

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**



UNIVERSITÉ DE MOSTAGANEM ABDELHAMID IBN BADIS
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

THÈSE

Présentée pour l'obtention d'un

DOCTORAT en Sciences
Spécialité: Mathématiques

Option : Systèmes et Contrôle

Par :

ELOSMANI Aissa Omar

Commandabilité et Analyse de la
Stabilité des Systèmes
Multidimensionnels Singuliers
Linéaires

Soutenue publiquement le 14 Mai 2018 devant le jury composé de :

Président :	H. BOUZIT	MCA, Université de Mostaganem
Examineurs :	S. BENHADID	MCA, Université de Constantine
	M. BENHARRAT	MCA, ENPO M. A, Oran
	M. CHEGGAG	Professeur, ENPO M. A, Oran
	M. OULD ALI	MCA, Université de Mostaganem
	P. VAN	
Invité :	DOOREN	Professeur, UCL Belgique
		Professeur, Université de
Directeur de thèse :	D. BOUAGADA	Mostaganem

Remerciements

Je voudrais porter ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères, à mon encadreur le Professeur BOUAGADA Djillali, pour son effort constant, sa disponibilité, sa grande générosité humaine et scientifique, et pour tous les longs entretiens fructueux que nous avons partagés durant toute la période de préparation de cette thèse. Mes remerciements vont également au Docteur BOUZIT Hamid, de l'Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, pour l'honneur et l'amabilité qu'il me fait, à accepter de présider la soutenance de cette thèse. Je remercie également le Docteur BENHARAT Mohamed de l'ENPO Maurice Audin d'avoir si aimablement accepté d'examiner le contenu cette thèse. Je porte mon grand remerciement au Professeur CHEGGAG Mustapha de l'ENPO Maurice Audin, pour l'évaluation de mon travail de thèse. Mes remerciements vont également au Docteur BEN HADID Samir de l'Université des Frères Mentouri Constantine l'examination de cette thèse. Mes remerciements les plus amicaux vont également au Docteur OULD ALI Mohand de l'Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem pour l'honneur qu'il me fait d'examiner le contenu cette thèse. Mes sincère remerciements vont également au Professeur VANDOOREN Paul de l'Université Catholique de Louvain Belgique pour l'honneur qu'il me fait, à accepté d'assisté à cette soutenanceet je le remercie infiniment de m'avoir accueilli au sein du laboratoire ICTEAM UCL. Je remercie également le Docteur KAISSERLI Zineb pour son aide logistique et ses conseils fort judicieux, un grand merci à tous ceux qui ont aidés directement ou indirectement à la réalisation de ce travail.

Travaux Effectués

- Elosmani Aissa Omar et Bouagada Djillali. "Commandabilité des Modèles Multidimensionnels d'ordre k , 1^{er}". Workshop en contrôle et Optimisation", Décembre 2011. Université de Mostaganem, Algérie.
- Elosmani Aissa Omar et Bouagada Djillali. "Résolution de Systèmes Bidimensionnels Sur-Déterminés et Sous-Déterminés". Journées Internationales sur l'Optimisation et les EDP, Novembre 2012. ENSET d'Oran Algérie.
- Bouagada Djillali, Vandooren Paul et Elosmani Aissa Omar. "On $2D$ and nD Systems Stability and Stabilization". SM2A Maroc 2014.
- Elosmani Aissa Omar, Bouagada Djillali et Vandooren Paul. "Stability analysis of general nD discret-time linear systems". MAMER VII Maroc 2017.
- Elosmani Aissa Omar, Bouagada Djillali et Chadli Mohammed. "Graph-theoretic approach for structural controllability of two-dimensional linear systems". IMA Journal of Mathematical Control and Information (2018) 00, 1–15.

A mes parents et à ma soeur pour leur patience et leurs encouragements affectueux.

Commandabilité et Analyse de la Stabilité des
Systèmes Multidimensionnels Singuliers Linéaires

ELOSMANI AISSA OMAR

2018

Table des matières

1	Notions de Base	8
1.0.1	Introduction	12
1.1	Transformée de Laplace à deux dimensions	12
1.1.1	Propriétés de l'intégrale de Laplace à deux dimensions	14
1.1.2	Inversion de l'intégrale de Laplace à deux dimensions	15
1.2	Transformée en Z à deux dimensions	15
1.2.1	Lien avec la transformée de Fourier bidimensionnelle	16
1.2.2	La transformée inverse	17
2	Systèmes Bidimensionnels	18
2.1	Introduction	18
2.2	Modèles d'espaces d'état classiques bidimensionnels à temps discret	19
2.2.1	Modèle bidimensionnel de Givone-Roesser	19
2.2.2	Modèle bidimensionnel de Attasi	20
2.2.3	Modèle bidimensionnel de Fornasini-Marchesini	20
2.3	Singularité et régularité des modèles bidimensionnels	21
2.3.1	Extension du modèle bidimensionnel de Roesser	22
2.4	Solution du modèle de Roesser	23
2.5	Modèle à espace d'état bidimensionnel à temps continu-discret	30
2.5.1	Modèle bidimensionnel de Givone-Roesser à temps continu-discret	30
2.5.2	Modèle bidimensionnel de Attasi	31

2.5.3	Modèle bidimensionnel de Fornasini-Marchesini	31
2.5.4	Modèle bidimensionnel général à temps continu-discret	32
2.5.5	Solution du modèle régulier bidimensionnel continu-discret	33
2.5.6	Solution du modèle régulier bidimensionnel continu-discret	42
2.6	Modèle d'espaces d'état bidimensionnel continu	43
2.6.1	Modèle d'état bidimensionnel de Roesser	43
2.7	Identification entre les modèles de Givone-Roesser et de Fornasini-Marchesini	45
2.7.1	Mise en forme de Givone-Roesser en Fornasini-Marchesini	45
2.7.2	Mise en forme de Fornasini-Marchesini en Givone-Roesser	48
3	Contrôlabilité structurelle des systèmes bidimensionnels linéaires-L'approche par la théorie des graphes	51
3.1	Introduction	51
3.2	Graphe associé à un système linéaire structurel	53
3.2.1	Contrôlabilité structurelle	54
3.2.2	Modèle Bidimensionnel Structurel à temps discret	57
3.2.3	Modèle Structurel de Fornasini-Marchesini	58
3.2.4	Détermination du Digraph du Modèle structurel de Fornasini-Marchesini	60
3.2.5	Propriétés principales du digraphe en union disjointe associé au sys- tème structurel bidimensionnel	61
3.2.6	Généralisation des Critères de Contrôlabilité Structurelle pour les Systèmes structurels Bidimensionnels	64
3.3	Exemples Illustratifs	65
3.4	Conclusion	67
4	Inégalités Matricielles linéaires	69
4.1	Définition et Principales propriétés des LMIs	70
4.2	Système LMI et Réduction	71

5 Conditions de Stabilité des Modèles d'état Multidimensionnels par les LMIs	75
5.1 Formulation et position du problème	75
5.1.1 Système discret multidimensionnel général	76
5.1.2 Condition de Stabilité par LMI	78
5.1.3 Système multidimensionnel à temps continu	79

Introduction

Cette thèse se divise en deux parties, la première partie traite de la contrôlabilité structurelle des systèmes linéaires bidimensionnels où l’outil d’analyse principal est la théorie des graphes, la deuxième partie traite de critères matriciels de stabilité de systèmes linéaires multidimensionnels noté nD . Dans ce cadre la méthode que nous avons utilisés est la théorie des inégalités matricielles linéaires.

L’analyse de la contrôlabilité structurelle des systèmes linéaires bidimensionnels est un sujet qui est étudié depuis plusieurs decades. Il s’inscrit dans un vaste champ de recherches qui est l’analyse structurelle de la comandabilité, et qui englobe plusieurs domaines relatifs aux sciences expérimentales tel le traitement d’images, la biotechnologie, la géophysique ainsi que l’économie, ainsi que d’autres domaines pratiques

Néanmoins, la contrôlabilité structurelle trouve ses principales applications dans la théorie de la commande et l’automatique. En pratique, nous sommes souvent confrontés à la situation suivante, lors de la modélisation d’un système physique : le système peut contenir des paramètres fixes qui représentent le rôle particulier joué par certaines variables dans le système. Ceci peut arriver si le système est composé, par exemple, de sous-ensembles connectés en série. Une autre raison pour l’existence de paramètres fixes est l’existence de relations algébriques entre variables, par exemple lorsqu’une variable est la dérivée d’une autre. Enfin l’absence de relation directe entre variables se traduit par un paramètre nul dans le modèle.

Comme préalable par rapport à l’étude de la contrôlabilité structurelle, il convient d’

expliciter les outils nécessaires à sa réalisation, ainsi, nous consacrerons la première partie de la présente thèse à l'exposé de ces derniers. Les notions de bases fondamentales et nécessaires à notre étude illustrant le chapitre 1, ont porté sur l'outil algébrique et matriciel (pour plus de détails voir [15], [16], [30] et [5]). Dans le chapitre 3, nous abordons trois modèles (Givone-Roesser, S. Attasi et Fornasini-Marchesini) (étudié dans [3], [13] [14], [17] et [28]) de systèmes bidimensionnels linéaires, sous la forme de deux représentations, l'une par la formulation d'espace d'état, l'autre par la fonction de transfert. Nous définirons également les formes structurelles associées, Cette méthodologie est appliquée par rapport à trois dynamiques : discret-discret, continu-discret et continu-continu. Par ailleurs, nous nous sommes intéressés à la formulation générale du modèle bidimensionnel linéaire. Nous nous sommes penchés aussi, sur la résolution de ces différents modèles, l'étude structurelle fera apparaître que Le modèle peut contenir également des paramètres qui représentent des relations empiriques ou des lois de la physique qui lient les variables entre elles. De tels paramètres sont par exemple des masses, des inerties, ..., obtenues par identification. Une caractéristique commune de ces paramètres est qu'ils sont sujets aux erreurs de modélisation. Une autre situation commune est celle de la linéarisation des modèles, dans ce cas, la structure zéro/non zéro est fixe mais la valeur des paramètres non nuls varie avec le point de fonctionnement. Enfin, concernant les systèmes bidimensionnels, nous terminons ce troisième chapitre par une présentation d'équivalence entre les modèles de Givone-Roesser et Fornasini-Marchesini ([2] et [12]), et une mise en adaptation de ces deux derniers systèmes dans le sens discret-discret, car nous devons observer que les calculs ne mettent en jeu que les coefficients.

L'approche habituelle des systèmes linéaires souffre de plusieurs inconvénients par rapport aux remarques précédentes. D'abord elle ne permet pas de prendre en compte l'information structurelle sur les paramètres, ensuite elle suppose ces paramètres parfaitement connus. Bien sûr un certain nombre d'approches permettent de prendre en compte l'aspect incertain du système, par exemple les modèles stochastiques ou les études de robustesse. Ces approches permettent par optimisation l'obtention de lois de commande stabilisantes mais ne permettent pas d'analyser la structure interne du système. Elles ne conduisent en

général qu'à des conditions suffisantes. Une notion intéressante qui permet de prendre en compte quelques unes des observations précédentes est la notion de système structuré dans une représentation d'état avec coefficients paramétrés. La structure est essentiellement déterminée par la position des zéros fixes dans les matrices de la représentation d'état. A un systèmes structurés on peut associer de façon naturelle un graphe orienté. Les propriétés génériques du système peuvent alors souvent être caractérisées très simplement en termes de propriétés du graphe associé. Ceci rend très intuitifs certains résultats. Cette modélisation a les caractéristiques suivantes : elle permet de prendre en compte une partie importante de l'information structurelle provenant des lois physiques et de la décomposition du système en sous-systèmes, elle donne à travers le graphe une représentation visuelle de cette structure, elle permet l'étude des propriétés du système presque indépendamment des valeurs des paramètres inconnus, ces paramètres inconnus étant en général des fonctions des paramètres physiques ainsi que le coût de calcul pour tester une propriété est en général très réduit, ce qui permet de traiter des problèmes de grande dimension, en particulier s'ils sont très "creux".

L'analyse de la stabilité des systèmes linéaires multidimensionnels est un sujet qui est étudié depuis plus de deux décennies. Il s'inscrit dans un vaste champ de recherches qui est l'analyse de la robustesse, et qui englobe plusieurs domaines relatifs aux sciences expérimentales la synthèse d'une loi de commande se fait généralement sur un modèle nominal simplifié qui ne prend pas en compte toute la complexité du système. Du fait de ces approximations, il est généralement nécessaire de recourir à l'analyse de la stabilité du modèle, qui consiste à établir si le système demeure stable malgré les variations attendues des paramètres. Ainsi le chapitre 4 sera consacré à l'étude des LMIs (Inégalités Matricielles Linéaires) lesquelles ont été développées, notamment par A. Lyapunov, dans un esprit de recherche de stabilité d'équations différentielles. Une approche unifiée est présentée pour l'analyse de problèmes de commande linéaire, tout en préservant l'esprit d'efficacité et de réalisabilité de la résolution de problèmes. Sur les dernières années, des recherches ont porté sur la reformulation d'une LMI en un problème d'optimisation convexe, donnant la possibilité d'une résolution numérique. les outils nécessaires, pour situer l'environnement

où peut se développer le concept des LMIs relativement à notre étude, pour ce faire nous nous basons sur les références suivantes [6], [8], [16], [17], [22] et [28]. Le chapitre 5, illustre les résultats de la deuxième partie de notre travail, et annonce des conditions de stabilité des modèles multidimensionnels, par la définition essentielle précisant les hypothèses initiales conduisant à la convergence du vecteur d'état vers zéro. Le second résultat donne les conditions nécessaires et suffisantes associées aux polynômes caractéristiques [9] et [5]. Nous donnons par ailleurs des conditions suffisantes de stabilité asymptotique par rapport à la faisabilité de systèmes de LMI's liées à l'existence d'ensemble de matrices hermitiennes.

Chapitre 1

Notions de Base

Nous présentons dans ce premier chapitre les notions concernant la théorie des matrices. Il existe un grand nombre de références ; nous nous basons principalement sur [13], [14] et [27]

Définition 1. (*Matrice définie positive*) Une matrice symétrique A dont les éléments sont des nombres réels, est définie positive si pour tout vecteur $x \in R^n$ non nul on a $x^T Ax > 0$.

Définition 2. Une matrice bloc est une matrice pouvant être divisée en matrices rectangulaires de dimensions inférieures appelées blocs

Exemple 1. Soit la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 3.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Q peut être partitionnée comme suit $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1.1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

et

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3.2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Définition 3. On dit qu'une matrice est une matrice diagonale bloc si elle est sous la forme suivante

$$D = \begin{pmatrix} D1 & 0 \\ 0 & D2 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } D1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D2 = \begin{pmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Définition 4. Les éléments de la matrice structurelle $[Q]$ sont soit nul, soit fixé comme paramètre l s'ils sont différents de zero. Une matrice numérique donnée Q est appelée réalisation numérique admissible si elle peut être obtenue en faisant varier toutes les entrées indéterminées de $[Q]$ et certaines valeurs particulières. Deux matrices Q et Q' sont dites structurellement équivalentes si elles admettent une même réalisation numérique admissible $[Q]$.

Exemple 3.

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l & 0 \\ l & 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & l & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.0.1)$$

$$[B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ l & 0 \\ 0 & l \\ 0 & l \end{pmatrix} \quad (1.0.2)$$

et

$$[C] = \begin{pmatrix} 0 & l & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 & l \end{pmatrix} \quad (1.0.3)$$

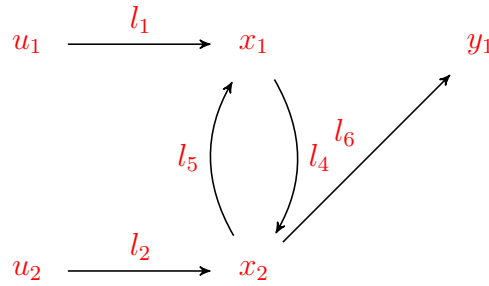
si

$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice structurelle cospondante est

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l & 0 & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 & l & l & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 & 0 & l \\ 0 & l & 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 & l & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Définition 5. Soit Q une matrice carré d'ordre q . Q peut être représentée par un digraphe $G(Q)$ avec q différents sommets v_1, v_2, \dots, v_q . Il existe une arête (V_i, v_j) du sommet v_i au sommet v_j si et seulement si l'entrée q_{ij} de Q n'est pas nulle. La pondération de l'arête (V_i, v_j) est égale à la valeur de l'entrée q_{ij} .



Exemple 4.

Définition 6. (Normes vectorielles) et (Normes matricielles subordonnées)

On note $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ les trois normes usuelles sur $K^n = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C}^n rappelées ci-dessous, Soit $v = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in K^n$, alors ces normes sont données par les formules suivantes,

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i|, \|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} \text{ et } \|v\|_\infty = \max_i |a_i|$$

1.0.1 Introduction

La transformée de Laplace à deux dimensions, la transformée en Z bidimensionnelle et la $2D$ Laplace- Z transformée s'utilisent surtout dans les problèmes de traitement des signaux bidimensionnels et des images, où l'interprétation fréquentielle est importante : filtrage et prétraitement des images préalables à leur interprétation, problèmes de propagation d'ondes. Elles ne sont que des extensions des techniques monodimensionnelles. Nous nous basons essentiellement sur [8], [32] et [29].

1.1 Transformée de Laplace à deux dimensions

Les propriétés fondamentales de l'intégrale de Laplace à deux dimensions présentent de nombreux points communs avec celles de l'intégrale à une dimension. D'autre part, l'intégrale de Laplace à deux dimensions, autant que le calcul opérationnel à deux variables, possèdent de nombreux traits spécifiques que l'on ne retrouve pas dans le cas unidimensionnel. Dans cette section, nous allons considérer une intégrale de Laplace à deux dimensions et énoncer ses propriétés fondamentales.

Définition 7. *On définit la transformée de Laplace à deux dimensions comme suit,*

$$F(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-xy} f(x, y) dx dy, \quad (1.1.1)$$

où $p = \sigma + i\mu$, $q = \tau + i\nu$ sont des paramètres complexes.

