points distincts) de la fonction f dans le disque $\{z:|z|\leqslant r\}$ par*

$$N(r,a,f)=N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\int_0^r\frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}dt+n(0,a,f)\log r,\quad si\quad a\neq\infty,$$

$$N(r,\infty,f)=N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t}dt+n(0,\infty,f)\log r,\ si\ a=\infty,$$

$$\overline{N}(r,a,f)=\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\int_0^r\frac{\overline{n}(t,a,f)-\overline{n}(0,a,f)}{t}dt+\overline{n}(0,a,f)\log r,\quad si\quad a\neq\infty,$$

et

$$\overline{N}(r,\infty,f)=\overline{N}(r,f)=\int_0^r\frac{\overline{n}(t,\infty,f)-\overline{n}(0,\infty,f)}{t}dt+\overline{n}(0,\infty,f)\log r,\ si\ a=\infty,$$

où $n\left(t,a,f\right)$ *désigne le nombre de zéros de l'équation* $f(z)=a$ *situés dans le disque* $\{z:|z|\leqslant t\}$*, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.*

$n\left(t,\infty,f\right)$ *désigne le nombre de pôles de la fonction* f *dans le disque* $\{z:|z|\leqslant t\}$*, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité.*

$\overline{n}\left(t,a,f\right)$ *désigne le nombre de zéros distincts de l'équation* $f(z)=a$ *dans le disque* $\{z:|z|\leqslant t\}$

et $\overline{n}\left(t,\infty,f\right)$ *désigne le nombre de pôles distincts de la fonction* f *dans le disque* $\{z:|z|\leqslant t\}$.

Lemme 1.2 ([48], [58]) *Soit* f *une fonction méromorphe avec a-points* $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ *dans le disque* $\{z:|z|\leqslant r\}$ *tels que :* $0<|\alpha_1|<|\alpha_2|<...<|\alpha_n|\leqslant r$ *et* $f(0)\neq 0$*, chaque racine est comptée selon sa multiplicité. Alors,*

$$\int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t}dt=\int_0^r \frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}dt=\sum_{0<|\alpha_j|\leqslant r}\log\frac{r}{|\alpha_j|}.$$

Proposition 1.1 ([48], [58]) *Soit* f *une fonction méromorphe représentée par sa série de Laurent à l'origine*

$$f(z)=\sum_{j=m}^{+\infty}c_j z^j,\ \ c_m\neq 0,\ \ m\in\mathbb{Z}.$$

Alors,

$$\log|c_m|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta+\mathrm{N}\left(r,f\right)-\mathrm{N}\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

Définition 1.3 ([48], [58]) *Soient* f *une fonction méromorphe non constante et* a *un nombre complexe, on définit*

$$m\left(r,a,f\right)=m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{\left|f\left(re^{i\theta}\right)-a\right|}d\theta,\ \ si\quad a\neq\infty,$$

et

$$m\left(r,\infty,f\right)=m\left(r,f\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta.$$

$m\left(r,a,f\right)$ *est appelée fonction de proximité de la fonction* f *au point* a.

Définition 1.4 [58] *Soit* f *une fonction méromorphe non constante. La fonction caractéristique de Nevanlinna* $\mathrm{T}\left(r,f\right)$ *de la fonction méromorphe* f *est définie par*

$$\mathrm{T}\left(r,f\right)=m\left(r,f\right)+\mathrm{N}\left(r,f\right).$$

Remarque 1.1 *La fonction caractéristique de Nevanlinna permet de mesurer la croissance d'une fonction méromorphe.*

Exemple 1.1 *Soit* $f(z)=e^{\alpha z}$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$. *Nous avons* $n\left(t,f\right)=0$ *car* $e^{\alpha z}$ *n'admet pas de pôles dans le disque* $\{z:|z|\leqslant r\}$ *et* $\mathrm{N}\left(r,f\right)=0$.

De plus,

$$\begin{aligned} m\left(r,f\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|e^{\alpha r\cos\theta+\alpha r i\sin\theta}\right|d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\alpha r\cos\theta d\theta \\ &= \frac{\alpha r}{\pi}. \end{aligned}$$

Par suite

$$T\left(r,f\right)=\frac{\alpha r}{\pi}.$$

Exemple 1.2 *Pour* $f(z)=\frac{e^{\alpha z}}{z^2}$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$. *nous avons* $n\left(t,\infty,f\right)=2$ *et* $n\left(0,\infty,f\right)=2$. *Donc* $N\left(r,f\right)=2\log r$ *et*

$$\begin{aligned}
m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta}|d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{e^{\alpha r\cos\theta+i\alpha r\sin\theta}}{r^2e^{2i\theta}}\right|d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{|e^{\alpha r\cos\theta+i\alpha r\sin\theta}|}{r^2}d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\alpha r\cos\theta-2\log r)d\theta\\
&= \frac{\alpha r}{\pi}-\log r.
\end{aligned}$$

2 Premier théorème fondamental de Nevanlinna dans le plan complexe

Théorème 1.2 ([48], [58]) *Soit f une fonction méromorphe et soit*

$$f(z)-a=\sum_{j=m}^{+\infty}c_jz^j,\ \ c_m\neq 0,\ \ m\in\mathbb{Z},\ \ z\in\mathbb{C}$$

la série de Laurent de $f-a$ $(a\in\mathbb{C})$ à l'origine. Alors, pour tout nombre complexe a, nous avons

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=T(r,f)-\log|c_m|+\varphi(r,a),$$

où $\left|\varphi(r,a)\right|\leqslant\log 2+\log^+|a|$.

Preuve Premièrement, montrons le théorème pour $a=0$. D'après la Proposition 1.1 et la propriété (c) du Lemme 1.1, nous avons

$$\begin{aligned}
\log|c_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta+N(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{\left|f(re^{i\theta})\right|}d\theta+N(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)\\
&= m(r,f)-m(r,0,f)+N(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)\\
&= m(r,f)-m(r,\frac{1}{f})+N(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)=m(r,f)+N(r,f)-\log|c_m|.$$

D'où

$$T\left(r,\frac{1}{f}\right)=T(r,f)-\log|c_m| \tag{1.1}$$

où $\varphi(r,0)=0$.

Montrons le théorème dans le cas général $a\neq 0$. Posons $h=f-a$. Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned}
N\left(r,\frac{1}{h}\right) &= N\left(r,\frac{1}{f-a}\right),\\
m\left(r,\frac{1}{h}\right) &= m\left(r,\frac{1}{f-a}\right),\\
N(r,h) &= N(r,f-a)=N(r,f).
\end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\log^+|h|=\log^+\left|f-a\right|\leq\log^+\left|f\right|+\log^+|a|+\log 2.$$

$$\log^+\left|f\right|=\log^+|h+a|\leqslant\log^+|h|+\log^+|a|+\log 2.$$

En intégrant ces deux inégalités, nous obtenons

$$m(r,h)\leqslant m(r,f)+\log^+|a|+\log 2,$$

$$m(r,f)\leqslant m(r,h)+\log^+|a|+\log 2.$$

En posant $\varphi(r,a)=m(r,h)-m(r,f)$, nous avons

$$-(\log^+|a|+\ln 2)\leqslant\varphi(r,a)\leqslant\log^+|a|+\log 2.$$

D'où $\left|\varphi(r,a)\right|\leqslant\log^+|a|+\log 2$. Alors,

$$\begin{aligned}
T(r,\frac{1}{f-a})=T(r,\frac{1}{h}) &= m(r,\frac{1}{h})+N(r,\frac{1}{h})\\
&= m(r,h)+N(r,h)-\log|c_m|\\
&= m(r,f)+N(r,f)+\varphi(r,a)-\log|c_m|\\
&= T(r,f)+\varphi(r,a)-\log|c_m|.
\end{aligned}$$

Remarque 1.2 *Le premier théorème fondamental peut être exprimé comme suit :*

$$T(r,\frac{1}{f-a})=T(r,f)+O(1),\quad r\to+\infty.$$

Le lemme suivant résume les propriétés principales de la fonction caractéristique de Nevanlinna.

Lemme 1.3 ([48]) *Soient $f, f_1, f_2, ..., f_n$ des fonctions méromorphes et a, b, c, d des constantes complexes telles que $ab-cd\neq 0$. Alors,*

1.
$$T\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right)\leqslant\sum_{j=1}^{n}T\left(r,f_j\right)+\log n,\quad \textit{pour}\quad n\geq 1.$$

2.
$$T\left(r,\prod_{j=1}^{n}f_j\right)\leqslant\sum_{j=1}^{n}T(r,f_j),\ pour\ n\geq 1.$$

3.
$$T(r,f^n)=nT(r,f),\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

4.
$$T\left(r,\frac{af+b}{cf+d}\right)=T(r,f)+O(1),\ f\not\equiv\frac{-d}{c}.$$

Preuve

1. Nous avons
$$T\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right)=m\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right)+N\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right)$$

et

$$\begin{aligned}m\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\sum_{j=1}^{n}f_j(re^{i\theta})\right|d\theta\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{n}\log^+\left|f_j(re^{i\theta})\right|+\log n\right)d\theta\\ &= \sum_{j=1}^{n}m(r,f_j)+\log n.\end{aligned}$$

D'autre part, comme la multiplicité du pôle de $\sum_{j=1}^{n}f_j$ en z_0 ne dépasse pas la somme des multiplicités des pôles de $f_j\,(j=1,\dots,n)$ en z_0, alors

$$N\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right)\leqslant\sum_{j=1}^{n}N(r,f_j).$$

D'où

$$\begin{aligned}T\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right) &= m\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right)+N\left(r,\sum_{j=1}^{n}f_j\right)\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n}T(r,f_j)+\log n\,.\end{aligned}$$

2. Nous avons
$$T\left(r,\prod_{j=1}^{n}f_j\right)=m\left(r,\prod_{j=1}^{n}f_j\right)+N\left(r,\prod_{j=1}^{n}f_j\right).$$

Comme

$$\begin{aligned}m\left(r,\prod_{j=1}^{n}f_j\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\prod_{j=1}^{n}f_j(re^{i\theta})\right|d\theta\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\log^+\left|f_j(re^{i\theta})\right|d\theta\\ &= \sum_{j=1}^{n}m(r,f_j),\end{aligned}$$

de plus, la multiplicité du pôle de $\prod_{j=1}^{n} f_j$ en z_0 ne dépasse pas la somme des multiplicités des pôles de $f_j (j = 1, ..., n)$ en z_0, ce qui donne

$$N(r, \sum_{j=1}^{n} f_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n} N(r, f_j).$$

Par conséquent

$$T(r, \prod_{j=1}^{n} f_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n} T(r, f_j).$$

3. Nous avons $|f| \leqslant 1$ équivaut à $|f|^n \leqslant 1$.

a) Si $|f| \leqslant 1$, alors

$$m(r, f^n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f^n(re^{i\theta}) \right| d\theta = 0$$

et

$$N(r, f^n) = nN(r, f).$$

D'où

$$T(r, f^n) = nT(r, f).$$

b) Si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned} m(r, f^n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f^n(re^{i\theta}) \right| d\theta \\ &= nm(r, f), \end{aligned}$$

et

$$N(r, f^n) = nN(r, f).$$

Ainsi,

$$T(r, f^n) = nT(r, f).$$

4. Posons $g = \frac{af+b}{cf+d}$, avec $ad - cb \neq 0$ alors nous avons

$$gcf + gd = af + b \Leftrightarrow f = \frac{b - gd}{gc - a}.$$

Il suffit, donc, de montrer que $T(r, g) \leqslant T(r, f) + O(1)$. Nous distinguons deux cas.

Cas 1. Si $c = 0$, alors

$$\begin{aligned} T(r, g) &= T\left(r, \frac{af + b}{d}\right) \\ &\leqslant T\left(r, \frac{a}{d}\right) + T(r, f) + T(r, \frac{b}{d}) + \log 2 \\ &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

Cas 2. Si $c \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
T(r,g) &= T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) \\
&= T\left(r, \frac{\frac{a}{c}(cf+d) - \frac{ad}{c} + b}{cf+d}\right) \\
&= T\left(r, \frac{a}{c} + \frac{cb-ad}{c^2} . \frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) \\
&\leqslant T\left(r, \frac{cb-ad}{c^2} . \frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) + O(1) \\
&\leqslant T\left(r, \frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) + O(1) \\
&\leqslant T\left(r, f+\frac{d}{c}\right) + O(1) \\
&\leqslant T(r,f) + O(1).
\end{aligned}$$

Exemple 1.3 *Soit* $f(z) = \frac{4e^z-9}{e^z+1}$. *Alors,*

$$\begin{aligned}
T(r,f) &= T(r, \frac{4e^z-9}{e^z+1}) \\
&= T(r,e^z) + O(1). \\
&= \frac{r}{\pi} + O(1).
\end{aligned}$$

Théorème 1.3 ([37]) *Soient f une fonction méromorphe et p un entier naturel. Posons $f_1(z) = f(z^p)$. Alors,*

$$m(r,f_1) = m(r^p,f), N(r,f_1) = N(r^p,f), T(r,f_1) = T(r^p,f).$$

Corollaire 1.1 ([37]) *Soient f une fonction méromorphe et p un entier naturel non nul. Posons $f_1(z) = f(z^{\frac{1}{p}})$. Alors,*

$$m(r,f_1) = m(r^{\frac{1}{p}},f), N(r,f_1) = N(r^{\frac{1}{p}},f), T(r,f_1) = T(r^{\frac{1}{p}},f).$$

Théorème 1.4 ([37]) *Soient f une fonction méromorphe et $A \neq 0$. Posons $f_1(z) = f(Az)$. Alors,*

$$m(r,f_1) = m(|A|r,f), N(r,f_1) = N(|A|r,f) - n(0,f)\log|A|, T(r,f_1) = T(|A|r,f) - n(0,f)\log|A|.$$

Preuve. Pour la preuve des Théorèmes 1.3, 1.4 et le Corollaire 1.1 voir le livre [16].

3 La croissance et la distribution des valeurs d'une fonction entière ou méromorphe

3.1 L'ordre de croissance et l'hyper-ordre d'une fonction

Définition 1.5 ([48], [58], [59]) *Soit f une fonction entière. L'ordre de croissance et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par*

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r},$$

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r},$$

où $M(r,f) = \max\{|f(z)|, |z| = r\}$. *Si* f *est une fonction méromorphe, alors l'ordre de croissance et l'hyper-ordre de* f *sont définis par*

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 1.4 *La fonction* $f(z) = e^{\frac{3}{4}z^n}$ *est d'ordre* $\rho(f) = n$.

Exemple 1.5 *La fonction* $f(z) = \exp\{\exp(\alpha z)\}$ *est d'ordre* $\rho(f) = +\infty$ *et d'hyper ordre* $\rho_2(f) = 1$.

Remarque 1.3 *Si* f *est entière, alors la définition de l'ordre de* f *en utilisant* $M(r,f)$ *coincide avec la définition de l'ordre de* f *en utilisant* $T(r,f)$.

Proposition 1.2 ([48], [58]) *Soient* f *et* g *deux fonctions méromorphes. Nous avons*

1. $\rho(f+g) \leqslant \max(\rho(f), \rho(g))$,
2. $\rho(fg) \leqslant \max(\rho(f), \rho(g))$.

Plus particulier, si $\rho(f) < \rho(g)$, *alors* $\rho(f+g) = \rho(fg) = \rho(g)$.

Exemple 1.6 *Soit* $f(z) = z + 3 + \frac{e^{z^2}}{z+1}$. *Nous avons* $\rho\left(z+3+\frac{e^{z^2}}{z+1}\right) = \rho\left(\frac{e^{z^2}}{z+1}\right) = \rho\left(e^{z^2}\right) = 2$.

3.2 L'ordre inférieur et l'hyper-ordre inférieur d'une fonction

Définition 1.6 ([48]) *Soit* f *une fonction entière. L'ordre inférieur et l'hyper-ordre inférieur de* f *sont définis respectivement par*

$$\mu(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r},$$

$$\mu_2(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r}.$$

Si f *est méromorphe, l'ordre inférieur* $\mu(f)$ *est défini par*

$$\mu(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

et l'hyper-ordre inférieur de f *est donné par*

$$\mu_2(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 1.7 *Soit* $f(z) = \cosh(\sin z)$. *Alors,* $\mu(f) = +\infty$ *et* $\mu_2(f) = 1$.

3.3 L'exposant de convergence d'une fonction

L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros d'une fonction

Définition 1.7 ([48], [58]) *Soit f une fonction méromorphe. L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros de la fonction f sont définis respectivement par*

$$\lambda(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

$$\lambda_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

Exemple 1.8 *L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros de la fonction $f(z) = e^{e^z} - e^z$ sont égaux respectivement à $+\infty$ et 1.*

Remarque 1.4 *L'exposant de convergence des zéros de la fonction $\frac{1}{f}$ est aussi dit exposant de convergence des pôles de la fonction f.*

L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts d'une fonction

Définition 1.8 ([58]) *L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts d'une fonction méromorphe f sont définis respectivement par*

$$\overline{\lambda}(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

$$\overline{\lambda}_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

3.4 L'exposant de convergence des pôles d'une fonction

Définition 1.9 [58] *Soit f une fonction méromorphe. L'exposant de convergence de la suite des pôles de f est défini par*

$$\lambda\left(\frac{1}{f}\right) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log N(r, f)}{\log r}.$$

Exemple 1.9 *L'exposant de convergence de la suite des pôles de la fonction $f(z) = \frac{e^{e^z}}{z}$ est nul.*

4 L'ordre p-itératif, l'ordre p-itératif inférieur, l'exposant de convergence p-itératif d'une fonction

4.1 L'ordre p-itératif d'une fonction

Afin de généraliser quelques résultats sur les propriétés des solutions de certaines équations différentielles, nous avons besoin de définir l'ordre p-itératif d'une fonction méromorphe, mais pour le faire il faut d'abord définir les expressions suivantes sur l'exponentielle et sa fonction réciproque : pour tout $r \in \mathbb{R}$, on pose $\exp_1 r := e^r$ et $\exp_{p+1} r := \exp\left(\exp_p r\right)$, $p \in \mathbb{N}$. De la même façon, nous définissons

$$\log_1 r := \log r$$

et

$$\log_{p+1} r := \log\left(\log_p r\right),$$

$p \in \mathbb{N}$ et ceci pour r suffisamment grand.

Définition 1.10 ([58]) *Soit f une fonction méromorphe. Nous définissons l'ordre p-itératif de croissance de la fonction f par*

$$\rho_p\left(f\right) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p T(r,f)}{\log r} \quad \left(p \geqslant 1 \quad un\ entier\right),$$

où $T(r,f)$ est la fonction caractéristique de Nevanlinna. Si f est entière, alors l'ordre p-itératif de la fonction f est défini par

$$\rho_p\left(f\right) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log r} \quad \left(p \geqslant 1 \quad un\ entier\right),$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} \left|f(z)\right|$.

Remarque 1.5 $\rho_1\left(f\right)$ *coïncide avec l'ordre usuel.*

Exemple 1.10 *Pour la fonction* $f(z) = \exp_k(\alpha z)$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $k \geqslant 1$ *nous avons*

$$\rho_p\left(f\right) = \begin{cases} +\infty \ si\ p < k, \\ 1 \quad si\ p = k, \\ 0 \quad si\ p > k. \end{cases}$$

4.2 L'ordre p-itératif inférieur d'une fonction

Définition 1.11 ([48], [58]) *Soit f une fonction entière. L'ordre $p-$itératif inférieur de f est défini par*

$$\mu_p\left(f\right) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log_{p+1} M\left(r,f\right)}{\log r}.$$

Si f est méromorphe, alors l'ordre $p-$itératif inférieur $\mu_p\left(f\right)$ est

$$\mu_p\left(f\right) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log_p T\left(r,f\right)}{\log r}.$$

Exemple 1.11 *Soit* $f(z) = \frac{e^{e^z}}{z}$. *Alors,* $\mu_2\left(f\right) = 1$.

4.3 L'exposant de convergence p-itératif d'une fonction

Définition 1.12 ([48], [58]) *Soit f une fonction méromorphe. L'exposant de convergence p-itératif des zéros de la fonction f est donné par*

$$\lambda_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

et l'exposant de convergence p-itératif des zéros distincts de la fonction f est défini par

$$\overline{\lambda}_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

Définition 1.13 ([48], [58]) *Soit f une fonction méromorphe. L'exposant de convergence p-itératif de la suite des pôles de f est défini par l'expression*

$$\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log_p N(r, f)}{\log r}.$$

De plus, on définit l'indice de croissance comme suit.

Définition 1.14 ([58]) *L'indice de croissance de l'ordre p-itératif d'une fonction méromorphe f est défini par*

$$i(f) = \begin{cases} 0 & si \quad f \quad \text{est rationnelle,} \\ \min\{j \in \mathbb{N} : \rho_j(f) < +\infty\} & si \quad f \quad \text{est transcendante, avec} \quad \rho_j(f) < +\infty \quad \text{existent,} \\ +\infty & si \quad \rho_j(f) = +\infty \quad \text{pour tout} \quad j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Exemple 1.12 *L'indice de croissance de l'ordre p-itératif de la fonction $f(z) = \exp(\exp z^n)$ est égal à 2.*

Définition 1.15 ([56]) *Le degré de finitude de l'exposant de convergence itératif des zéros d'une fonction méromorphe f est donné par*

$$i_\lambda(f, a) = \begin{cases} 0 & si \quad n(r, a) = O(\log r), \\ \min\{j \in \mathbb{N}, \lambda_j(f, a) < +\infty\} & si \quad \text{pour } j \in \mathbb{N} \quad \lambda_j(f, a) < +\infty, \\ +\infty, & si \quad \lambda_j(f, a) = +\infty \quad \text{pour tout} \quad j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

5 L'ordre $[p, q]$, l'ordre $[p, q]$ inférieur, l'exposant de convergence $[p, q]$ d'une fonction

5.1 L'ordre $[p, q]$ d'une fonction

Définition 1.16 ([55], [61]) *Soient p, q deux entiers tels que $p \geqslant q \geqslant 1$ et f une fonction méromorphe. L'ordre $[p, q]$ de croissance de la fonction f est défini par*

$$\rho_{[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p T(r, f)}{\log_q r}.$$

Pour une fonction entière f, l'ordre $[p,q]$ de f est donné par

$$\rho_{[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log_q r},$$

où $\quad M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Remarque 1.6 *D'après la Définition 1.16, nous notons*

$$\begin{aligned}
\rho_{[1,1]}(f) &= \rho(f), \\
\rho_{[2,1]}(f) &= \rho_2(f), \\
\rho_{[p,1]}(f) &= \rho_p(f).
\end{aligned}$$

Exemple 1.13 *Pour la fonction $f(z) = e^{e^{2z^2}}$, nous avons* $\quad \rho_{[2,1]}(f) = 2$.

5.2 L'ordre $[p,q]$ inférieur d'une fonction

Définition 1.17 ([85]) *Soient f une fonction entière et p, q des entiers tels que $p \geqslant q \geqslant 1$. L'ordre $[p,q]$ inférieur de f est défini par*

$$\mu_{[p,q]}(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log_q r}.$$

Si f est méromorphe, alors son ordre $[p,q]$ inférieur est défini par

$$\mu_{[p,q]}(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log_p T(r,f)}{\log_q r}.$$

5.3 Le $[p,q]$ exposant de convergence d'une fonction

Définition 1.18 ([61], [62]) *Soient p, q deux entiers tels que $p \geqslant q \geqslant 1$ et f une fonction méromorphe. Le $[p,q]$ exposant de convergence de la suite de a-points de la fonction f est donné par*

$$\lambda_{[p,q]}(f-a) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p N(r,\frac{1}{f-a})}{\log_q r}.$$

Le $[p,q]$ exposant de convergence de la suite de a-points distincts de la fonction f est défini par

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f-a) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p \overline{N}(r,\frac{1}{f-a})}{\log_q r}.$$

Afin de développer nos résultats, nous aurons besoin de différents types de mesures et de densités pour des ensembles de points sur l'axe réel positif.

6 La mesure et la densité des ensembles

6.1 La mesure linéaire, la mesure logarithmique

Définition 1.19 ([56], [57]) *La mesure linéaire d'un ensemble* $E \subset [0, +\infty)$ *est définie par*

$$m(E) = \int_E dt.$$

La mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty)$ *est définie par*

$$m_l(F) = \int_F \frac{dt}{t}.$$

Exemple 1.14 *La mesure linéaire de l'ensemble* $E = [2,6] \cup [7,8] \subset [0, +\infty)$ *est*

$$m(E) = \int_2^6 dt + \int_7^8 dt = 5.$$

6.2 La densité des ensembles

Définition 1.20 ([49], [56], [57]) *La densité supérieure de l'ensemble* $E \subset [0, +\infty)$ *est définie par*

$$\overline{dens}(E) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{m(E \cap [0, r])}{r}.$$

Définition 1.21 ([56], [57]) *La densité inférieure de l'ensemble* $E \subset [0, +\infty)$ *est définie par*

$$\underline{dens}(E) = \liminf_{r \to +\infty} \frac{m(E \cap [0, r])}{r}.$$

Exemple 1.15 *La densité inférieure et la densité supérieure de l'ensemble* $H = [1,2] \subset [0, +\infty)$ *sont*

$$\underline{dens} H = \overline{dens} H = 0.$$

Définition 1.22 ([56], [57]) *La densité logarithmique inférieure d'un ensemble* $F \subset [1, +\infty)$ *est définie par*

$$\underline{\log dens}(F) = \liminf_{r \to +\infty} \frac{m_l(F \cap [1, r])}{\log r}.$$

La densité logarithmique supérieure d'un ensemble $F \subset [1, +\infty)$ *est définie par*

$$\overline{\log dens}(F) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{m_l(F \cap [1, r])}{\log r}.$$

Exemple 1.16 *Posons* $F = [5, +\infty[$, *nous avons*

$$\begin{aligned} \overline{\log dens}(F) &= \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{m_l(F \cap [1, r])}{\log r} \\ &= \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{m_l([5, r])}{\log r} \\ &= 1 > 0. \end{aligned}$$

Proposition 1.3 *([13]) Pour tout ensemble* $H \subset (1, +\infty)$, *les assertions suivantes sont vérifiées :*

i) si $m_l(H) = +\infty$, *alors* $m(H) = +\infty$,
ii) si $\overline{dens}(H) > 0$, *alors* $m(H) = +\infty$,
iii) si $\overline{\log dens}(H) > 0$, *alors* $m_l(H) = +\infty$.

6.3 Éléments de la théorie de Wimam-Valiron

Indice central et le terme maximal

Définition 1.23 ([58], [79]) *Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une fonction entière. On définit le terme maximal de f par $\mu(r, f) = \max\limits_{n\geq 0} |a_n| r^n$ et on définit l'indice central de la fonction f par*

$$\nu_r(f) = \max\left\{m : \mu(r, f) = |a_m| r^m\right\}.$$

Exemple 1.17 *Pour $f(z) = a_n z^n + ... + a_0, a_n \neq 0$, alors quand $|z| = r \to +\infty$, nous avons le terme maximal est $|a_n| r^n$ et par conséquent $\nu_r(f) = n$.*

6.4 Théorème de factorisation de Hadamard

Définition 1.24 *(Produit canonique)* ([79]) *Soit f une fonction méromorphe transcendante et soient $z_1, z_2,...$ ses zéros avec $0 < |z_1| \leqslant |z_2| \leqslant ....$ Soit p l'entier minimal tel que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}}$ converge. On appelle*

$$\begin{aligned} E(u, 0) &= (1-u), \\ E(u, p) &= (1-u)\exp(u + \frac{u^2}{2} + ... + \frac{u^p}{p}) \quad p = 1, 2, ... \end{aligned}$$

des facteurs principaux. Le produit infini

$$P(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} E(\frac{z}{z_n}, p)$$

converge uniformément dans chaque domaine borné dans $\mathbb{C}$ et $P(z)$ s'appelle le produit canonique de f formé à partir des zéros de f. L'entier p est appelé le genre du produit canonique.

Théorème 1.5 ([37]) *Soit f une fonction méromorphe d'ordre fini $\rho(f)$ et soient $\{a_1, a_2, ...\}$ et $\{b_1, b_2, ...\}$ les zéros et les pôles de f dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, respectivement. Supposons que f a une représentation*

$$f(z) = c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + ..., (c_k \neq 0)$$

au voisinage de $z = 0$ avec $c_k \neq 0$. Alors,

$$f(z) = z^k e^{Q(z)} \frac{P_1(z)}{P_2(z)}$$

avec $Q(z)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\rho(f)$ et $P_1(z)$ et $P_2(z)$ sont des produits canoniques de f formés des zéros et des pôles non nuls de f.

Chapitre 2

Sur l'hyper-ordre des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières

1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, nous étudions la croissance des solutions de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)e^{P(z)}f^{(k-1)} + \dots + A_0(z)e^{P(z)}f = e^{P(z)}F_1(z) + e^{Q(z)}F_2(z)$$

où $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ et $Q(z) = b_n z^n + \dots + b_0$ sont des polynômes $(n \geq 1)$, a_q, b_q avec $(q = 0, 1, \dots, n)$ sont des nombres complexes tels que $a_n b_n \neq 0$ et $b_q = c a_q, (0 < c < 1), q = 0, \dots, n$, $A_j (\not\equiv 0)$, $(j = 0, 1, \dots, k-1)$, F_i, $(i = 1, 2)$ sont des fonctions entières d'ordre fini. Nous étudions également l'ordre des solutions de l'équation différentielle linéaire non homogène

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}f^{(k-1)} + \dots + A_1(z)e^{P_1(z)}f' + A_0(z)e^{P_0(z)}f = e^{Q(z)}F(z)$$

où $A_j (\not\equiv 0)$, $(j = 0, 1, \dots, k-1)$, $F \not\equiv 0$ sont des fonctions entières d'ordre inférieur strictement à n, $P_j(z) = a_{j,n} z^n + \dots + a_{j,0}$ et $Q(z) = b_n z^n + \dots + b_0$ sont des polynômes $(n \geq 1)$, où $a_{j,q}, b_q$ $(j = 0, 1, \dots, k; q = 0, 1, \dots, n)$ sont des nombres complexes. Nos résultats étendent les résultats précédents dus à Habib et Belaïdi [17], [42]. Plusieurs travaux [30], [39], [57] ont étudié la croissance des solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$f'' + A_1(z)e^{P(z)}f' + A_2(z)e^{Q(z)}f = 0 \tag{2.1}$$

où P, Q sont des polynômes non constants, $A_1, A_2 (\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières telles que $\rho(A_1) < \deg P$, $\rho(A_2) < \deg Q$. Gundersen a montré dans [39] que si $\deg P \neq \deg Q$, alors chaque solution non constante de (2.1) est d'ordre infini. Si $\deg P = \deg Q$, alors (2.1) peut avoir des solutions non constantes d'ordre fini. Par exemple $f(z) = e^{iz} + i$ satisfait

$$f'' + e^{iz}f' - ie^{iz}f = 0.$$

Dans [7] , Belaïdi a étudié l'ordre et l'hyper-ordre des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur comme suit.

Théorème 2.1 *[7] Soient $k \geq 2$ un entier et $P_j(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} z^i$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ des polynômes non constants où $a_{0,j}, ..., a_{n,j}$ $(j = 0, ..., k-1)$ sont des nombres complexes tels que $a_{n,j} \neq 0 (j = 0, ..., k-1)$. Soient $A_j (\not\equiv 0)$, B_j $(\not\equiv 0)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ des fonctions entières. Supposons que $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}$ ou $a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ $(0 < c_j < 1)$ $(j = 1, ..., k-1)$ et $\rho(A_j) < n, \rho(B_j) < n$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$. Alors, toute solution f $(\not\equiv 0)$ de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + \left(A_{k-1}(z) e^{P_{k-1}(z)} + B_{k-1}(z)\right) f^{(k-1)} + ... + \left(A_0(z) e^{P_0(z)} + B_0(z)\right) f = 0 \tag{2.2}$$

est d'ordre infini et satisfait $\rho_2(f) = n$.

Plus tard, Hamani dans [43], a déterminé l'hyper-ordre de la solution de l'équation (2.2), sous certaines conditions et a obtenu le résultat suivant.

Théorème 2.2 *[43] Soient $k \geq 2$ un entier et $P_j(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} z^i$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ des polynômes non constants où $a_{0,j}, ..., a_{n,j}$ $(j = 0, ..., k-1)$ sont des nombres complexes tels que $a_{n,j} \neq 0 (j = 0, ..., k-1)$. Soient $A_j (\not\equiv 0)$, B_j $(\not\equiv 0)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ des fonctions entières avec $\rho(A_j) < n$ et $\rho(B_j) < n$. Supposons qu'il existe $s \in \{1, ..., k-1\}$ tel que $a_{n,j} = c_j a_{n,s}$ $(0 < c_j < 1)$ avec $j \neq s$. Alors, toute solution transcendante f de (2.2) est d'ordre infini et satisfait $\rho_2(f) = n$.*

Dans [84], Zhan et Xiao ont étudié les équations différentielles homogènes et non homogènes d'ordre supérieur et ils ont obtenu les résultats suivants.

Théorème 2.3 *[84] Soient A_{ji} $(\not\equiv 0), (j = 0, 1, ..., k-1; i = 1, 2)$ des fonctions entières telles que $\rho(A_{ji}) < n$ avec $n \geq 1$ est un entier. Soient $P_j(z) = a_{j,n} z^n + ... + a_{j,0}$ et $Q_j(z) = b_{j,n} z^n + ... + b_{j,0}$ des polynômes où $a_{j,q}, b_{j,q}$ $(j = 0, 1, ..., k-1; q = 0, 1, ..., n)$ sont des nombres complexes tels que $a_{j,n} b_{j,n} \neq 0$, $a_{0,n} \neq b_{0,n}$ et $a_{j,n} = c_j a_{0,n}, b_{j,n} = c_j b_{0,n}, c_j > 1, j = 1, ..., k-1$ sont des nombres distincts. Alors, toute solution $f (\not\equiv 0)$ de l'équation*

$$\begin{aligned} f^{(k)} &+ \left(A_{k-1,1}(z) e^{P_{k-1}(z)} + A_{k-1,2}(z) e^{Q_{k-1}(z)}\right) f^{(k-1)} \\ &+ ... + \left(A_{0,1}(z) e^{P_0(z)} + A_{0,2}(z) e^{Q_0(z)}\right) f = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

est d'ordre fini.

Théorème 2.4 *[84] Soient A_{ji} $(\not\equiv 0) (j = 0, 1, ..., k-1; i = 1, 2)$ des fonctions entières telles que $\rho(A_{ji}) < n$ où $n \geq 1$ est un entier. Soient $P_j(z) = a_{j,n} z^n + ... + a_{j,0}$ et $Q_j(z) = b_{j,n} z^n + ... + b_{j,0}$ des polynômes où $a_{j,q}, b_{j,q}$ $(j = 0, 1, ..., k-1; q = 0, 1, ..., n)$ sont des nombres complexes tels que $a_{j,n} b_{j,n} \neq 0$, $a_{0,n} \neq b_{0,n}$ et $a_{j,n} = c_j a_{0,n}, b_{j,n} = c_j b_{0,n}, c_j > 1, j = 1, ..., k-1$ sont des nombres distincts. Soit $F (\not\equiv 0)$ une fonction entière d'ordre fini. Alors, l'équation*

$$f^{(k)} + \left(A_{k-1,1}(z) e^{P_{k-1}(z)} + A_{k-1,2}(z) e^{Q_{k-1}(z)}\right) f^{(k-1)} + ... + \left(A_{0,1}(z) e^{P_0(z)} + A_{0,2}(z) e^{Q_0(z)}\right) f = F(z) \tag{2.4}$$

satisfait les assertions suivantes :

(i) Il existe au plus une solution exceptionnelle f_0 d'ordre fini, et toute autre solution satisfait $\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty$ et $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) \leq \max\{n, \rho(F)\}$.

(ii) S'il existe une solution f_0 d'ordre fini, alors $\rho(f_0) \leq \max\left\{n, \overline{\lambda}(f_0), \rho(F)\right\}$.

(iii) Si F est une fonction entière d'ordre inférieur à n et $\arg a_{0,n} \neq \arg b_{0,n}$, alors toute solution de (2.4) est d'ordre infini.

Récemment, Habib et Belaïdi [42] ont étudié la croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires non homogènes de la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)\, e^{az} f^{(k-1)} + \ldots + A_0(z)\, e^{az} f = F_1(z) e^{az} + F_2(z) e^{bz} \tag{2.5}$$

et ils ont abouti aux résultats suivants.

Théorème 2.5 *[42] Soient* $A_j (\not\equiv 0), \left(j = 0, 1, \ldots, k-1\right)$ *et* $F_i((i = 1, 2)$ *des fonctions entières avec* $\rho\left(A_j\right) < 1, \left(j = 0, 1, \ldots, k-1\right)$ *et* $\rho(F_i) < 1, (i = 1, 2)$ *où a et b sont des nombres complexes non nuls tels que* $b = ca$ $(0 < c < 1)$. *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*
(1) il existe un unique $s\,(0 \le s \le k-1)$ *tel que*

$$\max\left\{\rho\left(A_j\right), \left(j = 0, 1, \ldots, k-1\right), j \ne s\right\} < \rho(A_s) = \rho,$$

(2) pour tout τ *satisfaisant* $0 < \tau < \rho$, *il existe un sous-ensemble* $H \subset [1, +\infty)$ *de mesure logarithmique infinie, telle que pour* $|z| = r \in H$, *nous avons*

$$\log|A_s(z)| > r^{\tau}.$$

Alors, toute solution f *de l'équation* (2.5) *est d'ordre infini.*

Dans [17], ils ont obtenu les résultats suivants. On définit les ensembles suivants

$$\begin{aligned} I &= j = 0, 1, \ldots, k-1, \\ I_1 &= \{i \in I, c_i > 1\} \ne \emptyset, \\ I_2 &= \{i \in I, 0 < c_i < 1\} \ne \emptyset, \\ I_3 &= \{i \in I, c_i < 0\} \ne \emptyset, \\ I_4 &= \{i \in I, c_i = 1\} \ne \emptyset, \end{aligned}$$

où $I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 = I$ et $c_i\ (i \in I)$ sont des nombres réels,

Théorème 2.6 *[17] Soient* $A_j (\not\equiv 0), \left(j \in I\right)$ *et* $F \not\equiv 0$ *des fonctions entières avec*

$$\max\left\{\rho\left(A_j\right), \left(j \in I\right), \rho(F)\right\} < 1,$$

où $a \ne 0$ *et* $b_i \ne 0$ $(i \in I)$ *sont des nombres complexes tels que* $b_i = c_i a$ $(i \in I)$. *Supposons qu'il existe un* $s \in I_1$ *tel que* $c_s > c_j$ *pour tout* $j \in I_1 \setminus \{s\}$, *supposons qu'il existe un* $l \in I_3$ *tel que* $c_l < c_j$ *pour tout* $j \in I_3 \setminus \{l\}$*et supposons que* $c_0 \ne 1$ *et* $c_0 \ne c_j$ *pour tout* $j \in I \setminus \{0\}$. *Alors, chaque solution* f *de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)\, e^{b_{k-1} z} f^{(k-1)} + \ldots + A_1(z)\, e^{b_1 z} f + A_0(z)\, e^{b_0 z} f = F_1(z) e^{az} \tag{2.6}$$

est d'ordre infini et son hyper-ordre satisfait $\rho_2(f) \le 1$.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons a un problème plus général et obtenons les résultats suivants qui étendent les Théorèmes 2.5 et 2.6. En effet, nous prouverons les résultats suivants.

Théorème 2.7 *[65] Soient* $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ *et* $Q(z) = b_n z^n + \ldots + b_0$ *des polynômes* $(n \ge 1)$, *où* $a_q, b_q, \left(q = 0, 1, \ldots, n\right)$ *sont des nombres complexes tels que* $a_n b_n \ne 0$ *et* $b_q = c a_q$, $(0 < c < 1)$, $q = 0, \ldots, n$. *Soient* $A_j (\not\equiv 0), \left(j = 0, 1, \ldots, k-1\right)$ *et* F_i $(i = 1, 2)$ *des fonctions entières d'ordre fini avec*

$$\max\left\{\rho\left(A_j\right)\left(j = 0, 1, \ldots, k-1\right), \rho(F_i)\,(i = 1, 2)\right\} < n.$$

Supposons qu'il existe un unique s , $0 \leq s \leq k-1$ *satisfaisant*

$$\max\left\{\rho\left(A_j\right),\left(j=0,1,\ldots,k-1\right),j\neq s\right\}<\rho\left(A_s\right)<+\infty,$$

tel que pour tout $0<\tau<\rho\left(A_s\right)$, *il existe un ensemble* $H\subset[1,+\infty)$ *de mesure logarithmique infinie, tel que pour* $|z|=r\in H$, *nous avons*

$$\log\left|A_s(z)\right|>r^{\tau}.$$

Alors, toute solution f *de l'équation*

$$f^{(k)}+A_{k-1}(z)\,e^{P(z)}f^{(k-1)}+\ldots+A_1(z)\,e^{P(z)}f'+A_0(z)\,e^{P(z)}f=e^{P(z)}F_1(z)+e^{Q(z)}F_2(z) \quad (2.7)$$

vérifie $\rho(f)=+\infty$ *et son hyper-ordre satisfait* $\rho_2(f)\leq n$.

Théorème 2.8 *[65] Sous les mêmes hypothèses du Théorème 2.7, supposons de plus que* $\varphi\not\equiv 0$ *est une fonction entière d'ordre fini. Alors, toute solution* f *de (2.7) satisfait*

$$\overline{\lambda}\left(f\right)=\lambda\left(f\right)=\overline{\lambda}\left(f-\varphi\right)=\lambda\left(f-\varphi\right)=\rho\left(f\right)=+\infty$$

et

$$\overline{\lambda}_2\left(f\right)=\lambda_2\left(f\right)=\overline{\lambda}_2\left(f-\varphi\right)=\lambda_2\left(f-\varphi\right)=\rho_2\left(f\right)\leq n.$$

Théorème 2.9 *[65] Soient* $A_j(\not\equiv 0)$, $\left(j=0,1,\ldots,k-1\right)$ *et* $F\not\equiv 0$ *des fonctions entières d'ordre fini avec*

$$\max\left\{\rho\left(A_j\right)(j\in I),\rho(F)\right\}<n.$$

Soient $P_j(z)=a_{j,n}z^n+\ldots+a_{j,0}$ *et* $Q(z)=b_nz^n+\ldots+b_0$ *des polynôme où* $a_{j,q},b_q$ *sont des nombres complexes tels que* $a_{j,n}b_n\neq 0\left(j\in I\right)$ *et* $a_{j,q}=c_jb_q\left(j\in I,q=0,1,\ldots,n\right)$. *Supposons qu'il existe un unique* $s\in I_1$ *tel que* $c_s>c_j$ *pour tout* $j\in I_1\setminus\{s\}$, *supposons qu'il existe un unique* $l\in I_3$ *tel que* $c_l<c_j$ *pour tout* $j\in I_3\setminus\{l\}$ *et supposons que* $c_0\neq 1$ *et* $c_0\neq c_j$ *pour tout* $j\in I\setminus\{0\}$. *Alors, toute solution de l'équation*

$$f^{(k)}+A_{k-1}(z)\,e^{P_{k-1}(z)}f^{(k-1)}+\ldots+A_1(z)\,e^{P_1(z)}f'+A_0(z)\,e^{P_0(z)}f=e^{Q(z)}F(z) \quad (2.8)$$

est d'ordre infini et son hyper-ordre satisfait $\rho_2(f)\leq n$.

Théorème 2.10 *[65] Sous les mêmes hypothèses du Théorème 2.9, supposons de plus que* $\varphi\not\equiv 0$ *est une fonction entière d'ordre fini. Alors, toute solution* f *de (2.8) satisfait*

$$\overline{\lambda}\left(f\right)=\lambda\left(f\right)=\overline{\lambda}\left(f-\varphi\right)=\lambda\left(f-\varphi\right)=\rho\left(f\right)=+\infty$$

et

$$\overline{\lambda}_2\left(f\right)=\lambda_2\left(f\right)=\overline{\lambda}_2\left(f-\varphi\right)=\lambda_2\left(f-\varphi\right)=\rho_2\left(f\right)\leq n.$$

2 Lemmes auxiliaires

Pour prouver nos théorèmes, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.1 [75] *Soient* $P_1(z),P_2(z),\ldots,P_n(z)\,(n\geq 1)$ *des polynômes non constants de degré* $d_1,d_2,\ldots,d_n$, *respectivement, tels que* $\deg\left(P_i(z)-P_j(z)\right)=\max\left\{d_i,d_j\right\}$ *pour* $i\neq j$. *Soit* $A(z)=\sum_{j=0}^{n}B_j(z)\,e^{P_j(z)}$ *où* $B_j(\not\equiv 0)$ *sont des fonctions entières avec* $\rho\left(B_j\right)<d_j$.

Alors, $\rho(A)=\max_{0\leq j\leq n}\left\{d_j\right\}$.

Lemme 2.2 *[30] Soient* $P(z) = a_n z^n + ... + a_0, (a_n = \alpha + i\beta \neq 0)$ *un polynôme de degré* $n \geq 1$, *et* $A(\not\equiv 0)$ *une fonction entière avec* $\rho(A) < n$. *Posons*

$$f(z) = A(z)e^{P(z)}, z = re^{i\theta}, \delta(P,\theta) = \alpha\cos n\theta - \beta\sin n\theta.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe un ensemble* $E_1 \subset [0,2\pi)$ *de mesure linéaire nulle, tel que pour tout* $\theta \in [0,2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2)$, *il existe* $R > 0$, *tel que pour tout* $|z| = r > R$, *nous avons*

(i) *si* $\delta(P,\theta) > 0$, *alors*

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\} \leqslant |f(re^{i\theta})| \leqslant \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\},$$

(ii) *si* $\delta(P,\theta) < 0$, *alors*

$$\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\} \leqslant |f(re^{i\theta})| \leqslant \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\}$$

où $E_2 = \{\theta \in [0,2\pi) : \delta(P,\theta) = 0\}$ *est un ensemble fini.*

Lemme 2.3 *[38] Soit* f *une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini* ρ. *Soient* $\varepsilon > 0$ *une constante,* k *et* j *des entiers vérifiant* $k > j \geq 0$. *Alors, les deux propriétés suivantes sont vérifiées :* (i) *il existe un ensemble* $E_3 \subset [1,+\infty)$ *de mesure logarithmique finie, tel que pour tout* z *satisfaisant* $|z| \notin E_3 \cup [0,1]$, *nous avons*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}. \tag{2.9}$$

(ii) *Il existe un ensemble* $E_4 \subset [0,2\pi)$ *de mesure linéaire nulle, tel que si* $\theta \in [0,2\pi)\setminus E_4$, *alors il existe une constante* $R = R(\theta) > 0$ *telle que* (2.9) *soit vérifiée pour tout* z *satisfaisant* $\arg z = \theta$ *et* $|z| \geq R$.

Lemme 2.4 *[76] Soit* f *une fonction entière et supposons que*

$$G(z) = \frac{\log^+ |f^{(k)}(z)|}{|z|^\rho}$$

est non bornée sur une certaine demi-droite $\arg z = \theta$ *où* $\rho > 0$ *est une constante. Alors, il existe une suite infinie de points* $z_n = r_n e^{i\theta}$ $(n = 1,2,...)$, *où* $r_n \to +\infty$ *telle que* $G(z_n) \to +\infty$ *et*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(k)}(z_n)}\right| \leq \frac{1}{(k-j)!}(1+o(1))\, r_n^{k-j}, j < k$$

lorsque $n \to +\infty$.

Lemme 2.5 *[76] Soit* f *une fonction entière avec* $\rho(f) = \rho < +\infty$. *Supposons qu'il existe un ensemble* $E_5 \subset [0,2\pi)$ *de mesure linéaire nulle, tel que* $\log^+ |f(re^{i\theta})| \leq Mr^{\rho_1}$ *pour toute demi-droite* $\arg z = \theta \in [0,2\pi)\setminus E_5$, *où* M *est une constante positive dépendante de* θ, *tandis que* ρ_1 *est une constante positive indépendante de* θ. *Alors,* $\rho(f) \leq \rho_1$.

Lemme 2.6 *[9],[26] Soient* $A_j(\not\equiv 0)$ $(j = 0,1,...,k-1)$ *et* $F \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini.*

(i) *Si* f *est une solution méromorphe de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_0(z) f = F, \tag{2.10}$$

avec $\rho(f) = +\infty$, *alors* f *satisfait*

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty.$$

(ii) *Si* f *est une solution méromorphe de l'équation (2.10) avec* $\rho(f) = +\infty$ *et* $\rho_2(f) = \rho$, *alors* f *satisfait*

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty, \quad \overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) = \rho.$$

Lemme 2.7 *([81], [83]) Soient* $f_1, f_2, ..., f_n$ *des fonctions méromorphes et* $g_1, g_2, ..., g_n$ $(n \geq 2)$ *des fonctions entières satisfaisant les conditions suivantes :*

(i) $\sum_{j=1}^{n} e^{g_i(z)} f_j(z) \equiv f_{n+1}$,

(ii) *Si* $1 \leq j \leq n+1$ *et* $1 \leq k \leq n$, *alors l'ordre de* f_j *est inférieur ou égal à l'ordre de* $e^{g_k(z)}$.

