



République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS

Faculté de science et sciences de l'ingénieur

Département de Génie Mécanique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

Spécialité : **Génie Mécanique**

N° D'ordre : /2012

Option : **Polymère et Matériaux Composites**

MODELISATION PAR LES ELEMENTS FINIS DE L'ADHESION ENTRE DEUX PLAQUES

Présente par **Mr : HAMDY Mawloud**

Soutenu le 05/09/2012 devant le **jury** :

Président :

Mr : A. SADOK

Professeur

(U. Mostaganem)

Directeur du Mémoire :

Mr : R. ZENASNI

Professeur

(U. Mostaganem)

Examineurs :

Mr : M. BENDOUKHA

Maître de Conférences A (U. Mostaganem)

Mr : S. HOUAT

Maître de Conférences A (U. Mostaganem)

Mr : H. GUECHICHI

Maître de Conférences A (U. Mostaganem)

Année : 20011/2012

Remerciements

Merci dieu, qui nous concède la force, la volonté et le courage pour arriver à cette étape dans nos chemins scolaires.

J'exprime mes profonds remerciements à mon directeur de mémoire, le Pr. ZENASNI Ramdane pour l'aide compétente qu'il m'a apportée et pour son encouragement. Son œil critique m'a été très précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité des différentes parties.

J'exprime ma profonde gratitude aux enseignants chargés de l'enseignement de la post graduation (Polymères et Matériaux Composites) sous la responsabilité du Pr. ZENASNI Ramdane.

Ensuite, c'est à Monsieur le Pr. SADOK Ahmed, que j'adresse mes sincères remerciements pour sa participation au Jury en sa qualité de membre.

Je souhaite remercier également, Messieurs les examinateurs le Dr. BENDOUKHA Mohammed, le Dr. HOUAT Samir et le Dr. GUECHICHI Hocine d'avoir accepté de juger ce travail.

Je n'oublierai pas les aides permanentes reçues du personnel administratif de l'INES de Mostaganem au secrétariat de la post graduation.

Dédicace

*Je souhaite dédier ce modeste travail
Synonyme de concrétisation de tous mes
Efforts fournis ces deux dernières années en magister:
A mes très chères parents pour leurs
Conseille.*

A mes frères Mohammed, Mahmoud, Abdelkrim, belkacem, et ma très chère sœur Malika

A toute ma famille

A mes amis

A tous mes camarades de promotion de post graduation (Polymères et Matériaux Composites) 2011

Mawloud

SOMMAIRE

SOMMAIRE

NOTATIONS	I
LISTE DES FIGURES	IV
LISTE DES TABLEAUX	VI

Chapitre I

Introduction générale

I-1-Introduction.....	1
I-2-Objectifs du mémoire.....	2
I-3-Structure du travail de mémoire.....	2

Chapitre II

Généralités sur Les matériaux composites

II-1- Généralités.....	5
II-2- Les composants.....	6
II-2-1- Le renfort.....	6
II-2-2- La matrice.....	6
II-3- Les renforts.....	7
II-3-1- Les fibres.....	7
II-4- Les matrices.....	10
II-4-1- Les différentes familles de matrice.....	10
II-4-2- Définitions.....	11
II-5- Les matériaux composites structuraux.....	12

II-5-1- Monocouche.....	12
II-5-2- Stratifiés.....	13
II-5-3- Sandwichs.....	14

Chapitre III

Évaluation non destructive de la qualité du collage

III-1- Caractéristique de collage.....	16
a)- Applications.....	16
b)- La qualité et la résistance.....	20
III-2- Configurations des joints.....	21
III-2-1- Classification des joints.....	21
III-3- Colle sur un seul joint.....	22
III-4- Les modes de rupture de joints collés.....	23
III-5- Etat de connaissances.....	24

Chapitre IV

Formulation par les éléments finis de l'adhésion entre deux plaques

IV-1- Introduction.....	29
IV-2- Déplacements et déformations selon les théories FSDT et HSDT.....	30
IV-3- Description de l'élément fini Serendip.....	33
IV-4- Approximation des déplacements et les déformations par la théorie HSDT.....	36
IV-5- Approximation des déplacements et les déformations par la théorie FSDT.....	39
IV-6- Déplacements et déformations mécaniques par la théorie layerwise-FSDT.....	41
IV-7- Approximation par éléments finis de déplacements et déformations par la théorie layerwise-FSDT.....	46
IV-8- Théorie mathématique.....	48
IV-8-1- Séparation des composantes de la contrainte de Von Mises.....	48
IV-8-2- Longueur de transfert de charge et de rendement : un modèle unidimensionnel.....	49