Définition 8. [8] *L'intégrale (1.1.1) est absolument convergente si existe la limite,*

$$\lim_{a \rightarrow \infty; b \rightarrow \infty} \int_0^a \int_0^b |e^{-px-xy} f(x, y)| dx dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-xy} |f(x, y)| dx dy; \quad (1.1.2)$$

où $Re p = \sigma$, $Re q = \tau$

Remarque 1. *Par analogie avec le cas unidimensionnel, on peut penser que si l'intégrale (1.1.1) est convergente pour un certain couple de valeurs p_0 et q_0 , elle le sera pour tous*

les $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, $\operatorname{Re} q > \tau_0$. Mais ceci n'a pas lieu pour une intégrale de Laplace à deux dimensions comme le montre l'exemple suivant,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [0, 2], y \in [0, 2] \text{ et pour } x \geq 2, y \geq 2, \\ e^{x^2} & \text{pour } x \in [0, \infty[, y \in [0, 1[, \\ -e^{x^2} & \text{pour } x \in]2, \infty[, y \in [1, 2[, \\ e^{y^2} & \text{pour } x \in [0, 1[, y \in]2, \infty[, \\ -e^{y^2} & \text{pour } x \in [1, 2[, y \in]2, \infty[. \end{cases} \quad (1.1.3)$$

Pour $a \geq 2$, $b \geq 2$, on a

$$\int_0^a \int_0^b f(x, y) dx dy = 0, \quad \lim_{a \rightarrow \infty; b \rightarrow \infty} \int_0^a \int_0^b f(x, y) dx dy = 0,$$

i.e. qu'il existe $F(0, 0) = 0$. D'autre part, pour $a \geq 2$, $b \geq 2$, on a,

$$\begin{aligned} F(p, q; a, b) &= \int_0^a \int_0^b e^{-px-xy} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_2^a e^{-px} dx [e^{x^2} \int_0^1 e^{-xy} dy - e^{x^2} \int_1^2 e^{-xy} dy] + \\ &+ \int_2^b e^{-xy} [e^{y^2} \int_0^1 e^{-px} dx - e^{y^2} \int_1^2 e^{-px} dx] = \\ &= \frac{1}{q}(1 - e^{-q})^2 \int_2^a e^{-px+x^2} dx + \frac{1}{p}(1 - e^{-p})^2 \int_2^b e^{-xy+y^2} dy, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

D'où il suit que si p et q ne sont pas simultanément nuls, $\lim_{a \rightarrow \infty; b \rightarrow \infty} F(p, q; a, b)$ n'existe pas. La propriété d'existence de l'intégrale de Laplace en tous les points pour lesquels $\operatorname{Re}(z - z_0) > 0$, i.e. l'intégrale est convergente dans le domaine $\operatorname{Re}(z) > z_0$ du plan complexe z , ne se généralise pas au cas bidimensionnel, car la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$$

entraîne que les intégrales partielles $\int_0^T e^{-pt} f(t) dt$ sont bornées quel que soit $T \geq 0$, alors que la convergence ordinaire de l'intégrale bidimensionnelle n'implique pas la limitation des intégrales partielles.

$$F(p, q; a, b) = \int_0^a \int_0^b e^{-px-xy} f(x, y) dx dy, \quad (1.1.5)$$

Quels que soient $a \geq 0$, $b \geq 0$, pour que les propriétés de la transformation de Laplace à une dimension se transposent au cas bidimensionnel, il est nécessaire d'exiger que pour un

couple au moins de valeurs des paramètres p et q , soient réalisées les conditions suivantes,
 1) L'intégrale (1.1.5) est bornée au point (p, q) par rapport aux variables $a \geq 0$, $b \geq 0$,
 c-à-d

$$|F(p, q; a, b)| < M(p, q)$$

pour tous les $a \geq 0$, $b \geq 0$, où $M(p, q)$ est une constante positive ne dépendant ni de a ni de b ;

2) Au point (p, q) existe la

$$\lim_{a \rightarrow \infty; b \rightarrow \infty} F(p, q; a, b) = F(p, q).$$

Si les conditions 1) et 2) sont remplies simultanément, on dit que l'intégrale de Laplace (1.1.1) est à convergence bornée au point (p, q) . Si l'on admet la convergence absolue de l'intégrale (1.1.1), il n'est pas indispensable d'introduire la notion de convergence bornée puisque la première inclut automatiquement la seconde.

En effet,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^a \int_0^b e^{-px-xy} f(x, y) dx dy \right| &\leq \int_0^a \int_0^b |e^{-px-xy} f(x, y)| dx dy \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |e^{-px-xy} f(x, y)| dx dy. \end{aligned}$$

1.1.1 Propriétés de l'intégrale de Laplace à deux dimensions

1. La définition de l'intégrale (1.1.1) entraîne aussitôt les propriétés suivantes :

$$L_{p,q} f(\alpha x, \beta y) = \frac{1}{\alpha\beta} F\left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\beta}\right), \quad (1.1.6)$$

$$L_{p,q} e^{-\alpha x - \beta y} f(x, y) = F(p + \alpha, q + \beta), \quad (1.1.7)$$

où α et β sont des nombres complexes quelconques. Dans les deux cas p et q sont choisis tels que l'intégrale de Laplace converge.

2. Le produit de convolution de deux fonctions se définit comme suit

$$f(x, y) = f_1(x, y) * f_2(x, y) = \int_0^x \int_0^y f_1(\xi, \eta) f_2(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta. \quad (1.1.8)$$

3. Si l'intégrale (1.1.1) est absolument convergente, la propriété fondamentale du produit de convolution a lieu, i.e.,

$$L_{p,q}f_1(x,y)L_{p,q}f_2(x,y) = L_{p,q}f(x,y) \quad (1.1.9)$$

1.1.2 Inversion de l'intégrale de Laplace à deux dimensions

Théorème 1. *Supposons qu'une fonction $f(x,y)$ possède des dérivées partielles premières $f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$ et une dérivée partielle seconde mixte $f''_{xy}(x,y)$ et qu'il existe des constantes positives Q, k_1 et k_2 telles que pour tous les $x \in]0, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$ l'on ait,*

$$|f(x,y)| < Qe^{k_1x+k_2y}, \quad |f''_{xy}(x,y)| < Qe^{k_1x+k_2y}. \quad (1.1.10)$$

si,

$$F(p,q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-xy} f(x,y) dx dy, \quad (1.1.11)$$

alors,

$$f(x,y) = \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty; \omega_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\sigma-i\omega_1}^{\sigma+i\omega_1} \int_{\tau-i\omega_2}^{\tau+i\omega_2} e^{px+qy} F(x,y) dp dq, \quad (1.1.12)$$

ou,

$$f(x,y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} e^{px+qy} F(x,y) dp dq, \quad (1.1.13)$$

où, $\sigma > k_1, \tau > k_2$.

1.2 Transformée en Z à deux dimensions

Définition 9. [29] *On considère les deux variables Z_x et Z_y . La valeur de la transformée en Z d'un échantillon d'amplitude $f(m,n)$ situé en un point de coordonnées m et n est alors,*

$$F(Z_x, Z_y) = f(m,n)Z_x^{-m}Z_y^{-n} \quad (1.2.1)$$

Dans le cas d'une fonction échantillonnée définie sur tout le plan, la transformée s'obtient par sommation

$$F(Z_x, Z_y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m,n)Z_x^{-m}Z_y^{-n} \quad (1.2.2)$$

elle est définie dans un domaine où la somme converge, en général une couronne contenant le tore "produit"

Remarque 2. Si $Z_x = Z_y = 1$ de rayon un. Sur ce domaine, elle prend la forme d'une transformée de Fourier

$$F(e^{iu}, e^{iv}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m, n) Z_x^{-m} Z_y^{-n} \quad (1.2.3)$$

Remarque 3. Si la fonction $f(x, y)$ peut s'écrire sous la forme d'un produit

$$f(x, y) = h(x)g(y) \quad (1.2.4)$$

la transformée $F(Z_x, Z_y)$ est séparable

$$F(Z_x, Z_y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(x) Z_x^{-m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(y) Z_y^{-n} = H(Z_x)G(Z_y) \quad (1.2.5)$$

où $H(Z_x)$ et $G(Z_y)$ sont les transformées de $h(x)$ et $g(y)$. C'est le produit de deux transformées en z monodimensionnelles. Notons qu'il peut être pratique d'utiliser des fonctions séparables pour lesquelles le calcul des propriétés est facilité.

1.2.1 Lien avec la transformée de Fourier bidimensionnelle

Si on pose

$$Z_x = e^{iu} \quad (1.2.6)$$

$$Z_y = e^{iv} \quad (1.2.7)$$

La transformée en Z s'écrit,

$$F(Z_x, Z_y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m, n) e^{-i(mu+nv)} \quad (1.2.8)$$

C'est la transformée de Fourier du signal échantillonné.

1.2.2 La transformée inverse

C'est la généralisation de la transformée de Fourier inverse.

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \oint_{C_x} \left[\oint_{C_y} F(Z_x, Z_y) Z_y \frac{dZ_y}{Z_y} \right] Z_x \frac{dZ_x}{Z_x} \quad (1.2.9)$$

L'intégration se faisant sur un contour fermé autour de l'origine intérieur au domaine de définition de la transformée.

Chapitre 2

Systemes Bidimensionnels

2.1 Introduction

Récemment les systèmes bidimensionnels discrets ont fait l'objet de nombreuses recherches, cela vient du fait que plusieurs phénomènes liés à la technologie digitale, le traitement de l'image, la géophysique, la robotique, peuvent être représentés à travers la théorie des systèmes bidimensionnels. La propriété fondamentale de ces systèmes est qu'ils propagent l'information dans deux directions indépendantes ou par deux éléments z_1^{-1} , z_2^{-1} dans la théorie des circuits. L'une des méthodes d'analyse s'inscrit dans l'extension des techniques qui existent dans le cas 1-D. L'analyse des systèmes peut être étudiée à travers les espaces d'état ou par les fonctions de transfert. Nous considérons ici les systèmes à temps discret, à temps continu-discret et à temps continu, respectivement. Il existe trois modèles d'espace d'état classiques 2-D à temps discret, citons,

1. Le modèle de Givone-Roesser [17]
2. Modèle d'Attasi [3]
3. Modèle de Fornasini-Marchesini [13] et [14]

que nous tenterons d'adapter aux cas continu-discret et continu-continu. Givone-Roesser, S.Attasi, et Fornasini-Marchesini sont considérés comme les précurseurs de la théorie des

systèmes bidimensionnels. Dans les années 1970, ils ont introduit une description de ces systèmes par des modèles d'état linéaires qui ont permis la conception de tests de contrôlabilité, d'observabilité, d'atteignabilité et de stabilité de phénomènes décrits par de tels systèmes. Plus particulièrement, le modèle de Roesser a été adapté au cas bidimensionnel continu-discret et au cas bidimensionnel continu.

2.2 Modèles d'espaces d'état classiques bidimensionnels à temps discret

2.2.1 Modèle bidimensionnel de Givone-Roesser

En 1972, Givone et Roesser ont introduit le premier système d'état pour la théorie des circuits linéaires itératifs [17], [28]. Un circuit itératif est une combinaison de cellules individuelles, Les équations d'entrée et de sortie sont,

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_{n_1}^h(i_1 + 1, i_2) \\ x_{n_2}^v(i_1, i_2 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n_1}^h(i_1, i_2) \\ x_{n_2}^v(i_1, i_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(i, j) \\ y(i, j) = \begin{pmatrix} C'_1 & C'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n_1}^h(i_1, i_2) \\ x_{n_2}^v(i_1, i_2) \end{pmatrix} + Du(i_1, i_2) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où,

- $x^h(i, j) \in R^{n_1}$ vecteur d'état Horizontal
- $x^v(i, j) \in R^{n_2}$ vecteur d'état Vertical
- $y(i, j) \in R^p$ vecteur de sortie
- $u(i, j) \in R^m$ vecteur d'entrée

L'espace d'état du modèle (2.2.1) peut être écrit sous sa forme compacte,

$$\begin{aligned} \dot{x}(i_1, i_2) &= Ax(i_1, i_2) + Bu(i_1, i_2) \\ y(i, j) &= C'x(i_1, i_2) + Du(i_1, i_2) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

où,

$$\dot{x}(i_1, i_2) = \begin{pmatrix} x_{n_1}^h(i_1 + 1, i_2) \\ x_{n_2}^v(i_1, i_2 + 1) \end{pmatrix} \in R^{n_1+n_2}$$

et

$$x(i_1, i_2) = \begin{pmatrix} x_{n_1}^h(i_1, i_2) \\ x_{n_2}^v(i_1, i_2) \end{pmatrix} \in R^{n_1+n_2}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}$$

$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2, C_1, C_2$, sont des matrices réelles de dimension appropriée et d un scalaire.

En appliquant la 2D Z -transformée à (2.2.2), avec les conditions initiales nulles, la fonction de transfert prend la forme suivante,

$$H_{gr}(z_1, z_2) = C'[Z - A]^{-1}B + D \quad (2.2.3)$$

avec, $Z = z_1I_n \oplus z_2I_n$, \oplus désigne la somme directe.

2.2.2 Modèle bidimensionnel de Attasi

En 1972, S.Attasi propose le modèle bidimensionnel [3] et [28]

$$\begin{cases} x(i_1 + 1, i_2 + 1) = A_1x(i_1 + 1, i_2) + A_2x(i_1, i_2 + 1) + A_0x(i_1, i_2) + Bu(i_1, i_2) \\ y(i_1, i_2) = C'x(i_1, i_2) \end{cases} \quad (2.2.4)$$

En ayant la 2D Z -transformée, la fonction de transfert prend la forme,

$$H_a(z_1, z_2) = C'[z_1z_2I - z_1A_1 - z_2A_2 - A_0]^{-1}B \quad (2.2.5)$$

2.2.3 Modèle bidimensionnel de Fornasini-Marchesini

Fornasini-Marchesini proposent les modèles 2D suivants [13], [14] et [28].

Le premier modèle d'état 2D a été introduit en 1976,

$$\begin{cases} x(i_1 + 1, i_2 + 1) = A_0x(i_1, i_2) + A_1x(i_1 + 1, i_2) + A_2x(i_1, i_2 + 1) + Bu(i_1, i_2) \\ y(i_1, i_2) = C'x(i_1, i_2) \end{cases} \quad (2.2.6)$$

dont la fonction de transfert est,

$$H_{fm1}(z_1, z_2) = C'[z_1 z_2 I - z_1 A_1 - z_2 A_2 - A_0]^{-1} B \quad (2.2.7)$$

Le second modèle 2D,

$$\begin{cases} x(i_1 + 1, i_2 + 1) = A_1 x(i_1 + 1, i_2) + A_2 x(i_1, i_2 + 1) + B_1 u(i_1 + 1, i_2) + B_2 u(i_1, i_2 + 1) \\ y(i_1, i_2) = C' x(i_1, i_2) \end{cases} \quad (2.2.8)$$

ayant pour fonction de transfert,

$$H_{fm2}(z_1, z_2) = C'[z_1 z_2 I - z_1 A_1 - z_2 A_2]^{-1} B_1 z_1 + B_2 z_2 \quad (2.2.9)$$

2.3 Singularité et régularité des modèles bidimensionnels

Soit $R^{n \times m}$ l'ensemble des matrices réelles. L'ensemble des entiers relatifs non-négatifs est noté Z_+ .

On considère dans [23] le système décrit par les équations suivantes,

$$\begin{cases} E x_{i+1, j+1} = A_0 x_{ij} + A_1 x_{i, j+1} + A_2 x_{i, j+1} + B u_{ij} \\ y_{ij} = C x_{ij} + D u_{ij} \quad i, j \in Z_+ \end{cases} \quad (2.3.1)$$

où $x_{ij} \in R^n$ est le vecteur d'état au point (i, j) , $u_{i,j} \in R^m$ est le vecteur d'entrée, y_{ij} est le vecteur de sortie et $E \in R^{n \times n}$, $A_k \in R^{n \times n}$, $k = 1, 2, 3, 4$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$, $D \in R^{p \times m}$.

Les conditions initiales pour (2.3.1) sont données par,

$$x_{i0} \text{ pour } i \in Z_+ \text{ et } x_{0j} \text{ pour } j \in Z_+ \quad (2.3.2)$$

Définition 10. le modèle (2.3.1) est appelé standard si $E = I_n$ (la matrice identité) et il est appelé singulier si $\det E = 0$.

Si

$$\det[E z_1 z_2 - A_0 - A_1 z_1 A_2 z_2] \neq 0 \quad z_1, z_2 \in C \quad (2.3.3)$$

le modèle (2.3.1) est appelé régulier.

2.3.1 Extension du modèle bidimensionnel de Roesser

En se référant à [17] et [23], nous pourrions étendre le modèle 2D de Roesser à la forme suivante,

$$\begin{cases} E \begin{pmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i,j+1}^h \\ x_{i+1,j}^v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u_{ij} \\ y_{ij} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{pmatrix} + Du_{ij} \end{cases} \quad (2.3.4)$$

où $x_{ij}^h \in R^{n_1}$ est le vecteur d'état horizontal, $x_{ij}^v \in R^{n_2}$ est le vecteur d'état vertical, $u_{ij} \in R^m$ est le vecteur d'entrée, $y_{ij} \in R^p$ est le vecteur de sortie, $A_{11}, F_1 \in R^{n_1 \times n_1}$, $A_{22}, F_2 \in R^{n_2 \times n_2}$, $E \in R^{n \times n}$, $n = n_1 + n_2$, $B_1 \in R^{n_1 \times m}$, $B_2 \in R^{n_2 \times m}$, $C_1 \in R^{p \times n_1}$, $C_2 \in R^{p \times n_2}$, $D \in R^{p \times m}$.

Définition 11. Le modèle (2.3.4) est appelé standard si $E = I_n$ et il est singulier si $\det E = 0$.

Si

$$\begin{vmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} - F_1z_2 & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} - F_2z_1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.3.5)$$

Pour tout $z_1, z_2 \in C$

alors le modèle (2.3.4) est dit régulier.

Remarque 4. Quand $F_1 = 0$ $F_2 = 0$ dans (2.3.4), nous obtenons le modèle de Roesser (2.3.1).

Théorème 2. (Modèle Réduit)

Le modèle (2.3.1) peut être réduit à la forme,

$$\begin{cases} \tilde{A}_0 \tilde{x}_{ij} + \tilde{A}_1 \tilde{x}_{i+1,j} + \tilde{A}_2 \tilde{x}_{i,j+1} + \tilde{B} u_{ij} = 0 \\ y_{ij} = \tilde{C} \tilde{x}_{ij} + Du_{ij} \end{cases} \quad (2.3.6)$$

ou bien

$$\begin{cases} \tilde{A}_0 \tilde{x}'_{ij} + \tilde{A}_1 \tilde{x}'_{i+1,j} + \tilde{A}_2 \tilde{x}'_{i,j+1} + \tilde{B}' u_{ij} = 0 \\ y_{ij} = \tilde{C}' \tilde{x}'_{ij} + D u_{ij} \end{cases} \quad (2.3.7)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{ij} &:= \begin{pmatrix} x_{i+1,j} \\ x_{ij} \end{pmatrix}, & \tilde{A}_0 &:= \begin{pmatrix} A_1 & A_0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{A}_1 &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}, \\ \tilde{A}_2 &:= \begin{pmatrix} -E & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{B} &:= \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, & \tilde{C} &:= \begin{pmatrix} 0 & C \end{pmatrix} \\ \tilde{x}'_{ij} &:= \begin{pmatrix} x_{i,j+1} \\ x_{ij} \end{pmatrix}, & \tilde{A}'_0 &:= \begin{pmatrix} A_2 & A_0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{A}'_1 &:= \begin{pmatrix} -E & A_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{A}'_2 &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}, & \tilde{B}' &:= \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, & \tilde{C}' &:= \begin{pmatrix} 0 & C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.4 Solution du modèle de Roesser

Cette section, joue un rôle clé, puisque la recherche de la solution est une information capitale en elle-même, ainsi elle peut aussi être exploitée de façon à répondre à d'autres aspects telle, notamment, la stabilité. On considère le modèle bidimensionnel [21],

$$\begin{cases} E \begin{bmatrix} x^h(i_1 + 1, i_2) \\ x^v(i_1, i_2 + 1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(i_1, i_2) \\ x^v(i_1, i_2) \end{bmatrix} + B u(i_1, i_2) \\ \begin{bmatrix} y^h(i_1, i_2) \\ y^v(i_1, i_2) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x^h(i_1, i_2) \\ x^v(i_1, i_2) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.4.1)$$

où,

- $x^h(i_1, i_2) \in R^{n_1}$ vecteur d'état horizontal
- $x^v(i_1, i_2) \in R^{n_2}$ vecteur d'état vertical
- $y^h(i_1, i_2) \in R^p$ vecteur de sortie horizontal
- $y^v(i_1, i_2) \in R^p$ vecteur de sortie vertical
- $u(i_1, i_2) \in R^m$ vecteur d'entrée

et E , A , B et C sont des matrices réelles de dimensions appropriées. On partitionne ces matrices comme suit,

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$E_{i_1 i_2} \in R^{n_{i_1} \times n_{i_2}}$, $A_{i_1 i_2} \in R^{n_{i_1} \times n_{i_2}}$ et $C_{i_1 i_2} \in R^{p_{i_1} \times n_{i_2}}$ pour $i_1, i_2 = \overline{1, 2}$ et on suppose que le modèle (2.4.1) est régulier, d'où,

$$\begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_1^{-(i_1+1)} z_2^{-(i_2+1)} \quad (2.4.2)$$

où μ_1 et μ_2 sont les indices de nilpotence et T_{i_1, i_2} sont des matrices de transition définies par les relations suivantes,

$$\begin{bmatrix} E_1 & 0 \end{bmatrix} T_{i_1, i_2-1} + \begin{bmatrix} 0 & E_2 \end{bmatrix} T_{i_1-1, i_2} + A T_{i_1-1, i_2-1} = \begin{cases} I_n & \text{pour } i_1 = i_2 = 0, \\ 0 & \text{pour } i_1 \neq 0 \text{ et / ou } i_2 \neq 0. \end{cases} \quad (2.4.3)$$

$$T_{i_1-1, i_2} = 0 \quad \text{pour } i_1 < -\mu_1 \text{ et/ou } i_2 < -\mu_2$$

Nous allons dans ce qui suit caractériser la solution du modèle (2.4.1).