(iii) *Si* $n \geq 2$, $1 \leq j \leq n+1$ *et* $1 \leq h < k \leq n$, *alors l'ordre de* f_j *est inférieur à l'ordre de* $e^{g_h - g_k}$.

Alors, $f_j(z) \equiv 0$, $j = 1, 2, ..., n+1$.

Lemme 2.8 *[17] Soient* $B_1, B_2, ..., B_{k-1}$ *des fonctions entières d'ordre fini. Si* f *est une solution de l'équation*

$$f^{(k)} + B_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + B_1(z) f' + B_0(z) f = H(z),$$

alors $\rho_2(f) \leq \max\{\rho(B_j)\,(j = 0, 1, ..., k-1), \rho(H)\}$.

3 Preuve du Théorème 2.7

Tout d'abord, nous prouvons que toute solution f de l'équation (2.7) est transcendante d'ordre $\rho(f) \geq n$. Supposons que f est une solution de l'équation (2.7) avec $\rho(f) < n$. Réécrivons (2.7) comme suit

$$e^{Q(z)-P(z)} F_2(z) - e^{-P(z)} f^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} A_j(z) f^{(j)} - F_1(z). \tag{2.11}$$

Comme

$$\max\{\rho(A_j)\,(j = 0, 1, ..., k-1)\} < n,$$

et $\rho(f) < n$, alors $\rho\left(A_j f^{(j)}\right) < n \quad (j = 0, 1, ..., k-1)$ et $\rho\left(f^{(k)}\right) < n$. D'autre part, puisque $b_q = c a_q$, $(0 < c < 1)$, $q = 0, ..., n$, alors

$$\deg(Q(z) - P(z)) = \deg((c-1)P(z)) = n.$$

Donc, du Lemme 2.1 et (2.11), nous avons

$$\begin{aligned} n &= \rho\left(e^{Q(z)-P(z)} F_2(z) - e^{-P(z)} f^{(k)}\right) \\ &= \rho\left(\sum_{j=0}^{k-1} A_j(z) f^{(j)} - F_1(z)\right) \\ &\leq \max\left\{\rho\left(A_j f^{(j)}\right) \quad (j = 0, 1, ..., k-1), \rho(F_1)\right\} < n. \end{aligned}$$

Cette dernière expression représente une contradiction. Par conséquent, toute solution $f\ (\not\equiv 0)$ de l'équation (2.7) est transcendante d'ordre $\rho(f) \geq n$. Maintenant, nous prouvons que $\rho(f) = +\infty$. Supposons que $\rho(f) = \rho < +\infty$. Posons

$$\begin{aligned} \alpha &= \rho(A_s), \\ \beta &= \max\left\{\rho(A_j), \quad (j = 0, 1, ..., k-1), j \neq s\right\}, \\ \gamma &= \max\left\{\rho(F_i) \quad (i = 1, 2)\right\}. \end{aligned}$$

Il est clair que, $0 \leq \beta < \alpha < n$ et $0 \leq \gamma < n$. Alors, d'après la définition de l'ordre, pour tout ε avec $0 < \varepsilon < \min\{n-\alpha, n-\beta, n-\gamma\}$ et pour tout r suffisamment grand, nous avons

$$|A_j(z)| \leq \exp\left\{r^{\beta+\varepsilon}\right\}, \ (j = 0, 1, ..., k-1, j \neq s), \tag{2.12}$$

$$|A_s(z)| \leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}, |F_i(z)| \leq \exp\left\{r^{\gamma+\varepsilon}\right\}, (i = 1, 2). \tag{2.13}$$

D'après les hypothèses du Théorème 2.7, il existe un ensemble $H \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie et $\tau > 0$ tel que $0 \leq \beta < \tau < n$. Nous avons donc,

$$\log|A_s(z)| > r^{\tau}. \tag{2.14}$$

pour tout $|z| = r \in H$. Du Lemme 2.2, il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E$, nous avons $\delta(P, \theta) \neq 0$. D'après le Lemme 2.3, il existe un ensemble $E_4 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_4$, alors il existe une constante $R = R(\theta) > 0$ telle que pour tout z satisfaisant $\arg z = \theta$ et $|z| \geq R$, nous avons

$$\begin{aligned} \left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| &\leq |z|^{(j-i)(\rho-1+\varepsilon)} \\ &\leq |z|^{k\rho}, \quad 0 \leq i < j \leq k. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Comme $P(z) = a_n z^n + ... + a_0$ et $Q(z) = b_n z^n + ... + b_0$ avec a_q, b_q, $(q = 0, 1, ..., n)$ sont des nombres complexes tels que $a_n b_n \neq 0$ et $b_q = c a_q, 0 < c < 1, q = 0, ..., n$, alors

$$Q(z) - P(z) = (c-1)P(z).$$

Pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E \cup E_4)$, posons

$$\delta_1 = \delta(-P, \theta), \quad \delta_2 = \delta(Q - P, \theta). \tag{2.16}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta_2 &= (1-c)\,\delta(-P, \theta) \\ &= (1-c)\,\delta_1. \end{aligned}$$

Alors $\delta_1 \neq 0$, $\delta_2 \neq 0$. Nous discutons maintenant deux cas séparément.

Cas 1. Supposons que $\delta_1 > 0$, alors $\delta_2 > 0$, ainsi $0 < \delta_2 < \delta_1$. Du Lemme 2.2, pour tout ε vérifiant $0 < 2\varepsilon < \min\left\{\left(\frac{\delta_1-\delta_2}{\delta_1}\right), n-\alpha, n-\beta, n-\gamma\right\}$, nous avons pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E$ et $|z| = r > R$ suffisamment grand

$$\left|e^{Q(z)-P(z)}\right| \leq \exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta_2 r^n\right\}, \tag{2.17}$$

$$\left|e^{-P(z)}\right| \geq \exp\left\{((1-\varepsilon))\,\delta_1 r^n\right\}. \tag{2.18}$$

Nous prouvons maintenant que $\frac{\log^+|f^{(k)}(z)|}{|z|^{\gamma+\varepsilon}}$ est borné sur la demi-droite $\arg z = \theta$. Supposons $\frac{\log^+|f^{(k)}(z)|}{|z|^{\gamma+\varepsilon}}$ est non borné sur la demi-droite $\arg z = \theta$. Donc du Lemme 2.4, Il existe une suite de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, où $r_m \to +\infty$ telle que

$$\frac{\log^+|f^{(k)}(z_m)|}{|z_m|^{\gamma+\varepsilon}} \to +\infty. \tag{2.19}$$

Ainsi, pour tout nombre $A > 1$ suffisamment grand, nous avons

$$|f^{(k)}(z_m)| > \exp\left(A|z_m|^{\gamma+\varepsilon}\right) \tag{2.20}$$

et

$$\begin{aligned} \left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right| &\leq \frac{1}{(k-j)!}(1+o(1))\, r_m^{k-j} \\ &\leq 2r_m^{k-j},\ \left(j = 0, 1, \ldots, k-1\right) \end{aligned} \tag{2.21}$$

lorsque $m \to +\infty$. En combinant (2.13) et (2.20), pour m suffisamment grand, nous obtenons

$$\frac{|F_i(z_m)|}{\left|f^{(k)}(z_m)\right|} \leq \frac{\exp\left\{r_m^{\gamma+\varepsilon}\right\}}{\exp\left(Ar_m^{\gamma+\varepsilon}\right)}, \quad (i = 1, 2).$$

Comme $A > 1$, alors nous avons

$$\frac{|F_i(z_m)|}{\left|f^{(k)}(z_m)\right|} \to 0 \text{ quand } m \to +\infty, \quad (i = 1, 2). \tag{2.22}$$

De la formule (2.7) , nous obtenons

$$\left|e^{-P(z)}\right| \leq \left\{\left|e^{Q(z)-P(z)}\right|\left|\frac{F_2(z)}{f^{(k)}}\right| + \left|\frac{F_1(z)}{f^{(k)}}\right| + |A_s(z)|\left|\frac{f^{(s)}}{f^{(k)}}\right| + \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq s}}^{k-1}\left|A_j(z)\right|\left|\frac{f^{(j)}}{f^{(k)}}\right|\right\}. \tag{2.23}$$

En remplaçant (2.12), (2.13), (2.17), (2.18), (2.21), (2.22) dans (2.23), nous avons

$$\begin{aligned} \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_1 r_m^n\right\} &\leq \left|e^{-P(z)}\right| \\ &\leq \exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta_2 r_m^n\right\} o(1) + o(1) \\ &+ 2r_m^{k-s}\exp\left\{r_m^{\alpha+\varepsilon}\right\} + 2(k-1)\, r_m^k \exp\left\{r_m^{\beta+\varepsilon}\right\} \\ &\leq 2(k+2)\, r_m^k \exp\left\{r_m^{\alpha+\varepsilon}\right\}\exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta_2 r_m^n\right\}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Ainsi,

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_1 r_m^n - (1+\varepsilon)\,\delta_2 r_m^n\right\} \leq 2(k+2)\, r_m^k \exp\left\{r_m^{\alpha+\varepsilon}\right\}. \tag{2.25}$$

Par $0 < \varepsilon < \frac{\delta_1-\delta_2}{2\delta_1}$, nous avons

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_1 r_m^n - (1+\varepsilon)\,\delta_2 r_m^n\right\} = \exp\left\{((\delta_1-\delta_2) - \varepsilon(\delta_1+\delta_2))\, r_m^n\right\}$$

$$= \exp\left\{(\delta_1-\delta_2)\left(1 - \varepsilon\frac{(\delta_1+\delta_2)}{\delta_1-\delta_2}\right) r_m^n\right\} \geq \exp\left\{\frac{(\delta_1-\delta_2)^2}{2\delta_1} r_m^n\right\}. \tag{2.26}$$

Par (2.25) et (2.26), nous obtenons

$$\exp\left\{\frac{(\delta_1-\delta_2)^2}{2\delta_1}r_m^n\right\}\le 2(k+2)\,r_m^k\exp\left\{r_m^{\alpha+\varepsilon}\right\},$$

ce qui est une contradiction car $\alpha+\varepsilon<n$. Donc, $\frac{\log^+|f^{(k)}(z)|}{|z|^{\gamma+\varepsilon}}$ est borné sur la demi-droite $\arg z=\theta$. D'où il existe une constante $M>0$, telle que

$$|f^{(k)}(z)|\le\exp\left(M|z|^{\gamma+\varepsilon}\right). \tag{2.27}$$

En utilisant le Lemme 2.4 pour $j=0<k$, nous obtenons

$$\left|f(z)\right|\le\frac{(1+o(1))}{k!}\left|f^{(k)}(z)\right|r^k. \tag{2.28}$$

Et en moyennant (2.27) et (2.28), nous avons

$$\begin{aligned}\left|f(z)\right| &\le \frac{(1+o(1))}{k!}r^k\exp\left(M|z|^{\gamma+\varepsilon}\right)\\ &\le C\exp\left(M|z|^{\gamma+2\varepsilon}\right),\end{aligned}$$

avec $C>0$, sur la demi-droite $\arg z=\theta$.

Cas 2. Supposons que $\delta_1<0$, alors $\delta_2<0$. Du Lemme 2.2, pour tout ε vérifiant $0<2\varepsilon<\min\{\tau-\beta,n-\alpha,n-\beta,n-\gamma\}$, nous avons pour tout $\theta\in[0,2\pi)\setminus E$ et $|z|=r>R$ suffisamment grand

$$\left|e^{Q(z)-P(z)}\right|\le\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_2r^n\right\}<1, \tag{2.29}$$

$$\left|e^{-P(z)}\right|\le\exp\left\{((1-\varepsilon))\,\delta_1r^n\right\}<1. \tag{2.30}$$

Nous prouvons maintenant que $\frac{\log^+|f^{(s)}(z)|}{|z|^{\gamma+\varepsilon}}$ est borné sur la demi-droite $\arg z=\theta$. Supposons le contraire. Donc, par le Lemme 2.4, il existe une suite de points $z_m=r_me^{i\theta}$, $m=1,2,\ldots$ où $r_m\to+\infty$ telle que

$$\frac{\log^+|f^{(s)}(z_m)|}{|z_m|^{\gamma+\varepsilon}}\to+\infty. \tag{2.31}$$

Ainsi, pour tout nombre $A>1$ suffisamment grand, nous avons

$$|f^{(s)}(z_m)|>\exp\left(A|z_m|^{\gamma+\varepsilon}\right) \tag{2.32}$$

et

$$\begin{aligned}\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| &\le \frac{1}{(s-j)!}(1+o(1))\,r_m^{s-j}\\ &\le 2r_m^{s-j},\ \left(j=0,1,\ldots,s-1\right)\end{aligned} \tag{2.33}$$

lorsque $m\to+\infty$. De (2.13) et (2.32), pour m suffisamment grand, nous obtenons

$$\frac{|F_i(z_m)|}{\left|f^{(s)}(z_m)\right|}\le\frac{\exp\left\{r_m^{\gamma+\varepsilon}\right\}}{\exp\left(Ar_m^{\gamma+\varepsilon}\right)},(i=1,2).$$

Comme $A > 1$, alors nous avons

$$\frac{|F_i(z_m)|}{\left|f^{(s)}(z_m)\right|} \to 0 \text{ lorsque } m \to +\infty, \quad (i = 1, 2). \tag{2.34}$$

De (2.7), nous obtenons

$$\begin{aligned} 1 \quad \leq \quad & \left|e^{Q(z)-P(z)}\right| \frac{1}{|A_s(z)|} \left|\frac{F_2(z)}{f^{(s)}}\right| + \frac{1}{|A_s(z)|} \left|\frac{F_1(z)}{f^{(s)}}\right| \\ & + \frac{\left|e^{-P(z)}\right|}{|A_s(z)|} \left|\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}}\right| + \sum_{j=0}^{s-1} \frac{\left|A_j(z)\right|}{|A_s(z)|} \left|\frac{f^{(j)}}{f^{(s)}}\right| + \sum_{j=s+1}^{k-1} \frac{\left|A_j(z)\right|}{|A_s(z)|} \left|\frac{f^{(j)}}{f^{(s)}}\right|. \end{aligned} \tag{2.35}$$

De (2.12) et (2.14), nous avons

$$\frac{1}{|A_s(z_m)|} < \exp\left(-r_m^{\tau}\right), \tag{2.36}$$

$$\frac{\left|A_j(z_m)\right|}{|A_s(z_m)|} < \exp\left\{r_m^{\beta+\varepsilon} - r_m^{\tau}\right\} \ \left(j = 0, 1, ..., k-1, j \neq s\right) \tag{2.37}$$

pour m assez grand. En remplaçant (2.15), (2.29), (2.30) ,(2.33), (2.34), (2.36), (2.37) dans (2.35), nous avons

$$\begin{aligned} 1 \quad \leq \quad & o(1)\exp\left(-r_m^{\tau}\right)\exp\left\{(1-\varepsilon)\delta_2 r_m^n\right\} + o(1)\exp\left(-r_m^{\tau}\right) + r_m^{k\rho}\exp\left(-r_m^{\tau}\right)\exp\left\{(1-\varepsilon)\delta_1 r_m^n\right\} \\ & + \sum_{j=0}^{s-1} 2r_m^{s-j}\exp\left\{r_m^{\beta+\varepsilon} - r_m^{\tau}\right\} + \sum_{j=s+1}^{k-1} \exp\left\{r_m^{\beta+\varepsilon} - r_m^{\tau}\right\} r_m^{k\rho} \\ \leq \quad & o(1)\exp\left(-r_m^{\tau}\right)\exp\left\{(1-\varepsilon)\delta_2 r_m^n\right\} + o(1)\exp\left(-r_m^{\tau}\right) + r_m^{k\rho}\exp\left(-r_m^{\tau}\right)\exp\left\{(1-\varepsilon)\delta_1 r_m^n\right\} \\ & + 2s r_m^s \exp\left\{r_m^{\beta+\varepsilon} - r_m^{\tau}\right\} + (k-1-s)\, r_m^{k\rho}\exp\left\{r_m^{\beta+\varepsilon} - r_m^{\tau}\right\}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Puisque chaque terme dans le membre droit de (2.38) tend vers zéro lorsque $r_m \to +\infty$ car $\beta + \varepsilon < \tau$, alors de (2.38) nous obtenons $1 \leq 0$, quand $r_m \to +\infty$. Ce qui est une contradiction. Ainsi, $\frac{\log^+ |f^{(s)}(z)|}{|z|^{\gamma+\varepsilon}}$ est borné sur la demi-droite $\arg z = \theta$. Donc, il existe une constante $M > 0$, telle que

$$|f^{(s)}(z)| \leq \exp\left(M|z|^{\gamma+\varepsilon}\right). \tag{2.39}$$

Cela implique, d'une façon similaire au Cas 1, que

$$\left|f(z)\right| \leq C\exp\left(M|z|^{\gamma+2\varepsilon}\right), \tag{2.40}$$

avec $C > 0$, sur la demi droite $\arg z = \theta$. Alors, du Lemme 2.5, nous avons $\rho\left(f\right) \leq \gamma + 2\varepsilon < n$, ce qui est une contradiction. Par conséquent toute solution transcendante f de (2.7) doit être d'ordre infini. Comme

$$\deg(Q(z) - P(z)) = \deg((c-1)P(z)) = n,$$

donc par le Lemme 2.1, nous avons

$$\max\left\{\rho(e^{P(z)}F_1(z) + e^{Q(z)}F_2(z))\right\} = n.$$

En utilisant le Lemme 2.8, nous obtenons $\rho_2(f) \leq n$.

4 Preuve du Théorème 2.8

Supposons que f est une solution de l'équation (2.7). Alors, du Théorème 2.7, nous avons $\rho(f) = +\infty$ et $\rho_2(f) \leq n$. Posons $g = f - \varphi$. Alors g est une fonction entière avec $\rho(f) = \rho(g) = +\infty$ et $\rho_2(g) = \rho_2(f) \leq n$. En substituant $f = g + \varphi$ dans (2.7), nous avons

$$g^{(k)}(z) + A_{k-1}(z)e^{P(z)}g^{(k-1)}(z) + \ldots + A_1(z)e^{P(z)}g'(z) + A_0(z)e^{P(z)}g(z) = D(z) \tag{2.41}$$

où

$$D(z) = e^{P(z)}F_1(z) + e^{Q(z)}F_2(z) - \left[\varphi^{(k)}(z) + A_{k-1}(z)e^{P(z)}\varphi^{(k-1)}(z) + \ldots + A_1(z)e^{P(z)}\varphi'(z) + A_0(z)e^{P(z)}\varphi(z)\right].$$

Montrons que $D \not\equiv 0$. En effet, si $D \equiv 0$, alors

$$\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)e^{P(z)}\varphi^{(k-1)} + \ldots + A_1(z)e^{P(z)}\varphi' + A_0(z)e^{P(z)}\varphi = e^{P(z)}F_1(z) + e^{Q(z)}F_2(z).$$

Donc φ est une solution de l'équation (2.7), alors $\rho(\varphi) = +\infty$, ce qui est une contradiction. Par suite $D \not\equiv 0$. Nous savons que les fonctions $A_j(z)e^{P(z)}\ (j = 0, 1, \ldots, k-1)$, D sont d'ordre fini. Du Lemme 2.6 et (2.41) nous avons

$$\overline{\lambda}(g) = \lambda(g) = \rho(g) = \rho(f) = +\infty,\ \overline{\lambda}_2(g) = \lambda_2(g) = \rho_2(g) = \rho_2(f) \leq n.$$

Alors, en utilisant le fait que f est une solution d'ordre infini de l'équation (2.7) et le Lemme 2.6, nous obtenons

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}(f) &= \lambda(f) = \overline{\lambda}(f-\varphi) = \lambda(f-\varphi) = \rho(f) = +\infty, \\ \overline{\lambda}_2(f) &= \lambda_2(f) = \overline{\lambda}_2(f-\varphi) = \lambda_2(f-\varphi) = \rho_2(f) \leq n \end{aligned}$$

ainsi, la preuve est achevée.

5 Preuve du Théorème 2.9

Nous pouvons réécrire (2.8) comme suit

$$e^{-Q(z)}f^{(k)} + A_{k-1}(z)e^{(P_{k-1}(z)-Q(z))}f^{(k-1)} + \ldots + A_1(z)e^{(P_1(z)-Q(z))}f' + A_0(z)e^{(P_0(z)-Q(z))}f = F(z). \tag{2.42}$$

Comme $a_{j,q} = c_j b_q\ (j \in I, q = 0, 1, \ldots, n)$, alors $P_j(z) - Q(z) = (c_j - 1)Q(z)$, et de (2.42) nous obtenons

$$e^{-Q(z)}f^{(k)} + \sum_{j\in I_1} A_j(z)e^{((c_j-1)Q(z))}f^{(j)} + \sum_{j\in I_2} A_j(z)e^{((c_j-1)Q(z))}f^{(j)} + \sum_{j\in I_3} A_j(z)e^{((c_j-1)Q(z))}f^{(j)} + \sum_{j\in I_4} A_j(z)f^{(j)} = F(z). \tag{2.43}$$

Tout d'abord, nous démontrons que toute solution f de (2.43) est transcendante d'ordre $\rho(f) \geq n$. Supposons que f est une solution de l'équation (2.43) avec $\rho(f) < n$. Il est clair que $f \not\equiv 0$. Nous pouvons réécrire (2.43) sous la forme

$$e^{-Q(z)}f^{(k)} + \sum_{j\in\Gamma} B_j(z)e^{((c_j-1)Q(z))} + A_0(z)e^{((c_0-1)Q(z))}f = F(z) - \sum_{j\in I_4} A_j(z)f^{(j)}, \tag{2.44}$$

où $\Gamma = \mathrm{I} \setminus (\mathrm{I}_4 \cup \{0\})$ et $\mathrm{B}_j(z) = \mathrm{A}_j(z) f^{(j)}$. Évidemment, $\rho\left(f^{(k)}\right) < n$ et $\rho\left(\mathrm{A}_j(z) f^{(j)}\right) < n$ $\left(j \in \mathrm{I}\right)$. Nous remarquons que $(c_0 - 1) b_q, \left(c_j - 1\right) b_q$ et $-b_q$, $q = 0, ..., n$, $j \in \Gamma$, sont des nombres distincts. Donc, par (2.44) et le Lemme 2.7, nous avons $\mathrm{A}_0 f \equiv 0$, ce qui mène à une contradiction. Par conséquent, toute solution f de l'équation (2.8) est transcendante d'ordre $\rho\left(f\right) \geq n$. Maintenant, nous démontrons que $\rho\left(f\right) = +\infty$. Supposons que

$\rho\left(f\right) = \rho < +\infty$. Posons

$$\alpha = \max\left\{\rho\left(\mathrm{A}_j\right)\left(j = 0, 1, ..., k-1\right), \rho\left(\mathrm{F}\right)\right\}.$$

Il est clair que $\alpha < n$. Alors, d'après de la définition de l'ordre, pour tout ε avec $0 < 2\varepsilon < n - \alpha$ et pour r suffisamment grand, nous avons

$$|\mathrm{A}_j(z)| \leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}, \ j \in \mathrm{I}_4, \tag{2.45}$$

$$|\mathrm{F}(z)| \leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}. \tag{2.46}$$

Du Lemme 2.2, il existe un ensemble $\mathrm{E} \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que lorsque $\theta \in [0, 2\pi) \setminus \mathrm{E}$, alors $\delta(\mathrm{P}, \theta) \neq 0$. En utilisant le Lemme 2.3, il existe un ensemble $\mathrm{E}_4 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus \mathrm{E}_4$, alors, il existe une constante $\mathrm{R} = \mathrm{R}(\theta) > 1$ telle que pour tout z satisfaisant $\arg z = \theta$ et $|z| \geq \mathrm{R}$, nous avons

$$\begin{aligned} \left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| &\leq |z|^{(j-i)(\rho-1+\varepsilon)} \\ &\leq |z|^{k\rho}, 0 \leq i < j \leq k. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (\mathrm{E}_4 \cup \mathrm{E})$ fixé, posons

$$\begin{aligned} \delta_s &= \delta\left((c_s - 1) \mathrm{Q}(z), \theta\right), \delta_l = \delta\left((c_l - 1) \mathrm{Q}(z), \theta\right), \\ \delta_1 &= \max\left\{\delta\left(\left(c_j - 1\right) \mathrm{Q}(z), \theta\right), j \in \mathrm{I}_1 \setminus \{s\}\right\}, \\ \delta_3 &= \max\left\{\delta\left(\left(c_j - 1\right) \mathrm{Q}(z), \theta\right), j \in \mathrm{I}_3 \setminus \{l\}\right\}. \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta\left(\left(c_j - 1\right) \mathrm{Q}(z), \theta\right) &= \left(c_j - 1\right) \delta\left(\mathrm{Q}(z), \theta\right) \\ &= \left(1 - c_j\right) \delta\left(-\mathrm{Q}(z), \theta\right). \end{aligned} \tag{2.48}$$

Alors $\delta_s \neq 0$, $\delta_l \neq 0$, $\delta_1 \neq 0$ et $\delta_3 \neq 0$. Nous discutons, maintenant, deux cas séparément.

Cas1. $\delta\left(-\mathrm{Q}(z), \theta\right) > 0$. Nous savons que

$$\begin{aligned} &\text{si } j \in \mathrm{I}_1, \text{ alors } \delta\left(\left(c_j - 1\right) \mathrm{Q}(z), \theta\right) < 0, \\ &\text{si } j \in \mathrm{I}_2, \text{ alors } 0 < \delta\left(\left(c_j - 1\right) \mathrm{Q}(z), \theta\right) < \delta\left(-\mathrm{Q}(z), \theta\right), \\ &\text{si } j \in \mathrm{I}_3 \setminus \{l\}, \text{ alors } 0 < \delta\left(-\mathrm{Q}(z), \theta\right) < \delta\left(\left(c_j - 1\right) \mathrm{Q}(z), \theta\right) \leq \delta_3 < \delta_l. \end{aligned}$$

Du Lemme 2.2, pour tout ε vérifiant $0 < 2\varepsilon < \min\left\{\frac{\delta_l - \delta_3}{\delta_l}, n - \alpha\right\}$, nous obtenons

$$\left|\mathrm{A}_l(z) e^{\left((c_l - 1)\mathrm{Q}(z)\right)}\right| \geq \exp\left\{(1-\varepsilon) \delta_l r^n\right\}, \tag{2.49}$$

$$\left|e^{-\mathrm{Q}(z)}\right| \leq \exp\left\{(1+\varepsilon) \delta\left(-\mathrm{Q}(z), \theta\right) r^n\right\}, \tag{2.50}$$

$$\left|A_j(z)\,e^{((c_j-1)Q(z))}\right| \le \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta\left(\left(c_j-1\right)Q(z),\theta\right)r^n\right\},\ i\in I_1, \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}\left|A_j(z)\,e^{((c_j-1)Q(z))}\right| &\le \exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta\left(\left(c_j-1\right)Q(z),\theta\right)r^n\right\}\\ &\le \exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta\left(-Q(z),\theta\right)r^n\right\},i\in I_2,\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}\left|A_j(z)\,e^{((c_j-1)Q(z))}\right| &\le \exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta\left(\left(c_j-1\right)Q(z),\theta\right)r^n\right\}\\ &\le \exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta_3 r^n\right\},i\in I_3\setminus\{l\},\end{aligned} \tag{2.53}$$

pour r suffisamment grand. Nous prouvons maintenant que $\frac{\log^+|f^{(l)}(z)|}{|z|^{\alpha+\varepsilon}}$ est borné sur la demi droite $\arg z=\theta$. Supposons le contraire. Du Lemme 2.4, il existe une suite de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ $(m=1,2,\ldots)$, où $r_m\to+\infty$ telle que

$$\frac{\log^+|f^{(l)}(z_m)|}{|z_m|^{\alpha+\varepsilon}}\to+\infty. \tag{2.54}$$

Ainsi, pour tout nombre $A>1$ suffisamment grand, nous avons

$$|f^{(l)}(z_m)|>\exp\left(A|z_m|^{\alpha+\varepsilon}\right) \tag{2.55}$$

et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(l)}(z_m)}\right|\le\frac{1}{(l-j)!}(1+o(1))\,r_m^{l-j},\ \left(j=0,1,\ldots,l-1\right) \tag{2.56}$$

lorsque $m\to+\infty$. De (2.46) et (2.55), nous obtenons

$$\left|\frac{F(z)}{|f^{(l)}(z_m)|}\right|\le\frac{\exp\left(|z_m|^{\alpha+\varepsilon}\right)}{\exp\left(A|z_m|^{\alpha+\varepsilon}\right)}. \tag{2.57}$$

Comme $A>1$, alors nous avons

$$\left|\frac{F(z)}{|f^{(l)}(z_m)|}\right|\to0, \tag{2.58}$$

pour m assez grand. De (2.43), nous obtenons

$$\begin{aligned}\left|A_l(z)\,e^{((c_l-1)Q(z_m))}\right| \le{}& \left|e^{-Q(z_m)}\right|\left|\frac{f^{(k)}(z_m)}{f^{(l)}(z_m)}\right|+\sum_{j\in I_1}\left|A_j(z_m)\,e^{(c_j-1)Q(z_m)}\right|\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(l)}(z_m)}\right|\\ &+\sum_{j\in I_2}\left|A_j(z_m)\,e^{(c_j-1)Q(z_m)}\right|\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(l)}(z_m)}\right|\\ &+\sum_{j\in I_3\setminus\{l\}}\left|A_j(z_m)\,e^{(c_j-1)Q(z_m)}\right|\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(l)}(z_m)}\right|\\ &+\sum_{j\in I_4}\left|A_j(z_m)\right|\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(l)}(z_m)}\right|+\left|\frac{F(z_m)}{f^{(l)}(z_m)}\right|.\end{aligned} \tag{2.59}$$

Substitution (2.45), (2.47), (2.49) – (2.53), (2.56), (2.57) dans (2.59)

$$\begin{aligned}\exp\{(1-\varepsilon)\delta_l r_m^n\} &\leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(-Q(z),\theta) r_m^n\} r^{k\rho} \\ &+ \sum_{j\in I_1}\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(l)}(z_m)}\right| \exp\{(1-\varepsilon)\delta\left((c_j-1)Q(z),\theta\right) r_m^n\} \\ &+ \sum_{j\in I_2}\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(l)}(z_m)}\right| \exp\{(1+\varepsilon)\delta(-Q(z),\theta) r_m^n\} \\ &+ \sum_{j\in I_3\setminus\{l\}}\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(l)}(z_m)}\right| \exp\{(1+\varepsilon)\delta_3 r_m^n\} \\ &+ \sum_{j\in I_4}\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(l)}(z_m)}\right| \exp\{r_m^{\alpha+\varepsilon}\} + o(1) \\ &\leq M_0 r^{M_1} \exp\{r_m^{\alpha+\varepsilon}\} \exp\{(1+\varepsilon)\delta_3 r_m^n\}, \end{aligned} \tag{2.60}$$

où $M_0>0$, $M_1>0$ sont des constantes. D'autre part, par $0<\varepsilon<\frac{\delta_l-\delta_3}{2\delta_l}$ nous avons

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)\delta_l-(1+\varepsilon)\delta_3 &= (\delta_l-\delta_3)\left(1-\frac{\varepsilon(\delta_l+\delta_3)}{(\delta_l-\delta_3)}\right) \\ &> (\delta_l-\delta_3)\left(1-\frac{\delta_l-\delta_3}{2\delta_l}\frac{(\delta_l+\delta_3)}{(\delta_l-\delta_3)}\right) = \frac{(\delta_l-\delta_3)^2}{2\delta_l}. \end{aligned} \tag{2.61}$$

De (2.60) et (2.61), on peut avoir

$$\exp\left\{\frac{(\delta_l-\delta_3)^2}{2\delta_l} r_m^n\right\} \leq M_0 r^{M_1} \exp\{r_m^{\alpha+\varepsilon}\}$$

ce qui est une contradiction car $\alpha+\varepsilon<n$. Donc, $\frac{\log^+|f^{(l)}(z)|}{|z|^{\alpha+\varepsilon}}$ est borné sur la demi droite $\arg z=\theta$. Alors, il existe $M>0$, tel que

$$|f^{(l)}(z)| \leq \exp\left(M|z|^{\alpha+\varepsilon}\right). \tag{2.62}$$

En utilisant le même raisonnement que dans la preuve du Lemme 3.1 de [60], nous obtenons

$$|f(z)| \leq \frac{(1+o(1))}{l!}\left|f^{(l)}(z)\right| r^l. \tag{2.63}$$

De (2.62) et (2.63), nous avons

$$\begin{aligned}|f(z)| &\leq \frac{(1+o(1))}{l!} r^l \exp\left(M|z|^{\alpha+\varepsilon}\right) \\ &\leq C\exp\left(M|z|^{\alpha+2\varepsilon}\right),\end{aligned}$$

avec $C>0$, sur la demi droite $\arg z=\theta$.

Cas 2. $\delta(-Q(z),\theta)<0$. Nous savons que

$$\begin{aligned}\delta\left((c_j-1)Q(z),\theta\right) &= (c_j-1)\delta(Q(z),\theta) \\ &= (1-c_j)\delta(-Q(z),\theta). \end{aligned} \tag{2.64}$$

Donc

$$\begin{aligned}\text{si } j &\in I_1\setminus\{s\},\ \text{alors } 0<\delta\left((c_j-1)Q(z),\theta\right) \\ &\leq \max\left\{\delta\left((c_j-1)Q(z),\theta\right), j\in I_1\setminus\{s\}\right\}=\delta_1<\delta_s, \\ \text{si } j &\in I_2\cup I_3,\ \text{alors } \delta\left((c_j-1)Q(z),\theta\right)<0\,. \end{aligned}$$

Du Lemme 2.2, pour tout ε donné vérifiant $0 < 2\varepsilon < \min\left\{\frac{\delta_s-\delta_1}{\delta_s}, n-\alpha\right\}$, nous obtenons

$$\left|A_s(z)\, e^{(c_s-1)Q(z)}\right| \geq \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_s r^n\right\}, \tag{2.65}$$

$$\left|e^{-Q(z)}\right| \leq \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta\left(-Q(z),\theta\right) r^n\right\} < 1, \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned} \left|A_j(z)\, e^{(c_j-1)Q(z)}\right| &\leq \exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta\left(\left(c_j-1\right)Q(z),\theta\right) r^n\right\} \\ &\leq \exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta_1 r^n\right\},\ i \in I_1 \setminus \{s\}, \end{aligned} \tag{2.67}$$

et

$$\left|A_j(z)\, e^{(c_j-1)Q(z)}\right| \leq \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta\left(\left(c_j-1\right)Q(z),\theta\right) r^n\right\} < 1, i \in I_2 \cup I_3, \tag{2.68}$$

pour r suffisamment grand. Nous prouvons maintenant que $\frac{\log^+|f^{(s)}(z)|}{|z|^{\alpha+\varepsilon}}$ est borné sur la demi droite $\arg z = \theta$. Supposons le contraire. Alors par le Lemme 2.4, il existe une suite de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, où $r_m \to +\infty$ telle que

$$\frac{\log^+|f^{(s)}(z_m)|}{|z_m|^{\alpha+\varepsilon}} \to +\infty. \tag{2.69}$$

Ainsi, pour un nombre $A > 1$ suffisamment grand, nous avons

$$|f^{(s)}(z_m)| > \exp\left(A|z_m|^{\alpha+\varepsilon}\right) \tag{2.70}$$

et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \leq \frac{1}{(s-j)!}(1+o(1))\, r_m^{s-j},\ \left(j = 0, 1, \ldots, s-1\right) \tag{2.71}$$

quand $m \to +\infty$. De (2.46) et (2.70), nous obtenons

$$\left|\frac{F(z)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \leq \frac{\exp\left(r_m^{\alpha+\varepsilon}\right)}{\exp\left(A r_m^{\alpha+\varepsilon}\right)}.$$

Puisque $A > 1$, alors nous avons

$$\left|\frac{F(z)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \to 0, \tag{2.72}$$

pour m assez grand. De (2.43), nous aurons

$$\begin{aligned} \left|A_s(z)\, e^{(c_s-1)Q(z_m)}\right| \leq\ & \left|e^{-Q(z_m)}\right|\left|\frac{f^{(k)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + \sum_{j\in I_1\setminus\{s\}}\left|A_j(z_m)\, e^{(c_j-1)Q(z_m)}\right|\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \\ & + \sum_{j\in I_2}\left|A_j(z_m)\, e^{(c_j-1)Q(z_m)}\right|\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \\ & + \sum_{j\in I_3}\left|A_j(z_m)\, e^{(c_j-1)Q(z_m)}\right|\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \\ & + \sum_{j\in I_4}\left|A_j(z_m)\right|\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + \left|\frac{F(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right|. \end{aligned} \tag{2.73}$$

En remplaçant (2.45), (2.47), (2.65) – (2.68), (2.71), (2.72) dans (2.73), nous aurons

$$\begin{aligned}
\exp\{(1-\varepsilon)\delta_s r_m^n\} &\leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(-Q(z),\theta) r_m^n\} r^{k\rho} \\
&+ \sum_{j\in I_1\setminus\{s\}} \left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \exp\{r_m^{\alpha+\varepsilon}\}\exp\{(1+\varepsilon)\delta_1 r_m^n\} \\
&+ \sum_{j\in I_2} \left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \exp\{r_m^{\alpha+\varepsilon}\}\exp\{(1-\varepsilon)\delta\left((c_j-1)Q(z),\theta\right) r_m^n\} \\
&+ \sum_{j\in I_3} \left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \exp\{r_m^{\alpha+\varepsilon}\}\exp\{(1-\varepsilon)\delta\left((c_j-1)Q(z),\theta\right) r_m^n\} \\
&+ \sum_{j\in I_4} \left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \exp\{r_m^{\alpha+\varepsilon}\} + o(1) \\
&\leq M_2 r^{M_3}\exp\{r_m^{\alpha+\varepsilon}\}\exp\{(1+\varepsilon)\delta_1 r_m^n\},
\end{aligned} \tag{2.74}$$

où $M_2>0$, $M_3>0$ sont des constantes. D'autre part, de $0<\varepsilon<\frac{\delta_s-\delta_1}{2\delta_s}$ et (2.74), nous obtenons

$$\exp\left\{\frac{(\delta_s-\delta_1)^2}{2\delta_s} r_m^n\right\} \leq M_2 r^{M_3}\exp\{r_m^{\alpha+\varepsilon}\}$$

ce qui est une contradiction car $\alpha+\varepsilon<n$. Donc, $\frac{\log^+|f^{(s)}(z)|}{|z|^{\alpha+\varepsilon}}$ est borné sur la demi-droite $\arg z=\theta$. Par suite, il existe une constante $M>0$, telle que

$$|f^{(s)}(z)| \leq \exp\left(M|z|^{\alpha+\varepsilon}\right). \tag{2.75}$$

D'une méthode similaire au Cas 1, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left|f(z)\right| &\leq \frac{(1+o(1))}{s!} r^s \exp\left(M|z|^{\alpha+\varepsilon}\right) \\
&\leq C\exp\left(M|z|^{\alpha+2\varepsilon}\right),
\end{aligned}$$

avec $C>0$ sur la demi-droite $\arg z=\theta$, pour tout $\theta\in[0,2\pi)\setminus(E_4\cup E)$. Alors, par le Lemme 2.5, nous avons $\rho(f)\leq\alpha+2\varepsilon<n$, ce qui est une contradiction. D'où, toute solution transcendante f de (2.8) doit être d'ordre infini. Comme

$$\max\left\{\rho\left(A_j e^{P_j(z)}\right)(j\in I), \rho\left(e^{Q(z)}F\right)\right\} = n,$$

alors par le Lemme 2.8, nous avons $\rho_2(f)\leq n$.

6 Preuve du Théorème 2.10

Supposons que f est une solution de l'équation (2.8). Alors, du Théorème 2.9, nous avons $\rho(f)=+\infty$ et $\rho_2(f)\leq n$. Posons $g(z)=f(z)-\varphi(z)$. Cette dernière est une fonction entière vérifiant $\rho(f)=\rho(g)=+\infty$ et $\rho_2(g)=\rho_2(f)\leq n$. En substituant $f=g+\varphi$ dans (2.8), nous obtenons

$$\begin{aligned}
g^{(k)} + A_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}g^{(k-1)} + \dots + A_1(z)e^{P_1(z)}g' + \\
A_0(z)e^{P_0(z)}g = D(z),
\end{aligned} \tag{2.76}$$

où

$$D(z) = e^{Q(z)}F(z) - \left[\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}\varphi^{(k-1)} + \dots + A_1(z)e^{P_1(z)}\varphi' + A_0(z)e^{P_0(z)}\varphi\right]. \tag{2.77}$$

Nous montrons que $D \not\equiv 0$. Supposons $D \equiv 0$, alors

$$\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\, e^{P_{k-1}(z)} \varphi^{(k-1)} + \ldots + A_1(z)\, e^{P_1(z)} \varphi' + A_0(z)\, e^{P_0(z)} \varphi = e^{Q(z)} F(z).$$

Donc φ est une solution de l'équation (2.8), alors $\rho(\varphi) = +\infty$, ce qui est une contradiction. Par suite $D \not\equiv 0$. En outre, nous savons que les fonctions $A_j(z)\, e^{P_j(z)}\, (j = 0, 1, \ldots, k-1)$, D sont d'ordre fini. Du Lemme 2.6 et (2.76), nous avons

$$\overline{\lambda}(g) = \lambda(g) = \rho(g) = \rho(f) = +\infty,\ \overline{\lambda}_2(g) = \lambda_2(g) = \rho_2(g) = \rho_2(f) \le n.$$

Alors, en utilisant le fait que f est une solution d'ordre infini de l'équation (2.8) et le Lemme 2.6, nous obtenons

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}(f) &= \lambda(f) = \overline{\lambda}(f-\varphi) = \lambda(f-\varphi) = \rho(f) = +\infty, \\ \overline{\lambda}_2(f) &= \lambda_2(f) = \overline{\lambda}_2(f-\varphi) = \lambda_2(f-\varphi) = \rho_2(f) \le n. \end{aligned}$$

Ainsi, la preuve est achevée.

7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons généralisé les travaux de Habib et Belaïdi ([17], [42]) où nous avons traité la croissance des solutions de l'équation différentielle non homogène

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)\, e^{P(z)} f^{(k-1)} + \ldots + A_0(z)\, e^{P(z)} f = e^{P(z)} F_1(z) + e^{Q(z)} F_2(z)$$

où $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ et $Q(z) = b_n z^n + \ldots + b_0$ sont des polynômes $(n \ge 1)$, avec a_q et b_q, $(q = 0, 1, \ldots, n)$ sont des nombres complexes tels que $a_n b_n \neq 0$ et $b_q = c a_q, c > 1, q = 0, \ldots, n$, $A_j (\not\equiv 0)$, $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$, F_i, $(i = 1, 2)$ sont des fonctions entières d'ordre fini. Nous avons étudié également la croissance des solutions de l'équation différentielle linéaire non homogène

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)\, e^{P_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + \ldots + A_1(z)\, e^{P_1(z)} f' + A_0(z)\, e^{P_0(z)} f = e^{Q(z)} F(z)$$

avec $A_j (\not\equiv 0)$, $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$, $F \not\equiv 0$ sont des fonctions entières d'ordre inférieur à n, $P_j(z) = a_{j,n} z^n + \ldots + a_{j,0}$ et $Q(z) = b_n z^n + \ldots + b_0$ sont des polynômes $(n \ge 1)$, où $a_{j,q}, b_{j,q}$, $(j = 0, 1, \ldots, k; q = 0, 1, \ldots, n)$ sont des nombres complexes.

Chapitre 3

Sur la croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes

1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, nous étudions la croissance des solutions méromorphes de l'équation différentielle

$$f^{(k)}+\left(A_{k-1,1}(z)\,e^{P_{k-1}(z)}+A_{k-1,2}(z)\,e^{Q_{k-1}(z)}\right)f^{(k-1)}+\ldots+\left(A_{0,1}(z)\,e^{P_0(z)}+A_{0,2}(z)\,e^{Q_0(z)}\right)f=F(z),$$

où $A_{j,i}\,(\not\equiv 0)\,\left(j=0,\ldots,k-1\right)$, F sont des fonctions méromorphes d'ordre fini et P_j, Q_j $(j=0,1,\ldots,k-1; i=1,2)$ sont des polynômes de degré $n\geqslant 1$. Sous certaines conditions, nous prouvons que si $F\equiv 0$, alors toute solution méromorphe $f\not\equiv 0$ dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée est d'ordre infini et satisfait $\rho_2(f)=n$ et si $F\not\equiv 0$, alors il existe au plus une solution exceptionnelle f_0 d'ordre fini, et toute autre solution méromorphe transcendante satisfait $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\rho\left(f\right)=+\infty$ et $\overline{\lambda_2}(f)=\lambda_2(f)=\rho_2\left(f\right)\leqslant \max\left\{n,\rho(F)\right\}$. Nos résultats étendent les résultats précédents de Zhan et Xiao [84].

Plusieurs chercheurs (voir [29], [39], [57]) ont étudié la croissance de la solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre.

Dans [41], Habib et Belaïdi ont étudié l'ordre et l'hyper-ordre des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur et ils ont prouvé le résultat suivant.

Théorème 3.1 [*41*] *Soient* A_j $(\not\equiv 0)$ $(j=1,2)$, B_l $(\not\equiv 0)$ $(l=1,\ldots,k-1)$, D_m, $(m=0,\ldots,k-1)$ *des fonctions entières avec*

$$\max\left\{\rho\left(A_j\right),\rho\left(B_l\right),\rho\left(D_m\right)\right\}<1,$$

et $b_l\,(l=1,\ldots,k-1)$ *sont des constantes complexes telles que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $\arg b_l=\arg a_1$ *et* $b_l=c_l a_1$ $(0<c_l<1)$ $(l\in I_1)$,

(ii) b_l *est une constante réelle telle que* $b_l\leq 0$ $(l\in I_2)$ *où* $I_1\neq\emptyset$, $I_2\neq\emptyset$, $I_1\cap I_2=\emptyset$, $I_1\cup I_2=\{1,\ldots,k-1\}$ *et* a_1, a_2 *sont des nombres complexes tels que* $a_1a_2\neq 0$, $a_1\neq a_2$ *(avec* $|a_1|\leqslant|a_2|$ *).*

Si $\arg a_1 \neq \pi$ *ou* a_1 *est un nombre réel vérifiant* $a_1 < \frac{b}{1-c}$ *où* $c = \max\{c_l,\ l \in I_1\}$ *et* $b = \min\{b_l,\ l \in I_2\}$*, alors toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation*

$$f^{(k)} + \left(D_{k-1} + B_{k-1}e^{b_{k-1}z}\right) f^{(k-1)} + \ldots + \left(D_1 + B_1 e^{b_1 z}\right) f' + \left(D_0 + A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}\right) f = 0 \quad (3.1)$$

satisfait $\rho(f) = +\infty$ *et* $\rho_2(f) = 1$.

Dans [18], ils ont étudié l'ordre et l'hyper-ordre des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes et ils ont prouvé le théorème suivant.

Théorème 3.2 *[18] Soient* $A_j\ (\not\equiv 0)\ (j = 1,2)$ *et* $B_l\ (\not\equiv 0)\ (l = 1,\ldots,k-1)$ *des fonctions méromorphes avec*

$$\max\left\{\rho\left(A_j\right)(j = 1,2), \rho\left(B_l\right)(l = 1,\ldots,k-1)\right\} < 1.$$

Soient $b_l\ (l = 1,\ldots,k-1)$ *des constantes complexes telles que :*

(i) $b_l = c_l a_1$ $(0 < c_l < 1)$ $(l \in I_1)$,

(ii) b_l *est une constante réelle telle que* $b_l < 0$ $(l \in I_2)$ *où* $I_1 \neq \emptyset$, $I_2 \neq \emptyset$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $I_1 \cup I_2 = \{1,\ldots,k-1\}$*, et* a_1 , a_2 *sont des nombres complexes tels que* $a_1 a_2 \neq 0$, $a_1 \neq a_2$ *(avec* $|a_1| \leqslant |a_2|$*).*

Si $\arg a_1 \neq \pi$ *ou* a_1 *est un nombre réel tel que* $a_1 < \frac{b}{1-c}$ *où* $c = \max\{c_l,\ l \in I_1\}$ *et* $b = \min\{b_l,\ l \in I_2\}$*, alors toute solution méromorphe* $f (\not\equiv 0)$ *dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation*

$$f^{(k)} + B_{k-1}e^{b_{k-1}z} f^{(k-1)} + \ldots + B_1 e^{b_1 z} f' + \left(A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z}\right) f = 0 \qquad (3.2)$$

satisfait $\rho(f) = +\infty$ *et* $\rho_2(f) = 1$.