Chapitre V

Rappels sur la mécanique de la rupture

V-1- Introduction.....	52
V-2- Hypothèses.....	52
V-2-1- Endommagement et mécanique de la rupture.....	52
V-2-2- Fissures statiques, quasi-statiques, dynamiques.....	53
V-2-3- Modes de rupture.....	54
V-2-4- Mécanique linéaire, et non-linéaire de la rupture.....	55
V-2-5- Approche Locale.....	58
V-2-5-1- Facteurs d'intensité des contraintes.....	58
V-2-5-2- Calcul des facteurs d'intensité des contraintes.....	61
V-3- Approche Globale ou Energétique.....	63
V-3-1- Le taux de restitution d'énergie.....	63
V-3-2- Intégrales de contour.....	65

Chapitre VI

Résultats et interprétations

VI-1- Introduction.....	68
VI-2- Modélisation de problèmes.....	68
VI-2-1- Modèle par éléments finis.....	69
VI-2-2- Chargement.....	69
VI-2-3- Conditions aux limites.....	69
VI-2-4- Propriétés des matériaux.....	69
VI-3- Effet de l'orientation de la fissure sur les contraintes et les déformations.....	71
VI-4- Effet de l'épaisseur des plaques et les rayons d'entaille sur les contraintes et les déformations	79
VI-5- Effet de l'épaisseur de l'adhésive sur les contraintes et les déformations.....	86
VI-6- Effet de l'orientation de la fissure sur l'intégrale J.....	93

VI-7- Effet de l'épaisseur des plaques et les rayons d'entaille sur l'intégrale J.....	96
VI-8- Effet de l'épaisseur de l'adhésive sur l'intégrale J.....	99
VI-9- Contour des contraintes.....	102
VI-9-1- Plaque en présence d'une seule entaille semi-circulaire.....	102
VI-9-2- Plaque en présence d'une seule entaille circulaire.....	104
VI-10- Contour des déformations.....	107
VI-10-1- Plaque en présence d'une seule entaille semi-circulaire.....	107
Conclusion générale et perspectives futures.....	112

Références bibliographiques

NOTATIONS

NOTATIONS

Majuscules latines

N_i	: Fonctions de forme de l'élément Serendip à 8 nœuds.
$\{\bar{U}\}, \{\bar{U}\}, \{\bar{U}\}$: Vecteurs des déplacements des théories FSDT, HSDT et layerwise-FSDT.
$[\psi]$: Matrice modale.
T	: Temps.
N_{add}	: Nombre total de ddIs (degré de liberté).
N_c	: Nombre total de pli selon l'épaisseur du stratifié.
K_{IC}	: La ténacité du matériau.
E	: Le module d'Young.
T	: La contrainte transverse.
W_e	: Energie de déformation élastique.
W_{ext}	: Energie potentielle des forces extérieures f.
W_p	: Energie potentielle totale.
G	: Le taux de restitution d'énergie.
R	: Rayon de l'entaille.
K_α	: Facteur d'intensité de contraintes en mode I, II et III.
J	: Intégrale de Rice.
L	: Longueur de la plaque.

Minuscules latines

a	: La longueur de fissure.
f, g	: Les fonctions de la répartition angulaire.
μ	: Le module de cisaillement.
e_p	: Epaisseur de la plaque.
w	: Largeur de la plaque.
e_c	: Epaisseur de l'adhésive.
h	: Largeur de l'adhésive.

Minuscules grecques

(x, y)	: Système de coordonnées globales d'élément plan.
(ξ, η)	: Système de coordonnées locales d'élément plan.
$\{u, v, w\}$: Composantes du champ des déplacements.
ε	: Critère convergence.
ν	: Le coefficient de poisson.
(r, θ)	: Coordonnées polaires.
α	: Facteur de correction pour le calcul de facteur d'intensité de contraintes.
θ	: Angle orientation de fibres.
σ	: Contrainte appliquée dans la plaque.
σ_0	: La limite élastique.
δ	: Écartements de fissure.
k	: Coefficient de Poisson effectif.
σ_{xx}	: Contrainte dans la direction x .
σ_{yy}	: Contrainte dans la direction y .
τ_{xy}	: Contrainte tangentielle.
γ_{xx}	: Déformation dans la direction x .
γ_{yy}	: Déformation dans la direction y .
γ_{xy}	: Déformation angulaire.