Théorème 3. *La solution du modèle (2.4.1) avec des conditions initiales est de la forme,*

$$\begin{aligned} x(n, m) &= \sum_{i_1=0}^{n+\mu_1-1} \sum_{i_2=0}^{m+\mu_2-1} T_{n-i_1-1, m-i_2-1} B u(i_1, i_2) \\ &+ \sum_{i_1=0}^{m+\mu_1-1} T_{n-i_1-1, m} E_2 x^v(i_1, 0) + \sum_{i_2=0}^{n+\mu_2-1} T_{n, m-i_2-1} E_1 x^h(0, i_2) \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

et sa sortie s'exprime comme suit,

$$\begin{bmatrix} y^h(n, m) \\ y^v(n, m) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \sum_{i_1=0}^{n+\mu_1-1} \sum_{i_2=0}^{m+\mu_2-1} T_{n-i_1-1, m-i_2-1} B u(i_1, i_2) \\ + \sum_{i_1=0}^{m+\mu_1-1} T_{n-i_1-1, m} E_2 x^v(i_1, 0) \\ + \sum_{i_2=0}^{n+\mu_2-1} T_{n, m-i_2-1} E_1 x^h(0, i_2) \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

l'équation (2.4.1) peut s'exprimer comme suit,

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i_1+1, i_2) \\ x^v(i_1, i_2+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i_1, i_2) \\ x^v(i_1, i_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i_1, i_2) \quad (2.4.6)$$

ou bien,

$$\begin{cases} E_{11}x^h(i_1 + 1, i_2) + E_{12}x^v(i_1, i_2 + 1) = A_{11}x^h(i_1, i_2) + A_{12}x^v(i_1, i_2) + B_1u(i_1, i_2) \\ E_{21}x^h(i_1 + 1, i_2) + E_{22}x^v(i_1, i_2 + 1) = A_{21}x^h(i_1, i_2) + A_{22}x^v(i_1, i_2) + B_2u(i_1, i_2) \end{cases}$$

En appliquant la transformée en Z bidimensionnelle à l'équation (2.4.1), nous obtenons,

$$\begin{cases} E_{11}z_1X^h(z_1, z_2) - A_{12}X^v(z_1, z_2) + E_{12}z_2X^v(z_1, z_2) - A_{11}X^h(z_1, z_2) = \\ = E_{11}z_1X^h(0, z_2) + E_{12}z_2X^v(z_1, 0) + B_1U(z_1, z_2) \\ E_{21}z_1X^h(z_1, z_2) - A_{22}X^v(z_1, z_2) + E_{22}z_2X^v(z_1, z_2) - A_{21}X^h(z_1, z_2) = \\ = E_{21}z_1X^h(0, z_2) + E_{22}z_2X^v(z_1, 0) + B_2U(z_1, z_2) \end{cases}$$

ou dans une forme plus compacte,

$$\begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^h(z_1, z_2) \\ X^h(z_1, z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}z_1 & E_{12}z_2 \\ E_{21}z_1 & E_{22}z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^h(0, z_2) \\ X^h(z_1, 0) \end{bmatrix} + BU(z_1, z_2)$$

Puisque $\begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix}^{-1}$ existe pour un certain couple de nombres $(z_1, z_2) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, alors,

$$\begin{bmatrix} X^h(z_1, z_2) \\ X^h(z_1, z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \left[\begin{bmatrix} E_{11}z_1 & E_{12}z_2 \\ E_{21}z_1 & E_{22}z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^h(0, z_2) \\ X^h(z_1, 0) \end{bmatrix} + BU(z_1, z_2) \right]$$

En utilisant (2.4.2), nous obtenons,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X^h(z_1, z_2) \\ X^v(z_1, z_2) \end{bmatrix} &= \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_1^{-(i_1+1)} z_2^{-(i_2+1)} \\ &\quad \left[\begin{bmatrix} E_{11}z_1 & E_{12}z_2 \\ E_{21}z_1 & E_{22}z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^h(0, z_2) \\ X^h(z_1, 0) \end{bmatrix} + BU(z_1, z_2) \right] \\ &= \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} \begin{bmatrix} E_{11}z_1 & E_{12}z_2 \\ E_{21}z_1 & E_{22}z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^h(0, z_2) \\ X^h(z_1, 0) \end{bmatrix} z_1^{-(i_1+1)} z_2^{-(i_2+1)} \\ &\quad + \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_1^{-(i_1+1)} z_2^{-(i_2+1)} BU(z_1, z_2) \\ &= \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_1^{-(i_1+1)} z_2^{-(i_2+1)} z_1 E_1 X^h(0, z_2) \\ &\quad + \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_1^{-(i_1+1)} z_2^{-(i_2+1)} z_2 E_2 X^v(z_1, 0) \\ &\quad + \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_1^{-(i_1+1)} z_2^{-(i_2+1)} BU(z_1, z_2) \end{aligned}$$

Moyennant la transformée en Z bidimensionnelle inverse, il s'ensuit le résultat suivant,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint \begin{bmatrix} X^h(z_1, z_2) \\ X^v(z_1, z_2) \end{bmatrix} z_1^{n-1} dz_1 &= \frac{1}{2\pi j} \oint \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_1^{-(i_1+1)} z_2^{-(i_2+1)} z_1 E_1 X^h(0, z_2) \\ &+ \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_1^{n-i_1-1} z_2^{-(i_2+1)} z_2 E_2 X^v(z_1, 0) \\ &+ \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_1^{n-i_1-1} z_2^{-(i_2+1)} BU(z_1, z_2) \end{aligned}$$

soit donc,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X^h(n, z_2) \\ X^v(n, z_2) \end{bmatrix} &= \sum_{i=0}^{n+\mu_1-1} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{n-i_1-1, i_2} z_2^{-(i_2+1)} Bu(i_1, z_2) \\ &+ \sum_{i=0}^{n+\mu_1-1} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{n-i_1-1, i_2} E_2 z_2^{-i_2} x^v(i_1, 0) \\ &+ \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{n, i_2} E_1 z_2^{-(i_2+1)} X^h(0, z_2) \end{aligned}$$

Puis on applique la transformée en Z bidimensionnelle au deuxième composant, nous aurons,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint \begin{bmatrix} X^h(n, z_2) \\ X^v(n, z_2) \end{bmatrix} z_2^{n-1} dz_2 &= \frac{1}{2\pi j} \oint \sum_{i=0}^{n+\mu_1-1} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{n-i_1-1, i_2} z_2^{n-i_2-1-1} Bu(i_1, z_2) dz_2 \\ &+ \frac{1}{2\pi j} \oint \sum_{i=0}^{n+\mu_1-1} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{n-i_1-1, i_2} z_2^{n-i_2-1} E_2 x^v(i_1, 0) dz_2 \\ &+ \frac{1}{2\pi j} \oint \sum_{i_2=\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_2^{n-i_2-1-1} E_1 x^h(0, z_2) dz_2 \end{aligned}$$

d'où la solution de (2.4.1) est,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X^h(n, m) \\ X^v(n, m) \end{bmatrix} &= \sum_{i_1=0}^{n+\mu_1-1} \sum_{i_2=0}^{m+\mu_2-1} T_{n-i_1-1, m-i_2-1} Bu(i_1, i_2) + \sum_{i_1=0}^{m+\mu_1-1} T_{n-i_1-1, m} E_2 x^v(i_1, 0) \\ &+ \sum_{i_2=0}^{n+\mu_2-1} T_{n, m-i_2-1} E_1 x^h(0, i_2) \end{aligned}$$

et l'équation de la sortie sera donc,

$$\begin{bmatrix} X^h(n, m) \\ X^v(n, m) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \sum_{i_1=0}^{n+\mu_1-1} \sum_{i_2=0}^{m+\mu_2-1} T_{n-i_1-1, m-i_2-1} Bu(i_1, i_2) \\ + \sum_{i_1=0}^{m+\mu_1-1} T_{n-i_1-1, m} E_2 x^v(i_1, 0) \\ + \sum_{i_2=0}^{n+\mu_2-1} T_{n, m-i_2-1} E_1 x^h(0, i_2) \end{bmatrix}$$

□

Pour plus de clarté nous illustrons ceci par un exemple.

Exemple 5. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [0 \ 1 \ 0 \ 1]$.

$D = 1$ On obtient,

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(z_1, z_2) = \det \begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} z_1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & z_1 - 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & z_2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -z_1 z_2$$

Ainsi le système est régulier et nous avons.

$$\begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-z_1 z_2} \begin{bmatrix} -z_2 & -z_2 & 0 & -z_1 z_2 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 z_2 \\ 1 & z_1 + 1 & -z_1 & -2z_1 + z_1^2 \\ 0 & z_1 z_2 & 0 & -z_1 z_2 + z_1^2 z_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} z_1^{-1} & z_1^{-1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -z_1^{-1} z_2^{-1} & -z_2^{-1} - z_1^{-1} z_2^{-1} & -z_2^{-1} & 2z_2^{-1} - z_1 z_2^{-1} \\ 0 & -1 & 0 & 1 + z_1 \end{bmatrix}$$

Les indices de nilpotence μ_1, μ_2 sont,

$$\mu_1 = 2, \mu_2 = 1$$

d'après 3.4.2 on a,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} &= \sum_{i=-2}^{\infty} \sum_{k=-1}^{\infty} T_{i,k} z_1^{-(i+1)} z_2^{-(k+1)} \\ &= T_{-2,-1}z_1 + T_{-2,0}z_1z_2^{-1} + T_{-1,-1} + T_{-1,0}z_2^{-1} \\ &\quad + T_{0,-1}z_1^{-1} + T_{0,0}z_1^{-1}z_2^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi les matrices de transitions sont,

$$\begin{aligned} T_{-2,-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_{-2,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{-1,-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ T_{-1,0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{0,-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{0,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nous obtenons une première formulation de la solution,

$$\begin{aligned} x(n, m) &= \sum_{i=0}^{n+\mu_1-1} \sum_{k=0}^{m+\mu_2-1} T_{n-i-1, m-k-1} Bu(i, k) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{m+\mu_1-1} T_{n-i-1, m} E_2 x^v(i, 0) + \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{n, m-k-1} E_1 x^h(0, k) \\ &= T_{-2,-1} Bu(n+1, m) + T_{-2,0} Bu(n+1, m-1) \\ &\quad + T_{-1,-1} Bu(n, m) + T_{-1,0} Bu(n, m-1) \\ &\quad + T_{0,-1} Bu(n-1, m) + T_{0,0} Bu(n-1, m-1). \end{aligned}$$

Plus explicitement, la solution du système est,

$$\begin{aligned}
x(n, m) = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(n+1, m) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(n+1, m-1) \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(n, m) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(n, m-1) \\
& + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(n-1, m) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(n-1, m-1) .
\end{aligned}$$

En d'autre termes,

$$x(n, m) = \begin{bmatrix} -u(n, m) + u(n-1, m) \\ -u(n, m) \\ -u(n+1, m-1) + u(n, m-1) - u(n-1, m-1) \\ -u(n+1, m) + u(n, m) \end{bmatrix}$$

et la sortie devient,

$$\begin{aligned}
y(n, m) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u(n, m) + u(n-1, m) \\ -u(n, m) \\ -u(n+1, m-1) + u(n, m-1) - u(n-1, m-1) \\ -u(n+1, m) + u(n, m) \end{bmatrix} + u(n, m) \\
&= u(n, m) - u(n+1, m).
\end{aligned}$$

2.5 Modèle à espace d'état bidimensionnel à temps continu-discret

Dans un même élan nous explicitons les modèles bidimensionnels étudiés plus haut sur un domaine à temps continu-discret. Nous adapterons les trois modèles classiques au cas continu- discret.

2.5.1 Modèle bidimensionnel de Givone-Roesser à temps continu-discret

Nous proposons, une écriture du système de Givone-Roesser dans le nouveau contexte, et nous obtenons,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_{n_1}^h(t, i) \\ x_{n_2}^v(t, i+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n_1}^h(t, i) \\ x_{n_2}^v(t, i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(t, i) \\ y(t, i) &= \begin{pmatrix} C'_1 & C'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n_1}^h(t, i) \\ x_{n_2}^v(t, i) \end{pmatrix} + du(t, i) \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

où,

- $x^h(t, i) \in R^{n_1}$ vecteur d'état Horizontal
- $x^v(t, i) \in R^{n_2}$ vecteur d'état Vertical
- $y(t, i) \in R^p$ vecteur de sortie
- $u(t, i) \in R^m$ vecteur d'entrée

Tout comme le cas discret, il peut-être mis sous sa forme compacte,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, i+1) &= Ax(t, i) + Bu(t, i) \\ y(t, i) &= C'x(t, i) + du(t, i) \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

où,

$$\dot{x}(t, i) = \begin{pmatrix} \dot{x}_{n_1}^h(t, i) \\ x_{n_2}^v(t, i) \end{pmatrix} \in R^{n_1+n_2}$$

et

$$x(t, i + 1) = \begin{pmatrix} x_{n_1}^h(t, i) \\ x_{n_2}^v(t, i + 1) \end{pmatrix} \in R^{n_1+n_2}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}$$

$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2, C_1, C_2$, sont des matrices réelles de dimensions appropriées et d un scalaire.

Le fait que le système se compose d'une variable entière et d'une variable continue, et dans un souci d'obtention de la fonction de transfert, nous utiliserons la 2D sZ -transformée à (2.5.2), avec conditions initiales nulles,

$$H_{gr}(s, z) = C'[sz - A]^{-1}B + d \quad (2.5.3)$$

2.5.2 Modèle bidimensionnel de Attasi

Le suivant modèle est adapté au cas continu-discret,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, i + 1) &= A_1\dot{x}(t, i) + A_2x(t, i + 1) + A_0x(t, i) + Bu(t, i) \\ y(t, i) &= C'x(t, i) \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Ainsi, en appliquant la 2D sZ -transformée, la fonction de transfert prend la forme suivante,

$$H_a(s, z) = C'[szI - sA_1 - zA_2 - A_0]^{-1}B \quad (2.5.5)$$

2.5.3 Modèle bidimensionnel de Fornasini-Marchesini

Nous proposons une formulation du modèle de Fornasini-Marchesini par rapport au cas continu-discret,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, i + 1) &= A_0x(t, i) + A_1\dot{x}(t, i) + A_2x(t, i + 1) + Bu(t, i) \\ y(t, i) &= C'x(t, i) \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Le premier modèle 2D de Fornasini-Marchesini à temps continu-discret a pour fonction de transfert,

$$H_{fm1}(s, z) = C'[szI - sA_1 - zA_2 - A_0]^{-1}B \quad (2.5.7)$$

Le second modèle 2D de Fornasini-Marchesini,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, i+1) &= A_1 \dot{x}(t, i+1) + A_2 x(t, i+1) + B_1 \dot{u}(t, i) + B_2 u(t, i+1) \\ y(t, i) &= C' x(t, i) \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Le second modèle bidimensionnel Fornasini-Marchesini à temps continu-discret a pour fonction de transfert,

$$H_{fm2}(s, z) = C'[szI - sA_1 - zA_2]^{-1} B_1 s + B_2 z \quad (2.5.9)$$

2.5.4 Modèle bidimensionnel général à temps continu-discret

Le modèle ci-dessous, est l'expression générale qu'on retrouve dans les systèmes linéaires [22], sous la forme suivante,

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t, k+1) &= Ax(t, k+1) + Bx(t, k) + C\dot{x}(t, k) \\ &\quad + D_0 u(t, k) + D_1 \dot{u}(t, k) + D_2 u(t, k+1) \\ y(t, k) &= Fx(t, k) + Gu(t, k) \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

$t \in R_+, k \in Z_+$

où $\dot{x}(t, k) = \frac{\partial x(t, k)}{\partial t}$, $x(t, k) \in R^n$, est le vecteur d'état, $u(t, k) \in R^m$ est le vecteur d'entrée, $y(t, k) \in R^p$ est le vecteur de sortie, $E \in R^{q \times n}$, $A \in R^{q \times n}$, $B \in R^{q \times n}$, $C \in R^{q \times n}$, $D_i \in R^{q \times n}$, $i = 0, 1, 2$, $F \in R^{p \times n}$, $G \in R^{p \times m}$, $R^{q \times n}$ est l'ensemble des matrices réelles de dimension $q \times n$, R_+ (respectivement Z_+) sont les ensembles des nombres réels non négatifs, (respectivement des nombres entiers relatifs non négatifs).

Remarque 5. Si $q \neq n$ ou $\det E = 0$ quant $q = n$, alors le modèle (2.5.10) est appelé singulier. Si $n = q$ et $\det E = 0$ mais

$$\det[Esz - Az - B - Cs] \neq 0 \quad \text{pour } s \in \mathbf{C} \text{ (l'ensemble des nombres complexe)} \quad (2.5.11)$$

alors le modèle (2.5.10) est appelé régulier.

Si $q = n$ et $\det E \neq 0$ alors en multipliant (2.5.10) par E^{-1} , nous obtenons le modèle standard avec $E = I_n$ (la matrice identité).

Les conditions initiales de (2.5.10) sont données par,

$$x(t, 0) = x_1(t), \quad t \in R_+ \quad \text{et} \quad x(0, k) = x_2(k), \quad k \in Z_+ \quad (2.5.12)$$

avec $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont connues.

Le modèle bidimensionnel continu discret de Roesser est décrit par les équations,

$$\bar{E} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t, k) \\ \dot{\bar{x}}_2(t, k+1) \end{pmatrix} = \bar{A} \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t, k) \\ \bar{x}_2(t, k) \end{pmatrix} + \bar{B}u(t, k) \quad (2.5.13)$$

$$y(t, k) = \bar{C} \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t, k) \\ \bar{x}_2(t, k) \end{pmatrix} + \bar{D}u(t, k) \quad t \in R_+, k \in Z_+ \quad (2.5.14)$$

où $\dot{\bar{x}} = \frac{\partial \bar{x}_1(t, k)}{\partial t}$, $\bar{x}_1(t, k) \in R^{n_1}$ et $\bar{x}_2(t, k) \in R^{n_2}$ sont les vecteurs d'état, $u(t, k)$ et $y(t, k)$ sont les mêmes pour (2.5.10), $\bar{E} \in R^{q \times n}$, $n = n_1 + n_2$, $\bar{A} \in R^{q \times n}$, $\bar{B} \in R^{q \times m}$, $\bar{C} \in R^{p \times n}$ et $\bar{D} \in R^{p \times m}$.

Si $q = n$ et $\det \bar{E} \neq 0$ alors en multipliant (2.5.13) par \bar{E}^{-1} on a le modèle standard tel que $\bar{E} = I_n$.

$$\bar{x}_1(0, k) = \bar{x}_1(k), \quad k \in Z_+ \quad \text{et} \quad \bar{x}_2(t, 0) = \bar{x}_2(t), \quad t \in R_+ \quad (2.5.15)$$

où $\bar{x}_1(k)$ et $\bar{x}_2(t)$ sont connus.

2.5.5 Solution du modèle régulier bidimensionnel continu-discret

Dans un premier temps nous allons donner la solution d'un cas particulier du modèle général (2.5.10) [22].