Dans [84], Zhan et Xiao ont étudié les équations différentielles homogènes et non homogènes d'ordre supérieur et ils ont obtenu les résultats suivants.

Théorème 3.3 [*84*] *Soient* A_{ji} $(j = 0,1,\ldots,k-1; i = 1,2)$ *des fonctions entières non nulles avec* $\rho\left(A_{ji}\right) < n$ *où* $n \geqslant 1$ *est un entier. Soient* $P_j(z) = a_{j,n}z^n + \ldots + a_{j,0}$ *et* $Q_j(z) = b_{j,n}z^n + \ldots + b_{j,0}(j = 0,1,\ldots,k-1)$ *des polynômes où* $a_{j,q}, b_{j,q}$ $\left(j = 0,1,\ldots,k-1; q = 0,1,\ldots,n\right)$ *sont des nombres complexes tels que* $a_{j,n}b_{j,n} \neq 0$, $a_{0,n} \neq b_{0,n}$ *et* $a_{j,n} = c_j a_{0,n}, b_{j,n} = c_j b_{0,n}, c_j > 1, j = 1,\ldots,k-1$ *sont des nombres distincts. Alors, toute solution* $f\ (\not\equiv 0)$ *de l'équation*

$$f^{(k)} + \left(A_{k-1,1}(z) e^{P_{k-1}(z)} + A_{k-1,2}(z) e^{Q_{k-1}(z)}\right) f^{(k-1)} + \ldots + \left(A_{0,1}(z) e^{P_0(z)} + A_{0,2}(z) e^{Q_0(z)}\right) f = 0 \qquad (3.3)$$

est d'ordre infini.

Théorème 3.4 [*84*] *Soient* A_{ji} $(j = 0,1,\ldots,k-1; i = 1,2)$ *des fonctions entières non nulles avec* $\rho\left(A_{ji}\right) < n$ *où* $n \geqslant 1$ *est un entier. Soient* $P_j(z) = a_{j,n}z^n + \ldots + a_{j,0}$ *et* $Q_j(z) = b_{j,n}z^n + \ldots + b_{j,0}(j = 0,1,\ldots,k-1)$ *des polynômes où* $a_{j,q}, b_{j,q}$ $\left(j = 0,1,\ldots,k-1; q = 0,1,\ldots,n\right)$ *sont des nombres complexes tels que* $a_{j,n}b_{j,n} \neq 0$, $a_{0,n} \neq b_{0,n}$ *et* $a_{j,n} = c_j a_{0,n}, b_{j,n} = c_j b_{0,n}, c_j > 1, j = 1,\ldots,k-1$ *sont des nombres distincts. Soit* $F (\not\equiv 0)$ *une fonction entière d'ordre fini. Alors, l'équation*

$$f^{(k)} + \left(A_{k-1,1}(z) e^{P_{k-1}(z)} + A_{k-1,2}(z) e^{Q_{k-1}(z)}\right) f^{(k-1)} + \ldots + \left(A_{0,1}(z) e^{P_0(z)} + A_{0,2}(z) e^{Q_0(z)}\right) f = F(z) \qquad (3.4)$$

vérifie les propriétés suivantes :

(i) *Il existe au plus une solution exceptionnelle* f_0 *d'ordre fini, et toutes les autres solutions satisfont* $\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty$ *et* $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) \leqslant \max\{n, \rho(F)\}$.

(ii) *S'il existe une solution* f_0 *d'ordre fini, alors* $\rho(f_0) \leqslant \max\left\{n, \overline{\lambda}(f_0), \rho(F)\right\}$.

(iii) *Si* F *est une fonction entière d'ordre inférieur à* n *et* $\arg a_{0,n} \neq \arg b_{0,n}$ *, alors toute solution de (3.4) est d'ordre infini.*

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un problème plus général et nous améliorons le Théorème 3.3 et le Théorème 3.4. En effet, nous allons prouver les résultats suivants.

Théorème 3.5 *[68] Soient A_{ji} $(j=0,1,...,k-1; i=1,2)$ des fonctions méromorphes non nulles et d'ordre fini avec*

$$\max\{\rho(A_{ji}), j=0,1,...,k-1; i=1,2\} < n$$

où l'entier n est supérieur ou égal à 1. Soient $P_j(z)=a_{j,n}z^n+...+a_{j,0}$ et $Q_j(z)=b_{j,n}z^n+...+b_{j,0}$ des polynômes, où $a_{j,q}, b_{j,q}$ $(j=0,1,...,k-1; q=0,1,...,n)$ sont des nombres complexes distincts vérifiant $a_{j,n}b_{j,n}\neq 0$, $a_{0,n}\neq b_{0,n}$ et $a_{j,n}=c_j a_{0,n}, b_{j,n}=c_j b_{0,n}, c_j>1$, $j=1,...,k-1$. Alors, toute solution méromorphe $f\ (\not\equiv 0)$ de l'équation (3.3), dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, est d'ordre infini et $\rho_2(f)=n$.

Théorème 3.6 *[68] Soient A_{ji} $(\not\equiv 0)$, $F(\not\equiv 0)$ $(j=0,1,...,k-1; i=1,2)$ des fonctions méromorphes d'ordre fini avec $\max\{\rho(A_{ji}), j=0,1,...,k-1; i=1,2\}<n$ où $n\geq 1$ est un entier. Soient $P_j(z)=a_{j,n}z^n+...+a_{j,0}$ et $Q_j(z)=b_{j,n}z^n+...+b_{j,0}$ des polynômes où $a_{j,q}, b_{j,q}$, $(j=0,1,...,k-1; q=0,1,...,n)$ sont des nombres complexes distincts tels que $a_{j,n}b_{j,n}\neq 0$, $a_{0,n}\neq b_{0,n}$ et $a_{j,n}=c_j a_{0,n}$, $b_{j,n}=c_j b_{0,n}, c_j>1, j=1,...,k-1$. Alors, l'équation (3.4) satisfait*

(i) Il existe au plus une solution méromorphe exceptionnelle f_0 d'ordre fini, et toute autre solution méromorphe transcendante f, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, satisfait $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\rho(f)=+\infty$ et $\overline{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\rho_2(f)\leqslant\max\{n,\rho(F)\}$.

(ii) S'il existe une solution f_0 d'ordre fini, alors $\rho(f_0)\leqslant\max\left\{n,\overline{\lambda}(f_0),\rho(F)\right\}$.

(iii) Si F est une fonction méromorphe d'ordre inférieur à n et $\arg a_{0,n}\neq\arg b_{0,n}$, alors toute solution méromorphe de (3.4) dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée est d'ordre infini et satisfait $\rho_2(f)=n$.

Exemple 3.1 *Considérons l'équation différentielle suivante*

$$f'''' + \left(\frac{\sin z}{z}e^{4iz^2+2} + \frac{(z^2-5)}{z}e^{8iz^2+\frac{1}{2}}\right)f''' + \left(\frac{\cos z}{z+1}e^{(9iz^2+z+3i)} - \frac{\left(\frac{1}{2}z^2-z+8\right)}{z}e^{18iz^2+\frac{1}{2}}\right)f''$$
$$+\left(3ze^{2iz^2} - \frac{1}{z}e^{2+4iz^2}\right)f' + \left(\sqrt{2}ze^{\frac{iz^2}{2}+z+i} + (1-5z)\,e^{iz^2+2iz+6}\right)f = 0. \tag{3.5}$$

Dans cette équation, nous avons

- $P_3(z)=4iz^2+2, Q_3(z)=8iz^2+\frac{1}{2}, a_{3,n}=4i, b_{3,n}=8i,$
- $P_2(z)=9iz^2+z+3i, Q_2(z)=18iz^2+\frac{1}{2}, a_{2,n}=9i, b_{2,n}=18i,$
- $P_1(z)=2iz^2, Q_1(z)=2+4iz^2, a_{1,n}=2i, b_{1,n}=4i,$
- $P_0(z)=\frac{iz^2}{2}+z+i, Q_0(z)=iz^2+2iz+6, a_{0,n}=\frac{i}{2}, b_{0,n}=i$ *avec* $a_{j,n}b_{j,n}\neq 0$, $a_{0,n}\neq b_{0,n}$, $j=1,...,3$, *de plus*
- $a_{3,n}=4i=8a_{0,n}, b_{3,n}=8i=8b_{0,n}$ *et* $c_3=8>1,$
- $a_{2,n}=9i=18a_{0,n}, b_{2,n}=18i=18b_{0,n}$ *et* $c_2=18>1,$
- $a_{1,n}=2i=4a_{0,n}, b_{1,n}=4i=4b_{0,n}$ *et* $c_1=4>1.$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
A_{3,1}(z) &= \frac{\sin z}{z}, A_{3,2}(z)=\frac{(z^2-5)}{z},\\
A_{2,1}(z) &= \frac{\cos z}{z+1}, A_{2,2}(z)=-\frac{\left(\frac{1}{2}z^2-z+8\right)}{z},\\
A_{1,1}(z) &= 3z, A_{1,2}(z)=-\frac{1}{z},\\
A_{0,1}(z) &= \sqrt{2}z, A_{0,2}(z)=(1-5z),
\end{aligned}$$

et $\max\{\rho(A_{ji}), j=0,1,...,k-1; i=1,2\}=1$. *Nous remarquons que toutes les conditions du Théorème 3.5 sont vérifiées. Donc, toute solution méromorphe* $f\ (\not\equiv 0)$ *de l'équation (3.5), dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, est d'ordre infini et satisfait* $\rho_2(f)=n=2$.

Exemple 3.2 *Considérons l'équation différentielle suivante*

$$f''' + \left(\frac{1}{z}e^{3z} + \left(\frac{1}{z+1}\right)e^{2z}\right)f'' + \left(ze^{4z} - \left(\frac{3z^2}{z+3}\right)e^{\frac{8}{3}z}\right)f' + \left(\left(\frac{z^2+1}{z}\right)e^{2z} + \frac{1}{z}e^{\frac{4}{3}z}\right)f$$

$$\begin{aligned} &= e^{-2z} + \left(\frac{-6z^2}{z+1}\right)e^{\frac{5}{3}z} + \frac{1}{z}\left(e^{\frac{4}{3}z} + e^{\frac{1}{3}z}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{z+1} + \frac{z^2+1}{z}\right)e^{z} + \left(\frac{z^2+2}{z}\right)e^{2z} - ze^{3z} - 1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dans cette équation, nous avons

- $P_2(z)=3z, Q_2(z)=2z, a_{2,n}=3, b_{2,n}=2,$
- $P_1(z)=4z, Q_1(z)=\frac{8}{3}z, a_{1,n}=4, b_{1,n}=\frac{8}{3},$
- $P_0(z)=2z, Q_0(z)=\frac{4}{3}z, a_{0,n}=2, b_{0,n}=\frac{4}{3},$
- $a_{2,n}=3=\frac{3}{2}a_{0,n}, b_{2,n}=2=\frac{3}{2}b_{0,n}$ *et* $c_2=\frac{3}{2}>1,$
- $a_{1,n}=4=2a_{0,n}, b_{1,n}=\frac{8}{3}=2b_{0,n}$ *et* $c_1=2>1.$

D'autre part,

$$\begin{aligned} A_{2,1}(z) &= \frac{1}{z}, A_{2,2}(z)=\frac{1}{z+1}, \\ A_{1,1}(z) &= z, A_{1,2}(z) = -\frac{3z^2}{z+3}, \\ A_{0,1}(z) &= \frac{z^2+1}{z}, A_{0,2}(z)=\frac{1}{z}. \end{aligned}$$

$$F(z) = 2e^{-2z} + \left(\frac{-6z^2}{z+1}\right)e^{\frac{5}{3}z} + \frac{1}{z}\left(e^{\frac{4}{3}z} + e^{\frac{1}{3}z}\right) + \left(\frac{1}{z+1} + \frac{z^2+1}{z}\right)e^{z} + \left(\frac{z^2+2}{z}\right)e^{2z} - ze^{3z} - 2$$

et

$$\max\{\rho(A_{ji}), j=0,1,...,k-1; i=1,2\}=0.$$

Toutes les conditions du Théorème 3.6 sont vérifiées. Donc, Il existe au plus une solution méromorphe exceptionnelle f_0 *d'ordre fini, et toute autre solution méromorphe transcendante* f*, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, satisfait* $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\rho(f)=+\infty$ *et* $\overline{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\rho_2(f)\le\max\{n,\rho(F)\}$. *De plus, s'il existe une solution* f_0 *d'ordre fini alors* $\rho(f_0)\le\max\left\{n,\overline{\lambda}(f_0),\rho(F)\right\}$. *En effet, l'équation (3.6) admet une solution* $f_0(z)=e^{-z}+1$, $\rho(f_0)=1$, $\rho(F)=1$, $n=1$. *De plus, les zéros de la fonction* $f_0(z)=e^{-z}+1$*, sont* $z_k=-i\pi k$ *et*

$$\begin{aligned} \lambda(f_0) &= \inf\left\{\alpha : \sum_{k\ge1}\frac{1}{|z_k|^{\alpha}}<\infty\right\} \\ &= \inf(]1,+\infty[) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Comme tous les zéros de la fonction f_0 *sont simples, alors*

$$\overline{\lambda}(f_0)=\lambda(f_0)=1,$$

ce qui assure que $\rho(f_0)\le\max\left\{n,\overline{\lambda}(f_0),\rho(F)\right\}=1.$

2 Lemmes préliminaires

Lemme 3.1 [1] *Soient* P_j $(j = 0, 1, ..., k)$ *des polynômes avec* $\deg P_0 = n$ $(n \geqslant 1)$ *et* $\deg P_j \leqslant n$ $(j = 1, ..., k)$. *Soient* A_j $(j = 0, 1, ..., k)$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini et*

$$\max\left\{\rho\left(A_j\right),\ j = 0, 1, ..., k\right\} < n$$

telles que $A_0(z) \not\equiv 0$. *Notons*

$$F(z) = A_k e^{P_k(z)} + A_{k-1} e^{P_{k-1}(z)} + ... + A_1 e^{P_1(z)} + A_0 e^{P_0(z)}.$$

Si $\deg\left(P_0(z) - P_j(z)\right) = n$ *pour tout* $j = 1, ..., k$, *alors* F *est une fonction méromorphe non triviale d'ordre fini satisfaisant* $\rho(F) = n$.

Lemme 3.2 [38] *Soient* f *une fonction méromorphe transcendante et* $\alpha > 1$ *une constante réelle. Alors, il existe un ensemble* $E_1 \subset (1, +\infty)$ *de mesure logarithmique finie et une constante* $B > 0$*dépendante uniquement de* α *et de* H *tels que pour tout* z *satisfaisant* $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_1)$ *et pour tout* (n, m) *(*n, m *sont des nombres entiers avec* $n > m \geqslant 0$*), nous avons*

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f^{(m)}(z)}\right| \leqslant B\left(\frac{T(\alpha r, f)}{r}\left(\log^{\alpha} r\right)\log T(\alpha r, f)\right)^{n-m}.$$

Lemme 3.3 [27] *Soit* f *une fonction méromorphe d'ordre* $\rho\left(f\right) = \rho < +\infty$. *Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ensemble* $E_3 \subset (1, +\infty)$ *de mesure linéaire finie et de mesure logarithmique finie tels que pour tout* z *vérifiant* $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_3)$, $r \to +\infty$, *nous avons* $\left|f(z)\right| \leqslant \exp\left(r^{\rho+\varepsilon}\right)$.

Il est bien connu qu'en raison de la théorie de Wiman-Valiron [54], [58], il est important d'étudier les propriétés de solutions entières des équations différentielles. Dans [28], Chen a étendu la théorie de Wiman-Valiron des fonctions entières aux fonctions méromorphes. Nous donnons, ici, une forme spéciale du résultat donné par Wang et Yi dans [78] lorsque on a une fonction méromorphe d'ordre infini.

Lemme 3.4 [78] *Soit* $f = \frac{g}{d}$ *une fonction méromorphe d'ordre infini et d'hyper ordre fini tel que* $\rho_2(f) = \sigma$, g *et* d *sont des fonctions entières où* $\rho(d) < +\infty$. *Alors, il existe une suite de points* $\left\{z_m = r_m e^{i\theta_m}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ *vérifiant* $r_m \to +\infty$, $\theta_m \in [0, 2\pi)$; $m \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{m\to+\infty} \theta_m = \theta_0 \in [0, 2\pi)$, $\left|g(z_m)\right| = M\left(r_m, g\right)$ *et pour* m *suffisamment grand, nous avons*

$$\frac{f^{(n)}(z_m)}{f(z_m)} = \left(\frac{\nu_g(r_m)}{z_m}\right)^n (1 + o(1)) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\limsup_{r_m\to+\infty} \frac{\log\log \nu_g(r_m)}{\log r_m} = \rho_2(g) = \sigma.$$

Lemme 3.5 [39] *Soient* $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *et* $\psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *des fonctions monotones croissantes telles que* $\varphi(r) \leqslant \psi(r)$ *pour tout* $r \notin (E_4 \cup [0, 1])$ *où* E_4 *est un ensemble de mesure logarithmique finie. Soit* $\alpha > 1$ *une constante donnée. Alors, il existe* $r_1 = r_1(\alpha) > 0$ *satisfaisant* $\varphi(r) \leqslant \psi(\alpha r)$ *pour tout* $r > r_1$.

Lemme 3.6 *Soient* $k \geqslant 2$ *et* $F, A_0, A_1, ..., A_{k-1}$ *des fonctions méromorphes telles que* $\rho = \max\left\{\rho\left(A_j\right)(j = 0, 1, ...k-1), \rho(F)\right\} < \infty$. *Soit* f *une solution méromorphe transcendante, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + ... + A_1 f' + A_0 f = F. \tag{3.7}$$

Alors, $\rho_2\left(f\right) \leqslant \rho$.

Preuve. Soit f une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.7). Si $\rho(f) < +\infty$, alors $\rho_2(f) = 0 \leqslant \rho$. Supposons que f est une solution méromorphe d'ordre infini, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de l'équation (3.7). Par la formule (3.7), nous avons

$$\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| \leqslant |A_{k-1}|\left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \ldots + |A_1|\left|\frac{f'}{f}\right| + \left|\frac{F}{f}\right| + |A_0|. \tag{3.8}$$

et il s'ensuit que les pôles de f ne peuvent pas être différent de ceux de $A_j (j = 0, 1, \ldots k-1)$ et de F sachant que ces pôles sont de multiplicité uniformément bornée. Par conséquent, $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) \leqslant \rho$. Du théorème de factorisation de Hadamard, nous savons que f peut être écrite comme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$, où g et d sont des fonctions entières avec

$$\lambda(d) = \rho(d) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) \leqslant \rho < \rho(f) = \rho(g) = +\infty \; et \; \rho_2(f) = \rho_2(g).$$

Par le Lemme 3.4, il existe une suite de points $\{z_m = r_m e^{i\theta_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $r_m \to +\infty$, $\theta_m \in [0, 2\pi)$, $m \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{m\to+\infty} \theta_m = \theta_0 \in [0, 2\pi)$, $|g(z_m)| = M(r_m, g)$ de sorte que pour tout m suffisamment grand, nous avons

$$\frac{f^{(n)}(z_m)}{f(z_m)} = \left(\frac{\nu_g(r_m)}{z_m}\right)^n (1 + o(1)) \; (n \in \mathbb{N}) \tag{3.9}$$

et

$$\limsup_{r_m\to+\infty} \frac{\log\log \nu_g(r_m)}{\log r_m} = \rho_2(g). \tag{3.10}$$

D'après le Lemme 3.3, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tels que les inégalités suivantes

$$|F(z)| \leqslant \exp\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}, |d(z)| \leqslant \exp\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\} \tag{3.11}$$

et

$$|A_j(z)| \leqslant \exp\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\} (j = 0, 1, \ldots k-1) \tag{3.12}$$

sont vérifiées pour tout z avec $|z| = r \notin ([0, 1] \cup E_3)$, $r \to +\infty$. Comme $M(r, g) \geq 1$ pour r suffisamment grand, il découle de (3.11) que

$$\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| = \frac{|F(z)||d(z)|}{|g(z)|} = \frac{|F(z)||d(z)|}{M(r, g)} \leqslant \exp\left\{2r^{\rho+\varepsilon}\right\}. \tag{3.13}$$

En remplaçant (3.9), (3.12) et (3.13) dans (3.8), nous obtenons

$$\left(\frac{\nu_g(r_m)}{r_m}\right)^k |1 + o(1)| \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} e^{r_m^{\rho+\varepsilon}} \left(\frac{\nu_g(r_m)}{r_m}\right)^j |1 + o(1)| + e^{r_m^{\rho+\varepsilon}} + e^{2r_m^{\rho+\varepsilon}}.$$

Il s'ensuit que

$$\left(\nu_g(r_m)\right)^k |1 + o(1)| \leqslant (k+1) e^{2r_m^{\rho+\varepsilon}} r_m^k \left(\nu_g(r_m)\right)^{k-1} |1 + o(1)|.$$

Par conséquent,

$$\nu_g(r_m) \leqslant (k+1) A r_m^k e^{2r_m^{\rho+\varepsilon}} \tag{3.14}$$

où la suite $\{z_m = r_m e^{i\theta_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $r_m \notin [0, 1] \cup E_3$, $r_m \to +\infty$, $\theta_m \in [0, 2\pi)$, $\lim_{m\to+\infty} \theta_m = \theta_0 \in [0, 2\pi)$, $|g(z_m)| = M(r_m, g)$ et $A > 0$ est une constante. Alors, en utilisant (3.14) et le Lemme 3.5, nous déduisons, pour tout $\varepsilon > 0$, que $\rho_2(g) = \rho_2(f) \leqslant \rho$.

Remarque 3.1 *Dans le cas homogène* ($F \equiv 0$)*, le Lemme 3.6 est traité par Chen et Xu dans* [31].

Lemme 3.7 [74] *Soient g une fonction entière transcendante et $\nu_g(r)$ l'indice central de g. Pour tout z avec $|z| = r$ suffisamment grand, considérons $z_r = re^{i\theta_r}$ satisfaisant $\left|g(z_r)\right| = M(r, g)$. Alors, il existe une constante δ_r (> 0) et un ensemble E_5 de mesure logarithmique finie tels que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_5$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r,\ \theta_r + \delta_r]$, nous avons*

$$\frac{g^{(n)}(z)}{g(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^n (1 + o(1))\ (n \geqslant 1 \text{ est un nombre entier}).$$

Lemme 3.8 ([38]) *Soit f une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini ρ. Soit $\Gamma = \left\{(k_1, j_1), (k_2, j_2), ..., (k_m, j_m)\right\}$ un ensemble des couples distincts d'entiers satisfaisant $k_i > j_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$ et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors, il existe un ensemble $E_6 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z avec $|z| = r \notin ([0, 1] \cup E_6)$ et $(k, j) \in \Gamma$, nous avons*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leqslant |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}.$$

Lemme 3.9 *Soit $f = \frac{g}{d}$ une fonction méromorphe avec $\rho(f) = \rho \leqslant +\infty$, où g et d sont des fonctions entières vérifiant l'une des conditions suivantes : (i) g est transcendante et d est polynomiale, (ii) g, d sont transcendantes et $\lambda(d) = \rho(d) = \beta < \rho\left(g\right) = \rho$. Pour tout $|z| = r$ suffisamment grand, soit $z_r = re^{i\theta_r}$ vérifiant $\left|g(z_r)\right| = M(r, g)$) et soit $\nu_g(r)$ l'indice central de g. Alors, il existe une constante δ_r (> 0), une suite $\{r_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $r_m \to +\infty$ et un ensemble E_7 de mesure logarithmique finie tels que l'estimation*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r_m)}{z}\right)^n (1 + o(1)) \quad (n \geqslant 1 \text{ est un entier})$$

soit vérifiée pour tout z satisfaisant $|z| = r_m \notin E_7$, $r_m \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r,\ \theta_r + \delta_r]$.

Preuve. Par récurrence, nous obtenons

$$f^{(n)} = \frac{g^{(n)}}{d} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g^{(j)}}{d} \sum_{(j_1 \cdots j_n)} C_{j j_1 \cdots j_n} \left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n} \tag{3.15}$$

où $C_{j j_1 \cdots j_n}$ sont des constantes et $j + j_1 + 2j_2 ... + n\ j_n = n$. Ainsi,

$$\frac{f^{(n)}}{f} = \frac{g^{(n)}}{g} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g^{(j)}}{g} \sum_{(j_1 \cdots j_n)} C_{j j_1 \cdots j_n} \left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}. \tag{3.16}$$

Pour tout z vérifiant $|z| = r$ suffisamment grand, soit $z_r = re^{i\theta_r}$ un point avec $\left|g(z_r)\right| = M(r, g)$. Du Lemme 3.7, il existe une constante δ_r (> 0) et un ensemble E_5 de mesure logarithmique finie tels que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_5$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r,\ \theta_r + \delta_r]$, nous avons

$$\frac{g^{(j)}(z)}{g(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^j (1 + o(1)) \left(j = 1, 2, ..., n\right) \tag{3.17}$$

où $\nu_g(r)$ est l'indice central de g. En remplaçant (3.17) dans (3.16), nous obtenons

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^n [(1 + o(1))$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{j-n}(1+o(1))\sum_{(j_1\cdots j_n)}C_{jj_1\cdots j_n}\left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1}\cdots\left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}\Bigg]. \tag{3.18}$$

Nous pouvons choisir une constante σ telle que $\beta<\sigma<\rho$. Du Lemme 3.8, pour tout $\varepsilon\left(0<2\varepsilon<\sigma-\beta\right)$, nous avons

$$\left|\frac{d^{(s)}(z)}{d(z)}\right|\leqslant r^{s(\beta-1+\varepsilon)}\ (s=1,2,...,n) \tag{3.19}$$

où $|z|=r\notin([0,1]\cup E_6)$, $E_6\subset(1,+\infty)$ avec $m_l(E_6)<+\infty$. En utilisant $j_1+2j_2...+n\,j_n=n-j$, nous avons

$$|z|^{n-j}\left|\left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1}\cdots\left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}\right|\leqslant|z|^{(n-j)(\beta+\varepsilon)} \tag{3.20}$$

pour $|z|=r\notin([0,1]\cup E_6)$. Puisque $\rho\left(g\right)=\rho$, il existe une suite $\left\{r'_m\right\}\left(r'_m\to+\infty\right)$ vérifiant

$$\lim_{r'_m\to+\infty}\frac{\log\nu_g\left(r'_m\right)}{\log r'_m}=\rho. \tag{3.21}$$

Nous pouvons définir la mesure logarithmique de $E_7=[0,1]\cup E_5\cup E_6$, $m_l(E_7)=\delta<+\infty$. Donc, il existe $r_m\in[r'_m,(\delta+1)\,r'_m]\backslash E_7$ vérifiant

$$\frac{\log\nu_g(r_m)}{\log r_m}\geqslant\frac{\log\nu_g\left(r'_m\right)}{\log[(\delta+1)\,r'_m]}=\frac{\log\nu_g\left(r'_m\right)}{\log\left(r'_m\right)\left[1+\frac{\log(\delta+1)}{\log(r'_m)}\right]}. \tag{3.22}$$

Par suite, nous obtenons

$$\lim_{r_m\to+\infty}\frac{\log\nu_g(r_m)}{\log r_m}=\rho. \tag{3.23}$$

Par conséquent, pour un m suffisamment grand, nous avons

$$\nu_g(r_m)\geqslant r_m^{\rho-\varepsilon}\geqslant r_m^{\sigma-\varepsilon}, \tag{3.24}$$

où $\rho-\varepsilon$ peut être remplacer par un nombre suffisamment grand M si $\rho=+\infty$. Ce dernier résultat combiné à (3.20), mène à

$$\left|\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{j-n}\left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1}\cdots\left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}\right|\leqslant r_m^{(n-j)(\beta-\sigma+2\varepsilon)}\to0,\ r_m\to+\infty, \tag{3.25}$$

où $|z|=r_m\notin E_7$ et $\arg z=\theta\in[\theta_r-\delta_r,\ \theta_r+\delta_r]$. De (3.18) et (3.25), nous obtenons notre résultat.

Lemme 3.10 *Soit $f=\frac{g}{d}$ une fonction méromorphe avec $\rho(f)=\rho\leqslant+\infty$, où g et d sont des fonctions entières vérifiant l'une des conditions suivantes : (i) g est transcendante et d est polynomiale, (ii) g, d sont transcendantes et $\lambda(d)=\rho(d)=\beta<\rho\left(g\right)=\rho$. Pour tout z vérifiant $|z|=r$ suffisamment grand, soit $z_r=re^{i\theta_r}$ un point satisfaisant $\left|g(z_r)\right|=M(r,g)$. Alors, il existe une constante $\delta_r\ (>0)$, une suite $\{r_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $r_m\to+\infty$ et un ensemble E_8 d'une mesure logarithmique finie tels que l'estimation*

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(n)}(z)}\right|\leqslant r_m^{2n}\quad(n\geqslant1\ \textit{est un entier})$$

soit vérifiée pour tout z satisfaisant $|z|=r_m\notin E_8$, $r_m\to+\infty$ et $\arg z=\theta\in[\theta_r-\delta_r,\ \theta_r+\delta_r]$.

Preuve *Soit* $z_r = re^{i\theta_r}$ *avec* $\left|g(z_r)\right| = M(r,g)$. Par le Lemme 3.9, il existe une constante $\delta_r > 0$, une suite $\{r_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $r_m \to +\infty$ et un ensemble E_8 de mesure logarithmique finie tels que l'estimation

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r_m)}{z}\right)^n (1+o(1)) \quad (n \geqslant 1 \text{ est un entier}) \tag{3.26}$$

est vérifiée pour tout z vérifiant $|z| = r_m \notin E_8$, $r_m \to +\infty$ *et* $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r]$. D'autre part, nous avons pour tout $\varepsilon > 0$ et m suffisamment grand

$$\nu_g(r_m) \geqslant r_m^{\rho-\varepsilon}, \tag{3.27}$$

où $\rho - \varepsilon$ peut être remplacé par un nombre suffisamment grand M si $\rho = +\infty$. Par conséquent, nous avons

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(n)}(z)}\right| \leqslant r_m^{2n}. \tag{3.28}$$

Ceci complète la preuve.

Lemme 3.11 [48] *Soient* f *une fonction méromorphe et* $k \in \mathbb{N}$. *Alors,*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S\left(r, f\right),$$

où $S\left(r,f\right) = O\left(\log T\left(r,f\right) + \log r\right)$, *éventuellement à l'extérieur d'un ensemble* $E_9 \subset (0,+\infty)$ *de mesure linéaire finie. Si* f *est d'ordre de croissance fini, alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log r\right).$$

Lemme 3.12 [45] *Soient* $P(z) = \left(\alpha + i\beta\right) z^n + \ldots$ $\left(\alpha, \beta\right.$ *sont des nombres réels,* $\left.|\alpha| + |\beta| \neq 0\right)$ *un polynôme de degré* $n \geq 1$ *et* $A(z)$ *une fonction méromorphe avec* $\rho(A) < n$. *Soient* $f(z) = A(z)e^{P(z)}$, $\left(z = re^{i\theta}\right)$, $\delta(P,\theta) = \alpha\cos n\theta - \beta \sin n\theta$. *Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ensemble* $E_{10} \subset [1,+\infty)$ *ayant une mesure logarithmique finie telle que pour* $\theta \in [0,2\pi) \setminus H$ *avec* $H = \{\theta \in [0;2\pi) : \delta(P,\theta) = 0\}$ *pour* $|z| = r \notin [0,1] \cup E_{10}$, $r \to +\infty$, *nous avons*

(i) *Si* $\delta(P,\theta) > 0$, *alors*

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(P,\theta)\,r^n\right\} \leq |f\left(re^{i\theta}\right)| \leq \exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta(P,\theta)\,r^n\right\},$$

(ii) *si* $\delta(P,\theta) < 0$, *alors*

$$\exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta(P,\theta)\,r^n\right\} \leq |f\left(re^{i\theta}\right)| \leq \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(P,\theta)\,r^n\right\}.$$

3 Preuve du Théorème 3.5

Tout d'abord, nous prouvons que toute solution méromorphe $f\,(\not\equiv 0)$ de l'équation (3.3) est transcendante d'ordre $\rho\left(f\right) \geqslant n$. Supposons que $f\,(\not\equiv 0)$ est une solution méromorphe de l'équation (3.3) avec $\rho\left(f\right) < n$. Nous pouvons réécrire l'équation (3.3) sous la forme

$$\left(A_{k-1,1}(z)\,e^{P_{k-1}(z)} + A_{k-1,2}(z)\,e^{Q_{k-1}(z)}\right) f^{(k-1)} + \ldots + \left(A_{0,1}(z)\,e^{P_0(z)} + A_{0,2}(z)\,e^{Q_0(z)}\right) f = -f^{(k)}. \tag{3.29}$$

Puisque
$$\max\left\{\rho\left(A_{ji}\right), j=0,1,\ldots,k-1; i=1,2\right\} < n$$
et $\rho\left(f\right) < n$, alors $A_{ji}f^{(j)}$, $j=0,1,\ldots,k-1; i=1,2$ et $f^{(k)}$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini avec $\rho\left(A_{ji}f^{(j)}\right) < n$ et $\rho\left(f^{(k)}\right) < n$. Nous avons aussi $a_{0,n} \neq b_{0,n}$ et $a_{j,n} = c_j a_{0,n}, b_{j,n} = c_j b_{0,n}, c_j > 1$, $j=1,\ldots,k-1$, alors $a_{j,n} \neq b_{j,n}$ et donc
$$\deg\left(P_j - P_0\right) = \deg\left(Q_j - Q_0\right) = n.$$

Comme $A_{0,1} f(z) \not\equiv 0$ et $A_{0,2}(z) f \not\equiv 0$, par le Lemme 3.1, nous avons l'ordre de croissance du membre gauche de l'équation (3.29) est n, cela contredit le fait que $\rho\left(f^{(k)}\right) < n$. Par conséquent, toute solution méromorphe $f\,(\not\equiv 0)$ de l'équation (3.3) est transcendante avec l'ordre $\rho\left(f\right) \geqslant n$. Posons $z = re^{i\theta}$, $a_{0,n} = \left|a_{0,n}\right| e^{i\theta_1}$, $b_{0,n} = \left|b_{0,n}\right| e^{i\theta_2}$, $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$. Alors,
$$\delta\left(P_0,\theta\right) = \left|a_{0,n}\right| \cos\left(n\theta + \theta_1\right), \delta\left(Q_0,\theta\right) = \left|b_{0,n}\right| \cos\left(n\theta + \theta_2\right). \tag{3.30}$$

Puisque $a_{j,n} = c_j a_{0,n}$, $b_{j,n} = c_j b_{0,n}, c_j > 1$, avec c_j sont des nombres distincts $(j = 1,\ldots,k-1)$, nous avons
$$\delta\left(P_j,\theta\right) = c_j \delta\left(P_0,\theta\right), \ \delta\left(Q_j,\theta\right) = c_j \delta\left(Q_0,\theta\right). \tag{3.31}$$
D'autre part, il existe exactement c_s tel que $c_s = \max\left\{c_j, j = 0,1,\ldots,k-1\right\}$, et en prenant $c_0 = 1$, nous divisons notre preuve en deux parties : le cas où $\theta_1 = \theta_2$ et le cas où $\theta_1 \neq \theta_2$.

Cas 1 Quand $\theta_1 = \theta_2$, en raison de $a_{0,n} \neq b_{0,n}$, prenons que $\left|a_{0,n}\right| < \left|b_{0,n}\right|$ sans perte de généralité. Supposons que f est une solution méromorphe dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée de l'équation (3.3). De cette dernière, nous avons
$$\begin{aligned}&\left|A_{s,1}(z)\, e^{P_s(z)} + A_{s,2}(z)\, e^{Q_s(z)}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| \left(\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + \sum_{j=0, j\neq s}^{k-1} \left\{\left|A_{j,1}(z)\, e^{P_j(z)} + A_{j,2}(z)\, e^{Q_j(z)}\right| \left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|\right\}\right).\end{aligned} \tag{3.32}$$
Comme f est transcendante, alors du Lemme 3.2, pour $\alpha = 2$, il existe un ensemble $E_1 \subset [1, +\infty)$ avec $m_l(E_1) < +\infty$ et une constante $B > 0$ tels que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_1)$, nous avons
$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant B\left[T\left(2r, f\right)\right]^{k+1}, \ j = 1,2,\ldots,k, \ j \neq s. \tag{3.33}$$

Par (3.3), il s'ensuit que les pôles de f ne peuvent pas être autres que ceux de $A_{ji}, j = 0,1,\ldots,k-1; i = 1,2$ et sont de multiplicité uniformément bornée. Donc
$$\lambda\left(\frac{1}{f}\right) \leqslant \max\left\{\rho(A_{ji}), j = 0,1,\ldots,k-1; i = 1,2\right\} < n.$$

D'après le théorème de factorisation de Hadamard, nous savons que f peut s'écrire sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ où g et d sont des fonctions entières telles que $\lambda(d) = \rho(d) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) < n \leqslant \rho\left(f\right) = \rho\left(g\right)$. Pour tout z vérifiant $|z| = r$ suffisamment grand, considérons $z_r = re^{i\theta_r}$ un point vérifiant $\left|g(z_r)\right| = M(r, g)$. Par le Lemme 3.10, il existe une constante $\delta_r\ (>0)$, une suite $\{r_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $r_m \to +\infty$ et un ensemble E_8 de mesure logarithmique finie tels que l'estimation
$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leqslant r_m^{2s} \tag{3.34}$$

est vérifiée pour tout z satisfaisant $|z| = r_m \notin E_8$, $r_m \to \infty$ *et* $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r]$. Nous distinguons

(i) Si $\delta(P_0, \theta) > 0$, par (3.31), alors

$$\delta(Q_j, \theta) > \delta(Q_0, \theta) > 0, \delta(Q_j, \theta) > \delta(P_j, \theta) > \delta(P_0, \theta) > 0.$$

Par le Lemme 3.12, pour tout $\varepsilon \left(0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{c_s - c_j}{c_s + c_j}\right),\ j \neq s\right\}\right)$, il existe un ensemble $E_2 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithme finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_2)$, $r \to +\infty$, et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r,\ \theta_r + \delta_r] \setminus H$, où $H = \{\theta \in [0; 2\pi) : \delta(P_0, \theta) = 0, \delta(Q_0, \theta) = 0\}$ est un ensemble fini, nous avons

$$\begin{aligned} \left|A_{s,1}(z) e^{P_s(z)} + A_{s,2}(z) e^{Q_s(z)}\right| &\geqslant \left|A_{s,2}(z) e^{Q_s(z)}\right| - \left|A_{s,1}(z) e^{P_s(z)}\right| \\ &\geqslant \exp\left\{(1-\varepsilon) c_s \delta(Q_0, \theta) r^n\right\} - \exp\left\{(1+\varepsilon) c_s \delta(P_0, \theta) r^n\right\} \\ &\geqslant \frac{1}{2} \exp\left\{(1-\varepsilon) c_s \delta(Q_0, \theta) r^n\right\}, \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned} \left|A_{j,1}(z) e^{P_j(z)} + A_{j,2}(z) e^{Q_j(z)}\right| &\leqslant \left|A_{j,1}(z) e^{P_j(z)}\right| + \left|A_{j,2}(z) e^{Q_j(z)}\right| \\ &\leqslant \exp\left\{(1+\varepsilon) c_j \delta(P_0, \theta) r^n\right\} + \exp\left\{(1+\varepsilon) c_j \delta(Q_0, \theta) r^n\right\} \\ &\leqslant 2\exp\left\{(1+\varepsilon) c_j \delta(Q_0, \theta) r^n\right\},\ j = 0, 1, 2, \ldots, k-1,\ j \neq s. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Substituant (3.33), (3.34), (3.35) et (3.36) dans (3.32), nous obtenons pour tout z vérifiant $|z| = r_m \notin ([0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_8)$, $r_m \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r,\ \theta_r + \delta_r] \setminus H$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \exp\left\{(1-\varepsilon) c_s \delta(Q_0, \theta) r_m^n\right\} &\leqslant r_m^{2s} \Big(B\left[T(2r_m, f)\right]^{k+1} \\ &\quad + B\left[T(2r_m, f)\right]^{k+1} \sum_{j=0, j\neq s}^{k-1} 2\exp\left\{(1+\varepsilon) c_j \delta(Q_0, \theta) r_m^n\right\}\Big) \\ &\leqslant 4 r_m^{2s} B\left[T(2r_m, f)\right]^{k+1} \sum_{j=0, j\neq s}^{k-1} \exp\left\{(1+\varepsilon) c_j \delta(Q_0, \theta) r_m^n\right\} \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\exp\left\{(1-\varepsilon) c_s \delta(Q_0, \theta) r_m^n\right\} \leqslant 8 r_m^{2s} B\left[T(2r_m, f)\right]^{k+1} \sum_{j=0, j\neq s}^{k-1} \exp\left\{(1+\varepsilon) c_j \delta(Q_0, \theta) r_m^n\right\}. \tag{3.37}$$

Comme $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{c_s - c_j}{c_s + c_j}\right),\ j \neq s\right\}$, donc par le Lemme 3.5 et (3.37), nous obtenons

$$\rho(f) = \limsup_{r_m \to +\infty} \frac{\log T(r_m, f)}{\log r_m} = +\infty,$$

et

$$\rho_2(f) = \limsup_{r_m \to +\infty} \frac{\log_2 T(r_m, f)}{\log r_m} \geqslant n.$$

En outre, par le Lemme 3.6 et de l'équation (3.3), nous avons $\rho_2(f) \leqslant n$ et par suite $\rho_2(f) = n$.

(ii) Si $\delta(P_0, \theta) < 0$, alors en combinant (3.30) et (3.31), nous avons

$$\delta(Q_j, \theta) < \delta(Q_0, \theta) < \delta(P_0, \theta) < 0, \delta(P_j, \theta) < \delta(P_0, \theta) < 0.$$

Par le Lemme 3.12 , pour tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe un ensemble $E_2 \subset [1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_2)$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r,\ \theta_r + \delta_r] \setminus H$, où

$$H = \{\theta \in [0;2\pi) : \delta(P_0,\theta) = 0, \delta(Q_0,\theta) = 0\}$$

est un ensemble fini, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left|A_{j,1}(z)\, e^{P_j(z)} + A_{j,2}(z)\, e^{Q_j(z)}\right| &\leqslant \left|A_{j,1}(z)\, e^{P_j(z)}\right| + \left|A_{j,2}(z)\, e^{Q_j(z)}\right| \\ &\leqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta\left(P_j,\theta\right) r^n\right\} + \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta\left(Q_j,\theta\right) r^n\right\} \\ &\leqslant 2\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(P_0,\theta)\, r^n\right\},\ j = 0,1,2,\dots,k-1. \end{aligned} \tag{3.38}$$

De (3.3), nous avons

$$1 \leqslant \left|\frac{f}{f^{(k)}}\right| \sum_{j=0}^{k-1} \left\{\left|A_{j,1}(z)\, e^{P_j(z)} + A_{j,2}(z)\, e^{Q_j(z)}\right| \left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|\right\}. \tag{3.39}$$

En remplaçant (3.33), (3.34) et (3.38) dans (3.39), nous obtenons pour tout z vérifiant $|z| = r_m \notin ([0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_8)$, $r_m \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r,\ \theta_r + \delta_r] \setminus H$

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant r_m^{2k} B\left[T\left(2r_m, f\right)\right]^{k+1} \left(\sum_{j=0}^{k-1} 2\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(P_0,\theta)\, r_m^n\right\}\right) \\ &\leqslant 2k r_m^{2k} B\left[T\left(2r_m, f\right)\right]^{k+1} \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(P_0,\theta)\, r_m^n\right\}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

D'où,

$$\exp\left\{(\varepsilon-1)\,\delta(P_0,\theta)\, r_m^n\right\} \leqslant 2k r_m^{2k} B\left[T\left(2r_m, f\right)\right]^{k+1}. \tag{3.41}$$

Par le Lemme 3.5 et (3.41), nous obtenons

$$\rho(f) = \limsup_{r_m \to +\infty} \frac{\log T\left(r_m, f\right)}{\log r_m} = +\infty$$

et

$$\rho_2(f) = \limsup_{r_m \to +\infty} \frac{\log\log T\left(r_m, f\right)}{\log r_m} \geqslant n.$$

En outre, du Lemme 3.6 et de l'équation (3.3), nous déduisons que $\rho_2(f) \leqslant n$, donc $\rho_2(f) = n$.

Cas 2 Quand $\theta_1 \neq \theta_2$.
(i) Si $\delta(P_0,\theta) > 0$, $\delta(Q_0,\theta) < 0$, alors par (3.31), nous avons

$$\delta\left(P_j,\theta\right) > \delta(P_0,\theta) > 0, \delta\left(Q_j,\theta\right) < \delta(Q_0,\theta) < 0.$$

D'après le Lemme 3.12, pour tout $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{c_s - c_j}{c_s + c_j}\right),\ j \neq s\right\}$, il existe un ensemble $E_2 \subset [1,+\infty)$ ayant une mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2$, $r \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r,\ \theta_r + \delta_r] \setminus H_1$, où

$$H_1 = \{\theta \in [0,2\pi) : \delta(P_0,\theta) = 0, \delta(Q_0,\theta) = 0, \delta(P_0,\theta) = \delta(Q_0,\theta)\}$$

est un ensemble fini, nous avons

$$\begin{aligned} \left|A_{s,1}(z)\, e^{P_s(z)} + A_{s,2}(z)\, e^{Q_s(z)}\right| &\geqslant \left|A_{s,1}(z)\, e^{P_s(z)}\right| - \left|A_{s,2}(z)\, e^{Q_s(z)}\right| \\ &\geqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)\, c_s \delta(P_0,\theta)\, r^n\right\} - \exp\left\{(1-\varepsilon)\, c_s \delta(Q_0,\theta)\, r^n\right\} \\ &\geqslant \frac{1}{2}\exp\left\{(1-\varepsilon)\, c_s \delta(P_0,\theta)\, r^n\right\}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}\left|A_{j,1}(z)e^{P_j(z)}+A_{j,2}(z)e^{Q_j(z)}\right| &\leqslant \left|A_{j,1}(z)e^{P_j(z)}\right|+\left|A_{j,2}(z)e^{Q_j(z)}\right|\\ &\leqslant \exp\left\{(1+\varepsilon)c_j\delta(P_0,\theta)r^n\right\}+\exp\left\{(1-\varepsilon)c_j\delta(Q_0,\theta)r^n\right\}\\ &\leqslant 2\exp\left\{(1+\varepsilon)c_j\delta(P_0,\theta)r^n\right\},\ j=0,1,2,\dots,k-1,\ j\neq s\end{aligned} \tag{3.43}$$

De (3.32), (3.33), (3.34), (3.42) et (3.43), nous avons pour tout z vérifiant $|z|=r_m\notin([0,1]\cup E_1\cup E_2\cup E_8)$, $r_m\to+\infty$ et $\arg z=\theta\in[\theta_r-\delta_r,\ \theta_r+\delta_r]\setminus H_1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\exp\left\{(1-\varepsilon)c_s\delta(P_0,\theta)r_m^n\right\} &\leqslant r_m^{2s}\,(B\left[T\left(2r_m,f\right)\right]^{k+1}\\ &\quad +B\left[T\left(2r_m,f\right)\right]^{k+1}\sum_{j=0,j\neq s}^{k-1}2\exp\left\{(1+\varepsilon)c_j\delta(P_0,\theta)r_m^n\right\})\\ &\leqslant 4r_m^{2s}B\left[T\left(2r_m,f\right)\right]^{k+1}\sum_{j=0,j\neq s}^{k-1}\exp\left\{(1+\varepsilon)c_j\delta(P_0,\theta)r_m^n\right\}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}&\exp\left\{(1-\varepsilon)c_s\delta(P_0,\theta)r_m^n\right\}\\ &\qquad\leqslant 8r_m^{2s}B\left[T\left(2r_m,f\right)\right]^{k+1}\sum_{j=0,j\neq s}^{k-1}\exp\left\{(1+\varepsilon)c_j\delta(P_0,\theta)r_m^n\right\}.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Puisque $0<\varepsilon<\min\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{c_s-c_j}{c_s+c_j}\right),\ j\neq s\right\}$, alors par le Lemme 3.5 et (3.44), nous obtenons

$$\rho(f)=\limsup_{r_m\to+\infty}\frac{\log T\left(r_m,f\right)}{\log r_m}=+\infty,$$

et

$$\rho_2(f)=\limsup_{r_m\to+\infty}\frac{\log\log T\left(r_m,f\right)}{\log r_m}\geqslant n.$$

En outre, par le Lemme 3.6 et de l'équation (3.3), nous avons $\rho_2(f)\leq n$. Par suite $\rho_2(f)=n$.