Divers

2D	: Bidimensionnel.
3D	: Tridimensionnel.
TD	: Thermodurcissable.
TP	: Thermoplastiques.
UD	: Unidirectionnelles.

Abréviation

ddl	: Degré de liberté.
MEF	: Méthode des Eléments Finis.
FSDT	: Théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre.
HSDT	: Théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur.
LAYERWISE-FSDT	: Théories en couches équivalentes partielles dépendants.
FIC	: Facteur d'intensité des Contraintes.
ASTM	: American Society for Testing and Materials.
MELR	: Mécanique élastique linéaire de la rupture.
HRR	: Hutchinson, Rice et Rosengren.

LISTE DES FIGURES

Figure (II.1) :	Les différents types des constituants du composite	7
Figure (II.2) :	Les différents types des matériaux du renfort	9
Figure (II.3) :	Les différentes familles de matrice	11
Figure (II.4) :	Fibres longues (pli unidirectionnelles)	12
Figure (II.5) :	Empilement de monocouches du Stratifiés	13
Figure (II.6) :	Séquentiels d'empilement du Stratifiés	13
Figure (II.7) :	Les compositions du Sandwichs	14
Figure (III.1) :	Exemples de plusieurs conceptions de joints	19
Figure (III.2) :	Schéma d'une structure renforcée de fibres composites stratifiées (multidirectionnels)	18
Figure (III.3) :	Géométries conjointe	22
Figure (III. 4) :	Diverses configurations à un seul joint de recouvrement	23
Figure (III.5) :	Modes de rupture commune des joints	24
Figure (IV.1) :	Elément fini rectangulaire à huit nœuds en coordonnées élémentaire (A) et locales (B)	34
Figure (IV.2) :	Variables nodales du nœud 1 et 5 d'un élément fini Serendip utilisé par la théorie HSDT pour un modèle de structure composite à trois couches	36
Figure (IV.3) :	Variables nodales de l'élément fini de la théorie layerwise-FSDT, selon les nœuds 1, 4 et 7 des plis 1, 2 et 3, respectivement, avant (A) et après (B) l'imposition de la continuité des déplacements mécaniques	42
Figure (IV.4) :	-a) L'élément infinitésimal utilisé par la théorie unidimensionnelle, montrant les contraintes et les déplacements. -b) la zone plastique de l_p longueur avec exponentielle queue dans la contrainte de cisaillement d'adhésif.	50

Figure (V.1) :	Modes de rupture	54
Figure (V.2) :	Les zones de champs mécaniques	55
Figure (V.3) :	Plasticité en pointe de fissure	56
Figure (V.4) :	Champ des contraintes au voisinage de la fissure	62
Figure (V.5) :	Relation entre G et la complaisance de la structure	64
Figure (V.6) :	Contour d'intégration	65
Figure (V.7) :	Détermination de J par la méthode de la complaisance	66
Figure (VI.1) :	Plaques en composites collées	68
Figure (VI.2) :	Localisation de la fissure	70
Figure (VI.3) :	Maillage par éléments finis des plaques collées	71
Figure (VI.10) :	Etats de contrainte et de déformation pour une taille de fissure de 4mm et un angle de 90°	78
Figure (VI.11) :	Localisation de l'entaille semi-circulaire	79
Figure (VI.18) :	Variation des contraintes et les déformations pour un rayon d'entaille de 4mm et 1.5mm d'épaisseur	85
Figure (VI.25) :	Variation des contraintes et les déformations pour un rayon d'entaille de 5mm et 1mm l'épaisseur de l'adhésive	92
Figure (VI.41) :	Entaille circulaire	104
Figure (VI.48) :	Variation des niveaux de contraintes normales σ_{xx} au fond de l'entaille (semi-circulaire).	110