On considère le modèle suivant,

$$\begin{cases} E\dot{x}(t, k+1) = A_0x(t, k) + A_1\dot{x}(t, k) + A_2x(t, k+1) + Bu(t, k) \\ y(t, k) = Cx(t, k) + Du(t, k) \end{cases} \quad (2.5.16)$$

On suppose que le système (2.5.16) est régulier, i.e., $\det[Es z - A_0 - A_1s - A_2z] \neq 0$ pour $(s, z) \in C \times C$

d'où,

$$[Es z - A_0 - A_1s - A_2z]^{-1} = \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)} \quad (2.5.17)$$

tout en sachant que,

$$\det[Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z] = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{n_2} d_{i,k} s^i z^k \quad (2.5.18)$$

où μ_1 μ_2 sont les indices de nilpotence, $T_{i,k}$ sont des matrices de transition définies par,

$$ET_{i,k} = \begin{cases} A_0 T_{-1,-1} + A_1 T_{-1,-1} + A_2 T_{-1,-1} & \text{pour } i = k = 0 \\ A_0 T_{i,k} + A_1 T_{i,k} + A_2 T_{i,k} & \text{pour } i \neq 0 \text{ et/ou } k \neq 0 \end{cases} \quad (2.5.19)$$

avec,

$$T_{i,k} = 0 \text{ pour } i < -\mu_1 \text{ et/ou } k < -\mu_2$$

Théorème 4. *La solution du modèle (2.5.16) avec conditions initiales est donnée par,*

$$\begin{aligned} x(t, n) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} B \int_0^t \left[\frac{t^i}{i!} u(t-\tau, k) \right] + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i,n-k-1} B u(t, k) \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} T_{i,n} E \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} x(t-\tau, 0) + \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i,n} E x^i(t, 0) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i,n-k} E x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\ &+ \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i,n-k} E x(0, k) \delta^{i+1} - \sum_{i=1}^{\infty} T_{i,k} E x(0, 0) \frac{t^i}{i!} - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i,n} E x(0, 0) \delta^{(i-1)} \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} A_1 x(0, k) \frac{t^i}{i!} - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i,n-k-1} A_1 x(0, k) \delta^{(i-1)} \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} T_{i,n} A_2 \int_{i=0}^t \left[\frac{t^i}{i!} x(t-\tau, 0) \right] d\tau - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i,n} A_2 x(t, 0) \delta^{(i-1)} \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

et sa sortie est,

$$\begin{aligned}
 y(t, n) = C & \left[\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} B \int_0^t \left[\frac{t^i}{i!} u(t-\tau, k) \right] \\
 & + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} B u(t, k) \\
 & + \sum_{i=1}^{\infty} T_{i, n} E \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} x(t-\tau, 0) \\
 & + \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n} E x^i(t, 0) \\
 & + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i, n-k} E x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
 & + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i, n-k} E x(0, k) \delta^{i+1} \\
 & - \sum_{i=1}^{\infty} T_{i, k} E x(0, 0) \frac{t^i}{i!} \\
 & - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n} E x(0, 0) \delta^{(i-1)} \\
 & - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} A_1 x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
 & - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} A_1 x(0, k) \delta^{(i-1)} \\
 & - \sum_{i=1}^{\infty} T_{i, n} A_2 \int_{i=0}^t \left[\frac{t^i}{i!} x(t-\tau, 0) \right] d\tau - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n} A_2 x(t, 0) \delta^{(i-1)}
 \end{aligned} \right] + Du(t, n)
 \end{aligned} \tag{2.5.21}$$

On applique la transformée de Laplace à l'équation (2.5.16) on a,

$$EsX(s, k+1) - EX(0, k+1) = A_0X(s, k) + A_1sX(s, k) - A_1X(0, k) + A_2X(s, k+1) + BU(s, k)$$

Puis on applique la transformée en Z ,

$$\begin{aligned}
 EszX(s, z) - EszX(s, 0) - EzX(0, z) + Ezx(0, 0) &= A_0X(s, z) + A_1szX(s, z) - A_1X(0, z) \\
 + A_2zX(s, z) - A_2zX(s, 0) + BU(s, z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z]X(s, z) = BU(s, z) + Es z X(s, 0) + Ez X(0, z) \\
& - Ez x(0, 0) - A_1 X(0, z) - A_2 z X(s, 0)
\end{aligned}$$

Etant donnée que $[Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z]^{-1}$ existe pour $(s, z) \in C \times C$ alors,

$$\begin{aligned}
X(s, z) &= [Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z]^{-1} [BU(s, z) + Es z X(s, 0) + Ez X(0, z) - Ez x(0, 0) \\
& - A_1 X(0, z) - A_2 z X(s, 0)]
\end{aligned}$$

Par suite on remplace $[Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z]^{-1}$ par sa définition,

$$\begin{aligned}
X(s, z) &= \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)} [BU(s, z) + Es z X(s, 0) + Ez X(0, z) \\
& - Ez x(0, 0) - A_1 X(0, z) - A_2 z X(s, 0)] \\
&= \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)} BU(z, s) + \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-i} z^{-k} EX(s, 0) \\
&+ \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-k} EX(0, z) - \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-k} EX(0, 0) \\
&- \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)} A_1 X(0, z) - \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-k} A_2 X(s, 0)
\end{aligned}$$

L'inverse de la transformée en Z donne,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi j} \oint [X(s, z) z^{n-1}] dz &= \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} \frac{1}{2\pi j} \oint [z^{n-k-1-1} BU(s, z)] dz \\
&+ \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-i} \frac{1}{2\pi j} \oint [z^{n-k-1} EX(s, 0)] dz \\
&+ \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} \frac{1}{2\pi j} \oint [z^{n-k-1} EX(0, z)] dz \\
&- \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} \frac{1}{2\pi j} \oint [z^{n-k-1} EX(0, 0)] dz \\
&- \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} \frac{1}{2\pi j} \oint [z^{n-k-1-1} A_1 X(0, z)] dz \\
&- \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} \frac{1}{2\pi j} \oint [z^{n-k-1} A_2 X(s, 0)] dz
\end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned}
X(s, n) &= \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} s^{-(i+1)} BU(s, k) + \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} T_{i,n} s^{-i} EX(s, 0) \\
&+ \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i,n-k} s^{-(i+1)} EX(0, k) - \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} T_{i,n} s^{-i+1} EX(0, 0) \\
&- \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} s^{-(i+1)} A_1 x(0, k) + \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} T_{i,n} s^{-i} A_2 X(s, 0)
\end{aligned}$$

Par la transformée de Laplace inverse, il vient,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}^{-1}[X(s, n)] &= \mathfrak{L}^{-1}[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} s^{-(i+1)} BU(s, k)] + \mathfrak{L}^{-1}[\sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i,n} s^i EX(s, 0)] \\
&+ \mathfrak{L}^{-1}[\sum_{i=1}^{\infty} T_{i,n} s^{-i} EX(s, 0)] + \mathfrak{L}^{-1}[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i,n-k-1} s^{i-1} BU(s, k)] \\
&+ \mathfrak{L}^{-1}[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i,n-k} s^{-(i+1)} EX(0, k)] + \mathfrak{L}^{-1}[\sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i,n-k} s^{i-1} EX(0, k)] \\
&- \mathfrak{L}^{-1}[\sum_{i=0}^{\infty} T_{i,n} s^{-(i+1)} EX(0, 0)] - \mathfrak{L}^{-1}[\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} s^{-(i+1)} A_1 X(0, k)] \\
&- \mathfrak{L}^{-1}[\sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i,n} s^{i-1} EX(0, 0)] - \mathfrak{L}^{-1}[\sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i,n-k-1} s^{i-1} A_1 X(0, k)] \\
&- \mathfrak{L}^{-1}[\sum_{i=0}^{\infty} T_{i,n} s^{-(i+1)} A_2 X(s, 0)] - \mathfrak{L}^{-1}[\sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i,n} s^{i-1} A_2 X(s, 0)]
\end{aligned}$$

par le théorème du produit de convolution, on a,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}^{-1}[X(s, n)] &= \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} \mathfrak{L}^{-1}[(\sum_{i=1}^{\infty} T_{i, n-k-1} s^{-(i+1)}) BU(s, k)] + \mathfrak{L}^{-1}[(\sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n} s^i) EX(s, 0)] \\
&+ \mathfrak{L}^{-1}[(\sum_{i=0}^{\infty} T_{i, n} s^{-i}) EX(s, 0)] + \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} [\mathfrak{L}^{-1}(T_{-i, n-k-1} \sum_{i=0}^{\mu_1}) BU(s, k)] \\
&+ \sum_{k=0}^{n+\mu_2} [\mathfrak{L}^{-1}(\sum_{i=1}^{\infty} T_{i, n-k} s^{-(i+1)}) Ex(0, k)] \\
&+ \sum_{k=0}^{n+\mu_2} \mathfrak{L}^{-1}[(\sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-k} s^{i-1}) Ex(0, k)] - \mathfrak{L}^{-1}[(\sum_{i=1}^{\infty} T_{i, n} s^{-(i+1)}) Ex(0, 0)] \\
&- \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} \mathfrak{L}^{-1}[(\sum_{i=1}^{\infty} T_{i, n-k-1} s^{-(i+1)}) A_1 x(0, k)] - \mathfrak{L}^{-1}[\sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n} s^{i-1}] Ex(0, 0) \\
&- \sum_{i=0}^{\mu_1} \mathfrak{L}^{-1}[(\sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} s^{i-1}) A_1 x(0, k)] \\
&- \mathfrak{L}^{-1}[(\sum_{i=1}^{\infty} T_{i, n} s^{-(i+1)}) A_2 X(s, 0)] - \mathfrak{L}^{-1}[(\sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n} s^{i-1}) A_2 X(s, 0)]
\end{aligned}$$

D'où la solution,

$$\begin{aligned}
x(t, n) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} B \int_0^t \left[\frac{t^i}{i!} u(t-\tau, k) \right] + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} B u(t, k) \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} T_{i, n} E \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} x(t-\tau, 0) + \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n} E x^i(t, 0) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i, n-k} E x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
&+ \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i, n-k} E x(0, k) \delta^{i+1} - \sum_{i=1}^{\infty} T_{i, k} E x(0, 0) \frac{t^i}{i!} - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n} E x(0, 0) \delta^{(i-1)} \\
&- \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} A_1 x(0, k) \frac{t^i}{i!} - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} A_1 x(0, k) \delta^{(i-1)} \\
&- \sum_{i=1}^{\infty} T_{i, n} A_2 \int_{i=0}^t \left[\frac{t^i}{i!} x(t-\tau, 0) \right] d\tau - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n} A_2 x(t, 0) \delta^{(i-1)}
\end{aligned}$$

et la sortie est de la forme,

$$\begin{aligned}
y(t, n) = C & \left[\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} B \int_0^t \left[\frac{t^i}{i!} u(t-\tau, k) \right] \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i,n-k-1} B u(t, k) \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} T_{i,n} E \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} x(t-\tau, 0) \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i,n} E x^i(t, 0) \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i,n-k} E x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i,n-k} E x(0, k) \delta^{i+1} - \sum_{i=1}^{\infty} T_{i,k} E x(0, 0) \frac{t^i}{i!} \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i,n} E x(0, 0) \delta^{(i-1)} \\
& - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} A_1 x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i,n-k-1} A_1 x(0, k) \delta^{(i-1)} \\
& - \sum_{i=1}^{\infty} T_{i,n} A_2 \int_{i=0}^t \left[\frac{t^i}{i!} x(t-\tau, 0) \right] d\tau \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i,n} A_2 x(t, 0) \delta^{(i-1)}
\end{aligned} \right] + Du(t, n)
\end{aligned}$$

□

Exemple 6. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \ 0 \ 1], D = 1$$

dans ce cas $n = 3, m = 1, p = 1$.

On a,

$$\begin{aligned} [Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z] &= \begin{bmatrix} s z & 0 & 0 \\ 0 & s z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s z & 1 & -z \\ 0 & s z & 0 \\ -s & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d'où,

$$\det[Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z] = \det \begin{bmatrix} s z & 1 & -z \\ 0 & s z & 0 \\ -s & 1 & 0 \end{bmatrix} = -s^2 z^2$$

$$\text{adj}[Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z] = \begin{bmatrix} 0 & -z & s z^2 \\ 0 & -s z & 0 \\ s^2 z & -s - s z & s^2 z^2 \end{bmatrix}$$

et,

$$\begin{aligned} [Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z]^{-1} &= \frac{1}{-s^2 z^2} \begin{bmatrix} 0 & -z & s z^2 \\ 0 & -s z & 0 \\ s^2 z & -s - s z & s^2 z^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & s^{-2} z^{-1} & -s^{-1} \\ 0 & s^{-1} z^{-1} & 0 \\ -z^{-1} & s^{-1} z^{-2} + s^{-1} z^{-1} & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les indices de nilpotence sont $\mu_1 = 1$ et $\mu_2 = 1$.

En appliquant la relation (2.5.17), on obtient,

$$\begin{aligned}
[Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z]^{-1} &= \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)} \\
&= T_{-1,-1} + T_{-1,0} z^{-1} + T_{-1,1} z^{-2} + T_{0,-1} s^{-1} + T_{0,0} s^{-1} z^{-1} \\
&\quad + T_{0,1} s^{-1} z^{-2} + T_{1,-1} s^{-2} + T_{1,0} s^{-2} z^{-1} + T_{1,1} s^{-2} z^{-2}
\end{aligned}$$

Les matrices de transitions sont,

$$\begin{aligned}
T_{-1,-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_{-1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{0,-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
T_{0,0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi la solution du système est,

$$\begin{aligned}
x(t, n) &= \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{1,n-k-1} B \int_0^t [tu(t-\tau, k)] d\tau + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i,n-k-1} B u^{i-1}(t, k) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i,n-k} E x(0, k) \frac{t^i}{i!} + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i,n-k} E x(0, k) \delta^{(i+1)} \\
&\quad - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} A_1 x(0, k) \frac{t^i}{(i)!} - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i,n-k-1} A_1 x(0, k) \delta^{(i-1)}
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
x(t, n) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u^{(-1)}(t, n-1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^{(-1)}(t, n-2) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(0, n) \delta^{(-1)} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(0, n-1) \delta^{(-1)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} tx(0, n)
\end{aligned}$$

et la sortie,

$$\begin{aligned}
y(t, n) &= C \left[\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u^{(-1)}(t, n-1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^{(-1)}(t, n-2) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(0, n)\delta^{(-1)} \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(0, n-1)\delta^{(-1)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} tx(0, n) \end{array} \right] \\
&= u^{(-1)}(t, n-1) + u^{(-1)}(t, n-2) + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(0, n)\delta^{(-1)} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(0, n-1)\delta^{(-1)} \\
&+ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} tx(0, n)
\end{aligned}$$

2.5.6 Solution du modèle régulier bidimensionnel continu-discret

La solution $x(t, k)$ du modèle régulier [22] (2.5.10) avec des conditions initiales (2.5.12) Si (2.5.11) est vérifiée, alors,

$$[Esz - Az - B - Cs]^{-1} = \sum_{p=-n_1}^{\infty} \sum_{q=-n_2}^{\infty} T_{pq} s^{-p} z^{-q} \quad (2.5.22)$$

où les matrices T_{pq} sont définies par

$$ET_{p-1, q-1} - BT_{pq} - CT_{p-1, q} - AT_{p, q-1} = \begin{cases} I & \text{pour } p = q = 0 \\ 0 & \text{pour } p \neq 0 \text{ et } q \neq 0 \end{cases} \quad (2.5.23)$$

et $T_{pq} = 0$ pour $p < n_1$ et-ou $q < n_2$.

Théorème 5. La solution $x(t, k)$ de (2.5.10) avec les conditions initiales (2.5.12) est alors,

$$\begin{aligned}
x(t, k) = & \sum_{p=0}^{n_1} \sum_{q=0}^{k+n_2} T_{-p, k-q} D_0 u^{(p)}(t, q) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{k+n_2} T_{p, k-q} D_0 \int_0^t \frac{\tau^{p-1}}{(p-1)!} u(t-\tau, q) d\tau + \\
& \sum_{p=0}^{n_1} \sum_{q=0}^{k+n_2} T_{-p, k-q} D_1 u^{p+1}(t, q) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{k+n_2} T_{p, k-q} D_1 \int_0^t \frac{\tau^{p-2}}{(p-2)!} u(t-\tau, q) d\tau + \\
& \sum_{p=0}^{n_1} \sum_{q=0}^{k+n_2+1} T_{-p, k-q+1} D_2 u^{(p)}(t, q) + \\
& \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{k+n_2+1} T_{p, k-q+1} D_2 \int_0^t \frac{\tau^{p-1}}{(p-1)!} u(t-\tau, q) d\tau + \\
& \sum_{p=0}^{n_1} T_{-p, k} [A, D_2] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ u(t, 0) \end{pmatrix}^{(p)} + \\
& \sum_{p=1}^{\infty} T_{p, k} [A, D_2] \int_0^t \frac{\tau^{p-1}}{(p-1)!} \begin{pmatrix} x_1(t-\tau) \\ u(t-\tau, 0) \end{pmatrix} d\tau - \\
& \sum_{p=0}^{n_1} \sum_{q=0}^{k+n_2} T_{p, k-q} \delta^{(p)}(t) [C, D_1] \begin{pmatrix} x_2(q) \\ u(0, q) \end{pmatrix} - \\
& \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{k+n_2} T_{p, k-q} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} [C, D_1] \begin{pmatrix} x_2(q) \\ u(0, q) \end{pmatrix} + \\
& \sum_{p=0}^{n_1} T_{-p, k} E x_1^{(p-1)}(t) + \sum_{p=1}^{\infty} T_{p, k} E \int_0^t \frac{\tau^{p-2}}{(p-2)!} x_1(t-\tau) d\tau + \\
& \sum_{p=0}^{n_1} \sum_{q=0}^{k+n_2+1} T_{-p, k-q+1} E \delta^{(p)}(t) x_2(q) + \sum_{p=0}^{n_1} T_{-p, k} E \delta^{(p)}(t) x(0, 0) - \\
& \sum_{p=1}^{\infty} T_{p, k} E \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} x(0, 0) \quad \text{Pour } t \in R_+, k \in Z_+
\end{aligned} \tag{2.5.24}$$

2.6 Modèle d'espaces d'état bidimensionnel continu

2.6.1 Modèle d'état bidimensionnel de Roesser

On considère dans cette section la forme continue du système bidimensionnel de Roesser qui est,

$$\begin{pmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(t_1, t_2), \quad (2.6.1)$$

ou dans sa forme compacte,

$$Ex'(t_1, t_2) = Ax(t_1, t_2) + Bu(t_1, t_2) \quad (2.6.2)$$

Comme exemple, on considère l'équation différentielle partielle généralisée de Darboux à deux variables [32],

$$E \frac{\partial^2 T(y, t)}{\partial y \partial t} = F \frac{\partial T(y, t)}{\partial y} + G \frac{\partial T(y, t)}{\partial t} + HT(y, t) + Bu(y, t), \quad (2.6.3)$$

Remarque 6. *On rencontre de telles équations dans la description mathématique de la diffusion de la chaleur, réactions chimiques,...*

Nous notons que (2.6.3) est la description continue du système bidimensionnel discret.

On peut définir d'une manière auxiliaire, l'expression (2.6.3) dans la forme de Roesser (2.6.2). On définit les variables auxiliaires,

$$T_1 = \frac{E \partial T}{\partial t} - FT, \quad (2.6.4)$$

Nous obtenons alors,

$$\frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{E \partial^2 T}{\partial y \partial t} - \frac{F \partial T}{\partial y}, \quad (2.6.5)$$

Ainsi on peut écrire (2.6.3) comme,

$$\begin{pmatrix} I & -G \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H \\ I & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u. \quad (2.6.6)$$

ce n'est rien d'autre que l'équation (2.6.2).

Dans le cas particulier où $E = 0$, (2.6.3) devient l'équation hyperbolique qui décrit plusieurs phénomènes physiques, dans ce cas (2.6.6) est évidemment singulière.

Remarque 7. *Concernant la résolution des modèles bidimensionnels linéaires, la méthode et la même que celle vue dans le cas discret en applique la transformée de Laplace bidimensionnelle au lieu de la 2D transformée Z .*

2.7 Identification entre les modèles de Givone-Roesser et de Fornasini-Marchesini

Il existe une relation entre le modèle de Givone-Roesser et le modèle de Fornasini-Marchesini. Aussi nous énoncerons des conditions de telle manière à ce que ces deux modèles soient équivalents, dans le sens où l'un pourra être mis sous la forme de l'autre, et vice-versa, sans pour autant élever la dimension de l'espace d'état. En fait, la mise en forme du modèle de Givone-Roesser au modèle Fornasini-Marchesini préserve naturellement la dimension de l'espace d'état, puisque chaque état local est la somme directe des d composantes orthogonales. Dans l'autre sens, exprimer le modèle de Fornasini-Marchesini sous la forme du modèle de Givone-Roesser; d'une façon générale, ne peut être fait sans agrandir la dimension de l'espace d'état, du fait que l'espace d'état doit être décomposé en d sous-espaces, lesquels pourront ou non recouvrir le dit espace. Nous remarquerons que, sous certaines conditions, la mise en forme du modèle Fornasini-Marchesini au modèle de Givone-Roesser pourra être possible, tout en préservant la dimension de l'espace d'état. Cette Identification sera exploitée pour définir le graphe associé au modèle de Fornasini-Marchesini.