(ii) Si $\delta(P_0,\theta)<0$, $\delta(Q_0,\theta)>0$, alors par (3.31), nous avons

$$\delta\left(P_j,\theta\right)<\delta(P_0,\theta)<0,\delta\left(Q_j,\theta\right)>\delta(Q_0,\theta)>0.$$

D'après le Lemme 3.12 , pour tout $0<\varepsilon<\min\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{c_s-c_j}{c_s+c_j}\right),j\neq s\right\}$, il existe un ensemble $E_2\subset[1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z|=r\notin([0,1]\cup E_2)$, $r\to+\infty$ et $\arg z=\theta\in[\theta_r-\delta_r,\ \theta_r+\delta_r]\setminus H_1$, où

$$H_1=\{\theta\in[0,2\pi):\delta(P_0,\theta)=0,\delta(Q_0,\theta)=0,\delta(P_0,\theta)=\delta(Q_0,\theta)\}$$

est un ensemble fini, nous avons

$$\begin{aligned}\left|A_{s,1}(z)e^{P_s(z)}+A_{s,2}(z)e^{Q_s(z)}\right| &\geqslant \left|A_{s,2}(z)e^{Q_s(z)}\right|-\left|A_{s,1}(z)e^{P_s(z)}\right|\\ &\geqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)c_s\delta(Q_0,\theta)r^n\right\}-\exp\left\{(1-\varepsilon)c_s\delta(P_0,\theta)r^n\right\}\\ &\geqslant \frac{1}{2}\exp\left\{(1-\varepsilon)c_s\delta(Q_0,\theta)r^n\right\},\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}\left|A_{j,1}(z)e^{P_j(z)}+A_{j,2}(z)e^{Q_j(z)}\right| &\leqslant \left|A_{j,1}(z)e^{P_j(z)}\right|+\left|A_{j,2}(z)e^{Q_j(z)}\right|\\ &\leqslant \exp\left\{(1+\varepsilon)c_j\delta(Q_0,\theta)r^n\right\}+\exp\left\{(1-\varepsilon)c_j\delta(P_0,\theta)r^n\right\}\\ &\leqslant 2\exp\left\{(1+\varepsilon)c_j\delta(Q_0,\theta)r^n\right\},\ j=0,1,2,\dots,k-1,\ j\neq s.\end{aligned} \tag{3.46}$$

En utilisant une preuve similaire à celle de (i), nous pouvons obtenir, pour tout z satisfaisant $|z|=r_m\notin([0,1]\cup E_1\cup E_2\cup E_8)$, $r_m\to+\infty$ et $\arg z=\theta\in[\theta_r-\delta_r,\ \theta_r+\delta_r]\setminus H_1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\exp\left\{(1-\varepsilon)c_s\delta(Q_0,\theta)r_m^n\right\} &\leqslant r_m^{2s}\Big(B\left[T\left(2r_m,f\right)\right]^{k+1}\\ &\quad +B\left[T\left(2r_m,f\right)\right]^{k+1}\sum_{j=0,j\neq s}^{k-1}2\exp\left\{(1+\varepsilon)c_j\delta(Q_0,\theta)r_m^n\right\}\Big)\\ &\leqslant 4r_m^{2s}B\left[T\left(2r_m,f\right)\right]^{k+1}\sum_{j=0,j\neq s}^{k-1}\exp\left\{(1+\varepsilon)c_j\delta(Q_0,\theta)r_m^n\right\}.\end{aligned}$$

D'où

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)c_s\delta(Q_0,\theta)r_m^n\right\}\leqslant 8r_m^{2s}B\left[T\left(2r_m,f\right)\right]^{k+1}\sum_{j=0,j\neq s}^{k-1}\exp\left\{(1+\varepsilon)c_j\delta(Q_0,\theta)r_m^n\right\}. \tag{3.47}$$

Comme $0<\varepsilon<\min\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{c_s-c_j}{c_s+c_j}\right),\ j\neq s\right\}$, alors du Lemme 3.5 et (3.47), nous obtenons

$$\rho\left(f\right)=\limsup_{r_m\to+\infty}\frac{\log T\left(r_m,f\right)}{\log r_m}=+\infty$$

et

$$\rho_2\left(f\right)=\limsup_{r_m\to+\infty}\frac{\log\log T\left(r_m,f\right)}{\log r_m}\geqslant n.$$

En outre, du Lemme 3.6 et de l'équation (3.3), nous avons $\rho_2\left(f\right)\leqslant n$. Par suite $\rho_2\left(f\right)=n$.

(iii) Si $\delta(P_0,\theta)>0$, $\delta(Q_0,\theta)>0$, alors par (3.31) nous avons

$$\delta\left(P_j,\theta\right)>\delta(P_0,\theta)>0,\delta\left(Q_j,\theta\right)>\delta(Q_0,\theta)>0.$$

Supposons que $\delta(P_0,\theta)>\delta(Q_0,\theta)$ sans perte de généralité. Par le Lemme 3.12, pour tout $0<\varepsilon<\min\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{c_s-c_j}{c_s+c_j}\right),\ j\neq s\right\}$, il existe un ensemble $E_2\subset[1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z|=r\notin([0,1]\cup E_2)$, $r\to+\infty$ et $\arg z=\theta\in[\theta_r-\delta_r,\ \theta_r+\delta_r]\setminus H_1$, où

$$H_1=\{\theta\in[0,2\pi):\delta(P_0,\theta)=0,\delta(Q_0,\theta)=0,\delta(P_0,\theta)=\delta(Q_0,\theta)\}$$

est un ensemble fini, nous avons

$$\begin{aligned}\left|A_{s,1}(z)e^{P_s(z)}+A_{s,2}(z)e^{Q_s(z)}\right| &\geqslant \left|A_{s,1}(z)e^{P_s(z)}\right|-\left|A_{s,2}(z)e^{Q_s(z)}\right|\\ &\geqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)c_s\delta(P_0,\theta)r^n\right\}-\exp\left\{(1-\varepsilon)c_s\delta(Q_0,\theta)r^n\right\}\\ &\geqslant \frac{1}{2}\exp\left\{(1-\varepsilon)c_s\delta(P_0,\theta)r^n\right\},\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}\left|A_{j,1}(z)e^{P_j(z)}+A_{j,2}(z)e^{Q_j(z)}\right| &\leqslant \left|A_{j,1}(z)e^{P_j(z)}\right|+\left|A_{j,2}(z)e^{Q_j(z)}\right|\\ &\leqslant \exp\left\{(1+\varepsilon)c_j\delta(P_0,\theta)r^n\right\}+\exp\left\{(1+\varepsilon)c_j\delta(Q_0,\theta)r^n\right\}\\ &\leqslant 2\exp\left\{(1+\varepsilon)c_j\delta(P_0,\theta)r^n\right\},\ j=0,1,2,\dots,k-1,\ j\neq s.\end{aligned} \tag{3.49}$$

De (3.32), (3.33), (3.34), (3.48) et (3.49), nous obtenons pour tout z avec $|z| = r_m \notin ([0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_8)$, $r_m \to +\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] \setminus H_1$

$$\frac{1}{2} \exp\left\{(1-\varepsilon) c_s \delta(P_0,\theta) r_m^n\right\} \leqslant 4 r_m^{2s} B\left[T\left(2r_m, f\right)\right]^{k+1} \sum_{j=0, j\neq s}^{k-1} \exp\left\{(1+\varepsilon) c_j \delta(P_0,\theta) r_m^n\right\}.$$

D'où

$$\exp\left\{(1-\varepsilon) c_s \delta(P_0,\theta) r_m^n\right\} \leqslant 8 r_m^{2s} B\left[T\left(2r_m, f\right)\right]^{k+1} \sum_{j=0, j\neq s}^{k-1} \exp\left\{(1+\varepsilon) c_j \delta(P_0,\theta) r_m^n\right\}. \quad (3.50)$$

De la condition $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{c_s - c_j}{c_s + c_j}\right),\ j \neq s\right\}$, le Lemme 3.5 et (3.50), nous obtenons

$$\rho(f) = \limsup_{r_m \to +\infty} \frac{\log T\left(r_m, f\right)}{\log r_m} = +\infty$$

et

$$\rho_2(f) = \limsup_{r_m \to +\infty} \frac{\log\log T\left(r_m, f\right)}{\log r_m} \geqslant n.$$

De plus, par le Lemme 3.6 et de l'équation (3.3), nous avons $\rho_2(f) \leqslant n$. Il résulte que $\rho_2(f) = n$.

(iv) Si $\delta(P_0,\theta) < 0$, $\delta(Q_0,\theta) < 0$ par (3.31), nous avons

$$\delta\left(P_j,\theta\right) < \delta(P_0,\theta) < 0, \delta\left(Q_j,\theta\right) < \delta(Q_0,\theta) < 0.$$

Posons $\delta = \max\{\delta(P_0,\theta), \delta(Q_0,\theta)\}$. Du Lemme 3.12, pour tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe un ensemble $E_2 \subset [1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_2)$, $r \to +\infty$, et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] \setminus H_1$, où

$$H_1 = \{\theta \in [0,2\pi) : \delta(P_0,\theta) = 0, \delta(Q_0,\theta) = 0, \delta(P_0,\theta) = \delta(Q_0,\theta)\}$$

est un ensemble fini, nous avons

$$\begin{aligned} \left|A_{j,1}(z) e^{P_j(z)} + A_{j,2}(z) e^{Q_j(z)}\right| &\leqslant \left|A_{j,1}(z) e^{P_j(z)}\right| + \left|A_{j,2}(z) e^{Q_j(z)}\right| \\ &\leqslant \exp\left\{(1-\varepsilon) c_j \delta(P_0,\theta) r^n\right\} + \exp\left\{(1-\varepsilon) c_j \delta(Q_0,\theta) r^n\right\} \\ &\leqslant 2\exp\left\{(1-\varepsilon) c_j \delta r^n\right\},\ j = 0,1,2,\ldots,k-1. \qquad (3.51) \end{aligned}$$

Par (3.33), (3.34) , (3.39) et (3.51) nous avons pour tout z satisfaisant $|z| = r_m \notin ([0,1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_8)$, $r_m \to +\infty$, et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] \setminus H_1$

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant r_m^{2k} B\left[T\left(2r_m, f\right)\right]^{k+1} \left\{\sum_{j=0}^{k-1} 2\exp\left\{(1-\varepsilon) c_j \delta r_m^n\right\}\right\} \\ &\leqslant 2 r_m^{2k} B\left[T\left(2r_m, f\right)\right]^{k+1} \left\{\sum_{j=0}^{k-1} \exp\left\{(1-\varepsilon) c_j \delta r_m^n\right\}\right\}. \qquad (3.52) \end{aligned}$$

Puisque $c_j > 1$, $j = 1,\ldots,k-1$ et $\delta < 0$, nous obtenons

$$\exp\left\{(1-\varepsilon) c_j \delta r_m^n\right\} \leqslant \exp\left\{(1-\varepsilon) \delta r_m^n\right\}, j = 1,\ldots,k-1.$$

Ainsi, (3.52) devient

$$1 \leqslant 2 r_m^{2k} k B\left[T\left(2r_m, f\right)\right]^{k+1} \exp\left\{(1-\varepsilon) \delta r_m^n\right\}.$$

D'où
$$\exp\left\{(\varepsilon-1)\,\delta r_m^n\right\} \leqslant 2r_m^{2k}\mathrm{B}k\left[\mathrm{T}\left(2r_m,f\right)\right]^{k+1}. \tag{3.53}$$
Par le Lemme 3.5 et (3.53), nous obtenons
$$\rho\left(f\right)=\limsup_{r_m\to+\infty}\frac{\log\mathrm{T}\left(r_m,f\right)}{\log r_m}=+\infty$$
et
$$\rho_2\left(f\right)=\limsup_{r_m\to+\infty}\frac{\log\log\mathrm{T}\left(r_m,f\right)}{\log r_m}\geqslant n.$$
En outre, du Lemme 3.6 et de l'équation (3.3), nous avons $\rho_2\left(f\right)\leqslant n$, donc $\rho_2\left(f\right)=n$. Ceci complète la preuve du Théorème 3.5.

4 Preuve du Théorème 3.6

(i) Supposons que f_0 est une solution méromorphe d'ordre fini, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de l'équation (3.4). Si $f_1(\not\equiv f_0)$ est une autre solution méromorphe d'ordre fini, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de l'équation (3.4), alors f_1-f_0 est une solution méromorphe non nulle de l'équation (3.3) avec $\rho(f_1-f_0)<+\infty$. Cela contredit le Théorème 3.5. Par conséquent, l'équation (3.4) a au plus une solution méromorphe d'ordre fini.

Supposons que f est une solution méromorphe d'ordre infini, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de (3.4). Par l'équation (3.4), il est facile de voir que si f a des zéros en z_0 d'ordre $\alpha\,(\alpha>k)$, et $\mathrm{B}_0,\mathrm{B}_1,\ldots,\mathrm{B}_{k-1}$ sont tous analytiques en z_0, alors F doit avoir un zéro en z_0 d'ordre au moins $\alpha-k$. Par conséquent,
$$n\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant k\overline{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)+n\left(r,\frac{1}{\mathrm{F}}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}n\left(r,\mathrm{B}_j\right),$$
et
$$\mathrm{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant k\overline{\mathrm{N}}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\mathrm{N}\left(r,\frac{1}{\mathrm{F}}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}\mathrm{N}\left(r,\mathrm{B}_j\right), \tag{3.54}$$
où $\mathrm{B}_j(z)=\mathrm{A}_{j1}(z)\,e^{\mathrm{P}_j(z)}+\mathrm{A}_{j2}(z)\,e^{\mathrm{Q}_j(z)}$, $j=0,1,2,\ldots,k-1$. Maintenant (3.4) peut s'écrire comme suit
$$\frac{1}{f}=\frac{1}{\mathrm{F}}\left(\frac{f^{(k)}}{f}+\mathrm{B}_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}}{f}+\ldots+\mathrm{B}_1(z)\frac{f'}{f}+\mathrm{B}_0(z)\right). \tag{3.55}$$
Par le Lemme 3.11 et (3.55), pour tout z avec $|z|=r$ à l'extérieur d'un ensemble E_9 de mesure linéaire finie, nous avons
$$\begin{aligned} m\left(r,\frac{1}{f}\right) &\leqslant m\left(r,\frac{1}{\mathrm{F}}\right)+\sum_{j=1}^{k}m\left(r,\frac{f^{(j)}}{f}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}m\left(r,\mathrm{B}_j\right)+\mathrm{O}(1)\\ &\leqslant m\left(r,\frac{1}{\mathrm{F}}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}m\left(r,\mathrm{B}_j\right)+\mathrm{O}\left(\log r\mathrm{T}\left(r,f\right)\right). \end{aligned} \tag{3.56}$$
Par conséquent, par (3.54), (3.56) et le premier théorème fondamental, l'inégalité
$$\begin{aligned} \mathrm{T}(r,f) &= \mathrm{T}(r,\frac{1}{f})+\mathrm{O}(1)\\ &\leqslant \mathrm{T}(r,\mathrm{F})+\sum_{j=0}^{k-1}\mathrm{T}\left(r,\mathrm{B}_j\right)+k\overline{\mathrm{N}}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\mathrm{O}\left(\log r\mathrm{T}\left(r,f\right)\right) \end{aligned} \tag{3.57}$$

est vérifiée pour tout $r \notin E_9$ suffisamment grand, donc

$$O\left(\log r T\left(r,f\right)\right) \leqslant \frac{1}{2} T(r,f). \tag{3.58}$$

Posons $\rho_1 = \max\left\{n, \rho(F)\right\}$. Par le Lemme 3.3, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_3 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que

$$T(r,F) \leqslant r^{\rho_1+\varepsilon}, T\left(r,B_j\right) \leqslant r^{\rho_1+\varepsilon}, j = 0,1,2,...,k-1, \tag{3.59}$$

où $|z| = r \notin [0,1] \cup E_3$, $r \to +\infty$. Par (3.57), (3.58) et (3.59), pour $r \notin ([0,1] \cup E_3 \cup E_9)$ suffisamment grand, nous obtenons

$$T(r,f) \leqslant r^{\rho_1+\varepsilon} + k r^{\rho_1+\varepsilon} + k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + \frac{1}{2}T(r,f).$$

Par suite

$$T(r,f) \leqslant 2(k+1) r^{\rho_1+\varepsilon} + 2k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) \tag{3.60}$$

donc,

$$\rho_2(f) \leqslant \overline{\lambda}_2(f).$$

Alors,

$$\rho_2(f) \leqslant \overline{\lambda}_2(f) \leqslant \lambda_2(f).$$

Par définition, nous avons $\overline{\lambda}_2(f) \leqslant \lambda_2(f) \leqslant \rho_2(f)$. Donc

$$\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f).$$

D'autre part, si $\max\left\{\rho\left(A_{ji}\right), j = 0,1,...,k-1; i = 1,2\right\} < n$, alors $\rho\left(B_j\right) < +\infty$, ($j = 0,1,...,k-1$) et f est une solution de (3.4) d'ordre infini. Alors, par le Lemme 2.6(i) nous obtenons $\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty$. Et comme $\rho\left(B_j\right) \leqslant n$, du Lemme 3.6 nous avons

$$\rho_2(f) \leqslant \max\left\{n, \rho(F)\right\}.$$

(ii) Supposons que f_0 est une solution méromorphe de l'équation (3.4) d'ordre fini. Par le Lemme 3.11, nous avons $m\left(r,\frac{f_0^{(j)}}{f_0}\right) = O\left(\log r\right)$, $j = 1,...,k-1$. En utilisant (3.55), pour tout z vérifiant $|z| = r$ à l'extérieur d'un ensemble E_9 de mesure linéaire finie, nous avons

$$\begin{aligned} m\left(r,\frac{1}{f_0}\right) &\leqslant m\left(r,\frac{1}{F}\right) + \sum_{j=1}^{k} m\left(r,\frac{f_0^{(j)}}{f_0}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} m\left(r,B_j\right) + O(1) \\ &\leqslant m\left(r,\frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} m\left(r,B_j\right) + O\left(\log r\right) \end{aligned} \tag{3.61}$$

et

$$N\left(r,\frac{1}{f_0}\right) \leqslant k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f_0}\right) + N\left(r,\frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} N\left(r,B_j\right). \tag{3.62}$$

Par (3.61) et (3.62), nous obtenons

$$\begin{aligned} T(r,f_0) &= T(r,\frac{1}{f_0}) + O(1) \\ &\leqslant T\left(r,\frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} T\left(r,B_j\right) + k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f_0}\right) + O\left(\log r\right). \end{aligned} \tag{3.63}$$

Et en utilisant (3.59) et (3.63), nous avons

$$T(r,f_0) \leqslant (k+1)\,r^{\rho_1+\varepsilon} + k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f_0}\right) + O(\log r).$$

Par conséquent,

$$\rho(f_0) \leqslant \max\left\{\overline{\lambda}(f_0),\rho_1\right\} = \max\left\{n,\overline{\lambda}(f_0),\rho(F)\right\}.$$

(iii) Tout d'abord, nous prouvons que toute solution méromorphe f de l'équation (3.4) est transcendante d'ordre $\rho(f) \geqslant n$. Supposons que f est une solution méromorphe de l'équation (3.4) avec $\rho(f) < n$. Nous pouvons réécrire l'équation (3.4) sous la forme

$$\begin{aligned}&\left(A_{k-1,1}(z)\,e^{P_{k-1}(z)} + A_{k-1,2}(z)\,e^{Q_{k-1}(z)}\right)f^{(k-1)}\\ &+\ldots+\left(A_{0,1}(z)\,e^{P_0(z)} + A_{0,2}(z)\,e^{Q_0(z)}\right)f = B(z),\end{aligned} \tag{3.64}$$

où

$$B(z) = F(z) - f^{(k)}.$$

Puisque $\max\{\rho(A_{ji}),\, j=0,1,\ldots,k-1;\, i=1,2, \rho(F)\} < n$ et $\rho(f) < n$, alors $A_{ji}f^{(j)}$, $j=0,1,\ldots,k-1$; $i=1,2$ et B sont des fonctions méromorphes d'ordre fini avec $\rho\left(A_{ji}f^{(j)}\right) < n$ et $\rho(B) < n$. Nous avons aussi $a_{0,n} \neq b_{0,n}$ et $a_{j,n} = c_j a_{0,n}, b_{j,n} = c_j b_{0,n}, c_j > 1,\ j=1,\ldots,k-1$, donc $a_{j,n} \neq b_{j,n}$, par suite $\deg(P_j - P_0) = \deg(Q_j - Q_0) = n$. Puisque $A_{0,1}f \not\equiv 0, A_{0,2}f \not\equiv 0$, du Lemme 3.1, nous obtenons l'ordre de croissance du coté gauche de l'équation (3.64) est n, cela contredit le fait que $\rho(B) < n$. Par conséquent, toute solution méromorphe f de l'équation (3.4) est transcendante d'ordre $\rho(f) \geqslant n$. Posons $z = re^{i\theta}$, $a_{0,n} = |a_{0,n}|\,e^{i\theta_1}$, $b_{0,n} = |b_{0,n}|\,e^{i\theta_2}$, $\theta_1,\theta_2 \in [0,2\pi)$. Alors,

$$\delta(P_0,\theta) = |a_{0,n}|\cos(n\theta+\theta_1),\ \delta(Q_0,\theta) = |b_{0,n}|\cos(n\theta+\theta_2). \tag{3.65}$$

Comme $a_{j,n} = c_j a_{0,n}$, $b_{j,n} = c_j b_{0,n}, c_j > 1,\ j=1,\ldots,k-1$, et c_j sont des nombres distincts, donc

$$\delta(P_j,\theta) = c_j\delta(P_0,\theta),\ \delta(Q_j,\theta) = c_j\delta(Q_0,\theta) \tag{3.66}$$

et il existe exactement une constante c_s telle que $c_s = \max\{c_j, j=0,1,\ldots,k-1\}$. Posons $c_0 = 1$, $\delta_1 = \max\{\delta(P_0,\theta),\delta(Q_0,\theta)\}$. Nous divisons notre preuve en deux cas :

Cas 1. Supposons que $\delta_1 > 0$. Par le Lemme 3.12, pour tout ε $(0<\varepsilon<\min\{n-\rho_1, \frac{1}{2}\left(\frac{c_s-c_j}{c_s+c_j}\right)$, $j\neq s\})$, il existe un ensemble $E_2 \subset [1,+\infty)$ ayant une mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1]\cup E_2, r\to+\infty$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r-\delta_r,\ \theta_r+\delta_r]\setminus H_3$, où

$$H_3 = \{\theta\in[0,2\pi) : \delta(P_0,\theta) = \delta(Q_0,\theta)\}$$

est un ensemble fini, nous avons

$$\left|A_{s,1}(z)\,e^{P_s(z)} + A_{s,2}(z)\,e^{Q_s(z)}\right| \ \geqslant\ \frac{1}{2}\exp\{(1-\varepsilon)\,c_s\delta_1 r^n\}, \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}\left|A_{j,1}(z)\,e^{P_j(z)} + A_{j,2}(z)\,e^{Q_j(z)}\right| &\leqslant \left|A_{j,1}(z)\,e^{P_j(z)}\right| + \left|A_{j,2}(z)\,e^{Q_j(z)}\right|\\ &\leqslant \exp\{(1+\varepsilon)\,c_j\delta_1 r^n\} + \exp\{(1+\varepsilon)\,c_j\delta_1 r^n\}\\ &\leqslant 2\exp\{(1+\varepsilon)\,c_j\delta_1 r^n\},\ j=0,1,2,\ldots,k-1,\ j\neq s.\end{aligned} \tag{3.68}$$

Par (3.4), nous avons

$$\left|A_{s,1}(z)e^{P_s(z)}+A_{s,2}(z)e^{Q_s(z)}\right|$$
$$\leqslant \left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right|\left\{\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|+\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right|+\sum_{j=0,j\neq s}^{k-1}\left\{\left|A_{j,1}(z)e^{P_j(z)}+A_{j,2}(z)e^{Q_j(z)}\right|\left|\frac{f^j(z)}{f(z)}\right|\right\}\right\}. \tag{3.69}$$

Comme f est transcendante, du Lemme 3.2, il existe un ensemble $E_1 \subset (1,+\infty)$ avec $m_l(E_1) < +\infty$ et une constante $B > 0$, tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_1$, nous obtenons (3.33) et par le Lemme 3.10, il existe un ensemble E_8 d'une mesure logarithmique fini tel que pour tout z avec $|z| = r \notin E_8$, $|g(z)| = M(r,g)$ et pour r suffisamment grand, nous obtenons (3.34). Nous savons que f est transcendante avec $\rho(f) \geqslant n$, et par hypothèses, nous avons les pôles de f sont de multiplicité uniformément bornée. D'après le théorème de factorisation de Hadamard, nous pouvons écrire f comme suit $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$, où g et d sont des fonctions entières avec

$$\lambda(d)=\rho(d)=\lambda\left(\frac{1}{f}\right)<n, \rho(g)=\rho(f)\geqslant n.$$

Posons $\rho_1 = \max\{\rho(F), \rho(d)\} < n$. Comme $|g(z)| = M(r,g) \geqslant 1$, alors en utilisant le Lemme 3.3, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| &= \left|\frac{d(z)F(z)}{g(z)}\right| = \frac{|d(z)F(z)|}{M(r,g)}\\ &\leqslant \exp\left(r^{\rho_1+\varepsilon}\right)\exp\left(r^{\rho_1+\varepsilon}\right)=\exp\left(2r^{\rho_1+\varepsilon}\right)\end{aligned} \tag{3.70}$$

où $|z| = r \notin [0,1] \cup E_3$, $r \to +\infty$. En combinant les formules (3.33), (3.34), (3.67), (3.68), (3.69) et (3.70), pour tout z satisfaisant $|z| = r_m \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_3 \cup E_8$, $r_m \to +\infty$, auquel $|g(z)| = M(r_m, g)$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r] \setminus H_3$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\exp\{(1-\varepsilon)c_s\delta_1 r_m^n\} &\leqslant r_m^{2s}\{\exp\left(2r_m^{\rho_1+\varepsilon}\right)+B\left[T(2r_m,f)\right]^{k+1}\\ &\quad +B\left[T(2r_m,f)\right]^{k+1}\sum_{j=0,j\neq s}^{k-1}2\exp\{(1+\varepsilon)c_j\delta_1 r_m^n\}\}\\ &\leqslant 4r_m^{2s}\exp\left(2r_m^{\rho_1+\varepsilon}\right)B\left[T(2r_m,f)\right]^{k+1}\sum_{j=0,j\neq s}^{k-1}\exp\{(1+\varepsilon)c_j\delta_1 r_m^n\}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\exp\{(1-\varepsilon)c_s\delta_1 r_m^n\}\leqslant 8r_m^{2s}\exp\left(r_m^{\rho_1+\varepsilon}\right)B\left[T(2r_m,f)\right]^{k+1}\sum_{j=0,j\neq s}^{k-1}\exp\{(1+\varepsilon)c_j\delta_1 r_m^n\}. \tag{3.71}$$

Comme $\varepsilon < \min\left\{n-\rho_1, \frac{1}{2}\left(\frac{c_s-c_j}{c_s+c_j}\right),\ j\neq s\right\}$ est arbitraire, alors du Lemme 3.5 et de la formule (3.71), nous obtenons

$$\rho(f)=\limsup_{r_m\to+\infty}\frac{\log T(r_m,f)}{\log r_m}=+\infty$$

et

$$\rho_2(f)=\limsup_{r_m\to+\infty}\frac{\log\log T(r_m,f)}{\log r_m}\geqslant n.$$

De plus, par le Lemme 3.6 et d'après l'équation (3.4), nous avons $\rho_2(f) \leqslant n$. Donc $\rho_2(f) = n$. Par suite, toute solution méromorphe de (3.4) dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée est d'ordre infini et satisfait $\rho_2(f) = n$.

Cas 2. Supposons que $\delta_1 < 0$. Par le Lemme 3.12, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \left|A_{j,1}(z)\,e^{P_j(z)} + A_{j,2}(z)\,e^{Q_j(z)}\right| &\leqslant \left|A_{j,1}(z)\,e^{P_j(z)}\right| + \left|A_{j,2}(z)\,e^{Q_j(z)}\right| \\ &\leqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)\,c_j\delta(P_0,\theta)\,r^n\right\} + \exp\left\{(1-\varepsilon)\,c_j\delta(Q_0,\theta)\,r^n\right\} \\ &\leqslant 2\exp\left\{(1-\varepsilon)\,c_j\delta_1 r^n\right\},\ j = 0,1,2,\ldots,k-1. \end{aligned} \tag{3.72}$$

De (3.4), nous obtenons

$$1 \leqslant \left|\frac{f(z)}{f^{(k)}(z)}\right| \left(\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| + \sum_{j=0}^{k-1} \left\{ \left|A_{j,1}(z)\,e^{P_j(z)} + A_{j,2}(z)\,e^{Q_j(z)}\right| \left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \right\} \right). \tag{3.73}$$

Par les mêmes procédures que dans Cas 1, par (3.33), (3.34), (3.70), (3.72) et (3.73), pour tout z satisfaisant $|z| = r_m \notin ([0,1] \cup E_1 \cup E_3 \cup E_8)$, $r_m \to +\infty$, auquel $|g(z)| = M(r_m, g)$ et $\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r,\ \theta_r + \delta_r] \setminus H_3$, nous avons

$$1 \leqslant r_m^{2k} \left(\exp\left(2r_m^{\rho_1+\varepsilon}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} B\left[T\left(2r_m, f\right)\right]^{k+1} 2\exp\left\{(1-\varepsilon)\,c_j\delta_1 r_m^n\right\} \right). \tag{3.74}$$

Comme $c_j \geqslant 1$, $j = 0,\ldots,k-1$, $r_m > R_1 > 1$ et $\delta_1 < 0$, nous déduisons que

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,c_j\delta_1 r_m^n\right\} \leqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_1 r_m^n\right\}, j = 0,\ldots,k-1.$$

Ainsi, (3.74) devient

$$1 \leqslant 2r_m^{2k}(k+1)\exp\left(r_m^{\rho_1+\varepsilon}\right) B\left[T\left(2r_m, f\right)\right]^{k+1} \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_1 r_m^n\right\},$$

ce qui donne

$$\exp\left\{(\varepsilon-1)\,\delta_1 r_m^n - r_m^{\rho_1+\varepsilon}\right\} \leqslant 2r_m^{2k}(k+1)\,B\left[T\left(2r_m, f\right)\right]^{k+1}. \tag{3.75}$$

Par le Lemme 3.5 et (3.75), nous obtenons

$$\rho(f) = \limsup_{r_m\to+\infty} \frac{\log T\left(r_m, f\right)}{\log r_m} = +\infty$$

et

$$\rho_2(f) = \limsup_{r_m\to+\infty} \frac{\log\log T\left(r_m, f\right)}{\log r_m} \geqslant n.$$

En outre, du Lemme 3.6 et de l'équation (3.4) nous trouvons $\rho_2(f) \leqslant n$, ainsi $\rho_2(f) = n$. Alors, toute solution méromorphe de (3.4) dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée est d'ordre infini et satisfait $\rho_2(f) = n$.

5 Conclusion

Nous avons amélioré quelques résultats précédents de Zhan et Xiao [84] en étudiant la croissance des solutions méromorphes de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + \left(A_{k-1,1}(z)\,e^{P_{k-1}(z)} + A_{k-1,2}(z)\,e^{Q_{k-1}(z)}\right) f^{(k-1)}$$
$$+ \ldots + \left(A_{0,1}(z)\,e^{P_0(z)} + A_{0,2}(z)\,e^{Q_0(z)}\right) f = F(z),$$

où $A_{j,i}\,(\not\equiv 0)\ \left(j = 0,\ldots,k-1\right)$ et F sont des fonctions méromorphes d'ordre fini et $P_j(z), Q_j(z)$ $(j = 0,1,\ldots,k-1; i = 1,2)$ sont des polynômes de degré $n \geqslant 1$.

Chapitre 4

Sur la croissance des solutions des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes à coefficients fonctions méromorphes

1 Introduction et résultats

Dans le présent chapitre, nous étudions la croissance des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

$$f^{(k)}(z) + A_{k-1}(z) f^{(k-1)}(z) + \cdots + A_1(z) f'(z) + A_0(z) f(z) = 0 \tag{4.1}$$

et

$$f^{(k)}(z) + A_{k-1}(z) f^{(k-1)}(z) + \cdots + A_1(z) f'(z) + A_0(z) f(z) = F(z), \tag{4.2}$$

où $A_0 \not\equiv 0$, $A_1, \cdots, A_{k-1}$ et $F \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini et $k \geq 2$. Nous améliorons et étendons quelques résultats de Belaïdi et Andasmas [2], [13] en utilisant le concept de l'ordre itératif et nous considérons la croissance de quelques coefficients arbitraires dominants A_s $(s = 0, 1, \cdots, k-1)$ au lieu de A_0.

Plusieurs chercheurs dans [4], [5], [24], [32], [57], [71] ont étudié la croissance des solutions des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes du seconde ordre et d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières ou méromorphes. Dans [2], Andasmas et Belaidi ont étudié les zéros et la croissance des solutions méromorphes des équations (4.1) et (4.2) et ils ont obtenu les résultats suivants

Théorème 4.1 *[2] Soient $H \subset [0, +\infty)$ un ensemble de mesure linéaire infinie et $A_j (j = 0, 1, \cdots, k-1)$ des fonctions méromorphes d'ordre fini. S'il existe des constantes réelles $\sigma > 0, \alpha > 0$ telles que $\rho = \max\{\rho(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1\} < \sigma$ et $|A_0(z)| \geq \exp\left\{\alpha |z|^{\sigma}\right\}$ lorsque $|z| = r \in H$, $r \to +\infty$, alors toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (4.1) satisfait $\mu(f) = \rho(f) = +\infty$ et $\rho_2(f) \geq \sigma$. De plus, si $\lambda(1/f) < \infty$, alors $\sigma \leq \rho_2(f) \leq \rho(A_0)$.*

Théorème 4.2 *[2] Soient $H \subset [0, +\infty)$ un ensemble de densité supérieure positive, A_j $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ et $F \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes d'ordre fini. S'il existe des constantes réelles $\sigma > 0, \alpha > 0$ telles que $\rho = \max\{\rho(A_j) : j = 1, 2, \cdots, k-1, \rho(F)\} < \sigma$ et $|A_0(z)| \geq \exp\left\{\alpha |z|^{\sigma}\right\}$ lorsque $|z| = r \in H, r \to +\infty$, alors toute solution méromorphe f avec $\lambda(1/f) < \sigma$ de l'équation (4.2) est d'ordre infini et*

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty, \ \overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f).$$

De plus, si $\lambda(1/f) < \min\{\mu(f), \sigma\}$, *alors* $\sigma \leq \rho_2(f) \leq \rho(A_0)$.

Récemment, Belaïdi dans [13] a considéré la croissance des solutions méromorphes des équations (4.1) et (4.2) avec des coefficients fonctions méromorphes d'ordre itératif fini et il a obtenu des résultats qui améliorent et généralisent certains résultats précédents.

Théorème 4.3 *[13] Soient* $H \subset [0, +\infty)$ *un ensemble de densité supérieure positive et* A_j $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ *des fonctions méromorphes d'ordre* $p-$*itératif fini. S'il existe des constantes* $\sigma > 0, \alpha > 0$ *telles que* $|A_0(z)| \geq \exp_p(\alpha r^{\sigma})$ *avec* $|z| = r \in H, r \to +\infty$ *et*

$$\rho = \max\left\{\rho_p\left(A_j\right) : j = 1, \cdots, k-1\right\} < \sigma,$$

alors toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ *de l'équation* (4.1) *satisfait*

$$\mu_p\left(f\right) = \rho_p(f) = +\infty, \; \rho_{p+1}(f) \geq \sigma.$$

De plus, si $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \infty,$ *alors* $i\left(f\right) = p+1$ *et* $\sigma \leq \rho_{p+1}\left(f\right) \leq \rho_p(A_0)$.

Théorème 4.4 *[13] Soient* $H \subset [0, +\infty)$ *un ensemble de densité supérieure positive,* $A_j (j = 0, 1 \cdots, k-1)$ *et* $F \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre* $p-$*itératif fini. S'il existe des constantes réelles* $\sigma > 0, \alpha > 0$ *telles que* $|A_0(z)| \geq \exp_p(\alpha r^{\sigma})$ *avec* $|z| = r \in H, r \to +\infty$ *et*

$$\rho = \max\left\{\rho_p\left(A_j\right)(j = 1 \cdots, k-1), \rho_p(F)\right\} < \sigma, \tag{4.3}$$

alors toute solution méromorphe (4.2) *avec* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \sigma$ *satisfait*

$$\overline{\lambda}_p\left(f\right) = \lambda_p(f) = \rho_p(f) = +\infty, \; \overline{\lambda}_{p+1}\left(f\right) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f).$$

De plus, si $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \min\left\{\mu_p\left(f\right), \sigma\right\}$, *alors* $i\left(f\right) = p+1$ *et*

$$\overline{\lambda}_{p+1}\left(f\right) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}\left(f\right) \leq \rho_p(A_0).$$

Une question naturelle se pose : qu'en est-il de la croissance des solutions méromorphes des équations (4.1) et (4.2) avec des coefficients fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini si on remplace le coefficient fixe dominant A_0 par un coefficient arbitraire A_s ? L'objectif principal de cette partie est d'examiner la question ci-dessus en prouvant nos principaux résultats. Pour l'équation différentielle linéaire homogène (4.1), nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 4.5 *[66] Soient* $H \subset (1, +\infty)$ *un ensemble d'une densité logarithmique supérieure positive (ou* $m_l(H) = +\infty$*) et* A_j $\left(j = 0, 1, \cdots, k-1\right)$ *des fonctions méromorphes d'ordre* $p-$*itératif fini. S'il existe des constantes réelles* $\sigma > 0, \alpha > 0$ *et un entier* s*,* $0 \leq s \leq k-1$*, tels que* $|A_s(z)| \geq \exp_p(\alpha r^{\sigma})$ *avec* $|z| = r \in H$*,* $r \to +\infty$ *et* $\rho = \max\left\{\rho_p\left(A_j\right) \; (j \neq s)\right\} < \sigma$*, alors toute solution non transcendante* $f \not\equiv 0$ *de* (4.1) *est polynômiale avec* $\deg f \leq s-1$ *et toute solution méromorphe transcendante* f *de* (4.1) *avec* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p\left(f\right)$ *satisfait*

$$i\left(f\right) = p+1, \quad \mu_p\left(f\right) = \rho_p(f) = +\infty$$

et

$$\sigma \leq \rho_{p+1}\left(f\right) \leq \rho_p(A_s).$$

Corollaire 4.1 *[66] Sous les hypothèses du Théorème 4.5, supposons que $\varphi \not\equiv 0$ est une fonction méromorphe transcendante satisfaisant $i(\varphi) < p+1$ ou $\rho_{p+1}(\varphi) < \sigma$. Alors, toute solution méromorphe transcendante f de l'équation (4.1) avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ satisfait*

$$\sigma \leq \overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi) = \lambda_{p+1}(f-\varphi) = \rho_{p+1}(f-\varphi) = \rho_{p+1}(f) \leq \rho_p(A_s).$$

Pour l'équation linéaire différentielle non-homogène (4.2), Nous obtenons les résultats suivants.

Théorème 4.6 *[66] Soient $H \subset (1,+\infty)$ un ensemble de densité logarithmique supérieure positive (ou bien $m_l(H) = \infty$), A_j $(j = 0,1\cdots,k-1)$ et $F \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes d'ordre p−itératif fini. S'il existe des constantes réelles $\sigma > 0, \alpha > 0$ et un entier s, $0 \leq s \leq k-1$, tels que $|A_s(z)| \geq \exp_p(\alpha r^{\sigma})$ lorsque $|z| = r \in H$, $r \to +\infty$ et $\max\{\rho_p(A_j)\ (j \neq s),\ \rho_p(F)\} < \sigma$, alors toute solution non transcendante f de (4.2) est polynômiale avec $\deg f \leq s-1$ et toute solution méromorphe transcendante f de (4.2) avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \min\{\sigma, \mu_p(f)\}$ satisfait*

$$i(f) = p+1, \quad \overline{\lambda}_p(f) = \lambda_p(f) = \rho_p(f) = \mu_p(f) = +\infty$$

et

$$\sigma \leq \overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) \leq \rho_p(A_s).$$

Corollaire 4.2 *[66] Soient les fonctions A_j $(j = 0,1,\cdots,k-1)$, F et l'ensemble H satisfaisant toutes les hypothèses du Théorème 4.6 et soit φ une fonction méromorphe transcendante telle que $i(\varphi) < p+1$ ou $\rho_{p+1}(\varphi) < \sigma$. Alors, toute solution méromorphe transcendante f avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \min\{\sigma, \mu_p(f)\}$ de l'équation (4.2) satisfait $\sigma \leq \overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi) = \lambda_{p+1}(f-\varphi) = \rho_{p+1}(f-\varphi) \leq \rho_p(A_s)$.*

Remarque 4.1 *De toute évidence, le Théorème 4.5 et le Théorème 4.6 représentent une généralisation des Théorèmes 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4.*

Exemple 4.1 *Considérons l'équation suivante*

$$f^{(4)} + \frac{4-3z}{z+1} f^{(3)} - 9e^{z^3} f'' + f' + \frac{1+2ze^{2z}+3ze^{3z}+ze^{4z}}{z} f = 0 \tag{1}$$

Dans cette équation, nous avons $A_0(z) = \frac{1+2ze^{2z}+3ze^{3z}+ze^{4z}}{z}$, $A_1(z) = 1$, $A_2(z) = -9e^{z^3}$, $A_3(z) = \frac{4-3z}{z+1}$ et

$$\rho_1(A_0) = 1,\ \rho_1(A_1) = 0, \rho_1(A_2) = 3,\ \rho_1(A_3) = 0$$

alors

$$\max\{\rho_1(A_j),\ j \neq 2\} = 1 < 2.$$

D'autre part, nous avons pour tout $z = re^{i\theta}$ $(r \to +\infty)$, $r \in [1,+\infty[$, $\frac{\pi}{18} \leq \theta \leq \frac{\pi}{9}$

$$|A_2(z)| = \left|-9e^{z^3}\right| = \exp\left(r^3\cos 3\theta\right) \geq \exp\left(r^3\cos\frac{\pi}{3}\right) \geq \exp\left(\frac{1}{2}r^2\right).$$

Il est clair que les conditions du Théorème 4.5 sont vérifiées avec $\sigma = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$ sur l'ensemble

$$H = \left\{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\theta},\ r \in [1,+\infty[,\ \frac{\pi}{18} \leq \theta \leq \frac{\pi}{9}\right\}$$

tel que

$$\overline{\log dens}(\mathrm{H}) = \lim\sup_{r\to+\infty} \frac{\log r - \log 1}{\log r} = 1.$$

D'après le Théorème 4.5, toute solution méromorphe transcendante $f \not\equiv 0$ de l'équation (1) *, satisfait*

$$\mu\left(f\right) = \rho(f) = \infty,\ \rho_2(f) \geq 2.$$

De plus, si $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \infty$, alors $i\left(f\right) = 2$ et

$$2 \leq \rho_2\left(f\right) \leq \rho_1\left(\mathrm{A}_2\right) = 3$$

et toute solution non transcendante est polynomiale d'ordre inférieur ou égale à 1.

Exemple 4.2 *Considérons l'équation suivante*

$$f''' + \frac{3}{z} f'' - f' - \frac{1}{z}\left(1 + 3e^{2z} + e^{3z}\right) f = 0. \tag{2}$$

Nous avons $\mathrm{A}_0\left(z\right) = -\frac{1}{z}\left(1+3e^{2z}+e^{3z}\right)$, $\mathrm{A}_1\left(z\right) = -1$, $\mathrm{A}_2\left(z\right) = \frac{3}{z}$, $\mathrm{A}_3\left(z\right) = 1$ *et*

$$\rho\left(\mathrm{A}_0\right) = 1, \rho\left(\mathrm{A}_1\right) = 0, \rho\left(\mathrm{A}_2\right) = 0, \rho\left(\mathrm{A}_3\right) = 0$$

alors

$$\max\left\{\rho\left(\mathrm{A}_j\right),\ j \neq 0\right\} = 0 < \frac{1}{2}.$$

D'autre part, pour tout $z = re^{i\theta}$ $(r \to +\infty)$, $r \in [6, +\infty[$, $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$, nous avons

$$\left|1 + 3e^{2z}\right| \leq 1 + 3e^{2r\cos\theta} \leq 1 + 3e^{\sqrt{2+\sqrt{2}}r}$$

et

$$\begin{aligned}\left|1+3e^{2z}+e^{3z}\right| &\geq \left|\left|e^{3z}\right| - \left|1+3e^{2z}\right|\right| \geq e^{3r\cos\theta} - 1 - 3e^{2r\cos\theta} \\ &\geq e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}r} - 1 - 3e^{\sqrt{2+\sqrt{2}}r}\end{aligned}$$

donc

$$|\mathrm{A}_0\left(z\right)| = \frac{\left|1+3e^{2z}+e^{3z}\right|}{|z|} \geq \frac{e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}r} - 1 - 3e^{\sqrt{2+\sqrt{2}}r}}{r} \geq e^{r^{\frac{1}{2}}}.$$

Il est clair que les conditions du Théorème 4.5 sont vérifiées avec $\alpha = 1$, $\sigma = \frac{1}{2}$ sur l'ensemble

$$\mathrm{H} = \left\{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\theta}, \frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, r \in [6, +\infty[\right\}.$$

avec

$$\overline{\log dens}(\mathrm{H}) = \lim\sup_{r\to+\infty} \frac{\log r - \log 6}{\log r} = 1.$$

Donc, toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (2) *avec $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \infty$ satisfait $i\left(f\right) = 2$ et $\sigma = \frac{1}{2} \leq \rho_2\left(f\right) \leq \rho\left(\mathrm{A}_0\right) = 1$. À titre d'exemple, la fonction $f\left(z\right) = \frac{e^{e^z}}{z}$ est une solution méromorphe transcendante de l'équation* (2)*. Comme la fonction $f\left(z\right) = \frac{e^{e^z}}{z}$ a un seul pôle, alors $n\left(r, \infty, f\right) = 1$ et $\mathrm{N}\left(r, f\right) = \log r$ et par suite $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) = 0 < \infty$. On voit que $\sigma = \frac{1}{2} \leq \rho_2\left(f\right) = \rho_1\left(\mathrm{A}_0\right) = 1$.*

2 Lemmes auxiliaires

Pour prouver nos théorèmes, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 4.1 [44] *Soient $p \geq 1$ un entier et $f = \frac{g}{d}$ une fonction méromorphe, où g et d sont des fonctions entières satisfaisant $\mu_p(g) = \mu_p(f) = \mu \leq \rho_p(f) = \rho_p(g) \leq +\infty, 0 < p < +\infty$ $i(d) < p$ ou $i(d) = p$ et $\rho_p(d) = \lambda_p(\frac{1}{f}) = \beta < \mu$. Alors, il existe un ensemble E_2 de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_2$, $|g(z)| = M(r, g)$, nous avons*

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq r^{2s} \ (s \geq 1 \text{ est un entier}).$$

Lemme 4.2 [72] *Soit $p \geq 1$ un entier. Supposons que f est une fonction méromorphe telle que $i(f) = p$, $\rho_p(f) = \rho < +\infty$. Alors, il existe des fonctions entières π_1, π_2 et D telles que*

$$f(z) = \frac{\pi_1(z)\, e^{D(z)}}{\pi_2(z)} \ \text{et}\ \rho_p(f) = \max\left\{\rho_p(\pi_1), \rho_p(\pi_2),\ \rho_p(e^{D(z)})\right\}.$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$\exp\left\{-\exp_{p-1}\left(r^{\rho+\varepsilon}\right)\right\} \leq |f(z)| \leq \exp_p\left(r^{\rho+\varepsilon}\right),\ r \notin E_3,$$

où $E_3 \subset (1, +\infty)$ est un ensemble de mesure linéaire finie.

Lemme 4.3 *[3] Soient $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ et $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ des fonctions croissantes monotones telles que $g(r) \leq h(r)$ à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E_4 d'une mesure linéaire finie. Alors, pour tout $\lambda > 1$ il existe $r_0 > 0$ tels que $g(r) \leq h(\lambda r)$ pour tout $r > r_0$.*

Lemme 4.4 *[13] Soient $k \geq 2$, $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ et F des fonctions méromorphes. Soient*

$$\rho = \max\left\{\rho_p(A_j), (j = 0, 1\cdots, k-1), \rho_p(F)\right\} < \infty$$

et f une solution méromorphe d'ordre p-itératif infini de l'équation (4.2) avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$. Alors, $\rho_{p+1}(f) \leq \rho$.