LISTE DES TABLEAUX

Tableau (II.1) :	Propriétés mécaniques des poly-cristallins	8
Tableau (II.2) :	Propriétés mécaniques et différents caractéristiques des fibres	10
Tableau (II.3) :	Les différentes caractéristiques mécaniques des résines	12
Tableau (VI.1) :	Propriétés mécaniques du matériau composite T300/934 graphite / époxy	69
Tableau (VI.2) :	Propriétés mécaniques du matériau époxy (colle)	70

Résumé

Ce mémoire de magister a pour objectif la modélisation numérique par la méthode des éléments finis de l'adhésion de deux plaques en composites stratifiées à l'aide d'une adhésive époxy. Le logiciel commercial Abaqus a été utilisé pour la modélisation. Plusieurs cas ont été traités, on trouve l'effet de la longueur de la fissure et son orientation sur les contraintes et les déformations, le deuxième cas porte sur l'influence de l'épaisseur de l'adhésive sur les états de contraintes et les déformations, le troisième est consacré à l'influence de l'épaisseur des plaques sur les l'intégrale J et les contraintes et les déformations. Les résultats numériques fournis par le logiciel Abaqus ont été alors représentés graphiquement que ce soit pour les contraintes, les déformations et l'intégrale J. Ces résultats ont été comparés à ceux de la littérature.

Mots clefs : éléments finis, plaques en composites stratifiées, adhésive époxy.

Abstract

The objective of this memory of magister's was the numerical modeling by a finite element method the adhesive joint of two laminated composite plates using an epoxy adhesive. The commercial software ABAQUS was used for modeling. Several cases have been treated with include the effect of crack length and its angle orientation on the stresses and strains, the second case concerns the influence of the adhesive thickness on the stress states and deformations, the third is devoted to the influence of plate thickness on the J integral, stress and strain. The numerical results provided by the software Abaqus were then represented graphically both for the stress, strain, and the integral J. These results were compared with those in the literature.

Keyword : finite element, laminated composite plates, epoxy adhesive.

ملخص

وكان الهدف من مذكرة الماجستير في النمذجة العددية باستعمال طريقة العناصر المحدودة لإنضمام صفائح مغلقة المركبين باستخدام لاصق الايبوكسي. تم استخدام abaqus البرمجيات التجارية لوضع النماذج. تم التعامل مع عدة حالات تشمل تأثير طول صدع في تركيزه على الضغوط والتوترات، والحالة الثانية، فتتعلق بتأثير سمك لاصق على حالات الضغوط والتوترات، وتخصص الحالة الثالثة لتأثير سماكة لوحة على متكامل ج و الضغوط والتوترات. ثم كانت النتائج الرقمية التي يقدمها Abaqus البرامج المرسومة لكل من الضغوط، والتوترات، ومتكامل ج. وتمت مقارنة هذه النتائج مع تلك التي في المؤلفات.

كلمات مفتاح : العناصر المحدودة ، لوحات مركبة مغلقة ، لاصق الايبوكسي.

Chapitre I

Introduction générale

Introduction générale

I-1-Introduction

L'utilisation des adhésifs pour l'assemblage de plusieurs constituants a donné lieu à une multitude de recherches analytiques et numériques pour vérifier l'état de contrainte dans les régions critiques afin de prévoir la résistance ultime et la durée de vie en service. Les approches analytiques sont développées par Golan et Reissner [1] dans laquelle la réponse élastique d'un joint de colle est analysée en utilisant des hypothèses simplificatrices pour l'état de contrainte et de déformation avec les relations de déplacement. Les recherches ultérieures ont portées sur l'élaboration d'analyses pour les différents paramètres tels que les adhésives non isotrope, les effets de l'épaisseur du joint de colle [2,4], la flexibilité de l'adhésif [3,5], la non-linéarité géométrique et matérielle de la colle et les pièces à joindre [6,7], l'effet de filet de colle [8,9], les singularités de contrainte [10,12], les effets de l'environnement [13], la combinaison de chargement [14,15], et les divers types de joints [11,16,17].