2.7.1 Mise en forme de Givone-Roesser en Fornasini-Marchesini

On considère le modèle $2D$ de Givone-Roesser [12], [27] qui est donné par,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(n_1 + 1, n_2) \\ x_2(n_1, n_2 + 1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11}^{GR} & A_{12}^{GR} \\ A_{21}^{GR} & A_{22}^{GR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n_1, n_2) \\ x_2(n_1, n_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1^{GR} \\ B_2^{GR} \end{pmatrix} u(n_1, n_2) \\ y(n_1, n_2) &= \begin{pmatrix} C_1^{GR} & C_2^{GR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n_1, n_2) \\ x_2(n_1, n_2) \end{pmatrix} + D^{GR} u(n_1, n_2). \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

Nous pouvons écrire l'équation 2.7.1 comme suit,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1(n_1, n_2) \\ x_2(n_1, n_2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11}^{GR} & A_{12}^{GR} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n_1 - 1, n_2) \\ x_1(n_1, n_2 - 1) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21}^{GR} & A_{22}^{GR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n_1, n_2 - 1) \\ x_1(n_1, n_2 - 1) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} B_1^{GR} \\ 0 \end{pmatrix} u(n_1 - 1, n_2) + \begin{pmatrix} 0 \\ B_2^{GR} \end{pmatrix} u(n_1, n_2 - 1),
\end{aligned} \tag{2.7.2}$$

ou,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1(n_1, n_2) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(n_1, n_2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11}^{GR} & A_{12}^{GR} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\left\{ \begin{pmatrix} x_1(n_1 - 1, n_2) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(n_1, n_2 - 1) \end{pmatrix} \right\} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21}^{GR} & A_{22}^{GR} \end{pmatrix} \\
&\left\{ \begin{pmatrix} x_1(n_1, n_2 - 1) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_1(n_1, n_2 - 1) \end{pmatrix} \right\} \\
&+ \begin{pmatrix} B_1^{GR} \\ 0 \end{pmatrix} u(n_1 - 1, n_2) + \begin{pmatrix} 0 \\ B_2^{GR} \end{pmatrix} u(n_1, n_2 - 1).
\end{aligned} \tag{2.7.3}$$

Par décomposition de l'espace d'état on a, $x(n_1, n_2) := \begin{pmatrix} x_1(n_1, n_2 - 1) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(n_1, n_2 - 1) \end{pmatrix}$,

et

$$\begin{aligned}
A_1^{FM} &= \begin{pmatrix} A_{11}^{GR} & A_{12}^{GR} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2^{FM} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21}^{GR} & A_{22}^{GR} \end{pmatrix}, B_1^{FM} = \begin{pmatrix} B_1^{GR} \\ 0 \end{pmatrix}, B_2^{FM} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2^{GR} \end{pmatrix}, \\
C^{FM} &= C^{GR} = \begin{pmatrix} C_1^{GR} & C_2^{GR} \end{pmatrix}, D^{FM} = D^{GR}.
\end{aligned}$$

Nous obtenons,

$$\begin{aligned}
x(n_1, n_2) &= A_1^{FM} x(n_1 - 1, n_2) + A_2^{FM} x(n_1, n_2 - 1) + B_1^{FM} u(n_1 - 1, n_2) + B_2^{FM} u(n_1, n_2 - 1) \\
y(n_1, n_2) &= C^{FM} x(n_1, n_2) + D^{FM} x(n_1, n_2)
\end{aligned} \tag{2.7.4}$$

qui est exactement le modèle de Fornasini-Marchesini (2D).

Remarque 8. *Il existe deux opérateurs linéaires qui transforment l'équation (2.7.1) en (2.7.3)*

1. La projection orthogonale $P_k : \mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{H}_i \mapsto \mathcal{H}_k$ où l'image de la projection est égale à \mathcal{H}_k ,
2. En considérant l'application suivante $l_k : \mathcal{H}_k \mapsto \mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{H}_i$.

On suppose,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$P_1 A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}_1, \quad \text{et} \quad l_1 P_1 A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H},$$

$$P_2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}_2, \quad \text{et} \quad l_2 P_2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}.$$

En utilisant cet opérateur, nous pouvons écrire (2.7.3) dans une forme plus compacte,

$$\begin{aligned} l_1 x_1(n_1, n_2) + l_2 x_2(n_1, n_2) &= l_1 P_1 A^{GR} \{l_1 x_1(n_1 - 1, n_2) + l_2 x_2(n_1 - 1, n_2)\} \\ &\quad + l_2 P_2 A^{GR} \{l_1 x_1(n_1, n_2 - 1) + l_2 x_2(n_1, n_2 - 1)\} \\ &\quad + l_1 P_1 B^{GR} u(n_1 - 1, n_2) + l_2 P_2 B^{GR} u(n_1, n_2 - 1) \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

En posant $x(\cdot) = \sum_{k=1}^2 l_k x_k(\cdot)$, et $A_k^{FM} = l_k P_k A^{GR}$, $B_k^{FM} = l_k P_k B^{GR}$, $k = 1, 2$, on obtient le même résultat que (2.7.4).

2.7.2 Mise en forme de Fornasini-Marchesini en Givone-Roesser

Le modèle de Fornasini-Marchesini 2D [12], [27] est décrit par,

$$x(n) = \sum_{k=1}^2 A_k^{FM} x(n - e_k) + \sum_{k=1}^2 B_k^{FM} u(n - e_k) \quad (2.7.6)$$

$$y(n) = C^{FM} x(n) + D^{FM} u(n) \quad (2.7.7)$$

Nous pouvons représenter le système comme suit,

$$U^{FM} = \begin{pmatrix} A^{FM} & B^{FM} \\ C^{FM} & D^{FM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^{FM} & B_1^{FM} \\ A_2^{FM} & B_2^{FM} \\ A^{FM} & B^{FM} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{U} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \bigoplus_1^2 \mathcal{H} \\ \mathcal{Y} \end{pmatrix}. \quad (2.7.8)$$

On peut aussi écrire l'équation (2.7.6) comme,

$$x(n) = \sum_{k=1}^2 [A_k^{FM} x(n - e_k) + B_k^{FM} u(n - e_k)] = \sum_{k=1}^2 x_k(n). \quad (2.7.9)$$

Remarque 9. Pour écrire le modèle de Fornasini-Marchesini sous la forme du modèle de Givone-Roesser, nous devons construire les espaces, \mathcal{H}_k pour $k = 1, 2$ tels que la somme directe $\bigoplus_{k=1}^2 \mathcal{H}_k = \mathcal{H}$. Pour ce faire, supposons que,

$$Im[A_j^{FM} \ B_j^{FM}] \cap Im[A_i^{FM} \ B_i^{FM}] = \{0\} \quad k \neq j, \quad (2.7.10)$$

et on définit, \mathcal{H}_k tel que, $im[A_j^{FM} \ B_j^{FM}] \subset \mathcal{H}_k$. Alors,

$$\begin{aligned} A_{i,j}^{GR} &= P_i A_i^{FM}|_{\mathcal{H}_j} : \mathcal{H}_j \mapsto \mathcal{H}_i, & B_i^{FM} &= P_i B_i^{FM} : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{H}_i, \\ C_j^{GR} &= C^{FM}|_{\mathcal{H}_j} : \mathcal{H}_j \mapsto \mathcal{Y}, & D^{GR} &= D^{FM} : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{Y}. \end{aligned}$$

d'où, pour $k = 1, 2$

$$\begin{aligned} x_k(n) &= P_k x(n) = P_k \sum_{l=1}^2 [A_l^{FM} x(n - e_l) + B_l^{FM} u(n - e_l)] \\ &= P_k A_k^{FM} x(n - e_k) + P_k B_k^{FM} u(n - e_k) \\ &= \sum_{j=1}^2 P_k A_k^{FM}|_{\mathcal{H}_j} x_j(n - e_k) + P_k B_k^{FM} u(n - e_k) \\ &= \sum_{j=1}^2 A_{k,j}^{GR} x_j(n - e_k) + B_k^{GR} u(n - e_k) \end{aligned}$$

qui est équivalent à,

$$x_k(n + e_k) = \sum_{j=1}^2 A_{k,j}^{GR} x_j(n) + B_k^{GR} u(n). \quad (2.7.11)$$

Analogiquement, pour l'équation de sortie, nous avons,

$$\begin{aligned} y(n) &= C^{FM} x(n) + D^{FM} u(n) \\ &= \sum_{j=1}^2 C^{FM}|_{\mathcal{H}_j} x_j(n) + D^{FM} u(n) \\ &= \sum_{j=1}^2 C_j^{GR} x_j(n) + D^{GR} u(n). \end{aligned} \quad (2.7.12)$$

Remarque 10. *On aurait pu aussi caractériser le modèle de Fornasini-Marchesini 2D comme suit,*

$$x(n_1, n_2) = x_1(n_1, n_2) + x_2(n_1, n_2) \quad (2.7.13)$$

$$y(n_1, n_2) = [C_1 \quad C_2] x(n_1, n_2) + Du(n_1, n_2) \quad (2.7.14)$$

où,

$$\begin{aligned} x_1(n_1, n_2) &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(n_1 - 1, n_2) + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u(n_1 - 1, n_2) \in \text{im}[A_1^{FM} \quad B_1^{FM}] \subset \mathcal{H}_1 \\ x_2(n_1, n_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} x(n_1, n_2 - 1) + \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix} u(n_1, n_2 - 1) \in \text{im}[A_2^{FM} \quad B_2^{FM}] \subset \mathcal{H}_2. \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned} P_1 x(n_1, n_2) &= P_1 [x_1(n_1, n_2) + x_2(n_1, n_2)] = P_1 x_1(n_1, n_2) = x_1(n_1, n_2) \\ &= P_1 \left[\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(n_1 - 1, n_2) + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u(n_1 - 1, n_2) \right] \\ &= [A_{11} \quad A_{12}] x(n_1 - 1, n_2) + B_1 u(n_1 - 1, n_2) \\ &= [A_{11} \quad A_{12}]|_{\mathcal{H}_1} x_1(n_1 - 1, n_2) + [A_{11} \quad A_{12}]|_{\mathcal{H}_2} x_1(n_1 - 1, n_2) + [A_{11} \quad A_{12}]|_{\mathcal{H}_2} \\ &\quad + B_1 u(n_1 - 1, n_2) \\ &= A_{11} x_1(n_1 - 1, n_2) + A_{12} x_2(n_1 - 1, n_2) + B_1 u(n_1 - 1, n_2). \end{aligned}$$

De la même façon on calcule $P_2 x(n_1, n_2)$

$$\begin{aligned} P_2 x(n_1, n_2) &= x_2(n_1, n_2) \\ &= A_{21} x_1(n_1, n_2 - 1) + A_{22} x_2(n_1, n_2 - 1) + B_2 u(n_1, n_2 - 1). \end{aligned}$$

et l'équation de sortie $y(n_1, n_2)$ est,

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= [C_1 \quad C_2]|_{\mathcal{H}_1} x_1(n_1, n_2) + [C_1 \quad C_2]|_{\mathcal{H}_2} x_2(n_1, n_2) + Du(n_1, n_2) \\ &= C_1 x_1(n_1, n_2) + C_2 x_2(n_1, n_2) + Du(n_1, n_2). \end{aligned}$$

Chapitre 3

Contrôlabilité structurelle des systèmes bidimensionnels linéaires-L'approche par la théorie des graphes

3.1 Introduction

Les systèmes bidimensionnels ont fait l'objet de nombreuses recherches, en raison du fait que plusieurs phénomènes liés à la technologie numérique, le traitement de l'image, la géophysique, la robotique, peuvent être représentés par la théorie des systèmes bidimensionnels. Dans les années 1970, plusieurs extensions ont été proposées pour les systèmes $2D$, il y a eu beaucoup de travaux de synthèse ces dernières décennies (voir par exemple [23], [33], [34] et [35]). La propriété fondamentale de ces systèmes est qu'ils propagent des informations dans deux directions indépendantes ou par deux éléments z_1^{-1} et z_2^{-1} dans la théorie des circuits, parmi les travaux récents sur les systèmes bidimensionnels nous pouvons citer [36] où les auteurs étudient le problème de l'analyse de stabilité pour une classe de systèmes discrets bidimensionnels en présence de saturation d'actionneur et de temps différé, M.H. Lin et ses co-auteurs définissent un contrôle d'auto-réglage de l'espace d'état pour les systèmes stochastiques à temps discrets multi-entrées multi-sorties, [38] où

Li Xu et ses co-auteurs proposent une méthode constructive basée sur des algorithmes pour la réalisation du modèle local de Fornasini-Marchesini à temps discret, W. Chen et Y. Lin étudie dans [39], le problème du contrôle répétitif de la rétroaction de sortie pour les systèmes incertains à temps discret et la formulation du problème en utilisant une certaine classe de systèmes bidimensionnels et C.K. Ahn et M.V. Basin Traitent dans [40] de la stabilité asymptotique, de contrôle dissipatif et de filtrage pour le modèle de Roesser en utilisant l'approche des inégalités matricielles linéaires. L'une des méthodes d'analyse est l'extension des techniques qui existent dans le cas $1D$. L'analyse des systèmes peut être étudiée à travers les espaces d'états. Nous considérons ici les systèmes à temps discret. Il existe trois modèles d'espace d'état $2D$ classique à temps discret, le modèle de Givone-Roesser, le modèle de Fornasini-Marchesini et le modèle d'Attasi. Ils ont introduit une description de ces systèmes par des modèles d'espaces d'états linéaires qui ont permis de concevoir des tests de contrôlabilité, d'observabilité, d'accessibilité et de stabilité. D'autre part, la théorie des systèmes dynamiques structurelles a récemment connu des développements significatifs dans divers domaines liés aux sciences de l'ingénieur, notamment l'exploration sous-marine et spatiale. Le principal défi dans ce domaine est la conception de critères de contrôle structurels simples et gérables, nous pouvons citer quelques travaux récents de C. Commault, J.M. Dion et leurs co-auteurs. Dans [41], ils étudient des graphes associés à des systèmes dynamiques qui sont bien adaptés à l'analyse de la contrôlabilité structurelle en ajoutant des entrées ; dans [42] les auteurs, étudient l'observabilité des systèmes linéaires modélisés avec des graphes réguliers, et des graphes bipartites qui capturent les propriétés d'observabilité, dans l'article [43], les auteurs examinent le problème du contrôle minimal, plus précisément, le problème de contrôle d'un système linéaire avec un vecteur d'entrée ayant un minimum d'entrée tel que les modèles parcimonieux, et dans [44] Commault, Dion et Boukhobza, considèrent les réseaux interconnectés pour montrer que le sous-espace contrôlable peut avoir une partie qui sera présente pour presque toutes les valeurs des paramètres libres. Nous décrivons une caractérisation du sous-espace fixe contrôlable en utilisant la représentation par le graphe structurel et [45]. Dans ce contexte, la théorie des graphes apparaît comme un outil extrêmement approprié pour définir de telles

conditions. Les premiers travaux sur l'approche de la théorie des graphes pour la contrôlabilité structurale apparaissent dans [46], [47], [48] et [51] et E. Fornasini et al. ont analysés dans [52] et [53] un digraphe associé à une paire de matrices, pour étudier des paires de matrices irréductibles et la primitivité de paires de matrices positives, R. Pereira et al. ont défini dans [54] un digraphe de superposition pour caractériser l'accessibilité globale des systèmes $2D$. Pour étudier la contrôlabilité structurale des systèmes linéaires bidimensionnels, nous définissons le modèle structurel de Givone-Roesser et le modèle structurel de Fornasini-Marchesini, puis nous introduisons un graphe associé au modèle structurel bidimensionnel qui préserve les propriétés fondamentales qui est l'indépendance des deux dynamiques, qui repose sur la notion d'union disjointe de deux sous-graphes, et exprime la propriété d'indépendance des deux dynamiques, ainsi les résultats déjà existants peuvent être exploités par l'analyse partielle des graphes, et peuvent introduire la notion Nous établissons ainsi le lien entre les graphes structuraux de Givone-Roesser et le modèle structurel de Fornasini-Marchesini. Enfin, des exemples illustrerons les résultats obtenus.

3.2 Graphe associé à un système linéaire structurel

Le graphe associé à la structure est défini dans [46], [48] et [47]. Les propriétés génériques du système peuvent alors souvent être caractérisées très simplement en termes de propriétés du graphe associé. Cela rend certains résultats très intuitifs. Cette modélisation a les caractéristiques suivantes. A un tel système, on peut facilement associer un graphe noté $G = (V, W)$ l'ensemble des sommets est $V = U \cup X \cup Y$ où U , X et Y sont des entrées, les états et les sorties donnés respectivement par $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$.

l'ensemble des arcs $W = \{(u_i, x_j) | B_{ji} \neq 0\} \cup \{(x_i, x_j) | A_{ji} \neq 0\} \cup \{(x_i, y_j) | C_{ji} \neq 0\}$, où A_{ji} (resp. B_{ji} , C_{ji}) est l'élément (j, i) de la matrice A (resp. B , C), la direction des arcs est de u_i à x_j , x_i à x_j et x_i à y_j .

Définition 12. *Un chemin dans G reliant le sommet i_0 au sommet i_l est une suite d'arcs*

$(i_0, x_1), (i_1, x_2), \dots, (i_{l-2}, x_{l-1}), (i_{l-1}, x_l)$ telle que $i_t \in V$ pour $t = 0, 1, 2, \dots, l$ et $(i_{t-1}, x_t) \in W$ pour $t = 1, 2, \dots, l$.

Un ensemble de chemins sans sommet commun est dit *sommet-disjoint*.

3.2.1 Contrôlabilité structurelle

Dans cette sous-section, les résultats sont tirés de [46] et de [48], les critères fondamentaux de la contrôlabilité structurelle sont exposés.

Définition 13. *Les éléments d'une matrice de structure $[Q]$ sont soit fixés à zéro, soit indéterminés, supposés indépendants les uns des autres.*

Définition 14. *Une matrice numériquement Q est appelée une réalisation numérique admissible si elle peut être obtenue en fixant toutes les entrées indéterminées de $[Q]$ et certaines valeurs particulières.*

Exemple 7. *Cet exemple illustre la définition 13*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.1)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & 0 \\ 0 & b_{32} \\ 0 & b_{24} \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

et

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & c_{24} \end{pmatrix} \quad (3.2.3)$$

Les matrices structurelles correspondantes sont

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l & 0 \\ l & 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & l & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.4)$$

$$[B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ l & 0 \\ 0 & l \\ 0 & l \end{pmatrix} \quad (3.2.5)$$

et

$$[C] = \begin{pmatrix} 0 & l & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 & l \end{pmatrix} \quad (3.2.6)$$

si

$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.7)$$

alors la matrice structurelle correspondante est

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l & 0 & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 & l & l & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 & 0 & l \\ 0 & l & 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 & l & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

où les éléments de fuite sont fixés à zéro alors que les autres éléments ont une valeur réelle inconnue l .

Définition 15. Une classe de systèmes donnée par sa paire de matrices de structure $[A, B]$ est dite structurellement contrôlable s'il existe au moins une réalisation admissible $(A, B) \in [A, B]$ étant contrôlable dans les conditions habituelles au sens numérique.

Remarque 11. [46] Le rang structurel de $[Q]$ est défini par le rang $S [Q] = \max_{Q \text{ dans } [Q]} \text{rank } Q$

Remarque 12. Nous supposons que dans le retour d'état statique nous avons $u = Ex$, et dans le contexte de l'investigation de contrôlabilité, la matrice de blocs suivante sera la plus appropriée

$$Q_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ E & 0 \end{pmatrix} \text{ de dimension appropriée} \quad (3.2.9)$$

Définition 16. [46] On dit qu'une classe de systèmes est connectable à l'entrée si, dans le graphe $G([Q])$, il y a, pour chaque sommet d'état, un chemin d'au moins un des sommets d'entrée au sommet d'état choisi.