Lemme 4.5 *Sous les hypothèses du Théorème 4.5 ou Théorème 4.6, nous avons $\rho_p(A_s) = \beta \geq \sigma$.*

Preuve Supposons que $\rho_p(A_s) = \beta < \sigma$. Alors, en utilisant le Lemme 4.2, il existe un ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie (et donc de mesure logarithmique finie) tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_3$ et pour tout ε avec $0 < \varepsilon < \sigma - \beta$, nous avons

$$|A_s(z)| \leq \exp_p\left(r^{\beta+\varepsilon}\right). \tag{4.4}$$

D'autre part, d'après le Théorème 4.5 ou le Théorème 4.6, il existe des constantes réelles $\sigma > 0, \alpha > 0$ telles que

$$|A_s(z)| \geq \exp_p\left(\alpha r^{\sigma}\right), \tag{4.5}$$

où $|z| = r \in H$, $r \to +\infty$, avec $H \subset (1, +\infty)$ est un ensemble de densité logarithmique supérieure positive (ainsi nous avons $m_l(H) = +\infty$). De (4.4) et (4.5) et pour $|z| = r \in H \backslash E_3$, $r \to +\infty$, nous obtenons

$$\exp_p\left(\alpha r^{\sigma}\right) \leq |A_s(z)| \leq \exp_p\left(r^{\beta+\varepsilon}\right).$$

Comme $0 < \varepsilon < \sigma - \beta$, nous avons une contradiction quand $r \to +\infty$. Par conséquent, $\rho_p(A_s) = \beta \geq \sigma$.

Lemme 4.6 *Soient* $H \subset (1,+\infty)$ *un ensemble d'une densité logarithmique supérieure positive (ou mesure logarithmique infinie),* A_j $(j=0,1,\cdots,k-1)$ *et* F *des fonctions méromorphes d'ordre* $p-$*itératif fini. S'il existe des constantes réelles* $\sigma>0, \alpha>0$ *et un entier* s, $0 \le s \le k-1$, *tels que* $|A_s(z)| \ge \exp_p(\alpha r^{\sigma})$ *lorsque* $|z|=r\in H$, $r\to+\infty$, *et*

$$\rho = \max\left\{\rho_p\left(A_j\right)\ \left(j\neq s\right),\ \rho_p\left(F\right)\right\} < \sigma,$$

alors toute solution méromorphe transcendante f *de l'équation (4.2) satisfait* $\rho_p(f)\ge\sigma$.

Preuve Supposons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (4.2). De (4.2), nous avons

$$A_s = \frac{F}{f^{(s)}} - \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} - \sum_{\substack{j=0\\ j\neq s}}^{k-1} A_j \frac{f^{(j)}}{f^{(s)}}. \tag{4.6}$$

Combinons la formule (4.6) et le premier théorème fondamental de Nevanlinna, nous obtenons

$$T(r,A_s) \le \sum_{\substack{j=0\\ j\neq s}}^{k} T\left(r,f^{(j)}\right) + \sum_{\substack{j=0\\ j\neq s}}^{k-1} T\left(r,A_j\right) + (k+1)\,T\left(r,f^{(s)}\right) + T(r,F) + O(1). \tag{4.7}$$

Pour tout entier $j\in[1,k]$, nous avons l'estimation

$$T\left(r,f^{(j)}\right) \le (j+1)T\left(r,f\right) + S\left(r,f\right), \tag{4.8}$$

voir ([48], p. 56), où $S\left(r,f\right) = O\left(\log T\left(r,f\right)+\log r\right)$ à l'extérieure d'un ensemble $E\subset[0,+\infty)$ de mesure linéaire finie. Des deux inégalités (4.7) et (4.8), nous obtenons

$$T(r,A_s) \le \sum_{\substack{j=0\\ j\neq s}}^{k-1} T\left(r,A_j\right) + cT\left(r,f\right) + T(r,F) + S\left(r,f\right) + O(1), \tag{4.9}$$

avec $c>0$. En combinant la propriété $\max\left\{\rho_p\left(A_j\right)\ \left(j\neq s\right),\ \rho_p(F)\right\} < \sigma \le \rho_p(A_s)$, le Lemme 4.3, le Lemme 4.5 et (4.9) nous obtenons

$$\rho_p\left(f\right) \ge \rho_p(A_s) \ge \sigma.$$

Lemme 4.7 *[8] Soient* $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ *et* $F\not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre* p*-itératif fini. Si* f *est une solution méromorphe de l'équation (4.2) avec* $\rho_p\left(f\right)=+\infty$ *et* $\rho_{p+1}\left(f\right)=\rho<+\infty$, *alors* $\overline{\lambda}_p\left(f\right)=\lambda_p(f)=\rho_p(f)=+\infty$ *et* $\overline{\lambda}_{p+1}\left(f\right)=\lambda_{p+1}(f)=\rho_{p+1}(f)=\rho$.

Lemme 4.8 [50] *Soient* A_j $(j=0,1,\cdots,k-1)$ *et* $F(\not\equiv 0)$ *des fonctions méromorphes et soit* f *une solution méromorphe de l'équation (4.2) satisfaisant l'une des conditions suivantes :*

(*i*) $\max\left\{i(F)=p,\ i\left(A_j\right)\left(j=0,1,\cdots,k-1\right)\right\} < i\left(f\right)=p+1\ (0<p<+\infty)$,

(*ii*) $b=\max\left\{\rho_{p+1}(F),\ \rho_{p+1}\left(A_j\right)\left(j=0,1,\cdots,k-1\right)\right\} < \rho_{p+1}\left(f\right)$.

Alors, $\overline{\lambda}_{p+1}(f)=\lambda_{p+1}(f)=\rho_{p+1}\left(f\right)$.

3 Preuve du Théorème 4.5

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution rationnelle de (4.1). Si f est une fonction rationnelle, qui a un pôle à z_0 de degré $m \geq 1$, ou f est polynômiale avec $\deg f \geq s$, alors $f^{(s)} \not\equiv 0$. De (4.1), nous avons

$$A_s(z) f^{(s)}(z) = -\left(f^{(k)}(z) + \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq s}}^{k-1} A_j(z) f^{(j)}(z) \right).$$

Alors, d'après le Lemme 4.5

$$\begin{aligned}\sigma \leq \rho_p(A_s) = \rho_p(A_s f^{(s)}) &= \rho_p\left(-\left(f^{(k)} + \sum_{j=0,\ j\neq s}^{k-1} A_j f^{(j)}\right)\right) \\ &\leq \max_{j=0,1,\cdots,k-1,\ j\neq s} \{\rho_p(A_j)\}.\end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction. Donc, f doit être polynômiale avec $\deg f \leq s-1$. Maintenant, supposons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (4.1) telle que $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$. De la formule (4.1), nous avons

$$|A_s| \leq \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| \left(\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + |A_0| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{k-1} |A_j| \left|\frac{f^{(j)}}{f}\right| \right). \tag{4.10}$$

D'après les hypothèses du Théorème 4.5, il existe un ensemble $H \subset (1, +\infty)$ avec $m_l(H) = +\infty$ tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H$, $r \to +\infty$, nous avons

$$|A_s(z)| \geq \exp_p(\alpha r^{\sigma}). \tag{4.11}$$

En utilisant le Lemme 3.2, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ avec $m_l(E_1) < \infty$ et une constante $B > 0$ tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$ nous avons

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq B\left[T(2r, f)\right]^{k+1},\ j = 1, 2, \cdots, k,\ j \neq s. \tag{4.12}$$

D'après le Lemme 4.1, il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique fini tel que $|z| = r \notin E_2$, $|g(z)| = M(r, g)$ et pour r suffisamment grand, nous avons

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq r^{2s}\ (s \geq 1 \text{ est un entier}). \tag{4.13}$$

Le Lemme 4.2 assure l'existence d'un ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie (et donc de mesure logarithmique finie) pour tout ε $(0 < \varepsilon < \sigma - \rho)$ tels que l'inégalité

$$|A_j(z)| \leq \exp_p\left(r^{\rho+\varepsilon}\right),\ j = 0, 1, \cdots, k-1,\ j \neq s \tag{4.14}$$

est vérifiée pour tout z avec $|z| = r \notin E_3$. D'où, il découle de (4.10), (4.11), (4.12), (4.13) et (4.14) pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H \backslash ([0, 1] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$, $r \to +\infty$,

$$\exp_p(\alpha r^{\sigma}) \leq Bkr^{2s} \exp_p\left(r^{\rho+\varepsilon}\right)\left[T(2r, f)\right]^{k+1}. \tag{4.15}$$

Du fait que $0 < \varepsilon < \sigma - \rho$, le Lemme 3.5 et l'inégalité (4.15) nous donnent

$$\mu_p(f) = \rho_p(f) = +\infty \text{ et } \rho_{p+1}(f) \geq \sigma. \tag{4.16}$$

En utilisant le Lemme 4.5, nous avons

$$\max\{\rho_p(A_j) : j = 0, 1, \cdots, k-1\} = \rho_p(A_s) = \beta < +\infty.$$

Sachant que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (4.1) avec $\rho_p(f) = +\infty$ et $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f) = +\infty$, les hypothèses du Lemme 4.4 mènent à

$$\rho_{p+1}(f) \leq \rho_p(A_s). \tag{4.17}$$

De (4.16) et de (4.17), nous concluons que $i(f) = p+1, \mu_p(f) = \rho_p(f) = +\infty$ et $\sigma \leq \rho_{p+1}(f) \leq \rho_p(A_s)$.

4 Preuve du Corollaire 4.1

Posons $h = f - \varphi$ où φ est une fonction méromorphe transcendante satisfaisant $i(\varphi) < p+1$ ou $\rho_{p+1}(\varphi) < \sigma$. En utilisant les propriétés de l'ordre itératif, nous obtenons $\rho_{p+1}(h) = \rho_{p+1}(f)$. Ainsi, $\sigma \leq \rho_{p+1}(h) \leq \rho_p(A_s)$. En substituant $f = h + \varphi$ dans (4.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} & h^{(k)} + A_{k-1}(z) h^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) h' + A_0(z) h \\ & = -\left(\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\varphi' + A_0(z)\varphi\right). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Posons $K(z) = \varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\varphi' + A_0(z)\varphi$. Si $i(\varphi) < p+1$ ou $\rho_{p+1}(\varphi) < \sigma$, alors par le Théorème 4.5, on déduit que φ n'est pas une solution de l'équation (4.1), impliquant que $K \not\equiv 0$, et dans ce cas, nous avons

$$\rho_{p+1}(K) \leq \max\{\rho_{p+1}(\varphi),\ \rho_{p+1}(A_j), j = 0, 1, \cdots, k-1\} < \sigma.$$

Ainsi, $\max\{\rho_{p+1}(K),\ \rho_{p+1}(A_j)(j = 0, 1, \cdots, k-1)\} < \sigma \leq \rho_{p+1}(f)$ et par le Lemme 4.8, nous obtenons $\sigma \leq \overline{\lambda}_{p+1}(f - \varphi) = \lambda_{p+1}(f - \varphi) = \rho_{p+1}(f - \varphi) = \rho_{p+1}(f) \leq \rho_p(A_s)$.

5 Preuve du Théorème 4.6

Supposons que f est une solution rationnelle de (4.2). Si f est une fonction rationnelle, qui a un pôle à z_0 de degré $m \geq 1$, ou f est polynômiale avec $\deg f \geq s$, alors $f^{(s)} \not\equiv 0$. De (4.2), nous avons

$$A_s(z) f^{(s)}(z) = F(z) - \left(f^{(k)}(z) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq s}}^{k-1} A_j(z) f^{(j)}(z)\right).$$

Alors, d'après le Lemme 4.5

$$\sigma \leq \rho_p(A_s) = \rho_p(A_s f^{(s)}) = \rho_p\left(F - \left(f^{(k)} + \sum_{j=0,\ j\neq s}^{k-1} A_j f^{(j)}\right)\right)$$

$$\leq \max_{j=0,1,\cdots,k-1,\ j\neq s}\left\{\rho_p\left(A_j\right),\ \rho_p\left(F\right)\right\},$$

ce qui représente une contradiction. Par conséquent, f doit être polynômiale avec $\deg f \leq s-1$. Maintenant, supposons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (4.2) telle que $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \min\left\{\mu_p(f), \sigma\right\}$. Par (4.2), nous avons

$$|A_s| \leq \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right|\left(|A_0| + \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{k-1}|A_j|\left|\frac{f^{(j)}}{f}\right| + \left|\frac{F}{f}\right|\right). \tag{4.19}$$

Du Lemme 4.6, nous savons que f satisfait $\rho_p\left(f\right) \geq \sigma$. Par l'hypothèse $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \min\{\mu_p(f), \sigma\}$ et le théorème de factorisation de Hadamard, nous pouvons écrire f sous la forme $f\left(z\right) = \frac{g(z)}{d(z)}$, où g et d sont des fonctions entières satisfaisant

$$\mu_p(g) = \mu_p(f) = \mu \leq \rho_p(g) = \rho_p(f),\ \rho_p(d) = \lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) = \beta < \min\{\mu_p(f), \sigma\}.$$

Par la définition de l'ordre $p-$itératif inférieur, nous avons

$$M(r, g) \geq \exp_p\{r^{\mu_p(g)-\varepsilon}\}. \tag{4.20}$$

Posons

$$\rho_1 = \max\left\{\rho_p\left(A_j\right),\ j\neq s, \rho_p\left(F\right)\right\} < \sigma.$$

Ensuite, en utilisant le Lemme 4.2 et (4.20), pour tout ε $(0 < \varepsilon < \min\{\sigma - \rho_1, \frac{\mu_p(g)-\rho_p(d)}{2}\})$, il existe un ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_3$ avec $|g\left(z\right)| = M(r, g)$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{F\left(z\right)}{f\left(z\right)}\right| &= \left|\frac{F\left(z\right)d\left(z\right)}{g\left(z\right)}\right| \\ &\leq \frac{\exp_p\left(r^{\rho_1+\varepsilon}\right)\exp_p\left(r^{\rho_p(d)+\varepsilon}\right)}{\exp_p\left(r^{\mu_p(g)-\varepsilon}\right)} \\ &\leq \exp_p\left(r^{\rho_1+\varepsilon}\right).\end{aligned} \tag{4.21}$$

D'une façon similaire à la preuve du Théorème 4.5, pour tout ε vérifiant $0 < \varepsilon < \min\{\sigma - \rho_1, \frac{\mu_p(g)-\rho_p(d)}{2}\}$ et pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H\setminus\left(E_1 \cup E_2 \cup E_3\right)$, $r \to +\infty$ avec $|g\left(z\right)| = M(r, g)$, nous avons

$$\left|\frac{f^{(j)}\left(z\right)}{f\left(z\right)}\right| \leq B\left[T\left(2r, f\right)\right]^{k+1},\ j = 1, 2, ..., k,\ j\neq s, \tag{4.22}$$

$$\left|\frac{f\left(z\right)}{f^{(s)}\left(z\right)}\right| \leq r^{2s}\ \left(s \geq 1 \text{ est un entier}\right), \tag{4.23}$$

$$|A_j\left(z\right)| \leq \exp_p\left(r^{\rho_1+\varepsilon}\right),\ j = 0, 1, ..., k-1,\ j\neq s, \tag{4.24}$$

et

$$|A_s\left(z\right)| \geq \exp_p\left(\alpha r^{\sigma}\right). \tag{4.25}$$

Par conséquent, pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H\backslash(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$, $r \to +\infty$, avec $|g(z)| = M(r, g)$ et pour tout ε $(0 < \varepsilon < \min\{\sigma - \rho_1, \frac{\mu_p(g)-\rho_p(d)}{2}\})$, il découle de (4.19), (4.21), (4.22), (4.23), (4.24) et (4.25) l'expression

$$\begin{aligned}
\exp_p\left(\alpha r^{\sigma}\right) &\leq r^{2s}(\exp_p\left(r^{\rho_1+\varepsilon}\right) + B\left[T\left(2r, f\right)\right]^{k+1} \\
&\quad + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{k-1} \exp_p\left(r^{\rho_1+\varepsilon}\right) B\left[T\left(2r, f\right)\right]^{k+1} + \exp_p\left(r^{\rho_1+\varepsilon}\right)) \\
&\leq r^{2s} B(k+1)\left[T\left(2r, f\right)\right]^{k+1} \exp_p\left(r^{\rho_1+\varepsilon}\right). \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

Quand $0 < \varepsilon < \sigma - \rho_1$, il résulte du Lemme 3.5 et de (4.26)

$$\mu_p\left(f\right) = \rho_p(f) = +\infty \text{ et } \rho_{p+1}(f) \geq \sigma. \qquad (4.27)$$

Comme $F \not\equiv 0$, du Lemme 4.7, nous obtenons

$$\overline{\lambda}_p\left(f\right) = \lambda_p(f) = \mu_p\left(f\right) = \rho_p(f) = +\infty, \sigma \leq \overline{\lambda}_{p+1}\left(f\right) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f). \qquad (4.28)$$

En utilisant le Lemme 4.5, nous avons

$$\max\left\{\rho_p\left(A_j\right) : j = 0, 1, \cdots, k-1, \rho(F)\right\} = \rho_p\left(A_s\right) = \beta < +\infty.$$

Et comme f est une solution méromorphe de l'équation (4.2) avec $\rho_p(f) = +\infty$ et $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \sigma < \mu_p\left(f\right) = +\infty$, alors le Lemme 4.4 permet d'écrire

$$\rho_{p+1}\left(f\right) \leq \rho_p\left(A_s\right). \qquad (4.29)$$

Par (4.28) et (4.29), nous obtenons

$$\begin{gathered}
i(f) = p+1, \quad \overline{\lambda}_p\left(f\right) = \lambda_p(f) = \rho_p(f) = +\infty, \\
\sigma \leq \overline{\lambda}_{p+1}\left(f\right) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) \leq \rho_p\left(A_s\right).
\end{gathered}$$

6 Preuve du Corollaire 4.2

Posons $h = f - \varphi$ telle que φ est une fonction méromorphe transcendante satisfaisant $i\left(\varphi\right) < p+1$ ou $\rho_{p+1}\left(\varphi\right) < \sigma$. D'après le Théorème 4.6, nous avons $\sigma < \rho_{p+1}\left(f\right) \leq \rho_p\left(A_s\right)$. En utilisant les propriétés de l'ordre itératif, nous obtenons $\sigma < \rho_{p+1}(h) = \rho_{p+1}\left(f\right) \leq \rho_p\left(A_s\right)$. En substituant $f = h + \varphi$ dans (4.2), nous aurons

$$\begin{aligned}
& h^{(k)} + A_{k-1}(z)\, h^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\, h' + A_0(z)\, h \\
& = F(z) - (\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\, \varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\, \varphi' + A_0(z)\, \varphi). \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

Posons $G(z) = F(z) - (\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\, \varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\, \varphi' + A_0(z)\, \varphi)$. Si $i(\varphi) < p+1$ ou $\rho_{p+1}\left(\varphi\right) < \sigma$, alors par le Théorème 4.6, on déduit que φ n'est pas une solution de l'équation (4.2) impliquant que $G \not\equiv 0$. Dans ce cas, nous avons

$$\rho_{p+1}(G) \leq \max\left\{\rho_{p+1}\left(\varphi\right), \rho_{p+1}(F), \rho_{p+1}\left(A_j\right)\left(j = 0, 1, \cdots, k-1\right)\right\} < \sigma.$$

Ainsi,

$$\max\left\{\rho_{p+1}(G),\ \rho_{p+1}\left(A_j\right)\left(j = 0, 1, \cdots, k-1\right)\right\} < \sigma \leq \rho_{p+1}\left(f\right)$$

et par le Lemme 4.8, nous obtenons

$$\sigma \leq \overline{\lambda}_{p+1}\left(f - \varphi\right) = \lambda_{p+1}\left(f - \varphi\right) = \rho_{p+1}\left(f - \varphi\right) \leq \rho_p\left(A_s\right).$$

7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons amélioré quelques résultats de Belaïdi [13] et Andasmas [2]. En utilisant le concept de l'ordre itératif, nous avons étudié la croissance des solutions méromorphes des équations

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f' + A_0(z) f = F(z),$$

où $A_0 \not\equiv 0$, $A_1, \cdots, A_{k-1}$ et $F \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini en considérant un coefficient A_s $(s = 0, 1, \cdots, k-1)$ au lieu du coefficient dominant A_0.

Chapitre 5

Sur la croissance rapide des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières

1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, nous étudions l'ordre itératif des solutions des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes d'ordre supérieur

$$A_k(z)f^{(k)}(z)+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}(z)+\dots+A_1(z)f^{'}(z)+A_0(z)f(z)=0 \tag{5.1}$$

et

$$A_k(z)f^{(k)}(z)+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}(z)+\dots+A_1(z)f^{'}(z)+A_0(z)f(z)=F(z), \tag{5.2}$$

où $A_0\not\equiv 0, A_1,\dots,A_k\not\equiv 0$ et $F\not\equiv 0$ sont des fonctions entières d'ordre p-itératif fini. Nous étendons quelques résultats de Belaïdi [4], Long et Zhu [63] en utilisant le concept de l'ordre itératif et nous obtenons des estimations générales de l'ordre p-itératif et de l'exposant de convergence itératif des zéros des solutions des équations (5.1) et (5.2). Dans [4], Belaïdi a généralisé les résultats de Kwon [57], Chen et Yang [32] de la classe des équations différentielles linéaires d'ordre deux à la classe des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur en considérant des conditions plus générales sur les coefficients fonctions entières comme suit.

Théorème 5.1 *[4] Soient* H *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{dens}\{|z|: z\in H\}>0, A_0, A_1,\dots et A_{k-1}$ *des fonctions entières telles que pour certaines constantes réelles* α,β,μ *où* $0\leqslant\beta<\alpha$ *et* $\mu>0$, *nous avons*

$$|A_0(z)|\geqslant e^{\alpha|z|^{\mu}}$$

et

$$|A_j(z)|\leqslant e^{\beta|z|^{\mu}},\quad j=1,\dots,k-1,$$

quand $z\to\infty$ *avec* $z\in H$. *Alors, toute solution* $f\not\equiv 0$ *de l'équation*

$$f^{(k)}(z)+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}(z)+\dots+A_1(z)f^{'}(z)+A_0(z)f(z)=0 \tag{5.3}$$

est d'ordre infini et $\rho_2(f)\geqslant\mu$.

Théorème 5.2 *[4] Soit* H *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{dens}\{|z| : z \in H\} > 0$*, et soient* $A_0, A_1, ..., A_{k-1}$ *des fonctions entières avec* $\max\{\rho(A_j), \quad j = 1, ..., k-1\} \leqslant \rho(A_0) = \rho < +\infty$ *de sorte que pour certaines constantes réelles* α, β $(0 \leqslant \beta < \alpha)$*, nous avons pour tout* $\varepsilon > 0$

$$|A_0(z)| \geqslant e^{\alpha|z|^{\rho-\varepsilon}}$$

et

$$|A_j(z)| \leqslant e^{\beta|z|^{\rho-\varepsilon}}, \quad j = 1, ..., k-1$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in H$*. Alors, toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation (5.3) est d'ordre infini et* $\rho_2(f) = \rho(A_0)$.

Récemment, dans [63], Long et Zhu ont amélioré les résultats précédents de ([4], [32], [57], [77]) en étudiant la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur (5.3) et

$$f^{(k)}(z) + A_{k-1}(z)f^{(k-1)}(z) + ... + A_1(z)f'(z) + A_0(z)f(z) = F(z), \tag{5.4}$$

où $A_0 \not\equiv 0, A_1, ..., A_{k-1}$ et $F \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes. Une estimation de l'hyper-ordre des solutions méromorphes des équations ci-dessus a été donnée à condition qu'il existe un coefficient dominant.

Théorème 5.3 *[63] Soit* E *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $m_l(\{|z| : z \in E\}) = +\infty$ *et soient* $A_j (j = 0, 1, ..., k-1)$ *des fonctions méromorphes. Supposons qu'il existe un nombre entier* $s (0 \leqslant s \leqslant k-1)$ *satisfaisant*

$$\max\left\{\rho(A_j), \quad j \neq s, \quad \lambda\left(\frac{1}{A_s}\right)\right\} < \mu(A_s) \leqslant \rho(A_s) = \rho < \infty$$

et pour certaines constantes $0 \leqslant \beta < \alpha$*, et pour tout* $\varepsilon > 0$ *assez petit, nous avons*

$$|A_j(z)| \leqslant exp(\beta|z|^{\rho-\varepsilon}), \quad j \neq s,$$

$$|A_s(z)| \geqslant exp(\alpha|z|^{\rho-\varepsilon}),$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in E$*. Alors, toute solution méromorphe non triviale* f *de l'équation (5.3), dont les pôles sont d'une multiplicité uniformément bornée, satisfait* $\rho_2(f) = \rho(A_s)$.

Pour le cas d'une équation non homogène, ils obtiennent le résultat suivant.

Théorème 5.4 *[63] Soit* E *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $m_l(\{|z| : z \in E\}) = +\infty$ *et soient* $A_j(j = 0, 1, ..., k-1)$ *et* $F \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes. Supposons qu'il existe un nombre entier* $s (0 \leqslant s \leqslant k-1)$ *vérifiant*

$$\max\left\{\rho(A_j), \quad j \neq s, \quad \lambda(\frac{1}{A_s}), \quad \rho(F)\right\} < \mu(A_s) \leqslant \rho(A_s) = \rho < \infty$$

et pour certaines constantes $0 \leqslant \beta < \alpha$*, nous avons pour tout* $\varepsilon > 0$ *assez petit,*

$$|A_j(z)| \leqslant exp(\beta|z|^{\rho-\varepsilon}), \quad j \neq s,$$

$$|A_s(z)| \geqslant exp(\alpha|z|^{\rho-\varepsilon}),$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in E$*. Alors, toute solution méromorphe* f *de l'équation (5.4), dont les pôles sont d'une multiplicité uniformément bornée, satisfait* $\rho_2(f) = \rho(A_s)$.

Dans ce chapitre, nous considérons pour $k \geqslant 2$ les équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes (5.1) et (5.2) où $A_0 \not\equiv 0, A_1, ..., A_k \not\equiv 0$ et $F \not\equiv 0$ sont des fonctions entières d'ordre p- itératif fini. Il est bien connu que si $A_k \equiv 1$ alors toutes les solutions des équations différentielles linéaires (5.1) et (5.2) sont des fonctions entières, mais lorsque A_k est une fonction entière non constante, l'équation différentielle linéaire (5.1) ou (5.2) peut posséder des solutions méromorphes. Par exemple l'équation

$$zf^{'''}(z) + 3f^{''} - 2e^{-2z}f'(z) + ((z-2)e^{-3z} + (3z-2)e^{-2z} + ze^{-z})f(z) = 0$$

a une solution méromorphe

$$f(z) = \frac{e^{e^{-z}}}{z}.$$

Nous savons aussi que si certains des coefficients $A_0, A_1, ..., A_{k-1}$ sont des fonctions transcendantes et $A_k \equiv 1$, l'équation (5.1) a au moins une solution d'ordre infini. Récemment, plusieurs chercheurs ont étudié les propriétés des solutions des équations (5.1) et (5.2) et ils ont obtenu de nombreux résultats sur leurs croissance (voir [35], [44], [50], [80]). Des questions intéressantes se posent :

- **Question 1**. Quelles sont les conditions sur $A_0, A_1, ..., A_k$ garantissant que chaque solution $f \not\equiv 0$ des équations (5.1) et (5.2) est d'ordre itératif infini ?
- **Question 2**. Peut-on remplacer les coefficients fonctions méromorphes des équations (5.3) et (5.4) dans les Théorèmes 5.3 et 5.4 par des fonctions entières pour les équations (5.1) et (5.2) ?

Le but principal de ce chapitre est de répondre à ces questions en améliorant les résultats des travaux mentionnés précédemment. Pour l'équation (5.1), notre premier résultat est une extension du Théorème 5.2 et du Théorème 5.3.

Théorème 5.5 *[67] Soit* H *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{\log dens}(\{|z| : z \in H\}) > 0$ *(ou* $m_l(\{|z| : z \in H\}) = +\infty$*) et soient* $A_j (j = 0, 1, ..., k)$ *des fonctions entières telles que* $A_k \not\equiv 0$. *Supposons qu'il existe un nombre entier* $s (0 \leqslant s \leqslant k)$ *satisfaisant* $i(A_s) = p$, $(0 < p < +\infty$ *est un entier),*

$$\max\{\rho_p(A_j), \quad j \neq s, \quad j = 0, 1, ..., k\} < \mu_p(A_s) \leqslant \rho_p(A_s) < +\infty$$

et pour certaines constantes réelles α *et* β *telles que* $0 \leqslant \beta < \alpha$, *pour tout* $\varepsilon > 0$ *assez petit, nous avons*

$$|A_j(z)| \leqslant exp_p(\beta|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}), \quad j \neq s, \quad j = 0, 1, ..., k,$$

$$|A_s(z)| \geqslant exp_p(\alpha|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon})$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in H$. *Alors, toute solution méromorphe transcendante* f *de l'équation (5.1) avec* $\lambda_p(\frac{1}{f}) < \mu_p(f)$ *satisfait* $i(f) = p + 1$ *et* $\rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_s)$.

Quand $A_k \equiv 1$, nous obtenons le corollaire suivant pour les solutions entières.

Corollaire 5.1 *[67] Soit* H *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{\log dens}(\{|z| : z \in H\}) > 0$ *(ou* $m_l(\{|z| : z \in H\}) = +\infty$*) et soient* $A_j (j = 0, 1, ..., k-1)$ *des fonctions entières. Supposons qu'il existe un nombre entier* $s (0 \leqslant s \leqslant k-1)$ *vérifiant* $i(A_s) = p$ $(0 < p < +\infty$ *est un entier),*

$$\max\{\rho_p(A_j), j \neq s, j = 0, 1, ..., k-1\} < \mu_p(A_s) \leqslant \rho_p(A_s) < +\infty$$

et pour certaines constantes réelles α *et* β *telles que* $0 \leqslant \beta < \alpha$, *pour tout* $\varepsilon > 0$ *assez petit, nous avons*

$$|A_j(z)| \leqslant exp_p(\beta|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}), \quad j \neq s, \quad j = 0, 1, ..., k-1,$$

$$|A_s(z)| \geqslant exp_p(\alpha|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}),$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in H$. *Alors, toute solution transcendante* f *de l'équation (5.3) satisfait* $i(f) = p+1$ *et* $\rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_s)$.

Corollaire 5.2 *[67] Soient les fonctions* $A_j (j = 0, 1, ..., k)$ *et l'ensemble* H *satisfaisant toutes les hypothèses du Théorème 5.5 et soit* φ *une fonction méromorphe transcendante vérifiant* $i(\varphi) < p+1$ *ou* $\rho_{p+1}\varphi < \rho_p(A_s)$. *Alors, toute solution méromorphe transcendante* $f(\not\equiv 0)$ *de l'équation (5.1) avec* $\lambda_p(\frac{1}{f}) < \mu_p(f)$ *satisfait*

$$i_{\overline{\lambda}}(f-\varphi) = i_{\lambda}(f-\varphi) = p+1,$$

et

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi) = \lambda_{p+1}(f-\varphi = \rho_{p+1}(f-\varphi) = \rho_p(A_s).$$

Concernant l'équation différentielle linéaire non homogène (5.2), nous obtenons une extension du Théorème 5.4.

Théorème 5.6 *[67] Soit* H *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{\log dens}(\{|z| : z \in H\}) > 0$ *(ou* $m_l(\{|z| : z \in H\}) = +\infty$*) et soient* $A_j (j = 0, 1, ..., k), F \not\equiv 0$ *des fonctions entières telles que* $A_k \not\equiv 0$. *Supposons qu'il existe un nombre entier* $s (0 \leqslant s \leqslant k)$ *satisfaisant* $i(A_s) = p$, $(0 < p < +\infty$ *est un entier),*

$$\max\left\{\rho_p(A_j), j \neq s, j = 0, 1, ..., k, \quad \rho_p(F)\right\} < \mu_p(A_s) \leqslant \rho_p(A_s) < +\infty,$$

et pour certaines constantes réelles α *et* β *telles que* $0 \leqslant \beta < \alpha$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$ *assez petit, nous avons*

$$|A_j(z)| \leqslant exp_p(\beta|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}), j \neq s, j = 0, 1, ..., k,$$
$$|A_s(z)| \geqslant exp_p(\alpha|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}),$$

quand $z \to \infty$ *pour tout* $z \in H$. *Alors, toute solution méromorphe transcendante* f *de l'équation (5.2) avec* $\lambda_p(\frac{1}{f}) < \mu_p(f)$ *satisfait*

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_s).$$

Lorsque $A_k \equiv 1$, nous obtenons le corollaire suivant pour les solutions entières.

Corollaire 5.3 *[67] Soit* H *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{\log dens}(\{|z| : z \in H\}) > 0$ *(ou* $m_l(\{|z| : z \in H\}) = +\infty$*) et soient* $A_j (j = 0, 1, ..., k-1), F \not\equiv 0$ *des fonctions entières. Supposons qu'il existe un nombre entier* $s \quad (0 \leqslant s \leqslant k-1)$ *vérifiant* $i(A_s) = p \quad (0 < p < +\infty$ *est un entier),*

$$\max\left\{\rho_p(A_j), j \neq s, j = 0, 1, ..., k-1, \quad \rho_p(F)\right\} < \mu_p(A_s) \leqslant \rho_p(A_s) < +\infty,$$

et pour certaines constantes réelles α *et* β *telles que* $0 \leqslant \beta < \alpha$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$ *assez petit, nous avons*

$$|A_j(z)| \leqslant exp_p(\beta|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}), \quad j \neq s, \quad j = 0, 1, ..., k-1,$$
$$|A_s(z)| \geqslant exp_p(\alpha|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}),$$

quand $z \to \infty$ *pour tout* $z \in H$. *Alors, toute solution transcendante* f *de l'équation (5.4) satisfait*

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_s).$$

Corollaire 5.4 *[67] Soient les fonctions $A_j (j = 0,1,...,k)$, F et l'ensemble H satisfaisant toutes les hypothèses du Théorème 5.6 et soit φ une fonction méromorphe transcendante vérifiant $i(\varphi) < p+1$ ou $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_s)$. Alors, toute solution méromorphe transcendante f de l'équation (5.2) avec $\lambda_p(\frac{1}{f}) < \mu_p(f)$ satisfait*

$$i_{\overline{\lambda}}(f-\varphi) = i_{\lambda}(f-\varphi) = p+1$$

et

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi) = \lambda_{p+1}(f-\varphi) = \rho_{p+1}(f-\varphi) = \rho_p(A_s).$$

Exemple 5.1 *Soit l'équation différentielle suivante*

$$e^{\frac{z}{6}} f^{(3)}(z) + e^{z^2} f^{(2)}(z) - \frac{1}{3} z f^{'}(z) - e^{\frac{z}{5}} f(z) = 0. \tag{5.5}$$

Dans cette équation, nous avons $A_0 = -e^{\frac{z}{5}}, \quad A_1 = -\frac{1}{3}z, \quad A_2 = e^{z^2}, \quad A_3 = e^{\frac{z}{6}}$ *et*

$$\rho(A_0) = 1, \rho(A_1) = 0, \rho(A_2) = 2, \rho(A_3) = 1$$

et pour tout $z = re^{i\theta} (r \to +\infty)$ *et* $\frac{\pi}{12} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6}$, *pour tout* $\quad 0 < \varepsilon < 1.$

$$|A_2| = |e^{z^2}| = e^{r^2 \cos 2\theta} \geqslant e^{\frac{1}{2}(r^{2-\varepsilon})}$$

$$|A_0| = |-e^{\frac{z}{5}}| \leqslant exp\{\frac{1}{3}(r^{2-\varepsilon)}\},$$

$$|A_1| = |-\frac{1}{3}z| \leqslant exp\{\frac{1}{3}(r^{2-\varepsilon)}\},$$

$$|A_3| = |e^{\frac{z}{6}}| \leqslant exp\{\frac{1}{3}(r^{2-\varepsilon)}\}.$$

Il est clair que les conditions du Théorème 5.5 sont vérifiées avec $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{3}$ *sur*

$$H = \{z \in \mathbb{C} / z = re^{i\theta}, \frac{\pi}{12} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6}, r \in [5, +\infty[\}$$

Alors, d'après le Théorème 5.5, toute solution méromorphe f de l'équation (5.5) avec $\lambda_p(\frac{1}{f}) < \mu_p(f)$, *(p=1) satisfait* $i(f) = p+1 = 2$ *et* $\rho_2(f) = \rho_1(A_2)$.

Exemple 5.2 *Soit l'équation différentielle suivante*

$$\frac{1}{2} z f^{(2)}(z) + f^{'}(z) - e^{z^2}(2z^3 + z^2 + z) f(z) = 0. \tag{5.6}$$

Dans cette équation, nous avons $A_0 = -e^{z^2}(2z^3 + z^2 + z), A_1 = 1, A_2 = \frac{1}{2}z$

$$\rho(A_0) = 2, \rho(A_1) = 0, \rho(A_2) = 0$$

et pour tout $z = re^{i\theta} (r \to +\infty)$ *et* $\frac{\pi}{16} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{8}$, *pour tout* $0 < \varepsilon < 1$,

$$\begin{array}{rcl} |A_0| & = & |-e^{z^2}(2z^3 + z^2 + z)| \\ & \geqslant & e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(r^{2-\varepsilon})}, \\ |A_1| & = & 1 \\ & \leqslant & e^{\frac{1}{2}(r^{2-\varepsilon})}, \\ |A_2| & \leqslant & e^{\frac{1}{2}(r^{2-\varepsilon})}. \end{array}$$

Il est facile de voir que les conditions du Théorème 5.5 sont vérifiées avec $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \beta = \frac{1}{2}$ *sur*

$$H = \{z \in \mathbb{C} / z = re^{i\theta}, \frac{\pi}{16} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{8}, r \in [5, +\infty[\}.$$

Alors, toute solution méromorphe transcendante f *de l'équation (5.6) avec* $\lambda_p(\frac{1}{f}) < \mu_p(f)$*, (p=1) satisfait* $i(f) = p+1$ *et* $\rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_s)$. *Nous avons, par exemple, la fonction* $f(z) = \frac{exp(expz^2)}{z}$ *est une solution de l'équation différentielle (5.6) avec* $\rho_2(f) = 2 = \rho_1(A_0)$.

Exemple 5.3 *Considérons l'équation différentielle*

$$e^{-2z} f'''(z) + f''(z) + 4f'(z) + 4f(z) = 4. \tag{5.7}$$

Dans cette équation, nous avons $A_0 = 4, A_1 = 4, A_2 = 1 et A_3 = e^{-2z}$,

$$\rho(A_0) = \rho(A_1) = \rho(A_2) = 0, \rho(A_3) = 1.$$

Pour tout $z = re^{i\theta}(r \to +\infty)$ *et* $\frac{3\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{5\pi}{6}$, *pour tout* $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, *nous avons*

$$\begin{array}{rcl} |A_3| & = & |e^{-2z}| \\ & = & e^{-2r\cos\theta}, \\ & \geqslant & exp(\alpha r^{\rho_p(A_3)-\varepsilon}) \end{array}$$

avec $\alpha = \sqrt{2}$ *et pour tout* $r \in [16, +\infty[$

$$\begin{array}{rcl} |A_2| & = & 1 \\ & \leqslant & r^{1-\varepsilon} \\ & \leqslant & exp(\beta r^{\rho_p(A_3)-\varepsilon}) \end{array}$$

avec $\beta = 1$. *De même*

$$\begin{array}{rcl} |A_0| & = & |A_1| \\ & = & 4 \\ & \leqslant & exp(\beta r^{\rho_p(A_3)-\varepsilon}) \end{array}$$

On remarque que les conditions du Théorème 5.6 sont vérifiées avec $\alpha = \sqrt{2}, \beta = 1$, *sur l'ensemble*

$$H = \{z \in \mathbb{C} / z = re^{i\theta}, \frac{3\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{5\pi}{6}, r \in [16, +\infty[\}.$$

Alors, toute solution méromorphe transcendante f *de l'équation (5.7) avec* $\lambda_p(\frac{1}{f}) < \mu_p(f)$ $(p=1)$ *satisfait* $i(f) = 2$ *et* $\rho_2(f) = \rho_1(A_3)$. *Par exemple, la fonction* $f(z) = e^{(-\frac{1}{2}e^{2z})} + 1$ *représente une solution de l'équation différentielle (5.7) avec* $\rho_2(f) = 1 = \rho_1(A_3)$. *De plus, daprès le premier théorŁème fondamental, on a*

$$T(r, f) = T\left(r, e^{-\frac{1}{2}e^{2z}} + 1\right) = T\left(r, e^{-\frac{1}{2}e^{2z}}\right) + O(1)$$

$$= T\left(r, e^{\frac{1}{2}e^{2z}}\right) + O(1).$$

Posons $g(z) = e^{\frac{1}{2}e^{2z}}$. *Alors* $g^2(z) = e^{e^{2z}}$, *d'où en utilisant le Lemme 1.3, on obtient*

$$T(r, g^2) = 2T(r, g) = T\left(r, e^{e^{2z}}\right) \Rightarrow T(r, g) = T\left(r, e^{\frac{1}{2}e^{2z}}\right) = \frac{1}{2}T\left(r, e^{e^{2z}}\right).$$

Donc, en utilisant le Théorème 1.4, nous aurons

$$\begin{aligned} T\left(r,f\right) &= T\left(r,e^{\frac{1}{2}e^{2z}}\right)+O\left(1\right) \\ &= \frac{1}{2}T\left(r,e^{e^{2z}}\right)+O\left(1\right)=\frac{1}{2}T\left(2r,e^{e^{z}}\right)+O\left(1\right) \\ &\sim \frac{1}{2}\frac{e^{2r}}{\left(2\pi^{3}\left(2r\right)\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\frac{e^{2r}}{\left(4\pi^{3}r\right)^{\frac{1}{2}}},\ r\to+\infty. \end{aligned}$$

D'où

$$\mu\left(f\right)=\liminf_{r\to+\infty}\frac{\log T\left(r,f\right)}{\log r}=\liminf_{r\to+\infty}\frac{2r-\log 2\left(4\pi^{3}r\right)^{\frac{1}{2}}}{\log r}=+\infty$$

et on a $\lambda\left(\frac{1}{f}\right)=0$. *D'autre part, la fonction* $\frac{1}{e^{(-\frac{1}{2}e^{2z})}}+1$ *vérifie l'équation différentielle*

$$f'''+e^{2z}f''+4e^{2z}f'+e^{2z}f=4e^{2z}$$

et d'après le Lemme 2.6, nous obtenons $\rho_1(f)=+\infty$ *et* $\rho_2(f)=2<+\infty$ *donc* $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\rho(f)=+\infty$ *et* $\overline{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\rho_2(f)=1=\rho_1(A_3)$.

2 Lemmes préliminaires

Nos preuves dépendent principalement des lemmes suivants.

Lemme 5.1 *[35] Soit* $f=\frac{g}{d}$ *une fonction méromorphe où* g *et* d *sont des fonctions entières d'ordre itératif fini vérifiant* $\mu_p(g)=\mu_p(f)=\mu\leqslant\rho_p(f)=\rho_p(g)\leqslant+\infty, 0<p<+\infty, i(d)<p$ *ou* $\rho_p(d)<\mu$. *Soit* z *un point avec* $|z|=r$ *pour lequel* $|g(z)|=M(r,g)$ *et* $\nu_g(r)$ *représente l'indice central de* g. *Alors, l'estimation*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f^{(}z)}=\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{n}(1+o(1))n\geqslant 1,$$

est vérifiée pour tout z *où* $|z|=r$ *à l'extérieur d'un ensemble* E_2 *de mesure logarithmique finie.*

Lemme 5.2 *[22] Soit* g *une fonction entière d'ordre itératif fini vérifiant* $i(g)=p+1, \rho_{p+1}(g)=\rho, i_\mu(g)=q+1, \mu_{q+1}(g)=\mu, 0<p,q<\infty$ *et soit* $\nu_g(r)$ *l'indice central de* g. *Nous avons*

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log_{p+1}\nu_g(r)}{\log r}=\rho,\quad \liminf_{r\to+\infty}\frac{\log_{p+1}\nu_g(r)}{\log r}=\mu.$$

Lemme 5.3 *[35] Soient* $p\geqslant 1$ *un entier et* f *une fonction entière tels que* $i(f)=p$ *et* $\rho_p(f)=\rho<\infty$. *Alors, il existe un ensemble* $E_5\subset(1,+\infty)$ *de mesure linéaire finie tel que pour tout* $\varepsilon>0$, *nous avons*

$$\exp\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}\right\}\leqslant\left|f\left(z\right)\right|\leqslant\exp_p\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}\ \left(r\notin E_5\right).$$

Lemme 5.4 *([50],[67],[70]) Soient* $A_j\ (j=0,1,\cdots,k)$, $F(\not\equiv 0)$ *des fonctions méromorphes et* f *une solution méromorphe de l'équation* (5.1) *d'ordre p-itératif infini tel que* $i(f)=p+1\ (0<p<+\infty)$. *Si*

$$b=\max\{\rho_{p+1}(F),\ \rho_{p+1}(A_j)\ (j=0,1,\cdots,k)\}<\rho_{p+1}(f)$$

ou bien

$$\max\{i(F),\ i(A_j)\ (j=0,1,\cdots,k)\}<p+1,$$

alors

$$\begin{aligned} i_{\overline{\lambda}}(f) &= i_\lambda(f)=i(f)=p+1,\\ \overline{\lambda}_{p+1}(f) &= \lambda_{p+1}(f)=\rho_{p+1}(f). \end{aligned}$$

Preuve. Supposons que f est une solution méromorphe de (5.1) d'ordre p-itératif infini. Par (5.1), Il est facile de voir que si f a un zéro en z_0 d'ordre $\alpha>k$, et $A_0, A_1,..., A_k$ sont toutes analytiques en z_0, alors F doit avoir un zéro en z_0 d'ordre au moins $\alpha-k$. Par conséquent,

$$n\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant k\overline{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)+n\left(r,\frac{1}{F}\right)+\sum_{j=0}^{k}n(r,A_j),$$

et

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{F}\right)+\sum_{j=0}^{k}N(r,A_j). \tag{5.8}$$

Maintenant l'équation (5.1) peut être réécrite sous la forme

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{F}\left(A_k(z)\frac{f^{(k)}}{f}+A_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}}{f}+...+A_1(z)\frac{f'}{f}+A_0(z)\right). \tag{5.9}$$

Du Lemme 3.11 et de (5.9), pour tout z vérifiant $|z|=r$ à l'extérieur d'un ensemble E_5 de mesure linéaire finie, nous obtenons

$$\begin{aligned} m\left(r,\frac{1}{f}\right) &\leqslant m\left(r,\frac{1}{F}\right)+\sum_{j=1}^{k}m\left(r,\frac{f^{(j)}}{f}\right)+\sum_{j=0}^{k}m(r,A_j)\\ &\leqslant m\left(r,\frac{1}{F}\right)+\sum_{j=0}^{k}m(r,A_j)+O(\log rT(r,f)). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Ainsi, par (5.8) et (5.10), nous avons

$$\begin{aligned} T(r,f) &= T(r,\frac{1}{f})+O(1)\\ &\leqslant T(r,F)+\sum_{j=0}^{k}T(r,A_j)+k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+O(\log(rT(r,f))) \end{aligned} \tag{5.11}$$

pour tout $r\notin E_5$ suffisamment grand. D'où,

$$O(\log(rT(r,f)))\leqslant\frac{1}{2}T(r,f). \tag{5.12}$$

Supposons que

$$b=\max\{\rho_{p+1}(F),\ \rho_{p+1}(A_j)\ (j=0,1,\cdots,k)\}<\rho_{p+1}(f).$$

En utilisant la définition de l'ordre itératif, pour tout $\varepsilon\left(0<2\varepsilon<\rho_{p+1}\left(f\right)-b\right)$ et pour r suffisamment grand, nous avons

$$\mathrm{T}\left(r,\mathrm{F}\right) \quad \leqslant \quad \exp_{p}\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}=o\left(1\right)\exp_{p}\left\{r^{\rho_{p+1}(f)-\varepsilon}\right\}, \tag{5.13}$$

$$\mathrm{T}\left(r,\mathrm{A}_{j}\right) \quad \leqslant \quad \exp_{p}\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}=o\left(1\right)\exp_{p}\left\{r^{\rho_{p+1}(f)-\varepsilon}\right\}, j=0,1,,...,k. \tag{5.14}$$

Par (5.11), (5.12), (5.13) et (5.14), pour $r\notin\mathrm{E}_{5}$ suffisamment grand, nous obtenons

$$\mathrm{T}(r,f)\leqslant 2k\overline{\mathrm{N}}\left(r,\frac{1}{f}\right)+o\left(1\right)\exp_{p}\left\{r^{\rho_{p+1}(f)-\varepsilon}\right\}. \tag{5.15}$$

Cette dernière inégalité mène à

$$\rho_{p+1}\left(f\right)\leqslant\overline{\lambda}_{p+1}\left(f\right)$$

ainsi,

$$\rho_{p+1}\left(f\right)\leqslant\overline{\lambda}_{p+1}\left(f\right)\leqslant\lambda_{p+1}\left(f\right).$$

Par définition, nous avons $\overline{\lambda}_{p+1}\left(f\right)\leqslant\lambda_{p+1}\left(f\right)\leqslant\rho_{p+1}\left(f\right)$. Donc,

$$\rho_{p+1}\left(f\right)=\overline{\lambda}_{p+1}\left(f\right)=\lambda_{p+1}\left(f\right).$$

Supposons maintenant que $\max\left\{i\left(\mathrm{F}\right),\ i\left(\mathrm{A}_{j}\right)\left(j=0,1,\cdots,k\right)\right\}<p+1$. Alors,

$$d=\max\left\{\rho_{p}\left(\mathrm{F}\right),\ \rho_{p}\left(\mathrm{A}_{j}\right)\left(j=0,1,\cdots,k\right)\right\}<+\infty.$$

En utilisant la définition de l'ordre itératif, pour tout $\varepsilon\left(0<2\varepsilon<\rho_{p+1}\left(f\right)-d\right)$ et pour r suffisamment grand, nous avons

$$\mathrm{T}\left(r,\mathrm{F}\right) \quad \leqslant \quad \exp_{p-1}\left\{r^{d+\varepsilon}\right\}=o\left(1\right)\exp_{p-1}\left\{r^{\rho_{p+1}(f)-\varepsilon}\right\} \tag{5.16}$$

et

$$\mathrm{T}\left(r,\mathrm{A}_{j}\right) \quad \leqslant \quad \exp_{p-1}\left\{r^{d+\varepsilon}\right\}=o\left(1\right)\exp_{p-1}\left\{r^{\rho_{p+1}(f)-\varepsilon}\right\}, j=0,1,,...,k. \tag{5.17}$$

Par (5.11) ,(5.12) ,(5.16) et (5.17) , pour $r\notin\mathrm{E}_{5}$ suffisamment grand, nous obtenons

$$\mathrm{T}(r,f)\leqslant 2k\overline{\mathrm{N}}\left(r,\frac{1}{f}\right)+o\left(1\right)\exp_{p-1}\left\{r^{\rho_{p+1}(f)-\varepsilon}\right\}. \tag{5.18}$$

De l'inégalité (5.18), nous avons

$$\rho_{p+1}\left(f\right)\leqslant\overline{\lambda}_{p+1}\left(f\right).$$

Ainsi,

$$\rho_{p+1}\left(f\right)\leqslant\overline{\lambda}_{p+1}\left(f\right)\leqslant\lambda_{p+1}\left(f\right).$$

Sachant que $\overline{\lambda}_{p+1}\left(f\right)\leqslant\lambda_{p+1}\left(f\right)\leqslant\rho_{p+1}\left(f\right)$, donc

$$\overline{\lambda}_{p+1}\left(f\right)=\lambda_{p+1}\left(f\right)=\rho_{p+1}\left(f\right).$$

Cela implique que $i_{\overline{\lambda}}(f)=i_{\lambda}(f)=i\left(f\right)=p+1$. Le Lemme 5.4 est ainsi prouvé.