Remarque 13. [46] Une famille de cycles correspond à un terme non nul du déterminant $\det \bar{Q}$. D'où la matrice \bar{Q} a un rang plein dans le sens structurel.

Définition 17. [46] On dit qu'une famille de cycles donnée dans $G([Q])$ est de longueur w si cette famille de cycles touche exactement les sommets d'états w .

Critère de Contrôlabilité Structurelle

Théorème 6. Une classe de systèmes caractérisée par la paire de matrices structurelles $[A, B]$ est structurellement contrôlable si et seulement si

1. Elle est connectable à l'entrée
2. $S\text{-rank } [A, B] = n$

Théorème 7. Une classe de systèmes caractérisée par la paire de matrices structurelles $[A, B]$ est structurellement contrôlable si et seulement si le digraphe $G([Q_1])$, satisfait les deux conditions suivantes,

1. Pour chaque sommet d'état dans $G([Q_1])$ il y a au moins un chemin de l'un des m sommets d'entrées au sommet d'état choisi.
2. Il y a au moins une famille de cycles de longueur $G([Q_1])$.

Théorème 8. Une classe de systèmes caractérisée par la paire de matrices structurales $[A, B]$ est fortement structurellement contrôlable si et seulement si le digraphe $G([Q_1])$, satisfait les deux conditions suivantes :

1. Elle est connectable à l'entrée.
2. Il y a exactement une famille de cycle de longueur n dans $G([Q_1])$.

3.2.2 Modèle Bidimensionnel Structurel à temps discret

Modèle Structurel de Givone-Roesser

Le modèle structurel de Givone-Roesser est

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_{n_1}^h [(i_1 + 1, i_2)] \\ x_{n_2}^v [(i_1, i_2 + 1)] \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{n_1}^h [i_1, i_2] \\ x_{n_2}^v [i_1, i_2] \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u [i_1, i_2] \\ y [i_1, i_2] = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{n_1}^h [i_1, i_2] \\ x_{n_2}^v [i_1, i_2] \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (3.2.10)$$

Dans ce qui suit, nous supposons que la matrice $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ est diagonale bloc, comme suit $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A^1 & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$, puis nous obtenons un système équivalent à (3.2.10), concernant les méthodes de diagonalisation et de diagonalisation par blocs, voir, [49] et [50].

3.2.3 Modèle Structurel de Fornasini-Marchesini

Dans la suite, nous proposons la forme compacte du modèle structurel de Fornasini Marchesini

$$\begin{cases} x [i_1 + 1, i_2 + 1] = [A_1] x [i_1 + 1, i_2] + [A_2] x [i_1, i_2 + 1] \\ \quad + [A_0] x [i_1, i_2] + [B_1] u [i_1 + 1, i_2] + [B_2] u [i_1, i_2 + 1] \\ y [i_1, i_2] = [C] x [i_1, i_2] \end{cases} \quad (3.2.11)$$

Aussi nous donnons le digraphe en union disjointe qui est associé à un système linéaire structurel bidimensionnel, La propriété principale est que le vecteur d'état se compose d'une partie horizontale et d'une partie verticale nous introduisons ainsi un graphe orthogonal qui est un graphe en union disjointe c-à-d qui est constitué de deux sous graphes qui ne sont pas connexes ainsi l'ensemble des noeuds devient $V = (V^h, V^v)$. Soient G_1 et G_2 deux graphes, on note $G_1 + G_2$ le graphe en union disjointe $G_i, i = 1, 2$. Il correspond au graphe $(V_1 \cup V_2, W_1 \cup W_2)$, autrement dit cela signifie que les sommets et les arcs de G_1 et G_2 sont considéré, séparément.

Le Digraphe en Union Disjointe associé au Modèle Structurel de Givone-Roesser

Le graphe associé au modèle structurel Givone-Roesser est $(G_{GR}) = (V, W)$ tel que $V = U \cup X \cup Y$, où

$$\begin{aligned} U &= \{u_1(i_1, i_2), u_2(i_1, i_2), \dots, u_m(i_1, i_2)\}, \\ X &= X^h(i_1, i_2) \cup X^v(i_1, i_2) = \{x_1^h(i_1, i_2), x_2^h(i_1, i_2), \dots, x_{n_1}^h(i_1, i_2)\} \\ &\cup \{x_1^v(i_1, i_2), x_2^v(i_1, i_2), \dots, x_{n_2}^v(i_1, i_2)\} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

et

$$Y = \{y_1(i_1, i_2), y_2(i_1, i_2), \dots, y_p(i_1, i_2)\}$$

et les arcs sont définis comme suit

$$\begin{aligned}
W = & \{(u_j(i_1, i_2), x_{k_h}^h(i_1, i_2)) | B_{kj}^1 \neq 0\} \quad j = \overline{1, m_1} \text{ et } k_h = \overline{1, n_1} \\
\cup & \{(u_j(i_1, i_2), x_{k_v}^v(i_1, i_2)) | B_{kj}^2 \neq 0\} \quad j = \overline{1, m_2} \text{ et } k_v = \overline{1, n_2} \\
\cup & \{(x_{j_h}^h(i_1, i_2), x_{k_h}^h(i_1, i_2)) | A_{ji}^1 \neq 0\} \quad j_h = \overline{1, n_1} \text{ et } k_h = \overline{1, n_1} \\
\cup & \{(x_{j_v}^v(i_1, i_2), x_{k_v}^v(i_1, i_2)) | A_{ji}^2 \neq 0\} \quad j_v = \overline{1, n_2} \text{ et } k_v = \overline{1, n_2} \\
\cup & \{(x_{j_h}^h(i_1, i_2), y_k(i_1, i_2)) | C_{kj}^1 \neq 0\} \quad j_h = \overline{1, n_1} \text{ et } k = \overline{1, p_1} \\
\cup & \{(x_{j_v}^v(i_1, i_2), y_k(i_1, i_2)) | C_{kj}^2 \neq 0\} \quad j_v = \overline{1, n_2} \text{ et } k = \overline{1, p_2}
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

avec $m_1 + m_2 = m$, $p_1 + p_2 = p$ et

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad C = \begin{pmatrix} C^1 & C^2 \end{pmatrix} \tag{3.2.14}$$

Exemple 8. *Le digraphe suivant est associé au modèle structurel bidimensionnel de Givone-Roesser, illustre le digraphe en union disjointe.*

$$\left\{ \begin{aligned}
& \begin{pmatrix} x_1^h [(i_1 + 1, i_2)] \\ x_2^h [(i_1 + 1, i_2)] \\ x_1^v [(i_1, i_2 + 1)] \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l_4 & 0 \\ l_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1^h [i_1, i_2] \\ x_2^h [i_1, i_2] \\ x_1^v [i_1, i_2] \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1^h [i_1, i_2] \\ u_2^h [i_1, i_2] \\ u_1^v [i_1, i_2] \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} y^h [i_1, i_2] \\ y^v [i_1, i_2] \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l_6 & 0 \\ 0 & 0 & l_7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1^h [i_1, i_2] \\ x_2^h [i_1, i_2] \\ x_1^v [i_1, i_2] \end{pmatrix}
\end{aligned} \right.$$

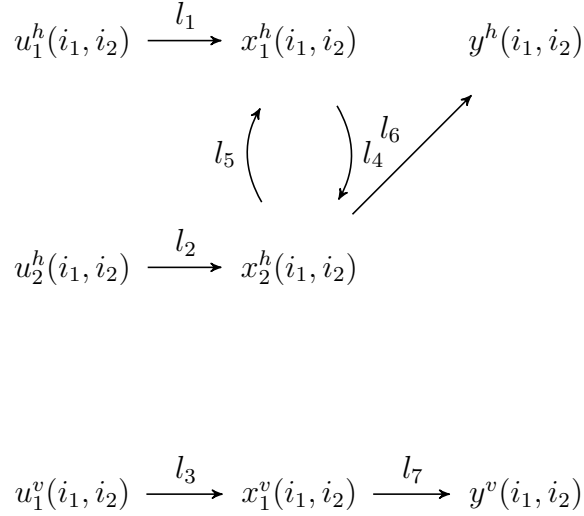


Figure 1 : Illustration du digraphe d'un modèle bidimensionnel de Givone-Roesser

De même avec le modèle bidimensionnel structurel de Givone-Roesser, la première partie du graphe correspond au sous-graphe horizontal, et la seconde partie du graphe correspond au sous-graphe vertical, les éléments non-nuls des matrices sont les paramètres libres $l = (l_1, l_2, \dots, l_7)$ on peut voir qu'il existe un ensemble de chemins entrées états de sommets dis-joints $(u_1^h(i_1, i_2), x_1^h(i_1, i_2), x_2^h(i_1, i_2))$, $(u_2^h(i_1, i_2), x_2^h(i_1, i_2), x_1^h(i_1, i_2))$ et $(u_1^v(i_1, i_2), x_1^v(i_1, i_2))$.

3.2.4 Détermination du Digraphe du Modèle structurel de Fornasini-Marchesini

En utilisant le changement de variables suivant $\mu[(i_1, i_2)] = x[(i_1, i_2 + 1)] - A_2x[(i_1, i_2)]$, on a

$$\begin{aligned}
 \mu[(i_1, i_2)] &= A_0x[(i_1, i_2)] + A_1x[(i_1, i_2 + 1)] + Bu[(i_1, i_2)] \\
 &= A_0x[(i_1, i_2)] + A_1(\mu[(i_1, i_2)] + A_2x[(i_1, i_2)]) + Bu[(i_1, i_2)] \\
 &= A_1\mu[(i_1, i_2)] + (A_0 + A_1A_2)x[(i_1, i_2 + 1)] + Bu[(i_1, i_2)]
 \end{aligned}$$

Le digraphe en union disjointe associé au modèle de Fornasini Marchesini peut être réécrit sous la forme du digraphe de Givone-Roesser

$$\begin{aligned} X &= X^h(i_1, i_2) \cup X^v(i_1, i_2) \\ &= \{\mu_1(i_1, i_2), \mu_2(i_1, i_2), \dots, \mu_{n_1}(i_1, i_2)\} \\ &\quad \cup \{x_1(i_1, i_2), x_2(i_1, i_2), \dots, x_{n_2}(i_1, i_2)\} \end{aligned}$$

et où $X^h(i_1, i_2) = Mu(i_1, i_2)$, $X^v(i_1, i_2) = X(i_1, i_2)$ et les arcs deviennent

$$\begin{aligned} W &= \{(u_j(i_1, i_2), \mu_k(i_1, i_2)) | B_{kj} \neq 0\} \\ &\quad \cup \{(\mu_j(i_1, i_2), \mu_k(i_1, i_2)) | A_{ji}^1 \neq 0\} \cup \\ &\quad \cup \{(x_j(i_1, i_2), x_k(i_1, i_2)) | A_{ji}^2 \neq 0\} \cup \\ &\quad \cup \{(x_j(i_1, i_2), y_k(i_1, i_2)) | C_{kj} \neq 0\} \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_0 + A_1 A_2 \\ I & A_2 \end{bmatrix} \text{ où } \begin{bmatrix} A^1 & 0 \\ 0 & A^2 \end{bmatrix} \text{ est la matrice diagonale bloc obtenue de la matrice } A$$

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix}$$

3.2.5 Propriétés principales du digraphe en union disjointe associé au système structurel bidimensionnel

Sachant que le digraphe d'un modèle structurel bidimensionnel est un graphe en union disjointe de deux sous-digraphes, on peut alors utiliser cette propriété pour étudier la contrôlabilité structurelle partielle des systèmes bidimensionnels, où le sous-digraphe $G(h)$ correspond à la partie horizontale du système structurel bidimensionnel respectivement le sous-digraphe $G(v)$ correspond à la partie verticale du système structurel bidimensionnel. Si les conditions de la contrôlabilité structurelle sont satisfaites pour seulement $G(h)$ (respectivement $G(v)$), nous obtenons une contrôlabilité structurelle horizontale partielle ou une contrôlabilité structurelle verticale partielle.

Nous considérons l'exemple du graphe bidimensionnel de Givone-Roesser,

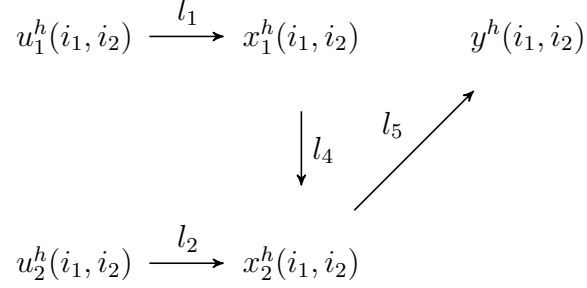


Figure 2 :Sous-graphe Horizontal

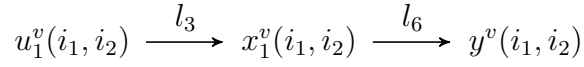


Figure 3 :Sous-graphe Vertical

Cet exemple montre que nous pouvons analyser localement le digraphe bidimensionnel de Givone-Roesser, c'est-à-dire que nous ne pouvons étudier que la contrôlabilité structurale du sous-graphe horizontal ou vertical.

Lemme 1. *G est le graphe en union disjointe de G^h et G^v , et est connectable à l'entrée si et seulement si G^h et G^v sont connectable au vecteur entrée.*

Démonstration.

Nécessité Les sommets des états sont soit horizontaux soit verticaux, si le sommet d'état est horizontal, $x_n^h \in G^h$, et étant donné que G^h connectable au vecteur entrée, il y a un chemin d'au moins l'un des sommets d'entrée à $x_n^h \in G^h$, de la même manière si le sommet d'état est vertical, $x_m^v \in G^v$, il y a un chemin d'au moins l'un des sommets d'entrée à $x_m^v \in G^v$.

Suffisance Évidemment, si G est connectable au vecteur entrée, alors G^h et G^v sont par définition connectable au vecteur entrée, car $G = G^h \cup G^v$. □

Lemme 2. *Sachant que $G([Q_1]) = G^h([Q_1]) \cup G^v([Q_1])$. Si pour chaque sommet d'état horizontal dans $G^h([Q_1])$ et pour chaque sommet d'état vertical dans $G^v([Q_1])$ il y a au moins un chemin de l'un des m_1 sommets du vecteur entrée à x_n^h , et il y a au moins un chemin de l'un des m_2 sommets du vecteur d'entrée à x_m^v , alors il existe respectivement pour chaque sommet d'état dans $G([Q_1])$ au moins un chemin de l'un des m_i pour $i = 1, 2$, avec $m = m_1 + m_2$ sommets du vecteur d'entrée au sommet d'état choisi.*

Démonstration. Les sommets des états sont soit horizontaux soit verticaux, si le sommet d'état est horizontal, $x_i^h \in G^h([Q_1])$, avec $i \in \overline{1, m_1}$, alors, il y a au moins un chemin de l'un des m_1 sommets entrée à x_i^h , de la même manière si le sommet d'état est vertical, $x_i^v \in G^v([Q_1])$, alors, dans $G([Q_1])$ il y a au moins un chemin de l'un des m_i pour $i = 1, 2$, avec $m = m_1 + m_2$ sommets du vecteur d'entrées au sommet d'état choisi. \square

Lemme 3. *S'il y a au moins une famille de cycles de longueur n_1 dans $G^h([Q_1])$, et au moins une famille de cycles de longueur n_2 dans $G^v([Q_1])$, alors il existe respectivement au moins une famille de cycles de longueur n_i pour $i = 1, 2$, avec $n = n_1 + n_2$ dans $G([Q_1]) = G^h([Q_1]) \cup G^v([Q_1])$.*

Démonstration. Sachant que le nombre des sommets d'état dans $G^h([Q_1])$ est n_1 et le nombre de sommets d'état dans $G^v([Q_1])$ est n_2 . S'il y a au moins une famille de cycles de longueur n_1 respectivement n_2 , alors, par définition la famille de cycle est dans $G^h([Q_1])$ respectivement dans $G^v([Q_1])$, donc il existe respectivement au moins une famille de cycles de longueur n_i pour $i = 1, 2$, avec $n = n_1 + n_2$ dans $G([Q_1])$. \square

Remarque 14. *La notion fondamentale qui est utilisée dans ces lemmes est la propriété principale du digraphe bidimensionnel, qui est l'union disjointe de deux sous-graphes, la preuve du lemme 4.1, 4.2 et 4.3 étant fondée sur l'idée qu'il existe un sous-graphique horizontal (respectivement vertical).*

3.2.6 Généralisation des Critères de Contrôlabilité Structurale pour les Systèmes structurels Bidimensionnels

Les trois précédents lemmes sont nécessaires pour prouver les critères de contrôlabilité structurelle des systèmes linéaires bidimensionnels.

Théorème 9. *Une classe de systèmes caractérisée par la paire structurelle $[A, B]$ est structurellement contrôlable si et seulement si la paire de matrices de structurele $[A_1, B_1]$ et $[A_2, B_2]$ sont structurellement contrôlables.*

Démonstration. Nécessaire Si pour chaque sommets d'état dans $G([Q_1^h])$ respectivement $G([Q_1^v])$ il y a au moins un chemin de l'un des m_1 sommets du vecteur entrée respectivement m_2 sommets du vecteur entrée aux sommets d'état choisis, alors, d'après le lemme 4.2, il existe pour chaque état un sommet dans $G([Q_1]) = G([Q_1^h]) \cup G([Q_1^v])$, au moins un chemin de l'un des sommets d'entrée $m = m_1 + m_2$ vers le sommet d'état choisi. S'il y a au moins une famille de cycles de longueur n_1 in $G([Q_1^h])$ et n_2 dans $G([Q_1^v])$, alors, selon le lemme 4.3, il existe au moins une famille de longueur $n = n_1 + n_2$ dans $G([Q_1]) = G([Q_1^h]) \cup G([Q_1^v])$.

Suffisante Il est évident que si le système est structurellement contrôlable, alors pour chaque sous-système caractérisé par la paire de matrice structurelles $[A_i, B_i]$ est structurellement contrôlable, spécialement pour la paire $[A_1, B_1]$ et $[A_2, B_2]$ \square

Théorème 10. *Une classe de systèmes caractérisée par la paire structurelle $[A, B]$ est structurellement contrôlable si et seulement si la paire de matrices structurelle $[A^1, B^1]$ qui correspond à $G^h([Q_1])$, et $[A^2, B^2]$ qui correspond à $G^v([Q_1])$ sont structurellement contrôlable.*

Démonstration. Nécessité Si $[A_1, B_1]$ et $[A_2, B_2]$ sont structurellement contrôlable alors, $G^h([Q_1])$ et $G^v([Q_1])$ sont connectable au vecteur d'entrée, en utilisant le lemme 4.1, $G([Q_1])$ est connectable au vecteur d'entrée. Si $[A_1, B_1]$ et $[A_2, B_2]$ sont structurellement contrôlable alors, s-rank $[A_1, B_1] = n_1$ et s-rank $[A_2, B_2] = n_2$, et étant donné que le graphe bidimensionnel est définie comme la réunion disjointe de deux sous-graphes s-rank $[A, B] = n_1 + n_2 = n$.

Suffisance Il est évident que si le système est structurellement contrôlable, alors pour chaque sous-système caractérisé par la paire de matrices structurelle $[A_i, B_i]$ est structurellement contrôlable, en particulier pour $[A_1, B_1]$ et $[A_2, B_2]$. \square

Nous déduisons finalement le résultat suivant Une classe de systèmes caractérisée par la paire de matrices de structure $[A, B]$ est fortement structurellement contrôlable si et seulement si $[A_1, B_1]$ et $[A_2, B_2]$ sont fortement structurellement contrôlables.

3.3 Exemples Illustratifs

Nous illustrons les résultats précédents concernant la contrôlabilité structurelle des modèles linéaires bidimensionnels par quelques exemples,

Nous considérons un modèle structurel bidimensionnel linéaire avec deux états horizontaux, un état vertical, deux entrées horizontales, une entrée verticale, une sortie horizontale et une sortie verticale.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} l_3 & 0 & 0 \\ 0 & l_4 & 0 \\ 0 & 0 & l_5 \end{bmatrix}, \text{ et } C = \begin{bmatrix} 0 & l_6 & 0 \\ 0 & 0 & l_7 \end{bmatrix}$$

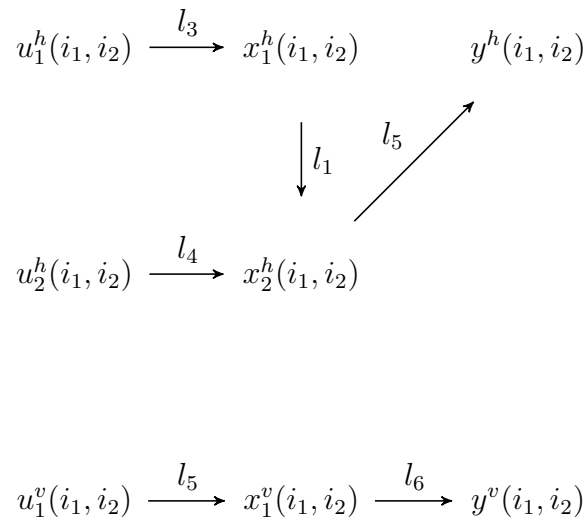


Figure 4 : Digraphe illustratif de la contrôlabilité structurelle d'un modèle linéaire bidimensionnel

Le modèle bidimensionnel structurel vu ci-dessus est structurellement contrôlable en appliquant le théorème 4.4. En effet, les conditions de contrôlabilité structurelle caractérisées par le lemme 4.2 et le lemme 4.3 sont satisfaites dans la partie horizontale et la partie verticale du graphe.

Si on pose $E = \begin{bmatrix} l_7 & 0 & 0 \\ 0 & l_8 & 0 \\ 0 & 0 & l_9 \end{bmatrix}$ alors, son $G[Q_1]$ graphe est,

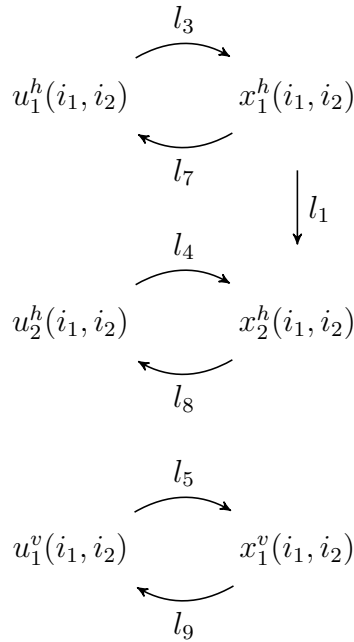


Figure 4 : Digraphe illustratif de la contrôlabilité structurelle d'un modèle bidimensionnel avec retour d'état

Dans ce graphe, nous considérons simplement le sommet d'entrée et les sommets du vecteur d'état par le théorème 4.4, le modèle bidimensionnel structurel est structurellement contrôlable.

Cet exemple illustre la contrôlabilité structurelle partielle, nous considérons ici le graphique structurel de certains systèmes linéaires structurels bidimensionnels

le modèle de Fornasini-Marchisini comme un modèle $1D$, et définit le graphique orienté comme la superposition de deux sous-graphes et élimine les bords répétés pour utiliser les résultats qui existent dans $1D$. Dans cet article, nous avons étudié l'approche structurelle des systèmes bidimensionnels en nous concentrant sur un problème classique. L'idée principale est le graphe d'union disjoint qui représente le système bidimensionnel structurel dans son ensemble, avec la même approche, il est possible de résoudre notamment d'autres problèmes de contrôle et de stabilité, en utilisant le graphe structurel associé au système bidimensionnel et dériver des critères. Notre intérêt actuel est centré sur l'analyse structurelle de l'observabilité des systèmes multidimensionnels qui seront étudiés dans un article séparé.

Chapitre 4

Inégalités Matricielles linéaires

L'étude des inégalités matricielles affines (Linear matrix inequalities) dans le contexte des systèmes dynamiques et du contrôle est apparue, probablement, avec le début des travaux fondamentaux d'Aleksander Lyapunov, concernant la stabilité du mouvement. Autour des années 1890, Lyapunov a mis au point une méthode d'analyse des propriétés du mouvement de certains systèmes dynamiques autour d'un point d'attraction. Il étudia la stabilité d'équations différentielles de la forme, $\dot{x} = Ax$, et montre que celle-ci est stable si et seulement s'il existe une matrice P définie positive qui vérifie $A^T P + P A < 0$, aussi connue sous le nom d'inégalité de Lyapunov et qui est une LMI particulière. A. Lyapunov a aussi montré que cette inégalité peut être résolue analytiquement.

Dans les années 40-50, Lur'e, Postnikov et d'autres chercheurs en union soviétique appliquèrent la méthode de Lyapunov à de véritables problèmes de commande, et résolurent les LMIs qui se posèrent à eux, "à la main". Dans les années 60, Yakubovic, Popov, Kalman et d'autres réussirent à obtenir un critère graphique permettant de résoudre certaines familles de LMI. Plus tard dans les années 80 les travaux des mathématiciens Pyatnitskii et Skorodinskii montrent qu'il est possible de reformuler un problème LMI en un problème d'optimisation convexe, que l'on peut résoudre numériquement si celui-ci ne peut être résolu analytiquement. L'algorithme Ellipsoïde, qui permet de résoudre des problèmes d'optimisation convexe en temps polynômial est alors utilisé. Clairement, une formulation LMI n'a

de sens que si elle permet une résolution efficace et réalisable. Les progrès réalisés dans le domaine algorithmique ont permis le développement d'outils de résolutions numériques (LMIToolBox, LMITool, SeDuMi,...). Actuellement, un effort important s'attache à formuler, notamment, des problèmes de commande avec un formalisme LMI de telle manière à avoir une approche unifiée pour l'analyse et la commande de problèmes appartenant à des classes distinctes.

4.1 Définition et Principales propriétés des LMIs

Définition 18. [19] Une LMI peut être décomposée en somme d'une forme symétrique et d'une transformation linéaire,

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{i=n} x_i F_i < 0 \quad (4.1.1)$$

où,

1. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ est un vecteur de dimension n appelé variable de décision.
2. F_0, \dots, F_n sont des matrices symétriques de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

L'inégalité $<$ veut dire "définie négative". On peut aussi avoir une LMI non stricte si l'équation n'est pas stricte ($F(x)$ semi-définie négative).

Définition 19. Soit une forme affine,

$$F : X \longrightarrow S; F(x) = F_0 + T(x)$$

où,

$$F_0 \in S$$

avec,

$$S =: \{M \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } M = M^T \in \mathbb{R}^{n \times n}\}.$$

Remarque 15. On rappelle qu'une forme affine $F : \mathfrak{X} \rightarrow S$ prend nécessairement la forme $F(x) = F_0 + T(x)$ où $F_0 \in S$ (i.e., F_0 symétrique) et $T : \mathfrak{X} \rightarrow S$ est une transformation linéaire. Ainsi si \mathfrak{X} est de dimension finie, i.e. de dimension n , et où $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ constituent une base pour \mathfrak{X} . Ainsi tout $x \in X$ peut être représenté comme $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ et écrire,

$$T(x) = T \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j F_j \quad (4.1.2)$$

où, $F_j = T(e_j) \in S$, de la, nous obtenons (4.1.1) comme cas particulier.

Remarque 16. Dans certains cas, les LMIs sont exprimées en fonction de matrices variables plutôt que variables de décisions.

Un exemple, est L'inégalité de Lyapunov

$$F(x) = A^T X + X A < 0$$

où

$$A \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$$

avec $m_1 = m_2 = m$ donnée. X est la matrice inconnue de dimension $m \times m$.

4.2 Système LMI et Réduction

Définition 20. [18] Soit un système de LMI $F_1(x) < 0, \dots, F_p(x) < 0$. Il est possible de regrouper le système ci-dessus en une seule LMI,

$$F(x) := \begin{pmatrix} F_1(x) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & F_2(x) & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & F_p(x) \end{pmatrix} < 0$$

Remarque 17. 1. Une LMI multiples contraintes peut toujours être convertie en une LMI à une seule contrainte .

2. L'écriture d'une LMI diagonale bloc a comme propriété que ses valeurs propres sont une simple réunion des valeurs propres des matrices qui la forment.

Proposition 1. Soit M une matrice carrée $n \times n$ et T une matrice régulière, alors T^*MT est appelée transformation congruente.

Le nombre de vecteurs propres positifs respectivement (négatifs) ne changent pas en effet; Si les vecteurs u et v sont exprimés comme suit $u = Tv$ avec $\det T \neq 0$, alors $u^*Mu < 0$ pour tout $u \neq 0_{R^n}$. C'est équivalent à dire que $v^*T^*MTv < 0$ pour tout $v \neq 0_{R^n}$. D'où $M < 0 \Leftrightarrow T^*MT < 0$.

Exemple 9. Soit une matrice hermitienne partitionnée,

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad \text{Avec, } M_{11} \in R^{n \times n} \text{ et } \det M_{11} \neq 0.$$

On calcule la transformation congruente T^*MT . D'après la proposition ci-dessus, ceci donne,

$$M < 0 \Leftrightarrow T^*MT < 0$$

On remarque que c'est une matrice diagonale bloc Alors, $M_{11} < 0$ et $S < 0$ où, $S := M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}$

Nous proposons une série de résultats et d'exemples qui mettent en évidence l'importance de l'outil LMI dans la résolution de divers problèmes liés à la réduction, stabilité. Soit le problème LMI suivant,

Trouver $x \in R^n$ tel que $F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{i=m} x_i F_i < 0$, on suppose que l'on a $F_m \leq 0$ et que F_m est de rang $r \leq n$. Nous montrons que ce problème est équivalent à un problème LMI avec $m - 1$ variables. Soit F_m semi définie, donc il existe une matrice U de rang plein vérifiant $F_m = UU^T$.

Nous avons $F(x) < 0$ si et seulement si,

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}^T \\ U^T \end{pmatrix} F(x) \begin{pmatrix} \tilde{U} & U \end{pmatrix} < 0$$

On définit

$$\hat{x} = (x_1, \dots, x_{m-1})^T \in R^{m-1}$$

et

$$\hat{F}(\hat{x}) =: F_0 + \sum_{i=1}^{i=m-1} x_i F_i$$

On a alors $F(x) = \hat{F}(\hat{x}) + x_m U U^T$, donc

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}^T \\ U^T \end{pmatrix} F(x) \begin{pmatrix} \tilde{U} & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{U}^T \hat{F}(\hat{x}) \tilde{U} & \tilde{U}^T \hat{F}(\hat{x}) U \\ U^T \hat{F}(\hat{x}) \tilde{U} & U^T \hat{F}(\hat{x}) U + x_m (U^T U)^2 \end{pmatrix}$$

car $U^T \tilde{U} = 0$

En appliquant le lemme de Schur, on a $F(x) < 0$ si et seulement si,

$$\begin{cases} \tilde{U}^T \hat{F}(\hat{x}) \tilde{U} > 0 \\ U^T \hat{F}(\hat{x}) U + x_m (U^T U)^2 - U^T \hat{F}(\hat{x}) \tilde{U} (\tilde{U}^T \hat{F}(\hat{x}) \tilde{U})^{-1} \tilde{U}^T \hat{F}(\hat{x}) U > 0 \end{cases}$$

or on peut choisir x_m suffisamment grand pour avoir la 2^e inégalité satisfaite.

Ainsi, le problème posé ci-dessus est équivalent à,

trouver $\hat{x} \in R^{m-1}$ tel que $\tilde{U}^T \hat{F}(\hat{x}) \tilde{U} < 0$

on a donc pu éliminer une variable du problème LMI grâce au terme semi défini. \square

Soit la LMI suivante,

$$A(x) + B(x) X c^T(x) + c(x) X^T B^T(x) < 0$$

Il est possible d'éliminer X si x et X sont indépendants. La LMI est alors équivalente à,

$$\tilde{B}^T(x) A(x) \tilde{B}(x) > 0$$

$$\tilde{c}^T(x) A(x) \tilde{c}(x) > 0$$

où \tilde{B} et \tilde{c} sont les complémentaires orthogonaux de B et c respectivement.

Exemple 10. On considère le problème de stabilité exponentielle du système linéaire,

$$\dot{x} = Ax$$

où $A \in R^{n \times n}$, la stabilité du système assure l'existence d'une constante M et α tel que pour toute condition initiale x_0 la solution $x(t)$ avec $x(t_0) = 0$ satisfait,

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| M e^{-\alpha(t-t_0)}$$

Selon Lyapunov le système est exponentiellement stable si et seulement s'il existe une matrice $X = X^T$ tel que $X > 0$ et $A^T X + X A < 0$, en effet dans ce cas la fonction $V(x) := x^T X x$, qualifiée de fonction de Lyapunov est positive pour tout vecteur non nul et strictement décroissante le long de la solution x du système linéaire autonome.

Nous pouvons aussi montrer $\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| M e^{-\alpha(t-t_0)}$ avec $M^2 = \lambda_{\max}(X)/\lambda_{\min}(X)$ et $\alpha > 0$ tel que $A^T X + X A + \alpha X < 0$, alors la stabilité exponentielle est équivalente à la faisabilité de la LMI,

$$\begin{pmatrix} -X & 0 \\ 0 & A^T X + X A \end{pmatrix} < 0$$

Exemple 11. On considère k systèmes linéaires de la forme,

$$\dot{x} = A_i x + B_i u$$

où $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $i = 1, \dots, k$. La question de la stabilité simultanée est de trouver une loi de retour d'état $u = Fx$ avec $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tel que tous les systèmes autonomes, $\dot{x} = (A_i + B_i F)x$ $i = 1, \dots, k$ soient asymptotiquement stables. En utilisant l'exemple précédent, ce problème sera résolu quand nous pourrons trouver une matrice F et X_i $i = 1, \dots, k$ telle que pour tout i

$$X_i > 0 \text{ et } (A_i + B_i F)^T X_i + X_i (A_i + B_i F) < 0$$

Chapitre 5

Conditions de Stabilité des Modèles d'état Multidimensionnels par les LMIs

5.1 Formulation et position du problème

Nous abordons dans ce dernier chapitre les résultats de stabilité, trois formulations sont apportées, la première étant la définition de la stabilité asymptotique qui fait intervenir la solution du système, la seconde qui correspond à une condition nécessaire et suffisante par rapport au polynôme caractéristique du dit système, et la troisième est une condition suffisante sur la faisabilité de LMIs dérivées des conditions sur le polynôme caractéristique. On note par $R^{m \times n}$ respectivement $C^{m \times n}$, l'ensemble des matrices réelles respectivement complexes à m lignes et n colonnes et par R^m respectivement C^m l'ensemble des vecteurs réels respectivement complexes. Aussi Z_+ est l'ensemble des entiers relatifs et R_+ la droite réelle positive et j la racine carrée de -1 .

5.1.1 Système discret multidimensionnel général

On considère le système discret multidimensionnel général

$$\begin{cases} Ex(k_1 + 1, k_2 + 1, \dots, k_d + 1) = A_0x(k_1, k_2, \dots, k_d) + \\ \quad \sum_{i=1}^d A_i x(k_1 + \delta_1^i, k_2 + \delta_2^i, \dots, k_d + \delta_d^i) + \sum_{i=1}^d B_i u(k_1 + \delta_1^i, k_2 + \delta_2^i, \dots, k_d + \delta_d^i) \\ y(k_1 + 1, k_2 + 1, \dots, k_d + 1) = Cx(k_1 + 1, k_2 + 1, \dots, k_d + 1). \end{cases} \quad (5.1.1)$$

où $\delta_\ell^i = 1$ si $i = \ell$ et 0 si $i \neq \ell$ (notation de Kronecker), $x(k_1 + 1, k_2 + 1, \dots, k_d + 1) \in R^n$ est le vecteur d'état du système (5.1.1), $u(k_1 + 1, k_2 + 1, \dots, k_d + 1) \in R^m$ est le vecteur d'entrée, $y(k_1 + 1, k_2 + 1, \dots, k_d + 1) \in R^p$ le vecteur de sortie du système, $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times m}$, $i = 0, 1, 2$, $C \in R^{p \times n}$, $D \in R^{p \times m}$. On suppose que E est inversible. En appliquant la transformée en z multidimensionnel au système (5.1.1), avec des conditions initiales nulles, on obtient : fonction de transfert rationnelle, réalisant ce système d'espace d'état généralisé.

$$T(z_1, z_2, \dots, z_d) = C \left(Ez_1 z_2 \dots z_d - \sum_{i=1}^d A_i z_i - A_0 \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^d B_i z_i \right) \quad (5.1.2)$$

Par conséquent, le polynôme caractéristique décrivant les pôles du système (5.1.1) est donné par

$$D(z_1, z_2, \dots, z_d) = \det \left(Ez_1 z_2 \dots z_d - \sum_{i=1}^d A_i z_i - A_0 \right) \quad (5.1.3)$$

Nous introduisons d'abord la notion de stabilité asymptotique des systèmes multidimensionnels à temps discret. Le système multidimensionnel (5.1.1) est asymptotiquement stable si le vecteur d'état $x(k_1, k_2, \dots, k_d)$ converge vers zéro pour une entrée nulle et pour des conditions initiales bornées, i.e.

$$\lim_{k_1, k_2, \dots, k_d \rightarrow \infty} \|x(k_1, k_2, \dots, k_d)\| = 0$$

for

$$\begin{aligned}
u(k_1, k_2, \dots, k_d) &= 0 \text{ for } k_i \in \mathbb{Z}_+ \\
\sup_{k_1 \in \mathbb{Z}_+} \|x(k_1, 0, \dots, 0)\| &< \infty \\
\sup_{k_2 \in \mathbb{Z}_+} \|x(0, k_2, \dots, 0)\| &< \infty \\
&\vdots \\
\sup_{k_d \in \mathbb{Z}_+} \|x(0, 0, \dots, k_d)\| &< \infty
\end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme Euclidienne. Nous rappelons maintenant les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité de tels systèmes en termes de polynôme caractéristique. Ces conditions étaient par exemple dérivés dans [20] mais nous rappelons ici les idées de base de la preuve.

Le système multidimensionnel (5.1.1) est asymptotiquement stable si et seulement si $D(z_1, z_2, \dots, z_d) \neq 0$ pour tout $z = (z_1, z_2, \dots, z_d)$, tels que $|z_i| \leq 1$, $i = 1, \dots, d$.

Démonstration. Soit

$$T(z_1, z_2, \dots, z_d) = \frac{N(z_1, z_2, \dots, z_d)}{D(z_1, z_2, \dots, z_d)} = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \dots \sum_{m_d=0}^{\infty} H_{m_1 m_2 \dots m_d} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_d^{m_d} \quad (5.1.4)$$

Où le coefficients $H_{m_1 m_2 \dots m_d}$ représente la réponse impulsionnelle du système (5.1.1). La fonction rationnelle $T(z_1, z_2, \dots, z_d)$ est stable si et seulement si la réponse impulsionnelle converge vers zéro pour tout $z = (z_1, z_2, \dots, z_d)$ dans le polydisque $|z_i| \leq 1$ avec, $i = 1, \dots, d$. En utilisant les propriétés de la convergence d'une telle série, ceci implique que $T(z_1, z_2, \dots, z_d)$ est analytique pour tout $z = (z_1, z_2, \dots, z_d)$ dans le polydisque $|z_i| \leq 1$, $i = 1, \dots, d$. pour fonction rationnelle, cela implique également que $D(z_1, z_2, \dots, z_d)$ n'a pas de racines dans le polydisque. \square

La condition équivalente suivante a été dérivée de [55]. La preuve, donné dans [55], est basée sur le fait que $D(z_1, z_2, \dots, z_d)$ est polynomiale dans chaque z_i , $i = 1, \dots, d$. Le système multidimensionnel (5.1.1) est asymptotiquement stable si et seulement si le

polynôme suivant n'a pas de racines dans le cercle unité.

$$\begin{cases} D(z_1, 1, 1, \dots, 1) \neq 0 & \text{for } |z_1| \leq 1 \\ D(1, z_2, 1, \dots, 1) \neq 0 & \text{for } |z_2| \leq 1 \\ \vdots \\ D(1, 1, \dots, 1, z_d) \neq 0 & \text{for } |z_d| \leq 1 \end{cases} \quad (5.1.5)$$

et si

$$D(z_1, z_2, \dots, z_d) \neq 0 \quad \text{for } |z_i| = 1, i = 1, \dots, d. \quad (5.1.6)$$

C'est précisément cette formulation de conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité, que nous utilisons dans la section suivante pour dériver une condition LMI pour la stabilité de (5.1.1).