Lemme 5.5 *Soit $f = \frac{g}{d}$ une fonction méromorphe où g et d sont des fonctions entières. Si $0 \leqslant \rho_p(d) < \mu_p(f)$, alors $\mu_p(g) = \mu_p(f)$ et $\rho_p(g) = \rho_p(f)$.*

De plus, si $\rho_p(f) = +\infty$, alors $\rho_{p+1}(g) = \rho_{p+1}(f)$.

Preuve Considérons les trois cas suivants.

Cas 1. $\rho_p(f) < +\infty$. D'après la définition de l'ordre itératif, il existe une suite croissante $\{r_n\}$ $(r_n \to +\infty)$ et un nombre entier positif n_0 tels que pour tout $n > n_0$ et pour tout $\varepsilon \in \left(0, \frac{\rho_p(f)-\rho_p(d)}{2}\right)$ (avec $0 \leqslant \rho_p(d) < \mu_p(f) \leqslant \rho_p(f)$) nous avons

$$T(r_n, f) \geqslant \exp_{p-1}\left\{r_n^{\rho_p(f)-\varepsilon}\right\} \tag{5.19}$$

et

$$T(r_n, d) \leqslant \exp_{p-1}\left\{r_n^{\rho_p(d)+\varepsilon}\right\}. \tag{5.20}$$

Comme $T(r, f) \leqslant T(r, g) + T(r, d) + O(1)$, alors pour tout n suffisamment grand, nous avons

$$\exp_{p-1}\left\{r_n^{\rho_p(f)-\varepsilon}\right\} \leqslant T(r_n, g) + \exp_{p-1}\left\{r_n^{\rho_p(d)+\varepsilon}\right\} + O(1). \tag{5.21}$$

Du fait que $\varepsilon \in \left(0, \frac{\rho_p(f)-\rho_p(d)}{2}\right)$, la formule (5.21) devient

$$(1 - o(1)) \exp_{p-1}\left\{r_n^{\rho_p(f)-\varepsilon}\right\} \leqslant T(r_n, g) + O(1)$$

pour tout n suffisamment grand . Par conséquent, $\rho_p(f) \leqslant \rho_p(g)$. D'autre part, comme $T(r, g) \leqslant T(r, f) + T(r, d)$ et $\rho_p(d) < \rho_p(f)$, alors

$$\rho_p(g) \leqslant \rho_p(f).$$

D'où

$$\rho_p(g) = \rho_p(f).$$

En utilisant un raisonnement similaire et la définition de l'ordre p-itératif inférieur $\mu_p(g)$ et $\mu_p(f)$, nous pouvons montrer que

$$\mu_p(g) = \mu_p(f).$$

Cas 2. $\rho_p(f) = +\infty$. Supposons le contraire de l'affirmation $\mu_p(g) = \mu_p(f)$ c'est à dire $\mu_p(g) < \mu_p(f)$. Nous visons une contradiction. D'après la définition de l'ordre p-itératif inférieur, il existe une suite croissante $\{r_n\}$ $(r_n \to +\infty)$ et un nombre entier positif n_0 tels que pour tout $n > n_0$ et pour tout $\varepsilon > 0$ donné, nous avons

$$T(r_n, g) \leqslant \exp_{p-1}\left\{r_n^{\mu_p(g)+\varepsilon}\right\},$$

$$T(r_n, d) \leqslant \exp_{p-1}\left\{r_n^{\mu_p(d)+\varepsilon}\right\}.$$

De l'inégalité $T(r_n, f) \leqslant T(r_n, g) + T(r_n, d) + O(1)$, pour tout n suffisamment grand, nous obtenons,

$$T(r_n, f) \leqslant \exp_{p-1}\left\{r_n^{\mu_p(g)+\varepsilon}\right\} + \exp_{p-1}\left\{r_n^{\mu_p(d)+\varepsilon}\right\} + O(1).$$

Ainsi, $\mu_p(f) \leqslant \max\{\mu_p(g), \mu_p(d)\}$. Ce dernier résultat représente une contradiction avec notre hypothèse.

Cas 3. $\mu_p(f) < +\infty$ et $\rho_p(f) = +\infty$. En utilisant un raisonnement similaire que celui des Cas 1 et 2, nous pouvons prouver le Cas 3.

Enfin, nous allons montrer que $\rho_{p+1}(g) = \rho_{p+1}(f)$. Supposons que $\rho_p(f) = +\infty$. Alors, il existe une suite croissante $\{r_n\}$, $(r_n \to +\infty)$ telle que

$$\rho_{p+1}(f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log^+_{p+1} T(r_n, f)}{\log r_n}.$$

En utilisant les définitions de l'ordre p-itératif, de l'ordre p-itératif inférieur et l'inégalité $\rho_p(d) < \mu_p(f)$, nous obtenons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{T(r_n, d)}{T(r_n, f)} = 0.$$

Donc, il existe un entier positif N tel que pour $n > N$, nous avons

$$T(r_n, f) \leqslant 2T(r_n, g) + O(1).$$

Ainsi, $\rho_{p+1}(f) \leqslant \rho_{p+1}(g)$. Comme $T(r,g) \leqslant T(r,f) + T(r,d)$, alors il existe un entier positif N, tel que pour $n > N$

$$T(r_n, g) \leqslant 2T(r_n, f).$$

D'où, $\rho_{p+1}(g) \leqslant \rho_{p+1}(f)$. Donc $\rho_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(g)$.

Remarque 5.1 *Lemme 5.5 a été obtenu pour $p = 1$ par Long et Zhu dans [63].*

3 Preuve du Théorème 5.5

Par (5.1) nous avons

$$|A_s| \leqslant \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| \left(|A_0| + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{k} |A_j| \left|\frac{f^{(j)}}{f}\right| \right). \tag{5.22}$$

En utilisant le Lemme 3.2, il existe un ensemble $E_1 \subset (0, +\infty)$ avec $m_l(E_1) < \infty$ et une constante $B > 0$, tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_1$, nous avons

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant B\left[T(2r, f)\right]^{k+1}, \; j = 1, 2, \cdots, k, \; j \neq s. \tag{5.23}$$

Du Lemme 4.1, il existe un ensemble E_4 de mesure logarithmique finie tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ satisfaisant $|z| = r \notin E_4$ suffisamment grand et $|g(z)| = M(r, g)$, nous obtenons

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leqslant r^{2s}, \tag{5.24}$$

où g est une fonction entière satisfaisant $\mu_p(g) = \mu_p(f) = \mu \leqslant \rho_p(f) = \rho_p(g) \leqslant +\infty$, $0 < p < +\infty$. D'après les hypothèses du Théorème 5.5, il existe un ensemble H avec $\underline{\log dens}\{|z| : z \in H\} > 0$ (ou $m_l(\{|z| : z \in H\}) = +\infty$) tel que pour tout $z \in H$ quand $z \to \infty$, nous avons

$$|A_j(z)| \leqslant \exp_p\left(\beta |z|^{\rho_p(A_s) - \varepsilon}\right), \; j \neq s, j = 0, 1, \cdots, k \tag{5.25}$$

$$|A_s(z)| \geqslant \exp_p\left(\alpha |z|^{\rho_p(A_s) - \varepsilon}\right). \tag{5.26}$$

Posons $H_1 = \{|z| : z \in H\} \setminus (E_1 \cup E_4)$, alors $m_l(H_1) = +\infty$. Il résulte de (5.22), (5.23), (5.24), (5.25) et (5.26) pour tout z vérifiant $|z| = r \in H_1$ et $|g(z)| = M(r, g)$ l'inégalité suivante

$$\exp_p\left(\alpha |z|^{\rho_p(A_s) - \varepsilon}\right) \leqslant kBr^{2s}\left(T(2r, f)\right)^{k+1} \exp_p\left(\beta |z|^{\rho_p(A_s) - \varepsilon}\right).$$

Du fait que $0 \leq \beta < \alpha$, nous obtenons

$$\exp\left((1-o(1))\exp_{p-1}\left(\alpha|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right)\right) \leqslant kBr^{2s}\left(T\left(2r,f\right)\right)^{k+1}. \tag{5.27}$$

En combinant l'inégalité (5.27) et le Lemme 3.5, nous avons

$$\rho_p\left(A_s\right) \leqslant \rho_{p+1}\left(f\right).$$

D'autre part, d'après les hypothèses du Théorème 5.5, pour r suffisamment grand, nous avons

$$|A_j(z)| \leqslant \exp_p\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right),\ j \neq s,\ j = 0,1,\cdots,k \tag{5.28}$$

et par le Lemme 5.3, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_5 \subset (1,+\infty)$ de mesure linéaire finie, de sorte que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_5$ nous obtenons

$$|A_k(z)| \geqslant \exp\left\{-\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_k)+\varepsilon}\right)\right\} \geqslant \exp\left\{-\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right)\right\}. \tag{5.29}$$

Il s'ensuit de (5.1) que

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1}{|A_k(z)|}\left(\sum_{j=1}^{k-1}|A_j(z)|\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| + |A_0(z)|\right). \tag{5.30}$$

Moyennant le théorème de factorisation de Hadamard, on peut écrire f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$, où g et d sont des fonctions entières d'ordre itératif fini vérifiant $\mu_p(g) = \mu_p(f) \leqslant \rho_p(f) = \rho_p(g) \leqslant +\infty$, $0 < p < +\infty$, $i(d) < p$ ou $\rho_p(d) = \lambda_p(d) = \lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$. Par le Lemme 5.1, il existe un ensemble E_2 de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_2$ et $|g(z)| = M\left(r,g\right)$, nous avons

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^j (1+o(1)),\ j = 1,\cdots,k. \tag{5.31}$$

En remplaçant (5.28), (5.29) et (5.31) dans (5.30), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^k |1+o(1)| \\
\leqslant\ & \frac{1}{\exp\left\{-\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right)\right\}}\left\{\sum_{j=1}^{k-1}\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^j |1+o(1)|+1\right\}\exp_p\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right) \\
=\ & \left\{\sum_{j=1}^{k-1}\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^j |1+o(1)|+1\right\}\exp\left\{2\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

D'où, l'inégalité

$$\left|\nu_g(r)\right||1+o(1)| \leqslant kr^k|1+o(1)|\exp\left\{2\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right)\right\} \tag{5.32}$$

est vérifiée pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_2 \cup E_5)$ et $|g(z)| = M\left(r,g\right)$, $r \to +\infty$. De ce dernier résultat et du Lemme 3.5, nous obtenons

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log_{p+1}\nu_g(r)}{\log r} \leqslant \rho_p(A_s)+\varepsilon. \tag{5.33}$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, par (5.33) et le Lemme 5.2, nous avons

$$\rho_p(A_s) \geq \rho_{p+1}\left(g\right).$$

Comme $\rho_p(d) < \mu_p\left(f\right)$, par le Lemme 5.5, nous avons $\rho_{p+1}\left(g\right) = \rho_{p+1}\left(f\right)$. En utilisant l'inégalité $\rho_p(A_s) \leqslant \rho_{p+1}\left(f\right)$ nous obtenons $\rho_{p+1}\left(f\right) = \rho_p(A_s)$ et $i\left(f\right) = p+1$. Le Théorème 5.5 est ainsi démontré.

4 Preuve du Corollaire 5.2

Posons $h = f - \varphi$ telle que φ est une fonction méromorphe transcendante satisfaisant $i(\varphi) < p+1$ ou $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_s)$. D'après le Théorème 5.5, nous avons $i(f) = p+1$ et $\rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_s)$. En utilisant les propriétés de l'ordre itératif, nous avons $\rho_{p+1}(h) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_s)$. En remplaçant $f = h + \varphi$ dans (5.1), nous obtenons

$$A_k(z)h^{(k)} + A_{k-1}(z)h^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)h' + A_0(z)h$$
$$= -\left(A_k(z)\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\varphi' + A_0(z)\varphi\right). \tag{5.34}$$

Posons $K(z) = A_k(z)\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\varphi' + A_0(z)\varphi$. Si $i(\varphi) < p+1$ *ou* $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_s)$, alors par le Théorème 5.5, on déduit que φ n'est pas une solution de l'équation (5.1). Ce qui implique que $K \not\equiv 0$. Dans ce cas, nous avons $\rho_{p+1}(K) \leqslant \rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_s) = \rho_{p+1}(f)$. Alors,

$$\max\left\{\rho_{p+1}(K),\ \rho_{p+1}(A_j)\,(j = 0, 1, \cdots, k)\right\} < \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_s).$$

En appliquant le Lemme 5.4, nous obtenons $i_{\overline{\lambda}}(f-\varphi) = i_\lambda(f-\varphi) = p+1$ et $\overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi) = \lambda_{p+1}(f-\varphi) = \rho_{p+1}(f-\varphi) = \rho_p(A_s)$.

5 Preuve du Théorème 5.6

Par (5.2) , nous avons

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1}{|A_k(z)|}\left(\sum_{j=1}^{k-1}|A_j(z)|\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| + |A_0(z)| + \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|\right). \tag{5.35}$$

D'après le théorème de factorisation de Hadamard, nous pouvons écrire f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ où g et d sont des fonctions entières d'ordre itératif fini vérifiant $\mu_p(g) = \mu_p(f) \leqslant \rho_p(f) = \rho_p(g) \leqslant +\infty$, $0 < p < +\infty$, $i(d) < p$ ou $\rho_p(d) = \lambda_p(d) = \lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$. Le Lemme 5.1 assure qu'il existe un ensemble E_2 de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_2$ avec $|g(z)| = M(r,g)$, nous avons (5.31). Par les hypothèses du Théorème 5.6 et du Lemme 5.3, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie, tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_5$, nous avons

$$|A_k(z)| \geqslant \exp\left\{-\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_k)+\varepsilon}\right)\right\} \geqslant \exp\left\{-\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right)\right\}. \tag{5.36}$$

D'autre part, pour r suffisamment grand, nous avons

$$|F(z)| \leqslant \exp_p\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right),\ |A_j(z)| \leqslant \exp_p\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right),\ j \neq s,\ j = 0, 1, \cdots, k. \tag{5.37}$$

Ainsi, pour tout ε $\left(0 < 2\varepsilon < \mu_p(g) - \rho_p(d)\right)$ et r assez grand, nous obtenons

$$\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| = \frac{|F(z)\,d(z)|}{|g(z)|} = \frac{|F(z)|\,|d(z)|}{M(r,g)}.$$

Alors,

$$\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{\exp_p\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right)\exp_p\left(r^{\rho_p(d)+\varepsilon}\right)}{\exp_p\left(r^{\mu_p(g)-\varepsilon}\right)} \leqslant \exp_p\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right). \tag{5.38}$$

En remplaçant (5.31), (5.36), (5.37) et (5.38) dans (5.35), pour z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2 \cup E_5$, $r \to +\infty$ et $|g(z)| = M(r,g)$, nous avons

$$\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^k |1+o(1)|$$

$$\begin{aligned} &\leqslant \frac{1}{\exp\left\{-\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right)\right\}}\left\{\sum_{j=1}^{k-1}\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^j |1+o(1)|+2\right\}\exp_p\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right) \\ &= \left\{\sum_{j=1}^{k-1}\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^j |1+o(1)|+2\right\}\exp\left\{2\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left|\nu_g(r)\right| |1+o(1)| \leqslant (k+1)\, r^k |1+o(1)| \exp\left\{2\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_s)+\varepsilon}\right)\right\} \tag{5.39}$$

pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_2 \cup E_5)$ et $|g(z)| = M(r,g)$, $r \to +\infty$. Par la formule (5.39) et du Lemme 3.5, nous avons

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log_{p+1} \nu_g(r)}{\log r} \leqslant \rho_p(A_s) + \varepsilon. \tag{5.40}$$

Du fait que ε $\left(0 < 2\varepsilon < \mu_p(g) - \rho_p(d)\right)$ est arbitraire, par (5.40) et le Lemme 5.2, nous obtenons

$$\rho_p(A_s) \geqslant \rho_{p+1}(g).$$

En moyennant l'inégalité $\rho_p(d) < \mu_p(f)$ et le Lemme 5.5, nous aurons $\rho_{p+1}(g) = \rho_{p+1}(f)$, d'où $\rho_{p+1}(f) \leqslant \rho_p(A_s)$. D'autre part, d'après (5.2), nous avons

$$|A_s| \leqslant \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| \left(\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| + |A_0| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{k} |A_j| \left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|\right). \tag{5.41}$$

En utilisant le Lemme 3.2, il existe un ensemble $E_1 \subset (0,+\infty)$ avec $m_l(E_1) < +\infty$ et une constante $B > 0$, tels que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_1$, nous avons

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant B\left[T(2r,f)\right]^{k+1},\ j = 1,2,\cdots,k,\ j \neq s. \tag{5.42}$$

Le Lemme 4.1 permet de dire qu'il existe un ensemble E_4 de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_4$ et $|g(z)| = M(r,g)$ et pour r suffisamment grand, l'inégalité

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leqslant r^{2s} \tag{5.43}$$

est vérifiée. D'après les hypothèses du Théorème 5.6, il existe un ensemble H avec

$$\overline{\log dens}\{|z| : z \in H\} > 0 \text{ou} m_l(\{|z| : z \in H\}) = \infty$$

de sorte que pour tout $z \in H$, les inégalités (5.25) et (5.26) soient vérifiées. Posons $H_1 = \{|z| : z \in H\} \setminus (E_1 \cup E_4)$, alors $m_l(H_1) = \infty$. En remplaçant (5.25), (5.26), (5.38), (5.42) et

(5.43) dans (5.41), pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H_1$, $r \to +\infty$ et $|g(z)| = M(r, g)$, nous avons
$$\exp_p\left(\alpha|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right) \leqslant (k+1)\, Br^{2s}\left(T\left(2r, f\right)\right)^{k+1} \exp_p\left(\beta|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right).$$
En utilisant $0 \leqslant \beta < \alpha$, nous obtenons
$$\exp\left((1 - o(1)) \exp_{p-1}\left(\alpha|z|^{\rho_p(A_s)-\varepsilon}\right)\right) \leqslant (k+1)\, Br^{2s}\left(T\left(2r, f\right)\right)^{k+1}. \tag{5.44}$$
Il résulte de (5.44) et du Lemme 3.5 que
$$\rho_p(A_s) \leqslant \rho_{p+1}(f).$$
Ceci et le fait que $\rho_p(A_s) \geqslant \rho_{p+1}(f)$ mènent à $\rho_p(A_s) = \rho_{p+1}(f)$ et $i(f) = p + 1$. Comme $\max\left\{\rho_{p+1}(F),\, \rho_{p+1}(A_j)\,(j = 0, 1, \cdots, k)\right\} < \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_s)$, alors
$$\max\left\{i(F),\, i(A_j)\,(j = 0, 1, \cdots, k)\right\} < i(f) = p + 1\,(0 < p < +\infty),$$
Du Lemme 5.4, nous obtenons
$$\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_s).$$
Le Théorème 5.6 est ainsi prouvé.

6 Preuve du Corollaire 5.4

Posons $h = f - \varphi$ telle que φ est une fonction méromorphe transcendante satisfaisant $i(\varphi) < p + 1$ ou $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_s)$. D'après le Théorème 5.6, nous avons $i(f) = p + 1$ et $\rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_s)$ et en utilisant les propriétés de l'ordre itératif, nous obtenons $\rho_{p+1}(h) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_s)$. En remplaçant $f = h + \varphi$ dans (5.2), nous obtenons
$$A_k(z)\, h^{(k)} + A_{k-1}(z)\, h^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\, h' + A_0(z)\, h$$
$$= F(z) - \left(A_k(z)\, \varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\, \varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\, \varphi' + A_0(z)\, \varphi\right). \tag{5.45}$$
Maintenant, posons $G(z) = F(z) - \left(A_k(z)\, \varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\, \varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\, \varphi' + A_0(z)\, \varphi\right)$. Si $i(\varphi) < p + 1$ *ou* $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_s)$, alors, du Théorème 5.6, on déduit que φ n'est pas une solution de l'équation (5.2), ce qui implique que $G \not\equiv 0$, et dans ce cas nous avons $\rho_{p+1}(G) \leqslant \rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_s) = \rho_{p+1}(f)$. Alors,
$$\max\left\{\rho_{p+1}(G),\, \rho_{p+1}(A_j)\,(j = 0, 1, \cdots, k)\right\} < \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_s)$$
et par le Lemme 5.4, nous obtenons
$$i_{\overline{\lambda}}(f - \varphi) = i_\lambda(f - \varphi) = p + 1\, et\, \overline{\lambda}_{p+1}(f - \varphi) = \lambda_{p+1}(f - \varphi) = \rho_{p+1}(f - \varphi) = \rho_p(A_s).$$

7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons généralisé quelques résultats de Belaïdi [4], Long et Zhu [63] et nous avons obtenu quelques résultats sur l'ordre itératif et l'exposant de convergence itératif des zéros des solutions des équations (5.1) et (5.2).

Chapitre 6

Oscillation complexe des solutions et leurs dérivées d'ordre arbitraire des équations différentielles linéaires non homogènes d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières

1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, nous étudions l'ordre itératif des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes d'ordre supérieur

$$A_k(z)f^{(k)}(z)+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}(z)+\cdots+A_1(z)f'(z)+A_0(z)f(z)=F(z)$$

où $A_0\not\equiv 0, A_1,\cdots,A_k\not\equiv 0$ sont des fonctions entières d'ordre p-itératif fini et $F\not\equiv 0$ est une fonction entière d'ordre p-itératif infini. Nous étendons quelques résultats de Chen [25] et nous obtenons des estimations générales de l'exposant itératif de convergence des zéros, l'ordre p-itératif des solutions et l'exposant de convergence itératif des zéros des dérivées d'ordre arbitraire des solutions de l'équation ci-dessus.

Pour $k\geqslant 2$, nous considérons les équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes

$$f^{(k)}+\sum_{j=1}^{k-1}A_jf^{(j)}+A_0f=0 \tag{6.1}$$

et

$$f^{(k)}+\sum_{j=1}^{k-1}A_jf^{(j)}+A_0f=F, \tag{6.2}$$

où $A_0\not\equiv 0, A_1,\cdots,A_{k-1}$ et $F\not\equiv 0$ sont des fonctions entières. Il est bien connu que si certains des coefficients de l'équation différentielle linéaire (6.1) sont des fonctions transcendantes alors l'équation (6.1) possède au moins une solution d'ordre infini. Ainsi, la question qui se pose est : quelle condition sur $A_0\not\equiv 0, A_1,\cdots,A_{k-1}$ garantit que toute solution $f\not\equiv 0$ de (6.1) est d'ordre de croissance infini ?

Pour cette question, il existe de nombreux résultats pour les équations différentielles linéaires du deuxième ordre et d'ordre supérieur (voir par exemple [19],[20],[32], [39]). Quand $A_0\not\equiv 0$, $A_1,\cdots,A_{k-1}$ et $F\not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes, une estimation de l'hyper-ordre des solutions méromorphes des équations (6.1) et (6.2) a été donnée par Long et Zhu dans [63] où ils ont prouvé qu'il existe un coefficient dominant.

Récemment, dans [67], nous avons amélioré ces résultats en étudiant la croissance des solutions méromorphes de

$$A_k(z) f^{(k)}(z) + A_{k-1}(z) f^{(k-1)}(z) + \cdots + A_1(z) f'(z) + A_0(z) f(z) = 0, \tag{6.3}$$

$$A_k(z) f^{(k)}(z) + A_{k-1}(z) f^{(k-1)}(z) + \cdots + A_1(z) f'(z) + A_0(z) f(z) = F(z) \tag{6.4}$$

et nous avons obtenu les résultats cités dans les Théorèmes 5.5 et 5.6 du chapitre 5 .

Remarque 6.1 *Suivant le Lemme 6.1, si le coefficient dominant dans l'équation (6.3) est* A_0*, alors toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation (6.3) avec* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ *satisfait* $\rho_p(f) = +\infty$ *et* $\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$.

Maintenant, une autre question se pose : que peut-on dire sur la croissance des solutions de l'équation (6.4) si $\rho(F) = +\infty$? Afin de répondre à cette question, très récemment, Chen [25] a étudié la croissance, les points fixes des solutions ainsi que les dérivées des solutions de l'équation

$$f''(z) + A(z) f'(z) + B(z) f(z) = F(z), \tag{6.5}$$

où $A, B\,(\not\equiv 0)$ et $F \not\equiv 0$ sont des fonctions entières telles que $\rho(F) = +\infty$ et il a obtenu quelques estimations de l'hyper-ordre, l'hyper-exposant de convergence des zéros distincts des solutions et l'hyper-exposant de convergence des points fixes des solutions de l'équation (6.5) et leurs premières et deuxièmes dérivées.

Théorème 6.1 [25] *Soient* H *un ensemble de nombres complexes satisfaisant* $\overline{\log dens}\{|z| : z \in H\} > 0$, A *et* B *des fonctions entières tels que pour certaines constantes réelles* $\alpha \geqslant 0, \mu \geqslant 0$*, nous avons*

$$|A(z)| \leqslant \exp\{\alpha |z|^{\mu}\} < |B(z)|$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in H$ *. Soient* $\rho(A) \leqslant \rho(B) = \mu$ *et* F *une fonction entière avec* $\rho(F) = +\infty$*. Alors, toute solution* f *de l'équation (6.5) satisfait* $\rho(f) = +\infty$*. De plus,*

(i) Si $\rho_2(F) \geqslant \mu$*, alors toute solution* f *de l'équation (6.5) vérifie* $\rho_2(f) = \rho_2(F)$.

(ii) Si $\rho_2(F) < \mu$*, alors toute solution* f *de l'équation (6.5) vérifie* $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) = \mu$ *avec au plus une solution exceptionnelle* f_0 *vérifiant* $\rho_2(f_0) < \mu$.

Théorème 6.2 [25] *Soient les fonctions* A, B, F *et l'ensemble* H *satisfaisant toutes les hypothèses du Théorème 6.1 et (ii). Alors, toute solution* f *de l'équation (6.5) satisfait* $\overline{\lambda}_2(f - z) = \overline{\lambda}_2(f' - z) = \overline{\lambda}_2(f'' - z) = \rho_2(f) = \mu$ *avec au plus une solution exceptionnelle* f_0 *vérifiant* $\rho_2(f_0) < \mu$.

Récemment, El Farissi dans [34] a étudié la relation entre les solutions de l'équation différentielle homogène (6.1) et leurs dérivées pour $k \geqslant 2$ où A_j $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini et il a obtenu le résultat suivant.

Théorème 6.3 [34] *Soient* A_j $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ *des fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini. Supposons que toutes les solutions de l'équation (6.1) sont d'ordre p-itératif infini et* $\rho_{p+1}(f) = \rho$*. Si* $\varphi\,(\not\equiv 0)$ *est une fonction méromorphes satisfaisant* $i(\varphi) < p+1$ *ou* $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho$*, alors toute solution méromorphe* f *de l'équation (6.1) satisfait* $i_{\overline{\lambda}}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = i_{\lambda}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = i(f) = p+1$ *et* $\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \rho_{p+1}(f) = \rho, (i = 0, 1, ...)$.

Dans cette partie, nous continuons à étudier le problème d'oscillation des solutions et de leurs dérivées, nous généralisons le Théorème 6.1, le Théorème 6.2 et le Théorème 6.3 pour les équations de la forme (6.4) en utilisant le concept de l'ordre p-itératif. Nous obtenons les résultats suivants :

Théorème 6.4 [70] *Soient* H *un ensemble de nombres complexes satisfaisant* $\overline{\log dens}\{|z| : z \in H\} > 0$ (*ou* $m_l(\{|z| : z \in H\}) = +\infty$) *et* A_j $(j = 0, 1, \cdots, k)$ $(A_k \not\equiv 0)$ *et* F *des fonctions entières telles que* $\rho_p(F) = +\infty$. *Supposons que* $i(A_0) = p$, $0 < p < +\infty$,

$$\max\{\rho_p(A_j) : j = 1, \cdots, k\} < \mu_p(A_0) \leqslant \rho_p(A_0) < +\infty, \tag{6.6}$$

$(p \geqslant 1$ *est un entier*$)$ *et pour certaines constantes réelles* $0 \leq \beta < \alpha$, *nous avons*

$$|A_j(z)| \leqslant \exp_p\left(\beta |z|^{\rho_p(A_0)}\right), j = 1, \cdots, k, \tag{6.7}$$

$$|A_0(z)| \geqslant \exp_p\left(\alpha |z|^{\rho_p(A_0)}\right), \tag{6.8}$$

lorsque $z \to \infty$ *pour tout* $z \in H$. *Alors, toute solution méromorphe* f *de l'équation* (6.4) *avec* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ *satisfait* $\rho_p(f) = +\infty$. *De plus,*

(i) *si* $\rho_{p+1}(F) \geqslant \rho_p(A_0)$, *alors toute solution méromorphe* f *de l'équation* (6.4) *avec* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ *satisfait* $\rho_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(F)$,

(ii) *si* $\rho_{p+1}(F) < \rho_p(A_0)$, *alors toute solution méromorphe* f *de l'équation* (6.4) *avec* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ *satisfait* $\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$ *avec au plus une solution exceptionnelle* f_0 *vérifiant* $\rho_{p+1}(f_0) < \rho_p(A_0)$.

Exemple 6.1 *Considérons l'équation différentielle*

$$\begin{aligned} zf'''(z) + 3f''(z) + ze^{-2iz}f(z) &= \left(\cos 2z - \left(\frac{3}{2} + i\right)\sin 2z\right)\cosh(\sin z) \\ &\quad - \left(\sin^2 z \cos z\right)\sinh(\sin z). \end{aligned} \tag{6.9}$$

Dans cette équation, nous avons $A_0(z) = ze^{-2iz}, A_1(z) = 0, A_2(z) = 3$, $A_3(z) = z$,

$$F(z) = \left(\cos 2z - \left(\frac{3}{2} + i\right)\sin 2z\right)\cosh(\sin z) - \left(\sin^2 z \cos z\right)\sinh(\sin z),$$

et

$$\begin{aligned} \mu(A_0) &= \rho(A_0) = 1, \rho(A_1) = 0, \rho(A_2) = 0, \rho(A_3) = 0, \\ \rho(F) &= +\infty \text{ et } \rho_2(F) = 1. \end{aligned}$$

Posons

$$H = \left\{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\theta}, r \in [6, +\infty[, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Alors,

$$|A_0| = \left|ze^{-2iz}\right| = re^{2r\sin\theta} \geq e^{r\sqrt{2}}, |A_1| = 0 < \exp\{r\},$$
$$|A_2| = 3 \leq \exp\{r\}, |A_3| = r \leq \exp\{r\}$$

lorsque $z \to \infty$ *pour tout* $z \in H$. *Il est facile de voir que les conditions* (6.6), (6.7) *et* (6.8) *du Théorème* 6.4 *sont vérifiées avec* $\alpha = \sqrt{2}$ *et* $\beta = 1$. *Puisque* $\rho_2(F) = \rho(A_0) = 1$, *alors d'après le Théorème* 6.4 (i), *toute solution méromorphe* f *de l'équation* (6.9) *avec* $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$ *satisfait* $\rho_2(f) = \rho_2(F)$. *Nous avons à titre d'exemple la fonction* $f(z) = \frac{\cosh(\sin z)}{z}$ *avec* $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) = 0 < \mu(f) = \rho(f) = +\infty$ *satisfait* (6.9) *et* $\rho_2(F) = \rho_2(f) = 1$.

Exemple 6.2 *Considérons l'équation différentielle*

$$\begin{aligned} z^2 f'''(z) - 6f'(z) + z^2 e^{-2iz^2} f(z) &= (3 - z\sin 2z)\sin z \sinh(\sin z) + \\ &\quad \left(ze^{-2iz^2} - 3\cos z(z\sin z + \cos z)\right)\cosh(\sin z) \end{aligned} \tag{6.10}$$

Dans cette équation, nous avons $A_0(z) = z^2 e^{-2iz^2}, A_1(z) = -6, A_2 = 0, A_3(z) = z^2$,

$$F(z) = (3 - z\sin 2z)\sin z \sinh(\sin z) + \left(ze^{-2iz^2} - 3\cos z(z\sin z + \cos z)\right)\cosh(\sin z),$$

et

$$\begin{aligned} \mu(A_0) &= \rho(A_0) = 2, \rho(A_1) = 0, \rho(A_2) = 0, \rho(A_3) = 0, \\ \rho(F) &= +\infty \text{ et } \rho_2(F) = 1. \end{aligned}$$

Soit

$$H = \left\{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\theta}, r \in [6, +\infty[, \frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\right\}.$$

Alors,

$$|A_0| = \left|z^2 e^{-2iz^2}\right| = r^2 e^{2r^2 \sin 2\theta} \geq e^{r^2\sqrt{2}}, |A_1| = 6 < \exp\left\{r^2\right\},$$
$$A_2 = 0 < \exp\left\{r^2\right\}, |A_3| = r^2 \leq \exp\left\{r^2\right\}.$$

lorsque $z \to \infty$ *pour* $z \in H$. *Les conditions (6.6), (6.7) et (6.8) du Théorème 6.4 sont vérifiées avec* $\alpha = \sqrt{2}$ *et* $\beta = 1$. *Comme* $\rho_2(F) = 1 < 2 = \rho(A_0)$, *alors d'après les hypothèses et (ii) du Théorème 6.4, toute solution méromorphe f de l'équation (6.10) avec* $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$ *satisfait* $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) = \rho(A_0)$ *avec au plus une solution exceptionnelle. Nous avons à titre d'exemple la fonction* $f_0(z) = \frac{\cosh(\sin z)}{z}$ *est une solution exceptionnelle de l'équation (6.10) avec* $\lambda\left(\frac{1}{f_0}\right) = 0 < \mu(f_0) = \rho(f_0) = +\infty$ *et nous avons* $\rho_2(f_0) = 1 < \rho(A_0) = 2$.

Maintenant, soient $A_0 \not\equiv 0, A_1, \cdots, A_k \not\equiv 0$ et $F \not\equiv 0$ des fonctions entières. Nous définissons la suite des fonctions suivante :

$$\begin{cases} A_j^0(z) = A_j(z),\ j = 0, 1, ..., k, \\ A_j^i(z) = \left(A_{j+1}^{i-1}(z)\right)' + A_j^{i-1}(z) - A_{j+1}^{i-1}(z)\frac{\left(A_0^{i-1}(z)\right)'}{A_0^{i-1}(z)}, \\ i = 1, 2, ..., j = 0, 1, ..., k-1, \\ A_k^i(z) = A_k^{i-1}(z) = ... = A_k^0(z) = A_k(z), \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}, \\ F^0(z) = F(z), F^i(z) = \left(F^{i-1}(z)\right)' - F^{i-1}(z)\frac{\left(A_0^{i-1}(z)\right)'}{A_0^{i-1}(z)}, i = 1, 2, ... \end{cases} \tag{6.11}$$

Corollaire 6.1 *[70]Soient les fonctions* $A_j\left(j = 0, 1, \cdots, k\right)$, $F \not\equiv 0$ *et l'ensemble* H *satisfaisant toutes les hypothèses du Théorème 6.4. Supposons que f est une solution de (6.4) avec* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ *et soient* $A_j^i, F^i, \left(j = 0, 1, ..., k\right), i \in \mathbb{N}$ *définies par (6.11). Alors, toute solution méromorphe g de l'équation*

$$A_k^i(z)g^{(k)} + A_{k-1}^i(z)g^{(k-1)} + \cdots + A_1^i(z)g' + A_0^i(z)g = F^i(z), \tag{6.12}$$

satisfait $i(g) = p + 1, \rho_p(g) = +\infty$ *et* $\rho_{p+1}(g) = \rho_p(A_0)$ *avec au plus une solution exceptionnelle* g_0 *satisfaisant* $\rho_{p+1}(g_0) < \rho_p(A_0)$.

Dans le Théorème suivant, nous étudions la stabilité de l'exposant de convergence de la suite des zéros (respectivement zéros distincts) des solutions de l'équation différentielle d'ordre supérieur (6.4) avec leurs dérivées.

Théorème 6.5 *[70] Soient les fonctions $A_j \ (j=0,1,\cdots,k)$, F et l'ensemble H satisfaisant toutes les hypothèses du Théorème 6.4 et (ii) et soit $\varphi\,(\not\equiv 0)$ une fonction méromorphe satisfaisant $i(\varphi) < p$ ou $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_0)$. Alors, toute solution méromorphe f avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ de l'équation (6.4) satisfait $i_{\overline{\lambda}}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = i_\lambda\left(f^{(i)}-\varphi\right) = p+1$ et $\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0), (i=0,1,\ldots)$ avec au plus une solution exceptionnelle f_0 satisfaisant $\rho_{p+1}(f_0) < \rho_p(A_0)$.*

Exemple 6.3 *Considérons l'équation différentielle*

$$z^2 f'''(z) + 2zf''(z) - 2f'(z) + ze^{-4iz^3} f(z) = e^{e^z}\left[(z-1)e^z + (3z-1)e^{2z} + ze^{3z} + e^{-4iz^3}\right]. \tag{6.13}$$

Dans cette équation, nous avons $A_0(z) = ze^{-4iz^3}$, $A_1(z) = -2$, $A_2(z) = 2z$, $A_3(z) = z^2$,

$$F(z) = e^{e^z}\left[(z-1)e^z + (3z-1)e^{2z} + ze^{3z} + e^{-4iz^3}\right]$$

et

$$\begin{aligned} \mu(A_0) &= \rho(A_0) = 3, \rho(A_1) = 0, \rho(A_2) = 0, \rho(A_3) = 0, \\ \rho(F) &= \rho\left(e^{e^z}\right) = +\infty, \rho_2(F) = 1. \end{aligned}$$

Soit

$$H = \left\{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\theta}, r \in [2, +\infty[, \frac{\pi}{12} \le \theta \le \frac{\pi}{9}\right\}.$$

Alors

$$\begin{gathered} |A_0(z)| = \left|ze^{-4iz^3}\right| = re^{4r^3 \sin 3\theta} \ge e^{2\sqrt{2}r^3}, \\ |A_1(z)| = 2 \le \exp\left\{r^3\right\}, \\ |A_2(z)| = 2r \le \exp\left\{r^3\right\}, \ |A_3| = r^2 \le \exp\left\{r^3\right\} \end{gathered}$$

quand $z \to \infty$ pour $z \in H$. Il est clair que toutes les conditions (6.6), (6.7) et (6.8) du Théorème 6.4 sont vérifiées avec $\alpha = 2\sqrt{2}$ et $\beta = 1$. Comme $\rho_2(F) = 1 < 3 = \rho(A_0)$, alors par le Théorème 6.5, toute solution méromorphe f avec $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$ de l'équation (6.13) satisfait $i_{\overline{\lambda}}\left(f^{(i)}-\varphi\right) = i_\lambda\left(f^{(i)}-\varphi\right) = 2$ et $\overline{\lambda}_2\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \lambda_2\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \rho_2(f) = \rho(A_0) = 3, (i=0,1,\ldots)$ avec au plus une solution exceptionnelle f_0 satisfaisant $\rho_2(f_0) < \rho(A_0)$ où $\varphi\,(\not\equiv 0)$ est une fonction méromorphe satisfaisant $\rho(\varphi) < +\infty$ ou $\rho_2(\varphi) < \rho(A_0)$. A titre d'exemple la fonction $f_0(z) = \frac{e^{e^z}}{z}$ avec $\lambda\left(\frac{1}{f_0}\right) = 0 < \mu(f_0) = \rho(f_0) = +\infty$ est une solution exceptionnelle qui satisfait l'équation (6.13) telle que $\rho_2(f_0) = 1 < \rho(A_0) = 3$.

Lorsque $\varphi(z) = z$ dans le Théorème 6.5, nous obtenons le corollaire suivant qui généralise le Théorème 6.2.

Corollaire 6.2 *[70] Soient les fonctions $A_j \ (j=0,1,\cdots,k)$, F et l'ensemble H vérifiant toutes les hypothèses et (ii) du Théorème 6.4. Alors, toute solution méromorphe f avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ de l'équation (6.4) satisfait $i_{\overline{\lambda}}\left(f^{(i)}\right) = i_\lambda\left(f^{(i)}\right) = p+1$ et*

$$\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(i)}-z\right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(i)}-z\right) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0), (i=0,1,\ldots)$$

avec au plus une solution exceptionnelle f_0 satisfaisant $\rho_{p+1}(f_0) < \rho_p(A_0)$.

2 Lemmes préliminaires

Pour prouver nos résultats, nous ferons appel aux lemmes cités précédemment ainsi que les lemmes suivants.

Lemme 6.1 *Soit* H *un ensemble de nombres complexes satisfaisant* $\overline{\log dens}\{|z| : z \in H\} > 0$ (*ou* $m_l(\{|z| : z \in H\}) = +\infty$) *et* A_j $\left(j = 0, 1, \cdots, k\right)$ *des fonctions entières telles que* $A_k \not\equiv 0$. *Supposons que* $i\,(A_0) = p,\ 0 < p < +\infty$ *et*

$$\max\left\{\rho_p\left(A_j\right),\ j = 1, \cdots, k\right\} < \mu_p\,(A_0) \leqslant \rho_p\,(A_0) < +\infty,$$

$\left(p \geqslant 1\right.$ *est un entier*$\left.\right)$ *et pour certaines constantes* $0 \leqslant \beta < \alpha$, *nous avons*

$$|A_j\,(z)| \leqslant \exp_p\left(\beta |z|^{\rho_p(A_0)}\right),\ j = 1, \cdots, k,$$

$$|A_0\,(z)| \geqslant \exp_p\left(\alpha |z|^{\rho_p(A_0)}\right),$$

lorsque $z \to \infty$ *pour tout* $z \in H$. *Alors, toute solution méromorphe* f *de l'équation* (6.3) *avec* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p\left(f\right)$ *satisfait* $\mu_p\left(f\right) = \rho_p\left(f\right) = +\infty$ *et* $\rho_{p+1}\left(f\right) = \rho_p\,(A_0)$.

preuve Soit $f \not\equiv 0$ une solution méromorphe de l' équation (6.3) *avec* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p\left(f\right)$. D'après (6.3), nous avons

$$|A_0(z)| \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left|A_j(z)\right| \left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|. \tag{6.14}$$

En utilisant le Lemme 3.2, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ avec $m_l(E_1) < +\infty$ et une constante $B > 0$, tels que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin (E_1 \cup [0, 1])$

$$\left|\frac{f^{(j)}\,(z)}{f\,(z)}\right| \leqslant B\left[T\left(2r, f\right)\right]^{k+1},\ j = 1, 2, \cdots, k. \tag{6.15}$$

Par les hypothèses du Lemme 6.1, il existe un ensemble H avec $\overline{\log dens}\{|z| : z \in H\} > 0$ (*ou* $m_l(\{|z| : z \in H\}) = +\infty$) tel que pour tout $z \in H$ lorsque $z \to \infty$, nous avons

$$|A_j\,(z)| \leqslant \exp_p\left(\beta |z|^{\rho_p(A_0)}\right),\ j = 1, \cdots, k, \tag{6.16}$$

$$|A_0\,(z)| \geqslant \exp_p\left(\alpha |z|^{\rho_p(A_0)}\right). \tag{6.17}$$

Posons $H_1 = \{|z| : z \in H\} \setminus (E_1 \cup [0, 1])$, alors $m_l\,(H_1) = +\infty$. En remplaçant (6.15) , (6.16) et (6.17) dans (6.14) pour tout z satisfait $|z| = r \in H_1$, nous obtenons

$$\exp_p\left(\alpha |z|^{\rho_p(A_0)}\right) \leqslant kB\left(T\left(2r, f\right)\right)^{k+1} \exp_p\left(\beta |z|^{\rho_p(A_0)}\right).$$

Comme $0 \leqslant \beta < \alpha$, alors nous avons

$$\exp\left((1 - o\,(1)) \exp_{p-1}\left(\alpha |z|^{\rho_p(A_0)}\right)\right) \leqslant kB\left(T\left(2r, f\right)\right)^{k+1}. \tag{6.18}$$

Il découle de (6.18) que

$$\mu_p\left(f\right) = \rho_p\left(f\right) = +\infty$$

et

$$\rho_p\,(A_0) \leqslant \rho_{p+1}\left(f\right).$$

D'autre part, par les hypothèses du Lemme 6.1, pour r suffisamment grand, nous avons

$$|A_j(z)| \leqslant \exp_p\left(r^{\rho_p(A_0)+\varepsilon}\right),\ j=0,1,\cdots,k. \tag{6.19}$$

Par le lemme 5.3, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un ensemble $E_4 \subset (1,+\infty)$ de mesure linéaire finie, tel que pour tout z satisfaisant $|z|=r\notin E_4$, nous obtenons

$$|A_k(z)| \geqslant \exp\left\{-\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_k)+\varepsilon}\right)\right\} \geqslant \exp\left\{-\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_0)+\varepsilon}\right)\right\}. \tag{6.20}$$

Il s'ensuit de (6.3) que

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1}{|A_k(z)|}\left(\sum_{j=1}^{k-1}|A_j(z)|\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|+|A_0(z)|\right). \tag{6.21}$$

Comme $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right)<\mu_p(f)$, alors d'après le théorème de factorisation de Hadamard, nous pouvons écrire f comme $f(z)=\frac{g(z)}{d(z)}$, où g et d sont des fonctions entières d'ordre itératif fini satisfaisant $\mu_p(g)=\mu_p(f)\leqslant\rho_p(f)=\rho_p(g)\leqslant+\infty$, $0<p<+\infty$, $i(d)<p$ ou $\rho_p(d)=\lambda_p(d)=\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right)<\mu_p(f)$. D'après le Lemme 5.1, il existe un ensemble $E_2\subset(1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z|=r\notin(E_2\cup[0,1])$ avec $|g(z)|=M(r,g)$, nous avons

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^j(1+o(1)),\ j=1,\cdots,k. \tag{6.22}$$

En substituant (6.19), (6.20) et (6.22) dans (6.21), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^k|1+o(1)|\\
\leqslant\ &\frac{1}{\exp\left\{-\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_0)+\varepsilon}\right)\right\}}\left\{\sum_{j=1}^{k-1}\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^j|1+o(1)|+1\right\}\exp_p\left(r^{\rho_p(A_0)+\varepsilon}\right)\\
=\ &\left\{\sum_{j=1}^{k-1}\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^j|1+o(1)|+1\right\}\exp\left\{2\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_0)+\varepsilon}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left|\nu_g(r)\right||1+o(1)|\leqslant kr^k|1+o(1)|\exp\left\{2\exp_{p-1}\left(r^{\rho_p(A_0)+\varepsilon}\right)\right\}, \tag{6.23}$$

pour tout z satisfaisant $|z|=r\notin([0,1]\cup E_2\cup E_4)$ et $|g(z)|=M(r,g)$, $r\to+\infty$. D'après (6.23) et Lemme 3.5, nous obtenons

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log_{p+1}\nu_g(r)}{\log r}\leqslant\rho_p(A_0)+\varepsilon. \tag{6.24}$$

Comme $\varepsilon>0$ est arbitraire, par (6.24) et le Lemme 5.2, nous obtenons

$$\rho_{p+1}(g)\leqslant\rho_p(A_0).$$

Grâce à l'inégalité $\rho_p(d)<\mu_p(f)$, donc par le Lemme 5.5, nous avons $\rho_{p+1}(g)=\rho_{p+1}(f)$. Ceci et le fait que $\rho_p(A_0)\leqslant\rho_{p+1}(f)$ donnent $i(f)=p+1$ et $\rho_{p+1}(f)=\rho_p(A_0)$. Par suite, le lemme 6.1 est prouvé.