5.1.2 Condition de Stabilité par LMI

Le modèle (5.1.1) est asymptotiquement stable s'il existe d matrices symmetriques réelles X_1, \dots, X_d et $d + 2$ matrices héritiennes $Y_i, i = 0, \dots, d + 1$ tels que les LMIs suivantes sont faisables,

$$X_i \succ 0, \text{ et } \hat{A}_i^T X_i \hat{A}_i - (E - A_i)^T X_i (E - A_i) \succ 0, \text{ pour } i = 1, \dots, d, \quad (5.1.7)$$

$$\sum_{i=0}^{d+1} Y_i = 0, \quad V^T V + \text{diag} \{Y_0, Y_1, \dots, Y_d, Y_{d+1}\} \succ 0, \quad (5.1.8)$$

where $\hat{A}_i := \sum_{\ell=0, \ell \neq i}^d A_\ell$, et $V := \begin{bmatrix} -A_0 & -A_1 & \dots & -A_d & E \end{bmatrix}$.

Démonstration. Les conditions (5.1.5) peuvent être reformulé en termes de polynôme caractéristique comme suit :

$$\begin{cases} D(z_1, 1, 1, \dots, 1) = \det[z_1(E - A_1) - \hat{A}_1] \neq 0 \text{ pour } |z_1| \leq 1 \\ D(1, z_2, 1, \dots, 1) = \det[z_2(E - A_2) - \hat{A}_2] \neq 0 \text{ pour } |z_2| \leq 1 \\ \vdots \\ D(1, 1, \dots, 1, z_d) = \det[z_d(E - A_d) - \hat{A}_d] \neq 0 \text{ pour } |z_d| \leq 1. \end{cases} \quad (5.1.9)$$

Ceux-ci sont satisfaits si et seulement si les LMI suivants sont réalisables avec des matrices symétriques réelles X_i :

$$\hat{A}_i^T X_i \hat{A}_i - (E - A_i)^T X_i (E - A_i) \succ 0, \text{ et } X_i \succ 0, \text{ pour } i = 1, \dots, d. \quad (5.1.10)$$

La condition (5.1.6) exprime le fait que pour tout $\omega_i \in \mathbb{R}$ avec $i = 1, 2, \dots, d$, nous avons

$$\begin{aligned} D(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}, \dots, e^{j\omega_d}) &= \det[e^{j\omega_1} e^{j\omega_2} \dots e^{j\omega_d} E - A_0 - e^{j\omega_1} A_1 - e^{j\omega_2} A_2 \dots - e^{j\omega_d} A_d] \\ &= \det[V \Pi_D(\omega_1, \dots, \omega_d)] \neq 0 \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

où

$$\Pi_D(\omega_1, \dots, \omega_d) := \begin{bmatrix} I & e^{j\omega_1} I & e^{j\omega_2} I & \dots & e^{j\omega_d} I & e^{j \sum_{i=1}^d \omega_i} I \end{bmatrix}^T.$$

C'est facile de vérifier que

$$\Pi_D^*(\omega_1, \dots, \omega_d) \text{diag} \{Y_0, Y_1, \dots, Y_d, Y_{d+1}\} \Pi_D(\omega_1, \dots, \omega_d) = 0$$

if Y_i sont hermitiennes et $\sum_{i=0}^{d+1} Y_i = 0$. Nous avons donc

$$\Pi_D^*(\omega_1, \dots, \omega_d) V^T V \Pi_D(\omega_1, \dots, \omega_d) \succ 0 \text{ et } \det[V \Pi_D(\omega_1, \dots, \omega_d)] \neq 0$$

à condition de pouvoir trouver les matrice hermitiennes Y_i tel que

$$\sum_{i=0}^{d+1} Y_i = 0, \text{ and } V^T V + \text{diag} \{Y_0, Y_1, \dots, Y_d, Y_{d+1}\} \succ 0.$$

Ceci est clairement une condition suffisante pour l'inégalité (5.1.6). \square

5.1.3 Système multidimensionnel à temps continu

En dernier lieu nous considérons un système multidimensionnel à temps continu, Nous dérivons maintenant des conditions LMIs pour la stabilité des modèles à espaces d'états multidimensionnels à temps continu de la forme suivante. Un modèle à espaces d'états multidimensionnel à temps continu peut être décrit par les équations,

$$\begin{cases} E \frac{\partial^n x(t_1, t_2, \dots, t_d)}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_d} = A_0 x(t_1, t_2, \dots, t_d) + \sum_{i=1}^d A_i \frac{\partial^i x(t_1, t_2, \dots, t_d)}{\partial t_i} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial^i u(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial t_i} \\ y(t_1, t_2, \dots, t_d) = C x(t_1, t_2, \dots, t_d) \end{cases} \quad (5.1.12)$$

Où le vecteur d'état est $x(t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^n$, le vecteur d'entrée $u(t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^m$, le vecteur de sortie $y(t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^p$ et A_0, A_i, B_i $i = 1, 2, \dots, d$, C et E sont des matrices réelles de dimensions appropriées et E est supposée inversible. En appliquant la transformée de Laplace, nous obtenons la fonction de transfert dD,

$$T(s_1, s_2, \dots, s_d) = C \left(E s_1 s_2 \dots s_d - \sum_{i=1}^d A_i s_i - A_0 \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^d B_i s_i \right). \quad (5.1.13)$$

Le polynôme caractéristique de (5.1.12) est

$$D(s_1, s_2, \dots, s_n) = \det \left(E s_1 s_2 \dots s_d - \sum_{i=1}^d A_i s_i - A_0 \right) \quad (5.1.14)$$

Le système multidimensionnel à temps continu (5.1.12), est asymptotiquement stable si et seulement si le vecteur d'état $x(t_1, t_2, \dots, t_d)$ converge vers zéro pour une entrée nulle et pour des des conditions initiales bornées, i.e.

$$\lim_{t_1, t_2, \dots, t_d \rightarrow \infty} \|x(t_1, t_2, \dots, t_d)\| = 0$$

pour

$$\begin{aligned} u(t_1, t_2, \dots, t_d) &= 0 \text{ for } t_i \in \mathbb{R}_+ \\ \sup_{k_1 \in \mathbb{R}_+} \|x(t_1, 0, \dots, 0)\| &< \infty \\ \sup_{k_2 \in \mathbb{R}_+} \|x(0, t_2, \dots, 0)\| &< \infty \\ &\vdots \\ \sup_{k_d \in \mathbb{R}_+} \|x(0, 0, \dots, t_d)\| &< \infty \end{aligned}$$

Une condition algébrique pour la stabilité de tels systèmes a été donnée dans [20]. Le système multidimensionnel à temps continu (5.1.12), est asymptotiquement stable si et seulement si $D(s_1, s_2, \dots, s_d) \neq 0$ pour tout $s = (s_1, s_2, \dots, s_d)$, tels que $\Re s_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, d$.

La condition équivalente que nous allons utiliser ici est basée sur les résultats obtenus dans [55] et est donnée ci-dessous. Le système multidimensionnel à temps continu (5.1.12),

Ceux-ci sont satisfaits si et seulement si les LMIs suivants sont faisables avec les matrices symmétriques X_i :

$$A_i^T X_i A_0 + A_0^T X_i A_i \succ 0, \text{ et } X_i \succ 0, \text{ pour } i = 1, \dots, d. \quad (5.1.20)$$

Les conditions (5.1.18) exprime le fait que pour tout $\omega_i \in \mathbb{R}$ avec $i = 1, 2, \dots, d$, nous avons

$$\begin{aligned} D(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_d) &= \det[j\omega_1 j\omega_2 \dots j\omega_d E - A_0 - j\omega_1 A_1 - j\omega_2 A_2 \dots - j\omega_d A_d] \\ &= \det[V\Pi_C(\omega_1, \dots, \omega_d)] \neq 0 \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

où

$$\Pi_C(\omega_1, \dots, \omega_d) := \begin{bmatrix} I & j\omega_1 I & j\omega_2 I & \dots & j\omega_d I & j^d \prod_{i=1}^d \omega_i I \end{bmatrix}^T.$$

Il est facile de vérifier que pour toutes les fréquences ω_i et pour $e := (-1)^d$

$$\Pi_C^*(\omega_1, \dots, \omega_d) \begin{bmatrix} 0 & Y_{0,1} & \dots & Y_{0,d} & Y_{0,d+1} \\ Y_{0,1} & 0 & \dots & Y_{1,d} & Y_{1,d+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Y_{0,d} & -Y_{1,d} & \dots & 0 & Y_{d,d+1} \\ -eY_{0,d+1} & eY_{1,d+1} & \dots & eY_{d,d+1} & 0 \end{bmatrix} \Pi_C(\omega_1, \dots, \omega_d) = 0.$$

La matrice Y est hermitienne pourvu que ses blocs non diagonaux avec le signe égal soient hermitiens, et ceux avec des signes opposés sont anti-hermitiens. Par suite Nous obtenons

$$\Pi_C^*(\omega_1, \dots, \omega_d) V^T V \Pi_C(\omega_1, \dots, \omega_d) \succ 0 \text{ et } \det[V\Pi_C(\omega_1, \dots, \omega_d)] \neq 0$$

à condition de pouvoir trouver une matrice hermitienne Y avec la structure ci-dessus et avec $e := (-1)^d$, tels que :

$$V^T V + \begin{bmatrix} 0 & Y_{0,1} & \dots & Y_{0,d} & Y_{0,d+1} \\ Y_{0,1} & 0 & \dots & Y_{1,d} & Y_{1,d+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Y_{0,d} & -Y_{1,d} & \dots & 0 & Y_{d,d+1} \\ -eY_{0,d+1} & eY_{1,d+1} & \dots & eY_{d,d+1} & 0 \end{bmatrix} \succ 0.$$

Ceci est clairement une condition suffisante pour l'inégalité (5.1.18). □

Remarque 18. *Dans cette partie de la thèse, nous avons trouvé des conditions suffisantes pour que les systèmes d -dimensionnels soient asymptotiquement stables. Les conditions que nous avons développées ici sont de nouveau test décrit par des LMIS.*

Bibliographie

- [1] Anderson B.D.O. and Jury E.I., "Stability of multidimensional digital filters." IEEE Trans. Circ. Syst. CAS-33(3) :261-266, (1986).
- [2] ANTONIOU, G.E. and MICHAEL, M.T. "Second-Order Two-Dimensional Systems : Computing The Transfer Function" Journal of Electrical Engineering, Vol. 55, No. 11-12, 2004, 296-300.
- [3] ATTASI, S., "Systèmes linéaires homogènes à deux indices," IRIA RAPPORT Laroria, Vol. 31, September 1973.
- [4] BOUAGADA, D., "Sur L'existence et L'unicité Des Solutions des Systèmes Implícites," Thèse de Magister.
- [5] BOUAGADA, D., "Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs," Thèse de Doctorat d'Etat, <https://perso.uclouvain.be/paul.vandooren/thesisbouagada>. 2007.
- [6] BOUAGADA, D. and VAN DOOREN, P. "On the Stability of 2D State-Space Models," Numer. Linear Algebra with Appl. 2011; 00 :1-9
- [7] BOYD, S., EL GHAOUI, L., FERON, E. and BALAKRISHNAN, V., "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory," Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- [8] DITKINE, V. ET PROUDNIKOV, A., "Calcul Opérationnel," Edition Mir 1979.
- [9] DULLERUD, G.E. and PAGANINI, F., "A Course in Robust Control Theory : A Convex Approach," Edition Springer-Verlag New York Inc 2010.

- [10] DUMITRESCU, B., "Multidimensional Stability Test Using Sum-Of-Squares Decomposition," Tampere International Center for Signal Processing, Tampere University of Technology, 2005.
- [11] DUMITRESCU, B., *Positive Trigonometric Polynomials and Signal Processing Applications*, Springer Verlag Berlin, 2007.
- [12] ELOSMANI, A.O., et BOUAGADA, D., "Sur L'équivalence et la réduction des modèles bidimensionnels," 2^{ème} Journées scientifiques de la Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie, 25-26 Mai 2011 UMAB.
- [13] FORNASINI, E. and MARCHESINI, G., "State-space realization theory of two-dimensional filters," IEEE Trans. Autom. Contr, Vol. AC-21, pp. 484-491, 1976.
- [14] FORNASINI, E. and MARCHESINI, G., "Doubly-indexed dynamical system : state-space models and structural properties," Math. Systems Theory, Vol. 12, no. 1, pp.59-72, 1978/79.
- [15] GANTMACHER, F.R., "Théorie Des Matrices Tom 1," Edition Dunod Paris 1966.
- [16] GANTMACHER, F.R., "Théorie Des Matrices Tom 2," Edition Dunod Paris 1966.
- [17] GIVONE, D. D. and ROESSER, R. P., "Multidimensional linear iterative circuits general properties," IEEE Trans. On Computers, Vol. C-21, no. 10, pp. 1067-1073, 1972.
- [18] HENRION, D., "Inégalités Matricielles Quadratiques et Stabilité des Polynômes," LAAS-CNRS, Toulouse, France, 20 Février 2006.
- [19] HILAIRE, T., "L'optimisation convexe pour la conception et l'analyse des lois de commande," sous la direction de Philippe CHEVREL, -ARMINES- 16 août 2003.
- [20] Jury E.I., "Inners and Stability of Dynamic Systems." John Wiley sons : New York. London. Sydney. Toronto, 1973.
- [21] KACZOREK, T., "The singular general model of 2-D systems and its solution," IEEE Trans. Autom. Contr., AC-33 (1988) 1060-1061.

- [22] KACZOREK, T., "Singular Tow-Dimensional Continuous-Discrete Linear Systems," *Advances in Systems Science and Applications, Inauguration Issue 103-108, 1995.*
- [23] KACZOREK, T., "Solutions of Standard Models Equivalent to Singular 2D Models," *BULLETIN OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES TECHNICAL SCIENCES, Vol. 48, no. 1, pp.95-104, 2000.*
- [24] KACZOREK, T., "Structure Decomposition of Normal 2D Transfer Matrices," *BULLETIN OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES TECHNICAL SCIENCES, Vol. 52, no. 4, 2004.*
- [25] LAROCHE, E., "Commande Robuste," *Ecole Nationale Supérieure De Physique De Strasbourg, 2010-2011.*
- [26] LEWIS, F.L., "A Review of 2-D Implicit Systems" *Automatica. Vol 28. No 2.pp. 345-354. 1992. Printed in Great Britain.*
- [27] MALAKORN, T., "Multidimensional Linear Systems and Robust Control," *Doctora of Philosophy in Electrical Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University, April 2003.*
- [28] MICHAEL, T. M., "Multiorder multidimensional systems : Computation of the transfer function using the DFT," *A Master's Thesis, Montclair State University, May 2006.*
- [29] MORI, Y., "Filtrage numérique en traitement du signal," *Edition Hermes Science Publication 2007.*
- [30] PASTRE, D., "Normes vectorielles, Normes matricielles et Conditionnement," *Méthodes numériques 2003/2004 Université René Descartes UFR de mathématiques et informatique.*
- [31] SCHERER, C. and WEILAND, S., "Lecture Notes DISC Course on Linear Matrix Inequalities in Control," *Version 2.0 : April, 1999.*
- [32] Xiao, Y., "2-D Laplace-Z Transformation," *IEICE TRANS. FUNDAMENTALS, VOL. E89-A, No. 5 May 2006.*

- [33] H. Gao, J. Lam, S. Xu, C. Wang, ‘Stabilization and H_∞ control of two-dimensional Markovian jump systems’, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 01 December 2004.
- [34] E. Rogers, D.H. Owens, ‘Stability theory and performance bounds for a class of two-dimensional linear systems with interpass smoothing effects’, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 01 December 1997.
- [35] S. Gutlan, ‘State-Space Stability of Two-Dimensional Systems’, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 01 March 1987.
- [36] V.C. Pal and R. Negi, ‘based anti-windup controller for two-dimensional discrete delayed systems in presence of actuator saturation’, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 11 January 2017.
- [37] M.H. Lin, J.S.H. Tsai, C.W. Chen, L.S. Shieh, ‘Novel state-space self-tuning control for two-dimensional linear discrete-time stochastic systems’, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 01 June 2010.
- [38] L. Xu, L. Wu, Q. Wu, Z. Lin, and Y. Xiao, ‘On realization of 2D discrete systems by Fornasini-Marchesini model’, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 3, no. 4, pp. 631-639, December 2005.
- [39] W. Chen and Y. Lin, ‘2D system approach based output feedback repetitive control for uncertain discrete-time systems’, *International Journal of Control, Automation and Systems*, Vol. 10, Issue 2, pp 257-264, April 2012.
- [40] C.K. Ahn and M.V. Bas, ‘Two-dimensional dissipative control and filtering for Roesser model’, *IEEE Transaction on automatic control*, Vol. 60, No. 7, July 2015.
- [41] J.M. Dion and C. Commault, ‘Input addition for the controllability of graph-based systems’, *10th IEEE International Conference on Control and Automation*, Jun 2013.
- [42] A.Y. Kibangou and C. Commault, ‘Observability in Connected strongly regular graphs and distance regular graphs’, *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, *IEEE*, pp.360-369. 2014.

- [43] C. Commault and J.M. Dion, ‘The single-input minimal controllability problem for structured systems’, *Systems and Control Letters, Elsevier*, 80, pp.50-55, 2015.
- [44] C. Commault, J.M. Dion and T. Boukhobza, ‘On the fixed controllable subspace in linear structured systems’, *Systems and Control Letters, Vol. 102*, pp.42-47, April 2017.
- [45] S. Maza, C. Simon and T. Boukhobza, ‘Impact of the actuator failures on the structural controllability of linear systems : a graph theoretical approach’, *IET Control Theory and Applications, Institution of Engineering and Technology*, pp.412-419, 2012.
- [46] K.J. Reinschke, ‘Multivariable control a graph-theoretic approach’, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 1988.
- [47] K. Murota, ‘Systems analyses by graphs and matroids. Structural solvability and controllability’, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg* 1987.
- [48] N. Andrei, ‘Sparse systems. digraph dpproach of large-scale linear systems theory’, *Verlag TUV Rheinland, Koln* 1985.
- [49] J. Eisenfeld, ‘Block diagonalization of partitioned matrix operators’, *Linear Algebra and its Applications*, vol. 6 pp. 183-191, 1973.
- [50] J. Wirth, ‘Block-diagonalisation of matrices and operators’, *Linear Algebra and its Applications*, vol. 431 pp. 895–902, 2009.
- [51] C. Lin, ‘Structural controllability’, *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 19, pp. 201-208, 1974.
- [52] E. Fornasini and E. Valcher, ‘Directed graphs, 2D state models, and characteristic polynomials of irreducible matrix pairs’, *Linear Algebra and its Applications Vol. 263*, pp. 275-310, 15 September 1997.
- [53] E. Fornasini and E. Valcher, ‘Primitivity of positive matrix pairs : algebraic characterization, graph theoretic description and 2D systems interpretation’, *SIAM. J. Matrix Anal and Appl*, pp. 71-88, 1998.

- [54] R. Pereira, P. Rocha and R. Simoes, 'Characterizations of global reachability of 2D structured systems', *Multidimensional Systems and Signal Processing*, Vol. 24, Issue 1, pp. 51-64, March 2013.
- [55] Strintzis, M.G., "Tests of Stability of Multidimensional Filters." *IEEE Trans. Circ. Syst.*, CAS-24(8) :432-437, (1977).