Lemme 6.2 *[70]Soient f et g deux fonctions méromorphes avec $i(f) = i(g) = p+1$. Alors,*

$$\begin{aligned} \rho_{p+1}(f+g) &\leqslant \max(\rho_{p+1}(f), \rho_{p+1}(g)), \\ \rho_{p+1}(fg) &\leqslant \max(\rho_{p+1}(f), \rho_{p+1}(g)). \end{aligned}$$

Lemme 6.3 *[70] Soient f et g deux fonctions méromorphes non constantes dans le plan complexe. Si $\rho_p(f) = +\infty$ et $\rho_p(g) < +\infty$, alors $\rho_p(fg) = +\infty$.*

Preuve Supposons que $\rho_p(fg) < +\infty$. Alors,

$$\begin{aligned} \rho_p(f) &= \rho_p\left(fg\frac{1}{g}\right) \\ &\leqslant \max\left(\rho_p(fg), \rho_p\left(\frac{1}{g}\right)\right) \\ &= \max(\rho_p(fg), \rho_p(g)) < +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui représente une contradiction. Par suite, $\rho_p(fg) = +\infty$.

Lemme 6.4 *[14] Soit f une fonction méromorphe d'ordre $[p,q]$. Si $p \geqslant q \geqslant 1$, alors*

$$\rho_{[p,q]}(f') = \rho_{[p,q]}(f).$$

Lemme 6.5 *Soient A_j $(j = 0, 1, \cdots, k)$ et $F \not\equiv 0$ des fonctions entières telles que $A_k \not\equiv 0$ et $A_0 \not\equiv 0$. Supposons que f est une solution de l'équation (6.4) . Alors, $g_i = f^{(i)}$ est une solution de l'équation*

$$A_k^i(z)\, g_i^{(k)} + A_{k-1}^i(z)\, g_i^{(k-1)} + \cdots + A_1^i(z)\, g_i' + A_0^i(z)\, g_i = F^i(z), \tag{6.25}$$

où les fonctions $A_j^i, F^i, (j = 0, 1, ..., k), i \in \mathbb{N}$ sont définies par (6.11).

preuve Supposons que f est une solution de l'équation (6.4) et $g_i = f^{(i)}$. Nous prouvons par récurrence que g_i est une solution de l'équation (6.25). Pour $\mathbf{i = 1}$, en dérivant les deux membres de l'équation (6.4), nous obtenons

$$A_k(z)\, f^{(k+1)} + \left(A_k'(z) + A_{k-1}(z)\right) f^{(k)} + \cdots + \left(A_1'(z) + A_0(z)\right) f' + A_0'(z)\, f = F'(z). \tag{6.26}$$

Par (6.4), nous avons

$$f = \frac{F - \left(A_k(z)\, f^{(k)} + A_{k-1}(z)\, f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\, f'\right)}{A_0(z)}. \tag{6.27}$$

En remplaçant (6.27) dans (6.26), nous obtenons

$$\begin{aligned} &A_k(z)\, f^{(k+1)} + \left(A_k'(z) + A_{k-1}(z) - \frac{A_0'(z)}{A_0(z)} A_k(z)\right) f^{(k)} \\ &+ \left(A_{k-1}'(z) + A_{k-2}(z) - \frac{A_0'(z)}{A_0(z)} A_{k-1}(z)\right) f^{(k-1)} \\ &+ \cdots + \left(A_1'(z) + A_0(z) - \frac{A_0'(z)}{A_0(z)} A_1(z)\right) f' = F'(z) - \frac{A_0'(z)}{A_0(z)} F. \end{aligned} \tag{6.28}$$

D'où

$$A_k^0(z)\, g_1^{(k)} + A_{k-1}^1(z)\, g_1^{(k-1)} + A_{k-2}^1(z)\, g_1^{(k-2)} + \ldots + A_0^1(z)\, g_1 = F^1. \tag{6.29}$$

En utilisant (6.11), comme $A_k^0(z) = A_k^1(z)$, (6.29) devient

$$A_k^1(z)\, g_1^{(k)} + A_{k-1}^1(z)\, g_1^{(k-1)} + A_{k-2}^1(z)\, g_1^{(k-2)} + \ldots + A_0^1(z)\, g_1 = F^1.$$

Supposons que l'assertion est vraie pour toutes les valeurs qui sont inférieures à un certain i. Supposons que g_{i-1} est une solution de l'équation

$$A_k^{i-1}(z)\, g_{i-1}^{(k)} + A_{k-1}^{i-1}(z)\, g_{i-1}^{(k-1)} + A_{k-2}^{i-1}(z)\, g_{i-1}^{(k-2)} + \ldots + A_0^{i-1}(z)\, g_{i-1} = F^{i-1}. \tag{6.30}$$

En dérivant les deux membres de l'équation (6.30), nous obtenons

$$A_k^{i-1}(z)\, g_{i-1}^{(k+1)} + \left(\left(A_k^{i-1}(z)\right)' + A_{k-1}^{i-1}(z)\right) g_{i-1}^{(k)} + \left(\left(A_{k-1}^{i-1}(z)\right)' + A_{k-2}^{i-1}(z)\right) g_{i-1}^{(k-1)}$$
$$+ \ldots + \left(A_0^{i-1}(z)\right)' g_{i-1} = \left(F^{i-1}\right)'. \tag{6.31}$$

De (6.30), nous avons

$$\begin{aligned} g_{i-1} &= \frac{F^{i-1}}{A_0^{i-1}(z)} \\ &\quad - \frac{A_k^{i-1}(z)\, g_{i-1}^{(k)} + A_{k-1}^{i-1}(z)\, g_{i-1}^{(k-1)} + A_{k-2}^{i-1}(z)\, g_{i-1}^{(k-2)} + \ldots + A_1^{i-1}(z)\, g_{i-1}'}{A_0^{i-1}(z)}. \end{aligned} \tag{6.32}$$

En remplaçant (6.32) dans(6.31), nous obtenons

$$\begin{aligned} &A_k^{i-1}(z)\, g_{i-1}^{(k+1)} + \left(\left(A_k^{i-1}(z)\right)' + A_{k-1}^{i-1}(z) - A_k^{i-1}(z)\frac{\left(A_0^{i-1}(z)\right)'}{A_0^{i-1}(z)}\right) g_{i-1}^{(k)} \\ &+ \left(\left(A_{k-1}^{i-1}(z)\right)' + A_{k-2}^{i-1}(z) - A_{k-1}^{i-1}(z)\frac{\left(A_0^{i-1}(z)\right)'}{A_0^{i-1}(z)}\right) g_{i-1}^{(k-1)} \\ &+ \ldots + \left(\left(A_1^{i-1}(z)\right)' + A_0^{i-1}(z) - A_1^{i-1}(z)\frac{\left(A_0^{i-1}(z)\right)'}{A_0^{i-1}(z)}\right) g_{i-1}' = \left(F^{i-1}\right)' - \frac{\left(A_0^{i-1}(z)\right)'}{A_0^{i-1}(z)} F^{i-1}. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Par (6.33) et (6.11), nous avons

$$A_k^i(z)\, g_i^{(k)} + A_{k-1}^i(z)\, g_i^{(k-1)} + A_{k-2}^i(z)\, g_i^{(k-2)} + \ldots + A_0^i(z)\, g_i = F^i.$$

Donc, le Lemme 6.5 est prouvé.

Lemme 6.6 *Soient* $A_j\ (j = 0, 1, \cdots, k)$ *des fonctions entières telles que* $A_k \not\equiv 0$ *et* $A_0 \not\equiv .0$ *Supposons que f est une solution de l'équation*

$$A_k(z)\, f^{(k)} + A_{k-1}(z)\, f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\, f' + A_0(z)\, f = 0. \tag{6.34}$$

Alors, $g_i = f^{(i)}$ *est une solution de l'équation*

$$A_k^i(z)\, g_i^{(k)} + A_{k-1}^i(z)\, g_i^{(k-1)} + \cdots + A_1^i(z)\, g_i' + A_0^i(z)\, g_i = 0, \tag{6.35}$$

où les fonctions $A_j^i\ (j = 0, 1, \ldots, k)$, $i \in \mathbb{N}$ *sont définies par* (6.11).

preuve Par un raisonnement similaire à celui du Lemme 6.5, nous obtenons le Lemme 6.6.

3 Preuve du Théorème 6.4

Soit f une solution méromorphe de (6.4) avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$. Supposons que $\rho_p(f) < +\infty$. En combinant (6.4) et le premier théorème fondamental de Nevanlinna, nous obtenons

$$\mathrm{T}(r,\mathrm{F}) \leqslant \sum_{j=0}^{k} \mathrm{T}\left(r, f^{(j)}\right) + \sum_{j=0}^{k} \mathrm{T}\left(r, \mathrm{A}_j\right) + \mathrm{O}(1). \tag{6.36}$$

En utilisant un raisonnement similaire à la preuve de la formule $\mathrm{T}(r,f') \leqslant 2\mathrm{T}(r,f) + m\left(r,\frac{f'}{f}\right)$, (voir [82], p 97), pour tout entier $j \in [1,k]$, nous obtenons

$$\mathrm{T}\left(r, f^{(j)}\right) \leqslant m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f^{(j-1)}}\right) + 2m\left(r, \frac{f^{(j-1)}}{f^{(j-2)}}\right) + \ldots + 2^{j-1} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + 2^j \mathrm{T}(r,f). \tag{6.37}$$

En combinant (6.36) et (6.37), nous aurons

$$\mathrm{T}(r,\mathrm{F}) \leqslant \sum_{j=0}^{k} \mathrm{T}\left(r,\mathrm{A}_j\right) + c_1 \mathrm{T}(r,f) + c_2 \sum_{j=0}^{k} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f^{(j-1)}}\right) + \mathrm{O}(1), \tag{6.38}$$

avec $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ sont des constantes. Du fait que $\max\left\{\rho_p\left(\mathrm{A}_j\right) : j = 1,, \ldots, k\right\} < \rho_p(\mathrm{A}_0) < +\infty$ et du Lemme 3.11, nous avons

$$\rho_p(\mathrm{F}) \leqslant \max\left\{\rho_p(\mathrm{A}_0), \rho_p(f)\right\} < +\infty.$$

Ce qui contredit le fait que

$$\rho_p(\mathrm{F}) = +\infty.$$

Par conséquent $\rho_p(f) = +\infty$.

Maintenant, supposons que $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sont des solutions méromorphes non triviales de l'équation homogène correspondante (6.3) de (6.4) avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f_j}\right) < \mu_p\left(f_j\right)$ $(j = 1, \ldots, k)$. Du Lemme 6.1, nous obtenons $\rho_{p+1}\left(f_j\right) = \rho_p(\mathrm{A}_0)$, $(j = 1, \ldots, k)$ et d'après la théorie élémentaire des équations différentielles, toutes les solutions de (6.4) peuvent être représentées sous la forme

$$f(z) = f_0(z) + \mathrm{B}_1 f_1(z) + \mathrm{B}_2 f_2(z) + \ldots + \mathrm{B}_k f_k(z), \tag{6.39}$$

où $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_k \in \mathbb{C}$ et la fonction f_0 a la forme

$$f_0(z) = \mathrm{C}_1(z) f_1(z) + \mathrm{C}_2(z) f_2(z) + \ldots + \mathrm{C}_k(z) f_k(z), \tag{6.40}$$

où $\mathrm{C}_1(z), \ldots, \mathrm{C}_k(z)$ sont des fonctions méromorphes satisfaisant

$$\mathrm{C}_j' = \mathrm{F}.\mathrm{G}_j\left(f_1, f_2, \ldots, f_k\right)\left[\mathrm{W}\left(f_1, f_2, \ldots, f_k\right)\right]^{-1}, j = 1, \ldots, k, \tag{6.41}$$

avec $\mathrm{G}_j\left(f_1, f_2, \ldots, f_k\right)$ sont des polynômes différentiels en $f_1, f_2, \ldots, f_k$ et leurs dérivées aux coefficients constants et $\mathrm{W}\left(f_1, f_2, \ldots, f_k\right)$ désigne le Wronskian de $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Comme le Wronskian $\mathrm{W}\left(f_1, f_2, \ldots, f_k\right)$ est un polynôme différentiel en $f_1, f_2, \ldots, f_k$, alors l'utilisation du Lemme 6.2 et du Lemme 6.4 mène à

$$\rho_{p+1}\left(\mathrm{W}\left(f_1, f_2, \ldots, f_k\right)\right) \leqslant \max\left(\rho_{p+1}\left(f_j\right), j = 1,, \ldots, k\right) = \rho_p(\mathrm{A}_0). \tag{6.42}$$

En outre, comme $\mathrm{G}_j\left(f_1, f_2, \ldots, f_k\right)$ sont des polynômes différentiels en $f_1, f_2, \ldots, f_k$ et leurs dérivées aux coefficients constants, ainsi

$$\rho_{p+1}\left(\mathrm{G}_j\left(f_1, f_2, \ldots, f_k\right)\right) \leqslant \max\left(\rho_{p+1}\left(f_j\right), j = 1,, \ldots, k\right) = \rho_p(\mathrm{A}_0). \tag{6.43}$$

Du Lemme 6.4 et des formules (6.41), (6.42) et (6.43), pour $j = 1, , ..., k$, nous déduisons que

$$\rho_{p+1}\left(C_j\right) = \rho_{p+1}\left(C'_j\right) \leqslant \max\left(\rho_{p+1}(F), \rho_p(A_0)\right). \tag{6.44}$$

De (6.39), (6.40) et (6.44), nous obtenons

$$\begin{aligned} \rho_{p+1}(f) &\leqslant \max\left(\rho_{p+1}\left(f_j\right), \rho_{p+1}\left(C_j\right), j = 1, , ..., k\right) \\ &\leqslant \max\left(\rho_{p+1}(F), \rho_p(A_0)\right). \end{aligned} \tag{6.45}$$

(i) Si $\rho_{p+1}(F) \geqslant \rho_p(A_0)$, alors d'après (6.45) toute solution méromorphe f de l'équation (6.4) avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ satisfait $\rho_{p+1}(f) \leqslant \rho_{p+1}(F)$. D'autre part, comme

$$\max\left\{\rho_p\left(A_j\right) : \ j = 1, ..., k\right\} < \rho_p(A_0) < +\infty,$$

alors $\rho_{p+1}\left(A_j\right) = 0,\ j = 0, 1, ..., k$ et en utilisant l'inégalité (6.38) nous obtenons

$$\rho_{p+1}(F) \leqslant \rho_{p+1}(f).$$

Par conséquent, toute solution méromorphe f de l'équation (6.4) avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ satisfait $\rho_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(F)$.

(ii) Si $\rho_{p+1}(F) < \rho_p(A_0)$, alors l'inégalité (6.45) assure que toute solution méromorphe f de l'équation(6.4) avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ satisfait $\rho_{p+1}(f) \leqslant \rho_p(A_0)$. D'autre part, nous affirmons que l'équation (6.4) ne peut posséder au plus qu'une solution exceptionnelle f_0 satisfaisant $\rho_{p+1}(f_0) < \rho_p(A_0)$. En effet, s'il existe une seconde solution f_* de l'équation (6.4) satisfaisant $\rho_{p+1}(f_*) < \rho_p(A_0)$, alors en utilisant le Lemme 6.2, nous obtenons $\rho_{p+1}(f_0 - f_*) \leqslant \max\left(\rho_{p+1}(f_0), \rho_{p+1}(f_*)\right) < \rho_p(A_0)$, mais $f_0 - f_*$ est une solution de (6.3), cela contredit le Lemme 6.1. Donc, l'égalité $\rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$ est vérifiée pour toute solution de (6.4) avec au plus une solution exceptionnelle f_0 satisfaisant $\rho_{p+1}(f_0) < \rho_p(A_0)$. Comme $\rho_{p+1}(F) < \rho_p(A_0)$, alors

$$\max\left\{\rho_{p+1}(F),\ \rho_{p+1}\left(A_j\right)(j = 0, 1, \cdots, k)\right\} < \rho_p(A_0) = \rho_{p+1}(f).$$

Donc, du Lemme 5.4, nous obtenons les égalités suivantes

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0), \tag{6.46}$$

qui sont vérifiées pour toute solution de l'équation (6.4) vérifiant $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ avec au plus une solution exceptionnelle f_0 satisfaisant $\rho_{p+1}(f_0) < \rho_p(A_0)$. Ceci complète la démonstration du Théorème 6.4.

4 Preuve du Corollaire 6.1

Soit $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ un système fondamental de solutions méromorphes de l'équation homogène correspondante (6.3) de l'équation (6.4) satisfaisant $\lambda_p\left(\frac{1}{f_j}\right) < \mu_p\left(f_j\right)\ (j = 1, , ..., k)$. Montrons que $\left\{f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, ..., f_k^{(i)}\right\}$ est un système fondamental de solutions méromorphes de l'équation homogène correspondante

$$A_k^i(z)\, g^{(k)} + A_{k-1}^i(z)\, g^{(k-1)} + \cdots + A_1^i(z)\, g' + A_0^i(z)\, g = 0 \tag{6.47}$$

de (6.12). Du Lemme 6.6, il s'ensuit que $f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \ldots, f_k^{(i)}$ sont des solutions de (6.47). Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ des constantes telles que

$$\alpha_1 f_1^{(i)} + \alpha_2 f_2^{(i)} + \ldots + \alpha_k f_k^{(i)} = 0.$$

Alors,

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_k f_k = \mathrm{P}(z),$$

où P est un polynôme de degré inférieur à i. Comme $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_k f_k$ est une solution de l'équation homogène correspondante (6.3) de l'équation (6.4), alors P est une solution de (6.3) et par le Lemme 6.1, nous déduisons que P est une solution d'ordre $p-$itératif infini de (6.3), cela mène à une contradiction. Par conséquent, P est une solution triviale. Par suite $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_k f_k = 0$. En utilisant le fait que $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ est un système fondamental de solutions méromorphes de l'équation (6.3), nous obtenons $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. Maintenant, soit f_0 est une solution particulière de l'équation de (6.4), d'après le Lemme 6.5, nous obtenons $f_0^{(i)}$ est une solution particulière de l'équation (6.12) et soit g une solution non triviale de (6.12). Alors, du fait que $\left\{f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \ldots, f_k^{(i)}\right\}$ est un système fondamental de solutions méromorphes de (6.47), nous affirmons qu'il existe, donc, des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ non nulles telles que

$$g = f_0^{(i)} + \alpha_1 f_1^{(i)} + \alpha_2 f_2^{(i)} + \ldots + \alpha_k f_k^{(i)}. \tag{6.48}$$

Soit

$$h = f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_k f_k,$$

une solution de (6.4). D'après les conditions du Corollaire 6.1 (ou bien le Théorème 6.4(ii)), nous obtenons $\rho_p(h) = +\infty$, $\rho_{p+1}(h) = \rho_p(\mathrm{A}_0)$ avec au plus une solution exceptionnelle h_0 satisfaisant $\rho_{p+1}(h_0) < \rho_p(\mathrm{A}_0)$.

Comme $h^{(i)} = g$, alors d'après le Lemme 6.4, nous avons $\rho_p(g) = \rho_p(h) = +\infty$ et $\rho_{p+1}(g) = \rho_{p+1}(h) = \rho_p(\mathrm{A}_0)$ avec au plus une solution exceptionnelle g_0 satisfaisant

$$\rho_{p+1}(g_0) = \rho_{p+1}(h_0) < \rho_p(\mathrm{A}_0).$$

5 Preuve du Théorème 6.5

Supposons que f une solution méromorphe de (6.4) avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$. Alors, d'après le Théorème 6.4 (ii), nous obtenons $i(f) = p+1$, $\rho_{p+1}(f) = \rho_p(\mathrm{A}_0)$ avec au plus une solution exceptionnelle f_0 satisfaisant $\rho_{p+1}(f_0) < \rho_p(\mathrm{A}_0)$. Prenons $g_i = f^{(i)}$, alors en utilisant le Lemme 6.5, nous avons g_i est une solution de (6.25) et par le Corollaire 6.1, nous obtenons $i(g_i) = p+1$, $\rho_p(g_i) = +\infty$, $\rho_{p+1}(g_i) = \rho_p(\mathrm{A}_0)$ avec au plus une solution exceptionnelle g_0 satisfaisant $\rho_{p+1}(g_0) < \rho_p(\mathrm{A}_0)$. Soit g_i une solution de (6.25) telle que $i(g_i) = p+1$, $\rho_p(g_i) = +\infty$, $\rho_{p+1}(g_i) = \rho_p(\mathrm{A}_0)$ et soit $\varphi(\not\equiv 0)$ une fonction méromorphe satisfaisant $i(\varphi) < p$ ou $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(\mathrm{A}_0)$. Posons, maintenant, $w(z) = g_i(z) - \varphi(z)$, alors

$$i(w) = i(g_i) = p+1, \rho_{p+1}(w) = \rho_{p+1}(g_i) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(\mathrm{A}_0). \tag{6.49}$$

D'autre part, du fait que $g_i = w + \varphi$ et du Lemme 6.5, nous obtenons

$$\mathrm{A}_k^i(z)\, w^{(k)} + \mathrm{A}_{k-1}^i(z)\, w^{(k-1)} + \cdots + \mathrm{A}_0^i(z)\, w = \mathrm{D}_i(z) \tag{6.50}$$

où

$$\mathrm{D}_i(z) = \mathrm{F}^i(z) - \left(\mathrm{A}_k^i(z)\varphi^{(k)}(z) + \mathrm{A}_{k-1}^i(z)\varphi^{(k-1)}(z) + \cdots + \mathrm{A}_0^i(z)\varphi(z)\right). \tag{6.51}$$

Maintenant, nous prouvons que $\rho_p(D_i) = +\infty$. De $\rho_p\left(\frac{1}{A_0^{i-1}}\right) = \rho_p\left(A_0^{i-1}\right) < +\infty$, $\rho_p\left(F^{i-1}\right) = +\infty$ et du Lemme 6.3, nous avons $\rho_p\left(\frac{F^{i-1}}{A_0^{i-1}}\right) = +\infty$. En utilisant le Lemme 6.4, nous aurons

$$\rho_p\left(A_0^{i-1}\left(\frac{F^{i-1}}{A_0^{i-1}}\right)'\right) = \rho_p\left(\left(\frac{F^{i-1}}{A_0^{i-1}}\right)'\right) = +\infty. \tag{6.52}$$

Comme

$$A_0^{i-1}(z)\left(\frac{F^{i-1}(z)}{A_0^{i-1}(z)}\right)' = \left(F^{i-1}(z)\right)' - \frac{A_0^{i-1\prime}(z)}{A_0^{i-1}(z)}F^{i-1}(z),$$

alors,

$$\rho_p\left(\left(F^{i-1}\right)' - \frac{A_0^{i-1\prime}}{A_0^{i-1}}F^{i-1}\right) = +\infty. \tag{6.53}$$

Supposons que $\rho_p(D_i) < +\infty$. Alors, par l'inégalité (6.51), nous avons

$$\begin{aligned}
\rho_p\left(F^i\right) &= \rho_p\left(\left(F^{i-1}\right)' - \frac{(A_0^{i-1})\prime}{A_0^{i-1}}F^{i-1}\right) \\
&= \rho_p\left\{D_i + \left(A_k^i\varphi^{(k)} + A_{k-1}^i\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_0^i\varphi\right)\right\} \\
&\leqslant \max\left(\rho_p(D_i), \rho_p\left\{\left(A_k^i\varphi^{(k)} + A_{k-1}^i\,\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_0^i\varphi\right)\right\}\right) \\
&\leqslant \max\left\{\rho_p(D_i), \rho_p(\varphi), \rho_p\left(A_j\right)\ \ (j = 0, 1, \cdots, k)\right\} < +\infty.
\end{aligned} \tag{6.54}$$

La formule (6.54) contredit (6.53), par suite

$$\rho_p(D_i) = +\infty.$$

De l'égalité $\rho_{p+1}\left(\frac{1}{A_0^{i-1}}\right) = \rho_{p+1}\left(A_0^{i-1}\right)$ et du Lemme 6.2, nous avons

$$\begin{aligned}
\rho_{p+1}(D_i) &= \rho_{p+1}\left(F^i - \left(A_k^i\varphi^{(k)} + A_{k-1}^i\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_0^i\varphi\right)\right) \\
&\leqslant \max\left(\rho_{p+1}\left(F^i\right), \rho_{p+1}\left(A_k^i\varphi^{(k)} + A_{k-1}^i\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_0^i\varphi\right)\right) \\
&\leqslant \max\left(\rho_{p+1}(F), \rho_{p+1}(\varphi), \rho_{p+1}\left(A_j\right),\ j = 0, 1, \cdots, k\right) \\
&= \rho_{p+1}(F) < \rho_p(A_0).
\end{aligned} \tag{6.55}$$

Ainsi, en utilisant (6.6), (6.49) et (6.55), nous obtenons

$$\max\left(\rho_{p+1}(D_i), \rho_{p+1}\left(A_j^i\right)\ \ (j = 0, 1, \cdots, k)\right) < \rho_p(A_0) = \rho_{p+1}(w). \tag{6.56}$$

Et du Lemme 5.4, toute solution de (6.50) avec $\rho_{p+1}(w) = \rho_p(A_0)$ satisfait

$$i_{\overline{\lambda}}(w) = i_\lambda(w) = i(w) = p + 1,\ \overline{\lambda}_{p+1}(w) = \lambda_{p+1}(w) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0). \tag{6.57}$$

De ce dernier résultat, nous obtenons

$$i_{\overline{\lambda}}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = i_\lambda\left(f^{(i)} - \varphi\right) = p + 1, \overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0),$$

avec au plus une solution exceptionnelle f_0 satisfait $\rho_{p+1}(f_0) < \rho_p(A_0)$.

6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait le choix de nous concentrer sur deux aspects de l'étude des équations différentielles linéaires non homogènes d'ordre supérieur. Le premier aspect concerne une généralisation de quelques résultats de Chen et d' El Farissi en traitant l'ordre itératif des solutions de ce type d'équations. Le deuxième aspect étude la stabilité de l'exposant de convergence de la suite des zéros (respectivement zéros distincts) des dérivées d'ordre arbitraire des solutions de l'équation ci-dessus.

Chapitre 7

Solutions méromorphes des équations différentielles linéaires à coefficients fonctions entières d'ordre [p,q]

1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, nous étudions la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes d'ordre supérieur dont les coefficients sont des fonctions entières d'ordre $[p,q]$ fini. Nous obtenons des résultats sur l'ordre $[p,q]$ et le $[p,q]$-exposant de convergence des zéros des solutions pour de telles équations.

La théorie des équations différentielles linéaires complexes a été développée depuis les années 1960. De nombreux chercheurs ont étudié les équations différentielles linéaires complexes

$$f^{(k)}(z)+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}(z)+\cdots+A_1(z)f'(z)+A_0(z)f(z)=0 \tag{7.1}$$

et

$$f^{(k)}(z)+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}(z)+\cdots+A_1(z)f'(z)+A_0(z)f(z)=F(z), \tag{7.2}$$

où $A_0\not\equiv 0, A_1,\cdots,A_{k-1}$ et $F\not\equiv 0$ sont des fonctions entières d'ordre fini et $k\geqslant 2$ est un entier. Lorsque les coefficients $A_j(j=0,1,...,k-1)$ et F sont des fonctions entières, il est bien connu que toutes les solutions de (7.1) et (7.2) sont des fonctions entières et si certains coefficients de (7.1) sont des fonctions transcendantes, alors (7.1) a au moins une solution d'ordre infini. Nous nous référons à [58] pour plus de détail sur la croissance des solutions entières de (7.1) et (7.2). Il existe également de nombreux travaux en considérant l'hyper ordre et l'ordre itératif des solutions des équations différentielles linéaires complexes (voir [13],[23],[44],[53], [56],[67],[72], [73], [80]).

Au cours des dernières années, certains chercheurs ont étudié les propriétés des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières et méromorphes d'ordre $[p,q]$ dans le plan complexe (voir [11],[12], [36], [61],[62], [85]). Pour autant que nous sachions, Liu, Tu et Shi, dans [62], introduisaient d'abord le concept de l'ordre $[p,q]$ pour le cas $p\geqslant q\geqslant 1$, pour étudier l'ensemble des solutions de (7.1) et (7.2) et ils ont obtenu certains résultats en utilisant l'ordre $[p,q]$ de A_0 pour dominer l'ordre $[p,q]$ des autres coefficients et ils ont obtenu un résultat sur $\rho_{[p+1,q]}(f)$ comme suit.

Théorème 7.1 *[62] Soient* $A_j\left(j=0,1,...k-1\right)$ *des fonctions entières vérifiant*

$$\max\left\{\rho_{[p,q]}\left(A_j\right),\ j\neq s\right\}<\rho_{[p,q]}\left(A_s\right)<+\infty.$$

Alors, toute solution f *de l'équation (7.1) vérifie*

$$\rho_{[p+1,q]}(f)\leqslant\rho_{[p,q]}\left(A_s\right).$$

En outre, au moins une solution de (7.1) satisfait $\rho_{[p+1,q]}(f)=\rho_{[p,q]}\left(A_s\right)$.

Théorème 7.2 *[62] Soient* $A_j\left(j=0,1,...k-1\right)$ *des fonctions entières vérifiant*

$$\max\left\{\rho_{[p,q]}\left(A_j\right),\ j=1,...k-1\right\}<\rho_{[p,q]}\left(A_0\right)<+\infty.$$

Alors, toute solution non triviale f *de l'équation (7.1) vérifie* $\rho_{[p+1,q]}(f)=\rho_{[p,q]}\left(A_0\right)$.

Théorème 7.3 *[62] Soient* $A_j\left(j=0,1,...k-1\right)$ *et* $F\not\equiv 0$ *des fonctions entières vérifiant*

$$\max\left\{\rho_{[p,q]}\left(A_j\right),\ \rho_{[p+1,q]}(F), j=1,...,k-1\right\}<\rho_{[p,q]}\left(A_0\right)<+\infty.$$

Alors, toute solution f *de l'équation (7.2) vérifie* $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f)=\lambda_{[p+1,q]}(f)=\rho_{[p+1,q]}(f)=\rho_{[p,q]}\left(A_0\right)$ *avec au plus une solution exceptionnelle* f_0 *satisfaisant* $\rho_{[p+1,q]}(f_0)<\rho_{[p,q]}\left(A_0\right)$.

Dans ce chapitre, nous considérons pour $k\geq 2$, les équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes

$$A_k(z)f^{(k)}(z)+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}(z)+\cdots+A_1(z)f'(z)+A_0(z)f(z)=0 \tag{7.3}$$

et

$$A_k(z)f^{(k)}(z)+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}(z)+\cdots+A_1(z)f'(z)+A_0(z)f(z)=F(z), \tag{7.4}$$

où $A_0\not\equiv 0, A_1,\cdots,A_k\not\equiv 0$ et $F\not\equiv 0$ sont des fonctions entières. Il est bien connu que si A_k est une fonction entière non constante, alors l'équation (7.3) ou l'équation (7.4) peut avoir des solutions méromorphes. En effet, l'équation

$$\begin{aligned}(z-1)^2f''(z)+(z-1)^2(2e^z-1)f'(z)+\left((z-1)^2e^{2z}+z^2-3z\right)f(z)\\ =[4(z-1)e^{2z}-4e^z+z-1]e^{e^z}+(z-1)^2e^{2z}+z^2-3z\end{aligned}$$

admet une solution méromorphe

$$f(z)=\frac{e^{e^z}+z-1}{z-1}.$$

Le but principal de cette partie est d'améliorer les résultats ci-dessus en considérant l'ordre $[p,q]$. Le présent chapitre peut être compris comme une extension des travaux de Long et Zhu [63] et de nos résultats de [67] d'un ordre $p-$ itératif à l'ordre $[p,q]$. En fait, nous allons prouver les résultats suivants.

Théorème 7.4 *[69] Soient* H *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{\log dens}\{|z| : z \in \mathrm{H}\} > 0$ *(ou* $m_l(\{|z| : z \in \mathrm{H}\}) = +\infty$*),* p, q *des entiers tels que* $p \geqslant q \geqslant 1$ *et* A_j $\left(j = 0, 1, \cdots, k\right)$ *des fonctions entières telles que* $\mathrm{A}_k \not\equiv 0$*. Supposons qu'il existe un entier* $s (0 \leqslant s \leqslant k)$ *tel que*

$$\max_{j=0,1,\cdots,k,j\neq s} \left\{\rho_{[p,q]}\left(\mathrm{A}_j\right)\right\} < \mu_{[p,q]}(\mathrm{A}_s) \leqslant \rho_{[p,q]}(\mathrm{A}_s) = \rho < +\infty,$$

pour certaines constantes réelles μ *satisfaisant* $0 \leqslant \mu < \rho$ *et pour tout* ε $\left(0 < \varepsilon < \rho - \mu\right)$ *suffisamment petit, nous avons*

$$|\mathrm{A}_j(z)| \leqslant \exp_{p+1}\left\{\mu \log_q r\right\}, j \neq s, j = 0, 1, \cdots, k,$$

$$|\mathrm{A}_s(z)| \geqslant \exp_{p+1}\left\{(\rho - \varepsilon)\log_q r\right\}$$

lorsque $z \to \infty$ *pour* $z \in \mathrm{H}$*. Alors, toute solution non-transcendante* $f \not\equiv 0$ *de (7.3) est polynômiale avec* $\deg f \leqslant s - 1$ *et toute solution méromorphe transcendante* f *de (7.3) avec* $\lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_{[p,q]}\left(f\right)$ *satisfait* $\rho_{[p+1,q]}\left(f\right) = \rho_{[p,q]}(\mathrm{A}_s)$.

Quand $\mathrm{A}_k \equiv 1$, nous obtenons le corollaire suivant pour des solutions entières.

Corollaire 7.1 *[69] Soient* H *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{\log dens}\{|z| : z \in \mathrm{H}\} > 0$ *(ou* $m_l(\{|z| : z \in \mathrm{H}\}) = +\infty$*),* p, q *des entiers tels que* $p \geqslant q \geqslant 1$ *et* $\mathrm{A}_j \left(j = 0, 1, \cdots, k-1\right)$ *des fonctions entières. Supposons qu'il existe un entier* $s (0 \leqslant s \leqslant k-1)$ *tel que*

$$\max_{j=0,1,\cdots,k-1,j\neq s} \left\{\rho_{[p,q]}\left(\mathrm{A}_j\right)\right\} < \mu_{[p,q]}(\mathrm{A}_s) \leqslant \rho_{[p,q]}(\mathrm{A}_s) = \rho < +\infty,$$

pour certaines constantes réelles μ *satisfaisant* $0 \leqslant \mu < \rho$ *et pour tout* ε $\left(0 < \varepsilon < \rho - \mu\right)$ *suffisamment petit, nous avons*

$$|\mathrm{A}_j(z)| \leqslant \exp_{p+1}\left\{\mu \log_q r\right\},\ j \neq s, j = 0, 1, \cdots, k-1,$$

$$|\mathrm{A}_s(z)| \geqslant \exp_{p+1}\left\{(\rho - \varepsilon)\log_q r\right\},$$

lorsque $z \to \infty$ *pour* $z \in \mathrm{H}$*. Alors, toute solution non-transcendante* $f \not\equiv 0$ *de (7.1) est polynômiale avec* $\deg f \leqslant s - 1$ *et toute solution transcendante* f *de (7.1) satisfait* $\rho_{[p+1,q]}\left(f\right) = \rho_{[p,q]}(\mathrm{A}_s)$.

Corollaire 7.2 *[69] Soient les fonctions* $\mathrm{A}_j \left(j = 0, 1, \cdots, k\right)$ *et l'ensemble* H *satisfaisant toutes les hypothèses du Théorème 7.4 et soit* $\varphi\,(\not\equiv 0)$ *une fonction méromorphe transcendante satisfaisant* $\rho_{[p+1,q]}\left(\varphi\right) < \rho_{[p,q]}(\mathrm{A}_s)$*. Alors, toute solution méromorphe transcendante* f *avec* $\lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_{[p,q]}\left(f\right)$ *de l'équation (7.3) satisfait*

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}\left(f - \varphi\right) = \lambda_{[p+1,q]}\left(f - \varphi\right) = \rho_{[p+1,q]}\left(f - \varphi\right) = \rho_{[p,q]}(\mathrm{A}_s).$$

En considérant l'équation différentielle linéaire non homogène (7.4), nous obtenons les résultats suivants.

Théorème 7.5 *[69] Soient* H *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{\log dens}\{|z| : z \in \mathrm{H}\} > 0$ *(ou* $m_l(\{|z| : z \in \mathrm{H}\}) = +\infty$*) et* A_j $\left(j = 0, 1, \cdots, k\right)$, $\mathrm{F} \not\equiv 0$ *sont des fonctions entières telles que* $\mathrm{A}_k \not\equiv 0$*. Supposons qu'il existe un entier* $s (0 \leqslant s \leqslant k)$ *tel que*

$$\max_{j=0,1,\cdots,k,j\neq s} \left\{\rho_{[p,q]}\left(\mathrm{A}_j\right), \rho_{[p,q]}(\mathrm{F})\right\} < \mu_{[p,q]}(\mathrm{A}_s) \leqslant \rho_{[p,q]}(\mathrm{A}_s) = \rho < +\infty,$$

pour certaines constantes réelles μ *satisfaisant* $0 \leqslant \mu < \rho$ *et pour tout* ε $\left(0 < \varepsilon < \rho - \mu\right)$ *suffisamment petit, nous avons*

$$|A_j(z)| \leqslant \exp_{p+1}\left\{\mu \log_q r\right\},\ j \neq s, j = 0, 1, \cdots, k,$$

$$|A_s(z)| \geqslant \exp_{p+1}\left\{(\rho - \varepsilon)\log_q r\right\},$$

lorsque $z \to \infty$ *pour* $z \in H$. *Alors, toute solution non-transcendante* f *de l'équation* (7.4) *est polynômiale avec* $\deg f \leqslant s-1$ *et toute solution méromorphe transcendante* f *de* (7.4) *avec* $\lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_{[p,q]}\left(f\right)$ *satisfait* $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}\left(f\right) = \lambda_{[p+1,q]}\left(f\right) = \rho_{[p+1,q]}\left(f\right) = \rho_{[p,q]}\left(A_s\right)$.

Lorsque $A_k \equiv 1$, nous obtenons le corollaire suivant pour des solutions entières.

Corollaire 7.3 *[69] Soient* H *un ensemble de nombres complexes satisfait* $\overline{\log dens}\{|z| : z \in H\} > 0$ *(ou* $m_l(\{|z| : z \in H\}) = +\infty$*) et* $A_j\left(j = 0, 1, \cdots, k-1\right), F \not\equiv 0$ *sont des fonctions entières. Supposons qu'il existe un entier* $s, 0 \leqslant s \leqslant k-1$ *tel que*

$$\max_{j=0,1,\cdots,k-1, j\neq s}\left\{\rho_{(p,q)}\left(A_j\right),\ \rho_{(p,q)}\left(F\right)\right\} < \mu_{(p,q)}\left(A_s\right) \leqslant \rho_{(p,q)}\left(A_s\right) = \rho < +\infty,$$

et pour certaines réelles constantes μ *satisfaisant* $0 \leqslant \mu < \rho$, *nous avons pour tout* $\varepsilon, \left(0 < \varepsilon < \rho - \mu\right)$ *suffisamment petit,*

$$|A_j(z)| \leqslant \exp_{p+1}\left\{\mu \log_q r\right\},\ j \neq s, j = 0, 1, \cdots, k-1,$$

$$|A_s(z)| \geqslant \exp_{p+1}\left\{(\rho - \varepsilon)\log_q r\right\},$$

lorsque $z \to +\infty$ *pour* $z \in H$. *Alors toute solution non transcendante* f *de (7.2) est un polynôme avec* $\deg f \leqslant s-1$ *et toute solution transcendante* f *de (7.2) satisfait* $\rho_{(p+1,q)}\left(f\right) = \rho_{(p,q)}\left(A_s\right)$.

Corollaire 7.4 *[69] Soient les fonctions* $A_j\left(j = 0, 1, \cdots, k\right), F$ *et l'ensemble* H *satisfaisant toutes les hypothèses du Théorème 7.5 et soit* $\varphi\ (\not\equiv 0)$ *une fonction méromorphe transcendante vérifiant* $\rho_{[p+1,q]}\left(\varphi\right) < \rho_{[p,q]}\left(A_s\right)$. *Alors, toute solution méromorphe transcendante* f *avec* $\lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_{[p,q]}\left(f\right)$ *de l'équation (7.4) satisfait*

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}\left(f - \varphi\right) = \lambda_{[p+1,q]}\left(f - \varphi\right) = \rho_{[p+1,q]}\left(f - \varphi\right) = \rho_{[p,q]}\left(A_s\right).$$

2 Lemmes préliminaires

Nos preuves dépendent principalement des lemmes suivants.

Lemme 7.1 *[35] Soient* $f = \frac{g}{d}$ *une fonction méromorphe où* g *et* d *sont des fonctions entières vérifiant* $\mu_{[p,q]}\left(g\right) = \mu_{[p,q]}\left(f\right) = \mu \leqslant \rho_{[p,q]}\left(f\right) = \rho_{[p,q]}\left(g\right) \leqslant +\infty$ *et* $\lambda_{[p,q]}(d) = \rho_{[p,q]}(d) = \lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{f}\right) < \mu$. *Alors, il existe un ensemble* $E_2 \subset (1, +\infty)$ *de mesure logarithmique finie tel que pour tout* z *satisfaisant* $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_2)$ *et* $|g(z)| = M\left(r, g\right)$, *nous avons*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^n (1 + o(1)), n \in \mathbb{N},$$

où $\nu_g(r)$ *représente l'indice central de* g.

Lemme 7.2 *[62] Soient f une fonction entière d'ordre $[p,q]$ et $\nu_f(r)$ l'indice central de f. Alors,*

$$\rho_{[p,q]}(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log_p \nu_f(r)}{\log_q r}.$$

Lemme 7.3 *[36] Soient $f = \frac{g}{d}$ une fonction méromorphe où $g$et d sont des fonctions entières vérifiant*

$$\mu_{[p,q]}(g) = \mu_{[p,q]}(f) = \mu \leqslant \rho_{[p,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(g) \leqslant +\infty$$

et

$$\lambda_{[p,q]}(d) = \rho_{[p,q]}(d) = \lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{f}\right) < \mu.$$

Alors, il existe un ensemble $E_4 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_4)$ et $|g(z)| = M(r,g)$, nous avons

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leqslant r^{2s}, \quad (s \in \mathbb{N}).$$

Lemme 7.4 [36]*Soit f une fonction entière telle que $\rho_{(p,q)}(f) < +\infty$. Alors, il existe un ensemble $E_5 \subset (1,+\infty)$ de mesure linéaire finie tel que pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons*

$$\exp\left\{-\exp_p\left\{(\rho_{(p,q)}(f)+\varepsilon)\log_q r\right\}\right\} \leqslant |f(z)| \leqslant \exp_{p+1}\left\{(\rho_{(p,q)}(f)+\varepsilon)\log_q r\right\} \quad (r \notin E_5).$$

Lemme 7.5 *Soient A_j $(j = 0,1,\cdots,k)$, $A_k (\not\equiv 0)$ et $F(\not\equiv 0)$ des fonctions méromorphes et f une solution méromorphe d'ordre $[p,q]$ infini de l'équation (7.4) satisfaisant la condition suivante*

$$b = \max\left\{\rho_{[p+1,q]}(F),\ \rho_{[p+1,q]}(A_j)\,(j=0,1,\cdots,k)\right\} < \rho_{[p+1,q]}(f).$$

Alors,

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f) = \lambda_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p+1,q]}(f).$$

Preuve. Supposons que f est une solution méromorphe de (7.4) d'ordre $[p,q]$ infini. Par l'équation (7.4), il est clair que si f a un zéro à z_0 d'ordre $\alpha\,(\alpha > k)$, et $A_0, A_1, \ldots, A_k\ (\not\equiv 0)$ sont tous analytiques en z_0, alors F doit avoir un zéro en z_0 d'ordre au moins $\alpha - k$. Par conséquent,

$$n\left(r,\frac{1}{f}\right) \leqslant k\overline{n}\left(r,\frac{1}{f}\right) + n\left(r,\frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{k} n(r,A_j),$$

et

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right) \leqslant k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + N\left(r,\frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{k} N(r,A_j). \tag{7.5}$$

Maintenant (7.4) peut être réécrite comme suit

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{F(z)}\left(A_k(z)\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} + A_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)} + \ldots + A_1(z)\frac{f'(z)}{f(z)} + A_0(z)\right). \tag{7.6}$$

Par le Lemme 3.11 et la formule (7.6), nous obtenons pour tout z vérifiant $|z| = r$ à l'extérieur d'un ensemble $E_6 \subset (0,+\infty)$ de mesure linéaire finie, nous avons

$$\begin{aligned} m\left(r,\frac{1}{f}\right) &\leqslant m\left(r,\frac{1}{F}\right) + \sum_{j=1}^{k} m\left(r,\frac{f^{(j)}}{f}\right) + \sum_{j=0}^{k} m(r,A_j) \\ &\leqslant m\left(r,\frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{k} m(r,A_j) + O(\log rT(r,f)). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Par conséquent, les formules (7.5) et (7.7) mènent à

$$\begin{aligned} T(r,f) &= T(r,\frac{1}{f}) + O(1) \\ &\leqslant T(r,F) + \sum_{j=0}^{k} T(r,A_j) + k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + O(\log r T(r,f)) \end{aligned} \tag{7.8}$$

pour tout $r \notin E_6$ suffisamment grand . Dans ce cas, nous avons

$$O(\log r T(r,f)) \leqslant \frac{1}{2} T(r,f). \tag{7.9}$$

En utilisant la définition d'ordre $[p,q]$, pour tout ε $\left(0 < 2\varepsilon < \rho_{[p+1,q]}(f) - b\right)$ et pour r suffisamment grand, nous obtenons

$$T(r,F) \leqslant \exp_{p+1}\left\{(b+\varepsilon)\log_q r\right\} = o(1)\exp_{p+1}\left\{\left(\rho_{[p+1,q]}(f) - \varepsilon\right)\log_q r\right\}, \tag{7.10}$$

$$T(r,A_j) \leqslant \exp_{p+1}\left\{(b+\varepsilon)\log_q r\right\} = o(1)\exp_{p+1}\left\{\left(\rho_{[p+1,q]}(f) - \varepsilon\right)\log_q r\right\}, j = 0,1,,...,k. \tag{7.11}$$

D'après (7.8), (7.9), (7.10) et (7.11) et pour $r \notin E_6$ suffisamment grand , nous avons

$$T(r,f) \leqslant 2k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + o(1)\exp_{p+1}\left\{\left(\rho_{[p+1,q]}(f) - \varepsilon\right)\log_q r\right\}. \tag{7.12}$$

Donc, pour toute f, du Lemme 4.3 et de l'inégalité (7.12), nous avons

$$\rho_{[p+1,q]}(f) \leqslant \overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f).$$

D'où,

$$\rho_{[p+1,q]}(f) \leqslant \overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f) \leqslant \lambda_{[p+1,q]}(f).$$

Sachant que $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f) \leqslant \lambda_{[p+1,q]}(f) \leqslant \rho_{[p+1,q]}(f)$, alors

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f) = \lambda_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p+1,q]}(f).$$

Lemme 7.6 *Soit $f = \frac{g}{d}$ une fonction méromorphe où g et d sont des fonctions entières. Si $0 \leqslant \rho_{[p,q]}(d) < \mu_{[p,q]}(f)$, alors $\mu_{[p,q]}(g) = \mu_{[p,q]}(f)$ et $\rho_{[p,q]}(g) = \rho_{[p,q]}(f)$. De plus, si $\rho_{[p,q]}(f) = +\infty$, alors $\rho_{[p+1,q]}(g) = \rho_{[p+1,q]}(f)$.*

Preuve. Considérons les trois cas suivants.

Cas 1. $\rho_{[p,q]}(f) < +\infty$.

D'après la définition de l'ordre $[p,q]$, Il existe une suite croissante $\{r_n\}$, $(r_n \to +\infty)$ et un entier positif n_0 tels que pour tout $n > n_0$ et pour tout $\varepsilon \in \left(0, \frac{\rho_{[p,q]}(f) - \rho_{[p,q]}(d)}{2}\right)$ et comme $0 \leqslant \rho_{[p,q]}(d) < \mu_{[p,q]}(f) \leqslant \rho_{[p,q]}(f)$, nous avons

$$T(r_n,f) \geqslant \exp_p\left\{\left(\rho_{[p,q]}(f) - \varepsilon\right)\log_q(r_n)\right\}, \tag{7.13}$$

et

$$T(r_n,d) \leqslant \exp_p\left\{\left(\rho_{[p,q]}(d) + \varepsilon\right)\log_q(r_n)\right\}. \tag{7.14}$$

Puisque $T(r,f) \leqslant T(r,g) + T(r,d) + O(1)$, alors pour tout n assez grand, nous avons

$$\exp_p\left\{\left(\rho_{[p,q]}(f) - \varepsilon\right)\log_q(r_n)\right\} \leqslant T(r_n,g) + \exp_p\left\{\left(\rho_{[p,q]}(d) + \varepsilon\right)\log_q(r_n)\right\} + O(1). \quad (7.15)$$

Du fait que $\varepsilon \in \left(0, \frac{\rho_{[p,q]}(f) - \rho_{[p,q]}(d)}{2}\right)$, la formule (7.15) devient

$$\exp\left\{(1 - o(1))\exp_{p-1}\left\{\left(\rho_{[p,q]}(f) - \varepsilon\right)\log_q(r_n)\right\}\right\} \leqslant T(r_n,g) + O(1),$$

pour tout n suffisamment grand. Par conséquent,

$$\rho_{[p,q]}(f) \leqslant \rho_{[p,q]}(g).$$

D'autre part, puisque $T(r,g) \leqslant T(r,f) + T(r,d)$ et $\rho_{[p,q]}(d) < \rho_{[p,q]}(f)$, alors

$$\rho_{[p,q]}(g) \leqslant \rho_{[p,q]}(f).$$

D'où $\rho_{[p,q]}(g) = \rho_{[p,q]}(f)$. En utilisant un raisonnement similaire et la définition de l'ordre $[p,q]$ inférieur $\mu_{[p,q]}(f)$ et $\mu_{[p,q]}(g)$, nous pouvons montrer que $\mu_{[p,q]}(g) = \mu_{[p,q]}(f)$.

Cas 2. $\rho_{[p,q]}(f) = +\infty$.

Supposons le contraire de l'affirmation $\mu_{[p,q]}(g) = \mu_{[p,q]}(f)$ c'est à dire $\mu_{[p,q]}(g) < \mu_{[p,q]}(f)$. Nous visons une contradiction. D'après la définition du l'ordre $[p,q]-$ itératif inférieur, il existe une suite croissante $\{r_n\}$, $(r_n \to +\infty)$ et un entier positif n_0 tels que pour tout $n > n_0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} T(r_n,g) &\leqslant \exp_p\left\{\left(\mu_{[p,q]}(g) + \varepsilon\right)\log_q r_n\right\}, \\ T(r_n,d) &\leqslant \exp_p\left\{\left(\mu_{[p,q]}(d) + \varepsilon\right)\log_q r_n\right\}. \end{aligned}$$

De l'inégalité $T(r_n,f) \leqslant T(r_n,g) + T(r_n,d) + O(1)$, pour tout n assez grand, nous obtenons

$$T(r_n,f) \leqslant \exp_p\left\{\left(\mu_{[p,q]}(g) + \varepsilon\right)\log_q r_n\right\} + \exp_p\left\{\left(\mu_{[p,q]}(d) + \varepsilon\right)\log_q r_n\right\} + O(1).$$

Ainsi,

$$\mu_{[p,q]}(f) \leqslant \max\left\{\mu_{[p,q]}(g), \mu_{[p,q]}(d)\right\}.$$

Ce dernier résultat représente une contradiction avec notre hypothèse.

Cas 3. $\mu_{[p,q]}(f) < +\infty$ et $\rho_{[p,q]}(f) = +\infty$. En utilisant un raisonnement similaire à celui des cas 1 et 2, nous pouvons montrer le cas 3.

Enfin, nous allons prouver que $\rho_{[p+1,q]}(g) = \rho_{[p+1,q]}(f)$. Supposons que $\rho_{[p,q]}(f) = +\infty$. Il existe alors une suite croissante $\{r_n\}$, $(r_n \to +\infty)$ telle que

$$\rho_{[p+1,q]}(f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_{p+1} T(r_n,f)}{\log_q r_n}.$$

En combinant l'inégalité $\rho_{[p,q]}(d) < \mu_{[p,q]}(f)$ et les définitions de l'ordre $[p,q]$ et l'ordre $[p,q]$ inférieur et nous obtenons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{T(r_n,d)}{T(r_n,f)} = 0.$$

Par suite, il existe un entier positif N tel que pour $n > N$

$$T(r_n,f) \leqslant 2T(r_n,g) + O(1).$$

Ainsi, $\rho_{[p+1,q]}(f) \leqslant \rho_{[p+1,q]}(g)$. Comme $T(r,g) \leqslant T(r,f) + T(r,d)$, il existe donc un entier positif N tel que pour $n > N$

$$T(r_n, g) \leqslant 2T(r_n, f).$$

D'où, $\rho_{[p+1,q]}(g) \leqslant \rho_{[p+1,q]}(f)$. Alors, $\rho_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p+1,q]}(g)$. Le Lemme 7.6 est ainsi prouvé.

Remarque 7.1 *Le Lemme 7.6 a été prouvé pour $p = q = 1$ par Long et Zhu dans [63].*

Lemme 7.7 *[15] Soient $p \geqslant q \geqslant 1$ des entiers, f et g des fonctions méromorphes non-constantes d'ordre $[p,q]$. Alors,*

$$\rho_{[p,q]}(f+g) \leqslant \max\left\{\rho_{[p,q]}(f), \rho_{[p,q]}(g)\right\}$$

et

$$\rho_{[p,q]}(fg) \leqslant \max\left\{\rho_{[p,q]}(f), \rho_{[p,q]}(g)\right\}.$$

De plus, si $\rho_{[p,q]}(f) > \rho_{[p,q]}(g)$, alors

$$\rho_{[p,q]}(f+g) = \rho_{[p,q]}(fg) = \rho_{[p,q]}(f).$$

3 Preuve du Théorème 7.4

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution rationnelle de (7.3). Si f est une fonction rationnelle, qui a un pôle à z_0 de degré $m \geqslant 1$ ou f est polynômiale avec $\deg f \geqslant s$, alors $f^{(s)} \not\equiv 0$. Par (7.3), nous avons

$$A_s(z) f^{(s)}(z) = -\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq s}}^{k} A_j(z) f^{(j)}(z).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \rho_{[p,q]} A_s &= \rho_{[p,q]}\left(A_s f^{(s)}\right) \\ &= \rho_{[p,q]}\left(-\sum_{j=0, j\neq s}^{k} A_j f^{(j)}\right) \\ &\leqslant \max_{j=0,1,\cdots,k, j\neq s}\left\{\rho_{[p,q]}(A_j)\right\}, \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Par conséquent, f doit être polynômiale avec $\deg f \leqslant s-1$. Maintenant, supposons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (7.3) telle que $\lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_{[p,q]}(f)$. De la formule (7.3) , nous avons

$$|A_s| \leqslant \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| \left(|A_0| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{k} |A_j| \left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|\right). \tag{7.16}$$

D'après le Lemme 3.2, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ avec $m_l(E_1) < \infty$ et une constante $B > 0$, tels que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_1)$, nous avons

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant B\left[T(2r, f)\right]^{k+1}, \; j = 1, 2, \cdots, k, \; j \neq s. \tag{7.17}$$

Du Lemme 7.3, il existe un ensemble $E_4 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_4)$, $|g(z)| = M(r,g)$ et pour r suffisamment grand, nous obtenons

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leqslant r^{2s}, \tag{7.18}$$

où g est une fonction entière satisfaisant $\mu_{[p,q]}(g) = \mu_{[p,q]}(f) = \mu \leqslant \rho_{[p,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(g) \leqslant +\infty$. D'après les hypothèses du Théorème 7.4, il existe un ensemble H avec $\overline{\log dens}\{|z| : z \in H\} > 0$ (ou $m_l(\{|z| : z \in H\}) = +\infty$) tel que pour tout $z \in H$ lorsque $z \to \infty$, nous avons

$$|A_j(z)| \leqslant \exp_{p+1}\left\{\mu \log_q r\right\},\ j \neq s, j = 0, 1, \cdots, k, \tag{7.19}$$

$$|A_s(z)| \geqslant \exp_{p+1}\left\{(\rho-\varepsilon)\log_q r\right\}. \tag{7.20}$$

Posons $H_1 = \{|z| : z \in H\} \backslash ([0,1] \cup E_1 \cup E_4)$, donc $m_l(H_1) = +\infty$. Il s'ensuit de (7.16), (7.17), (7.18), (7.19) et (7.20) pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H_1$ et $|g(z)| = M(r,g)$, l'inégalité

$$\exp_{p+1}\left\{(\rho-\varepsilon)\log_q r\right\} \leqslant kBr^{2s}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}\exp_{p+1}\left\{\mu\log_q r\right\}. \tag{7.21}$$

Du fait que $0 \leqslant \mu < \rho$, nous avons pour tout $\varepsilon (0 < \varepsilon < \rho - \mu)$ suffisamment petit

$$\exp((1-o(1))\exp_p\left\{(\rho-\varepsilon)\log_q r\right\}) \leqslant kBr^{2s}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}. \tag{7.22}$$

Du (7.22) et du Lemme 3.5, nous avons

$$\rho_{[p,q]}(A_s) = \rho \leqslant \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log_{p+1} T(r,f)}{\log_q r} = \rho_{[p+1,q]}(f). \tag{7.23}$$

D'autre part, d'après les hypothèses du Théorème 7.4, pour r suffisamment grand, nous avons

$$|A_j(z)| \leqslant \exp_{p+1}\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q r\right\},\ j = 0, 1, \cdots, k, \tag{7.24}$$

et par le Lemme 7.4, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_5 \subset (1,+\infty)$ de mesure linéaire finie (et donc de mesure logarithmique finie), tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_5$, nous obtenons

$$|A_k(z)| \geq \exp\left\{-\exp_p\left\{(\rho_{(p,q)}(A_k)+\varepsilon)\log_q r\right\}\right\} \geq \exp\left\{-\exp_p\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q r\right\}\right\}. \tag{7.25}$$

Il s'ensuit de (7.3) que

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1}{|A_k(z)|}\left(\sum_{j=1}^{k-1}|A_j(z)|\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| + |A_0(z)|\right). \tag{7.26}$$

D'après le théorème de factorisation de Hadamard, nous pouvons écrire f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ où g et d sont des fonctions entières vérifiant $\mu_{[p,q]}(g) = \mu_{[p,q]}(f) = \mu \leqslant \rho_{[p,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(g) \leqslant +\infty$ et $\lambda_{[p,q]}(d) = \rho_{[p,q]}(d) = \lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{f}\right) < \mu$. Par le Lemme 7.1, il existe un ensemble $E_2 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z avec $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2$ et $|g(z)| = M(r,g)$, nous avons

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^j (1+o(1)),\ j = 1, \cdots, k. \tag{7.27}$$

En substituant (7.24), (7.25) et (7.27) dans (7.26), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^k |1+o(1)| \\
\leqslant\ & \frac{1}{\exp\left\{-\exp_p\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q r\right\}\right\}}\left\{\sum_{j=1}^{k-1}\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^j |1+o(1)|+1\right\}\exp_{p+1}\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q r\right\} \\
=\ & \left\{\sum_{j=1}^{k-1}\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^j |1+o(1)|+1\right\}\exp\left\{2\exp_p\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q r\right\}\right\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left|\nu_g(r)\right| |1+o(1)| \leqslant k r^k |1+o(1)| \exp\left\{2\exp_p\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q r\right\}\right\} \tag{7.28}$$

pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin ([0,1]\cup E_2 \cup E_5)$ et $|g(z)| = M(r,g)$, $r \to +\infty$. De la formule (7.28) et du Lemme 3.5, nous obtenons

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log_{p+1}\nu_g(r)}{\log_q r} \leqslant \rho+\varepsilon. \tag{7.29}$$

Moyennant l'inégalité (7.29) et le Lemme 7.2 et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, nous obtenons $\rho_{[p+1,q]}(g) \leqslant \rho$. Puisque $\rho_{[p,q]}(d) < \mu_{[p,q]}(f)$, alors du Lemme 7.6 nous avons $\rho_{[p+1,q]}(g) = \rho_{[p+1,q]}(f)$. Ce dernier résultat et le fait que $\rho_{[p,q]}(A_s) = \rho \leqslant \rho_{[p+1,q]}(f)$ mènent à $\rho_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(A_s)$. Le Théorème 7.4 est ainsi prouvé.

4 Preuve du Corollaire 7.2

Posons $h = f - \varphi$ telle que φ est une fonction méromorphe transcendante avec

$$\rho_{[p+1,q]}(\varphi) < \rho_{[p,q]}(A_s).$$

D'après le Théorème 7.4, nous avons $\rho_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(A_s)$ et par le Lemme 7.7, nous avons $\rho_{[p+1,q]}(h) = \rho_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(A_s)$. En remplaçant $f = h + \varphi$ dans (7.3), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&A_k(z)h^{(k)} + A_{k-1}(z)h^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)h' + A_0(z)h \\
&= -\left(A_k(z)\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\varphi' + A_0(z)\varphi\right).
\end{aligned} \tag{7.30}$$

Posons $K(z) = A_k(z)\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z)\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)\varphi' + A_0(z)\varphi$. Comme

$$\rho_{[p+1,q]}(\varphi) < \rho_{[p,q]}(A_s),$$

alors par le Théorème 7.4, nous déduisons que φ n'est pas une solution de l'équation (7.3), ce qui implique que $K \not\equiv 0$ et dans ce cas nous avons $\rho_{[p+1,q]}(K) \leqslant \rho_{[p+1,q]}(\varphi) < \rho_{[p,q]}(A_s) = \rho_{[p+1,q]}(f)$. Ainsi,

$$\max\left\{\rho_{[p+1,q]}(K),\ \rho_{[p+1,q]}(A_j)\ (j=0,1,\cdots,k)\right\} < \rho_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(A_s)$$

et par le Lemme 7.5, nous obtenons

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\varphi) = \lambda_{[p+1,q]}(f-\varphi) = \rho_{[p+1,q]}(f-\varphi) = \rho_{[p,q]}(A_s).$$

5 Preuve du Théorème 7.5

Supposons que f est une solution rationnelle de l'équation (7.4). Si f est une fonction rationnelle qui a un pôle à z_0 de degré $m \geq 1$, ou f est polynômiale avec $\deg f \geqslant s$, alors $f^{(s)}(z) \not\equiv 0$. Par (7.4), nous avons

$$A_s(z) f^{(s)}(z) = F(z) - \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq s}}^{k} A_j(z) f^{(j)}(z).$$

Donc,

$$\begin{aligned} \rho_{[p,q]} A_s &= \rho_{[p,q]}\left(A_s f^{(s)}\right) \\ &= \rho_{[p,q]}\left(F - \sum_{j=0,\ j\neq s}^{k} A_j f^{(j)}\right) \\ &\leqslant \max_{j=0,1,\cdots,k, j\neq s}\left\{\rho_{[p,q]}(A_j), \rho_{[p,q]}(F)\right\}, \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Par conséquent, f doit être polynômiale avec $\deg f \leqslant s-1$.

Maintenant, supposons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (7.4) telle que $\lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_{[p,q]}(f)$. Par (7.4), nous avons

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1}{|A_k(z)|}\left(\sum_{j=1}^{k-1} |A_j(z)| \left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| + |A_0(z)| + \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|\right). \tag{7.31}$$

D'après le théorème de factorisation de Hadamard, on peut réécrire f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ où g *et* d sont des fonctions entières satisfaisant $\mu_{[p,q]}(g) = \mu_{[p,q]}(f) = \mu \leqslant \rho_{[p,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(g) \leqslant +\infty$ et $\lambda_{[p,q]}(d) = \rho_{[p,q]}(d) = \lambda_{[p,q]}\left(\frac{1}{f}\right) < \mu$. Du Lemme 7.1, il existe un ensemble E_2 de mesure logarithmique finie telle que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2$ avec $|g(z)| = M(r,g)$ nous avons (7.27). D'après les hypothèses du Théorème 7.5 et Le lemme 7.4, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie tels que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_5$, nous avons

$$\begin{aligned} |A_k(z)| &\geqslant \exp\left\{-\exp_p\left\{(\rho_{(p,q)}(A_k) + \varepsilon)\log_q r\right\}\right\} \\ &\geqslant \exp\left\{-\exp_p\left\{(\rho + \varepsilon)\log_q r\right\}\right\}. \end{aligned} \tag{7.32}$$

D'autre part, pour un r suffisamment grand, nous savons que pour $j = 0, 1, \cdots, k$

$$|A_j(z)| \leqslant \exp_{p+1}\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q r\right\}, |F(z)| \leqslant \exp_{p+1}\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q r\right\}. \tag{7.33}$$

Donc, pour tout ε $\left(0 < 2\varepsilon < \mu_{(p,q)}(g) - \rho_{(p,q)}(d)\right)$ et r suffisamment grand, nous avons

$$\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| = \frac{|F(z)\, d(z)|}{|g(z)|} = \frac{|F(z)|\,|d(z)|}{M(r,g)}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| &\leqslant \frac{\exp_{p+1}\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q r\right\}\exp_{p+1}\left\{(\rho_{(p,q)}(d)+\varepsilon)\log_q r\right\}}{\exp_{p+1}\left\{(\mu_{(p,q)}(g)-\varepsilon)\log_q r\right\}} \\ &\leqslant \exp_{p+1}\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q r\right\}. \end{aligned} \tag{7.34}$$

En remplaçant (7.27) , (7.32) , (7.33) et (7.34) dans (7.31), pour z satisfaisant $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_2 \cup E_5)$, $r \to +\infty$ et $|g(z)| = M(r,g)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^k |1+o(1)| \\
\leqslant\ & \frac{1}{\exp\left\{-\exp_p\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q r\right\}\right\}}\left\{\sum_{j=1}^{k-1}\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^j |1+o(1)|+2\right\} \\
& \times \exp_{p+1}\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q r\right\} \\
=\ & \left\{\sum_{j=1}^{k-1}\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^j |1+o(1)|+2\right\}\exp\left\{2\exp_p\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q r\right\}\right\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left|\nu_g(r)\right| |1+o(1)| \leqslant (k+1)\, r^k |1+o(1)| \exp\left\{2\exp_p\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q r\right\}\right\} \tag{7.35}$$

pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_2 \cup E_5)$ et $|g(z)| = M(r,g)$, $r \to +\infty$. De cette dernière formule et du Lemme 3.5, nous obtenons

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log_{p+1}\nu_g(r)}{\log_q r} \leqslant \rho+\varepsilon. \tag{7.36}$$

Comme ε $\left(0 < 2\varepsilon < \mu_{(p,q)}(g) - \rho_{(p,q)}(d)\right)$ est arbitraire, en utilisant (7.36) et le Lemme 7.2, nous obtenons $\rho_{[p+1,q]}(g) \leqslant \rho$. Sachant que $\rho_{[p,q]}(d) < \mu_{[p,q]}(f)$, donc par le Lemme 7.6, nous avons $\rho_{[p+1,q]}(g) = \rho_{[p+1,q]}(f)$, alors $\rho_{[p+1,q]}(f) \leqslant \rho$. D'autre part, par (7.4) nous avons

$$|A_s| \leqslant \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| \left(\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| + |A_0| + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{k} |A_j| \left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|\right). \tag{7.37}$$

En utilisant le Lemme 3.2, il existe un ensemble $E_1 \subset (1,+\infty)$ avec $m_l(E_1) < +\infty$ et une constante $B > 0$, tels que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_1)$

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant B\left[T(2r,f)\right]^{k+1},\ j = 1,2,\cdots,k,\ j \neq s. \tag{7.38}$$

En utilisant le Lemme 7.3, il existe un ensemble $E_4 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin ([0,1] \cup E_4)$ et $|g(z)| = M(r,g)$ et pour r suffisamment grand, nous obtenons

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leqslant r^{2s}. \tag{7.39}$$

D'après les hypothèses du Théorème 7.5, il existe un ensemble H avec $\overline{\log dens}\{|z| : z \in H\} > 0$ (ou $m_l(\{|z| : z \in H\}) = +\infty$) tel que pour tout $z \in H$, les inégalités (7.19) et (7.20) soient vérifiées. Posons $\delta = \rho_{[p,q]}(F)$. Alors, pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \rho - \delta)$, nous avons

$$|F(z)| \leqslant \exp_{p+1}\left\{(\delta+\varepsilon)\log_q r\right\}. \tag{7.40}$$

Donc, pour tout $\varepsilon\left(0<2\varepsilon<\min\left(\mu_{(p,q)}(g)-\rho_{(p,q)}(d)\right),\rho-\delta\right)$ et r suffisamment grand, nous obtenons

$$\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|=\frac{|F(z)\,d(z)|}{|g(z)|}=\frac{|F(z)|\,|d(z)|}{M(r,g)}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| &\leqslant \frac{\exp_{p+1}\left\{(\delta+\varepsilon)\log_q r\right\}\exp_{p+1}\left\{\left(\rho_{(p,q)}(d)+\varepsilon\right)\log_q r\right\}}{\exp_{p+1}\left\{\left(\mu_{(p,q)}(g)-\varepsilon\right)\log_q r\right\}}\\ &\leqslant \exp_{p+1}\left\{(\delta+\varepsilon)\log_q r\right\}. \qquad (7.41)\end{aligned}$$

Posons $H_1=\{|z|:z\in H\}\setminus([0,1]\cup E_1\cup E_4)$, donc $m_l(H_1)=+\infty$. En remplaçant (7.19), (7.20), (7.38),(7.39), (7.40) et (7.41) dans (7.37), pour z satisfaisant $|z|=r\in H_1$, $r\to+\infty$ et $|g(z)|=M\left(r,g\right)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\exp_{p+1}\left\{(\rho-\varepsilon)\log_q r\right\} &\leqslant Br^{2s}\left(T\left(2r,f\right)\right)^{k+1}(\exp_{p+1}\left\{(\delta+\varepsilon)\log_q r\right\}\\ &\quad +k\exp_{p+1}\left\{\mu\log_q r\right\}). \qquad (7.42)\end{aligned}$$

L'inégalité (7.42) et le Lemme 3.5 mènent à $\rho\le\rho_{[p+1,q]}\left(f\right)$. Ceci et le fait que $\rho_{[p+1,q]}\left(f\right)\leqslant\rho$ donnent $\rho_{[p+1,q]}\left(f\right)=\rho_{[p,q]}(A_s)=\rho$. Comme

$$\max\left\{\rho_{[p+1,q]}(F),\ \rho_{[p+1,q]}\left(A_j\right)\left(j=0,1,\cdots,k\right)\right\}<\rho_{[p+1,q]}\left(f\right)=\rho_{[p,q]}(A_s),$$

alors par le Lemme 7.5, nous obtenons

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f)=\lambda_{[p+1,q]}(f)=\rho_{[p+1,q]}\left(f\right)=\rho_{[p,q]}(A_s).$$

Le Théorème 7.5 est donc prouvé.

6 Preuve du Corollaire 7.4

Posons $h=f-\varphi$ telle que φ est une fonction méromorphe transcendante avec

$$\rho_{[p+1,q]}\left(\varphi\right)<\rho_{[p,q]}(A_s).$$

D'après le Théorème 7.5, nous avons $\rho_{[p+1,q]}\left(f\right)=\rho_{[p,q]}(A_s)$ et par le Lemme 7.7, nous avons $\rho_{[p+1,q]}(h)=\rho_{[p+1,q]}\left(f\right)=\rho_{[p,q]}(A_s)$. En remplaçant $f=h+\varphi$ dans (7.4), nous obtenons

$$\begin{aligned}&A_k(z)\,h^{(k)}+A_{k-1}(z)\,h^{(k-1)}+\cdots+A_1(z)\,h'+A_0(z)\,h\\ &=F(z)-\left(A_k(z)\,\varphi^{(k)}+A_{k-1}(z)\,\varphi^{(k-1)}+\cdots+A_1(z)\,\varphi'+A_0(z)\,\varphi\right). \qquad (7.43)\end{aligned}$$

Posons

$$G(z)=F(z)-\left(A_k(z)\,\varphi^{(k)}+A_{k-1}(z)\,\varphi^{(k-1)}+\cdots+A_1(z)\,\varphi'+A_0(z)\,\varphi\right).$$

Si $\rho_{[p+1,q]}\left(\varphi\right)<\rho_{[p,q]}(A_s)$, alors par le Théorème 7.5, nous déduisons que φ n'est pas une solution de l'équation (7.4), ce qui implique que $G\not\equiv 0$. Dans ce cas nous avons $\rho_{[p+1,q]}(G)\leqslant\rho_{[p+1,q]}\left(\varphi\right)<\rho_{[p,q]}(A_s)=\rho_{[p+1,q]}\left(f\right)$, donc

$$\max\left\{\rho_{[p+1,q]}(G),\ \rho_{[p+1,q]}\left(A_j\right)\left(j=0,1,\cdots,k\right)\right\}<\rho_{[p+1,q]}\left(f\right)=\rho_{[p,q]}(A_s)$$

Du Lemme 7.5, nous obtenons

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}\left(f-\varphi\right)=\lambda_{[p+1,q]}\left(f-\varphi\right)=\rho_{[p+1,q]}\left(f-\varphi\right)=\rho_{[p,q]}(A_s).$$

7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons généralisé quelques travaux de Long et Zhu [63] et de nos résultats de [67] d'un ordre $p-$ itératif à l'ordre $[p,q]$ où nous avons étudié la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes d'ordre supérieur dont les coefficients sont des fonctions entières d'ordre $[p,q]$ fini.

Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, nous avons constaté l'efficacité des outils puissants de la théorie de Nevanlinna comme la fonction caractéristique, le premier théorème fondamental de Nevanlinna et même le théorème de factorisation de Hadamard. Ces techniques nous ont permis d'améliorer quelques résultats obtenus par plusieurs chercheurs concernant les équations différentielles linéaires dans le plan complexe.

Dans un premier temps, nous avons considéré les solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur dont les coefficients sont des fonctions méromorphes. Nous avons montré quelques nouvelles propriétés sur l'hyper ordre des solutions méromorphes non nulles dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée pour les équations différentielles linéaires homogènes. Pour les équations différentielles linéaires non homogènes, nous avons prouvé qu'il existe au plus une solution exceptionnelle d'ordre fini, et toutes les autres solutions sont d'hyper ordre fini. Ensuite, nous nous sommes intéressé à l'ordre itératif de ces solutions en considérant un coefficient dominant arbitraire.

Dans un second temps, nous avons étudié la croissance des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur dont les coefficients sont des fonctions entières. Nous avons obtenu des estimations générales de l'ordre p-itératif et de l'exposant de convergence itératif des zéros de ces solutions. Nous avons aussi donné quelques informations sur l'exposant de convergence itératif des zéros des dérivées d'ordre arbitraire de ces solutions.

Dans la dernière partie de ce travail, nous avons pensé à généraliser quelques résultats cités ci-dessus en considérant le concept de l'ordre [p, q].

Enfin, on propose quelques questions et problèmes ouverts.

Problème 1. Que peut on dire sur l'ordre des solutions de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)\, e^{P(z)} f^{(k-1)} + \ldots + A_0(z)\, e^{P(z)} f = e^{P(z)} F_1(z) + e^{Q(z)} F_2(z),$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes, $A_j (\not\equiv 0)$ $\left(j = 0, 1, \ldots, k-1\right)$ et F_i $(i = 1, 2)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini ?

Problème 2. Peut-on obtenir des résultats analogues au chapitre 7 en considérant des coefficients fonctions méromorphes ?

Bibliographie

[1] **M. Andasmas and B. Belaïdi,** (2013), *On the order and hyper-order of meromorphic solutions of higher order linear differential equations.* Hokkaido Math. **J. 42 :3,**357-383. 40

[2] **M. Andasmas and B. Belaïdi,** (2015), *On the growth and the zeros of solutions of higher order linear differential equations with meromorphic coefficients.* Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **98 (112),** 199-210. 3, 56, 66

[3] **S. Bank**, (1972), *A general theorem concerning the growth of solutions of first order algebraic differential equations.* Compositio Math. **25**, 61-70. 60

[4] **B. Belaïdi**, (2002), *Estimation of the hyper-order of entire solutions of complex linear ordinary differential equations whose coefficients are entire functions.* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **2002, no. 5,** 1-8. 1, 2, 3, 56, 67, 68, 81

[5] **B. Belaïdi**, (2004), *Growth of solutions of certain non-homogeneous linear differential equations with entire coeffecients,* JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **5 , no. 2, Article 40,** 1-9. 56

[6] **B. Belaïdi,** (2006), *On the iterated order and the fixed points of entire solutions of some complex linear differential equations,* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **, No. 9,** 1-18. 2

[7] **B. Belaïdi,** (2007), *Some precise estimates of the hyper order of solutions of some complex linear differential equations,* JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **8, No. 4. Article 107,** 14 pp. 19, 20

[8] **B. Belaïdi,** (2008), *Oscillation of fixed points of solutions of some linear differential equations,* Acta. Math. Univ. Comenianae 77, **no. 2,** 263-269. 61

[9] **B. Belaïdi,** (2008), *Growth and oscillation of solutions of solutions of some linear differential equations,* Math.Vesnik 60, **no. 4,** 233-246. 23

[10] **B. Belaïdi,** (2009), *Growth and oscillation of solutions to linear differential equations with entire coefficients having the same order,* Electron. J. Diff. Equ. **No. 70,** 1-10. 2

[11] **B. Belaïdi**, (2011), *Growth of solutions to linear differential equations with analytic coefficients of* $[p,q]$ *order in the unit disc,* Electron. J. Differential Equations **No. 156,** 11 pp. 96

[12] **B. Belaïdi**, (2012) *Growth and oscillation theory of* $[p,q]$ *-order analytic solutions of linear differential equations in the unit disc,* J. Math. Anal. 3, **no. 1**, 1-11. 96

[13] **B. Belaïdi**, (2015), *Iterated order of meromorphic solutions of homogeneous and non-homogeneous linear differential equations,* Romai J.,**v. 11, No.1** , 33-46. 3, 17, 56, 57, 60, 66, 96

[14] **B. Belaïdi**, (2015), *On the [p, q]-order of meromorphic solutions of linear differential equations,* Acta Univ. M. Belii Ser. Math. **37-49**. 89

[15] **B. Belaïdi**, (2015) *Differential polynomials generated by meromorphic solutions of $[p, q]$-order to complex linear differential equations,* Rom. J. Math. Comput. Sci. **5, no. 1, 46–62**. 103

[16] **B. Belaïdi**, (2017) *Fonctions Entières et Théorie de Nevanlinna,* Éditions Al Djazair. 4, 11

[17] **B. Belaïdi and H. Habib**, (2016), *On the growth of solutions of some non- homogenous linear differential equations,* Acta Mathematica Academiae Paedagog. Nyhàzi. **(N.S.) 32, no. 1**, 101-111. 2, 19, 21, 24, 35

[18] **B. Belaïdi and H. Habib**, (2015). *Relations between meromorphic solutions and their derivatives of differential equations and small functions.* Ann. Univ. Buchar. Math. Ser. **(LXIV) 6 :1** , 35-57. 37

[19] **B. Belaïdi and K. Hamani**, (2003) *Order and hyper-order of entire solutions of linear differential equations with entire coeffecients,* Electron. J. Differential Equations. **No. 17,** 12 pp. 82

[20] **B. Belaïdi and S. Hamouda**, (2002) *Growth of solutions of n-th order linear differential equation with entire coefficients,* Kodai Math. J. **25, no. 3**, 240-245. 82

[21] **L. G. Bernal**, (1987) *On growth k-order of solutions of a complex homogeneous linear differential equations,* Proc. Amer. Math. Soc. **101**, 317-322. 2

[22] **T.B. Cao, Z.X. Chen, X.M. Zheng and J.Tu,** (2005) *On the iterated order of meromorphic solutions of higher order linear differential equations.* Ann. Differential Equations. **21 (2)**, 111-122. 73

[23] **T. B. Cao, J. F. Xu and Z. X. Chen**, (2010) *On the meromorphic solutions of linear differential equations on the complex plane,* J. Math. Anal. Appl. **364,** 130-142. 2, 96

[24] **Y. Chen**, (2010) *Estimates of the zeros and growths of meromorphic solutions of homogeneous and non-homogeneous second order linear differential equations.* Math. Appl. (Wuhan). **23, no. 1**, 18-26. 1, 56

[25] **Y. Chen**, (2016), *The growth and fixed points of solutions of a type of second order non-homogeneous differential equations ,* Math. Appl. (Wuhan) , **29, no. 1**, 117-124. 3, 82, 83

[26] **Z. X. Chen**, (1994) *Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations.* Analysis **14, no 4**, 425-438. 23

[27] **Z. X. Chen,** (1996) *The zero, pole and order of meromorphic solutions of differential equations with meromorphic coefficients.* Kodai Math. J. **19 :3**, 341-354. 40

[28] **Z. X. Chen**, (1999), *On the rate of growth of meromorphic solutions of higher order linear differential equations.* Acta Math. Sinica (Chin. Ser.) **42 :3**, 551-558. 40

[29] **Z. X. Chen**, (2002) *On the hyper-order of solutions of some second order linear differential equations.* Acta Math. Sin. (Engl. Ser), **18 :1** , 79-88. 36

[30] **Z. X. Chen**, (2002), *The growth of solutions of $f'' + e^{-z} f' + Q(z) f = 0$, where the order* $\rho(Q) = 1$, Sci. China Ser. **A 45**, no. 3, 290-300. 19, 23

[31] **J. Chen and J. F. Xu,** (2009) *Growth of meromorphic solutions of higher order linear differential equations.* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **2009 :1**, 1-13. 42

[32] **Z. X. Chen and C. C. Yang**, (1999), *Some further results on the zeros and growth of entire solutions of second order differential equations,* Kodai Math. J., **22,** 273-285. 1, 2, 56, 67, 68, 82

[33] **Z. X. Chen, C. C. Yang**, (2000), *Quantitative estimations on the zeros and growths of entire solutions of linear differential equations*, Complex Variables, **42,** 119-133. 2

[34] **A. El Farissi**, (2015), *On the iterated exponent of convergence of solutions of linear diffferential equations*, Int. J. Anal. Appl. **Volume 7, Number 2,** 162-170. 3, 83

[35] **A.Ferraoun, B. Belaïdi**, (2016), *Growth of solutions of complex differential equations with coefficients being Lacunary series of finite iterated order*. Nonlinear Studies, **23 (2)**, 237-252. 69, 73, 99

[36] **A. Ferraoun, B. Belaïdi,** (2017), *On the (p,q)-order of solutions of some complex linear differential equations*, Communications in Optimization Theory, **Vol. 2017, Article ID 17**, pp. 1-23. 96, 100

[37] **A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskii**, (2008), *The distribution of values of meromorphic functions*, Irdat Nauk, Moscow, 1970 (in Russian), Transl. Math. Monogr., vol. 236, Amer. Math. Soc., Providence RI. 4, 11, 18

[38] **G. G. Gundersen**, (1988), *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*. J. London Math. Soc.**37 , no. 1**, 88-104. 23, 40, 42

[39] **G. G. Gundersen**, (1988), *Finite order solutions of second order linear differential equations*. Trans. Amer. Math. Soc. **305 no. 1**, 415-429. 1, 19, 36, 40, 82

[40] **G. G. Gundersen, E. M. Steinbart, and S. Wang**, (1998), *The possible orders of solutions of linear differential equations with polynomial coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. 350, **no. 3**, 1225-1247. 1

[41] **H. Habib and B.Belaïdi**, (2011), *On the growth of solutions of some higher order linear differential equations with entire coefficients*. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **2011 :93** , 1-13. 36

[42] **H. Habib and B.Belaïdi**, (2016), *On the Order of Growth of Solutions to Complex Non homogeneous Linear Differential Equations*. Kyungpook Math. J. **56, no. 3, 819-829**. 2, 19, 21, 35

[43] **K. Hamani**, (2010), *Growth of solutions of higher-order linear differential equations*. Electronic Journal of Differential Equations. **Vol. 2010, No. 65**, pp. 1.12. 20

[44] **K. Hamani, B. Belaïdi**, (2011), *Growth of solutions of complex linear differential equations with entire coefficients of finite iterated order*, Acta Univ. Apulensis Math. Inform. **No. 27, 203-216**. 60, 69, 96

[45] **K. Hamani, B. Belaïdi**, (2013), *On the hyper-order of solutions of a class of higher order linear differential equations*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **20 :1**, 27-39. 44

[46] **K. Hamani, B. Belaïdi**, (2017), *On the hyper-order of transcendental meromorphic solutions of certain higher order linear differential equations*. Opuscula Math. 37 , **no. 6, 853–874**. 1

[47] **K. Hamani, B. Belaïdi**, (2017), *Growth of transcendental meromorphic solutions of some higher order linear differential equations*. Comm. Appl. Nonlinear Anal. **24 , no. 2, 1–17.** 1

[48] **W. K. Hayman**, (1964) *Meromorphic functions*, Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford. 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 44, 61

[49] **W. K. Hayman**, (1974), *The local growth of power series : a survey of the Wiman-Valiron method*, Canad. Math. Bull. **17 (1974), no. 3**, 317–358. 17

[50] **J. He, X. M. Zheng and H. Hu**, (2013) *Iterated order of meromorphic solutions of certain higher order linear differantial equations with meromorphic coefficients of finite iterated order,* Acta Universitatis Apulensis. **No 33**, pp. 145-157. 61, 69, 74

[51] **S. Hellerstein, J. Miles, J. Rossi**, (1992), *On the growth of solutions of certain linear differential equations.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **17, no. 2**, 343-365. 1

[52] **C. W. Henson, L. A. Rubel**, (1984) *Somme applications of Nevanlinna theory to mathematical logic : Identities of exponential functions,* Trans. Am. Math. Soc **282**. 1-32. 1

[53] **H. Hu, X. M. Zheng**, (2012) *Growth of solutions to linear differential equations with entire coefficients,* Electron. J. Differential Equations. **No. 226**, 15 pp. 96

[54] **J. Jank and L. Volkmann**, (1985) *Einfuhrung in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen.* Birkhauser Verlag, Basel. 40

[55] **O. P. Juneja, G. P. Kapoor and S. K. Bajpai**, (1976), *On the (p,q)-order and lower (p,q)-order of an entire function,* J. Reine Angew. Math. **282**, 53–67. 15

[56] **L. Kinnunen**, (1998), *Linear differential equations with solutions of finite iterated order,* Southeast Asian Bull. Math., **22, no.4**, 385-405. 2, 15, 17, 96

[57] **K. H. Kwon**, (1996) *On the growth of entire functions satisfying second order linear differential equations.* Bull. Korean Math. Soc. **33, no. 3**, 487-496. 1, 2, 17, 19, 36, 56, 67, 68

[58] **I. Laine**, (1993), *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations.* de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter deGruyter and Co., Berlin. 1, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 40, 96

[59] **I. Laine**, (2008), *Complex differential equations,* Handbook of Differential Equations : Ordinary Differential Equations, **4**, 269-363. 11

[60] **I. Laine, R. Yang**, (2004), *Finite order solutions of complex linear differential equations,* Electron. J. Diff Equ., **No. 4**, 65, 1-8. 32

[61] **L. M. Li, T. B. Cao**, (2012), *Solutions for linear differential equations with meromorphic coefficients of [p,q]-order in the plane,* Electron. J. Differential Equations **, No. 195**, 15 pp. 15, 16, 96

[62] **J. Liu, J. Tu and L. Z. Shi**, (2010), *Linear differential equations with entire coefficients of [p,q]-order in the complex plane,* J. Math. Anal. Appl. **372, no. 1**, 55–67. 16, 96, 97, 100

[63] **J. R. Long, J. Zhu**, (2016), *On hyper-order of solutions of higher order linear differential equations with meromorphic coefficients.* Adv. Difference Equ. **107**, 13 pages. 3, 67, 68, 77, 81, 83, 97, 103, 109

[64] **M. Ru**, (2001), *Nevanlinna Theory and its relation to Diophantine A pproximation.* River Edge, NJ : World Scientific. 1

[65] **M. Saidani, B.Belaïdi**, Soumis *On the Hyper-Order of Solutions of some Higher Order Linear Differential Equations with Entire Coefficients* . 2, 21, 22

[66] **M. Saidani, B. Belaïdi**, (2018) *On the Growth of Solutions of Homogeneous and Nonhomogeneous Linear Differential Equations With Meromorphic Coefficients.* Scientific Studies and Research. Series Mathematics and Informatics. Vol. 28, No. 1, 131-146. 2, 57, 58

[67] **M. Saidani, B.Belaïdi**, (2016), *On the fast growth of solutions to higher order linear differential equations with entire coefficients,* Novi Sad J. Math. **Vol. 46, No. 2**, 117-133. 3, 69, 70, 71, 74, 83, 96, 97, 109

[68] **M. Saidani, B. Belaïdi**, (2018) *On the growth of solutions of some higher order linear differantial equations with meromorphic coefficients.* Ufa Mathematical Journal. **Vol. 10. No. 1** P. 1-19. 2, 38

[69] **M. Saidani, B.Belaïdi**, (2018), *Meromorphic Solutions to Linear Differential Equations with Entire Coeffecients of* [P,Q] *-Order.* Journal of Dynamical Systems & Geomatric Theories. **Vol. 16(1)**, pp. 33-53 3, 98, 99

[70] **M. Saidani, B.Belaïdi**, (2017), *Oscillation of Solutions and Their Arbitrary-Order Derivatives of Higher Order Non-Homogeneous LDE. Ser. A : Appl. Math. Inform. AND Mech.* **vol. 9, 2** , 103-126. 3, 74, 84, 85, 86, 89

[71] **X. Shen and H. Y. Xu,** (2012), *The zeros and growth of solutions of higher order differential equations,* Fourth International Conference on Computational and Information Sciences, 605-608. 56

[72] **J. Tu and T. Long**, (2009), *Oscillation of complex high order linear differential equations with coefficients of finite iterated order.* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **No. 66**, 1-13. 60, 96

[73] **J. Tu and Z. X. Chen**, (2009), *Growth of solutions of complex differential equations with meromorphic coefficients of finite iterated order.* Southeast Asian Bull. Math. **33, no. 1**, 153-164. 96

[74] **J. Tu, H. Y. Xu, H. M. Liu and Y. Liu**, (2013), *Complex oscillation of higher order Linear differential equations with coefficients being lacunary series of finite iterated order.* Abstr. Appl. Anal., **Art. ID 634739**, 1-8. 42

[75] **J. Tu, C. F. Yi**, (2008), *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with coefficients having the same order,* J. Math. Anal. Appl. **340**, no. 1, 487-497. 2, 22

[76] **J. Wang , I. Laine**, (2009), *Growth of solutions of nonhomogeneous linear differential equations,* Abstr. Appl. Anal, **Art. ID 363927**, 11 pp. 23

[77] **L. Wang and H. Liu**, (2014), *Growth of meromorphic solutions of higher order linear differential equations,* Elec. Jour. Diff. Equ, **Vol. 2014, No. 125**, 1-11 1, 2, 68

[78] **J. Wang and H. X. Yi**, (2003), *Fixed points and hyper-order of differential polynomials generated by solutions of differential equations.* Complex Var. Theory Appl. **48 :1** , 83-94. 40

[79] **H. Wittich**, (1968), *Neuere Untersuchungen ber eindeutige analytishe Funktionen,* 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York. 18

[80] **S.Z. Wu, X.M .Zheng**, (2015), *On meromorphic solutions of some linear differential equations with entire coefficients being Fabry gap series.* Adv. Difference Equ. **2015 :32**, 13 pages. 1, 69, 96

[81] **J. F. Xu and H. X. Yi.**, (2010), *Relations between solutions of a higher-order differential equation with functions of small growth.* , Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), **53, no. 2)**, 291-296. 24

[82] **L. Yang**, (1993), *Value Distribution Theory,* Springer-Verlag, Berlin. 4, 91

[83] **C. C. Yang and H. X. Yi,** (2003), *Uniqueness theory of meromorphic functions, Mathematics and its Applications,* , 557. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht. 24

[84] **Y. Zhan and L. Xiao**, (2015), *The growth of solutions of higher order differential equations with coefficients having the same order,* J. Math. Res. Appl. **35, no. 4**, 387–399. 2, 20, 36, 37, 55

[85] **M. L. Zhan, X. M. Zheng**, (2014), *Solutions to linear differential equations with some coefficient being lacunary series of (p,q)-order in the complex plane,* Ann. Differential Equations. **30, no. 3**, 364–372. 16, 96

Résumé

La croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires sur le plan complexe est l'une des questions ouvertes en analyse complexes. Cette dernière est notre motivation initiale de cette thèse, par suite, ce travail est dévoué à l'étude des propriétés des solutions de certaines équations différentielles à coefficients fonctions de la variable complexe.

Dans la première partie de cette thèse, nous étudions la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes d'ordre supérieur dans le plan complexe dont les coefficients sont des fonctions méromorphes. Nous portons notre étude sur l'hyper ordre et l'ordre p-itératif en considérant un certain coefficient dominant.

Dans la deuxième partie, nous nous intéressons aux équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes à coefficients fonctions entières. Sous certaines conditions sur les coefficients fonctions entières, nous obtenons des estimations sur l'ordre p-itératif et l'exposant itératif de convergence des zéros des solutions. Ensuite, nous donnons quelques informations sur l'exposant itératif de convergence des zéros des dérivées d'ordre arbitraire de ces solutions.

La dernière partie de ce travail est dédiée à une généralisation de certains résultats cités précédemment en utilisant le concept d'ordre[p, q].

Mots-Clés. Fonctions entières, croissance de solution, équations différentielles linéaires, fonction méromorphe, ordre itératif.

Abstract

The growth and oscillation of solutions of linear differential equations on the complex plane is one of the open questions in complex analysis. The latter is our initial motivation for this thesis, as a result, this work is devoted to the study of the properties of the solutions of certain differential equations to the coefficients of the complex variable.

In the first part of this thesis, we study the growth of meromorphic solutions of homogeneous and non homogeneous linear differential equations of higher order in the complex plane whose coefficients are meromorphic. We carry our study on the hyper order and p -iterative order by considering a certain dominant coefficient.

In the second part, we are interested in homogeneous and non homogeneous linear differential equations to the integer coefficients. Under certain conditions on the integer coefficients, we obtain precise estimates on the p-iterative order and the iterative convergence exponent of the solutions. We then give some information on the iterative exponent of convergence of the derivatives of arbitrary order of these solutions.

The last part of this work is dedicated to a generalization of some results cited above by using the concept of [p, q] order.

Key Words. Integer functions, solution growth, linear differential equations, meromorphic function, iterative order.

الملخّص

إنّ تزايد و تدبدب حلول المعادلات التّفاضلية الخطّية في المستوى المركّب هي واحدة من الأسئلة المفتوحة في التّحليل المركّب ويعتبر هذا دافعنا الأوّل لهذه الأطروحة ، ونتيجة لذلك ، هذا العمل مخصّص لدراسة خصائص حلول بعض المعادلات التّفاضلية ذات معاملات دوال ذات المتغير المركب لمتغير مركّب.

في الجزء الأوّل من هذه الرّسالة ، ندرس تزايد الحلول الميرومرفية لمعادلات تفاضلية خطّية متجانسة و غير متجانسة من الرّتبة الأعلى في المستوى المركّب و الّتي معاملاتها دوال ميرومرفية. نحن نركّز دراستنا على تحديد الرتبة الثانية و الرّتبة التّكرارية باعتماد معامل مهيمن معين.

في الجزء الثّاني، نهتم بدراسة المعادلات الخطّية المتجانسة والغير المتجانسة ذات معاملات دوال شاملة. تحت شروط معينة على المعاملات ، نحصل على تقريبات دقيقة للرّتبة التّكرارية و الأس التّكراري للتقارب لهذه الحلول ، ثم نعطي بعض المعلومات عن الأس التّكراري للتّقارب لمشتقات ذات درجات كيفية لهذه الحلول.

في الجزء الأخير من هذا العمل مخصص لتعميم بعض النّتائج المذكورة سابقا باستخدام مفهوم النّظام [P,q]

الكلمات الرئيسية

الدوال الشاملة، تزايد الحلول، المعادلات التّفاضلية الخطّية، الحلول الميرومرفية، الرّتبة التّكرارية.