Les approches analytiques sont limitées pour élucider l'effet des paramètres sur le comportement. Une limitation est inévitable à cause de la complexité de l'intégration de tous les paramètres importants dans un cadre analytique unique pour l'analyse d'une configuration générale. Une autre approche est la méthode des éléments finis qui est une technique numérique robuste pour modéliser n'importe quelle configuration de joint de colle. Diverses formulations par éléments finis pour l'analyse des joints de colle ont été rapportées dans la littérature. Un élément simple tenant en compte le cisaillement a été développé, cet élément négligent l'inclusion des contraintes normales a été utilisé pour déterminer les facteurs d'intensité de contrainte dans les surfaces à coller fissurées et non fissurées [18]. Un élément spécialisé a été développé qui fourni une représentation combinée des contraintes normales et de cisaillements de l'adhésif [19]. Carpenter [20] a formulé les éléments 1-D et 2-D pour la plaque, qui intègrent des paramètres permettant diverses hypothèses simplificatrices concernant le comportement de l'adhésif. Une extension de l'approche de Carpenter, et l'application des éléments 3-D. L'élément obtenu, dérive de la formulation de type barre et ne convient pas pour la représentation 3-D élastique. Un des éléments finis mixtes est discuté dans [22], qui imposent explicitement des conditions de contrainte à l'interface, mais les solutions sont limitées à des configurations connues.

L'étude a été menée pour évaluer l'application de la méthode des éléments hybrides [23,24] en particulier à des configurations d'élément couche pour obtenir avec une précision de calcul. La formulation des éléments hybrides est motivée par les hypothèses concernant le champ de contrainte et de déplacement qui doit être intégré dans la formulation des éléments. La présente analyse se limite au comportement du matériau élastique linéaire et une configuration simple de l'adhésive.

I-2-Objectifs du mémoire

Ce mémoire de magister présenté a pour objectif la modélisation numérique au moyen de la méthode des éléments finis de l'adhésion de deux plaques en matériaux composites stratifiées au moyen d'un adhésive époxy. Ces travaux de recherche s'intéressent à une meilleure compréhension des phénomènes d'assemblage par les éléments finis entre deux plaques en matériaux composites stratifiées.

I-3-Structure du travail de mémoire

Ce travail de mémoire est divisé en six chapitres :

- Après une introduction générale présentée dans le **chapitre I** sur les matériaux composites, nous examinerons l'assemblage collé entre deux plaques.
- Le **chapitre II**, présente quelques généralités sur les matériaux composites, leurs caractéristiques mécaniques et les différents constituants.
- Le **Chapitre III**, est orienté à la caractérisation du collage entre les plaques en composites, et les différents types des joints, et les modes de rupture des joints de colle.
- Le **chapitre IV**, présente la formulation par les éléments finis de l'adhésion de deux plaques, selon les théories, FSDT et layerwise. Ces théories permettent l'approximation du champ des déplacements mécaniques de la structure. Diverses matrices ont été obtenues pour les trois théories.

- Dans le **chapitre V**, est orienté à la mécanique de la rupture.
- Le **chapitre VI**, présente les résultats et les interprétations de plusieurs configurations. Les contraintes et les déformations sont représentées sur des graphiques pour toutes les applications.
- Ce mémoire se termine avec une conclusion général, suivie des perspectives.

A la fin du mémoire, les références bibliographiques sont illustrées.

Chapitre II

Généralités sur Les matériaux composites

Chapitre II

Généralités sur les matériaux composites

II-1-Introduction

IL existe différentes familles de matériaux : les métaux, les plastiques, les composites, etc. Le principal intérêt de l'utilisation des composites provient de ses excellentes caractéristiques mécaniques. Parmi les composites, on distingue deux types : les composites de grandes diffusions (GD) et les composites de hautes performances (HP).

Les GD représentent 95% des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques armés ou des plastiques renforcés, le taux de renfort avoisinant les 30%. Dans 90% des cas, l'anisotropie n'existe pas ou n'est pas maîtrisée dans le cas des renforts à fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters (95% des résines thermodurcissables) avec des fibres de verre (plus de 99% des renforts utilisés).

Les HP, principalement utilisés dans l'aéronautique sont d'un coût élevé. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux. Des méthodes de calculs de structures et d'homogénéisations ont été développées pour les HP.

Il faudra toujours tenir en compte du fait que l'élaboration de la structure est liée à celle du matériau. Pour les pièces travaillantes, on utilisera plutôt des composites à fibres longues et à matrice organique, tel que les garnitures, les capotages.

Définitions de base

- Homogène : même propriétés en tout point du matériau.
- Hétérogène: en deux points différents, propriétés différentes.
- Isotrope : même propriétés dans toutes les directions.
- Isotrope transverse : il existe un axe de symétrie. Symétrie par rapport à une droite.
- Orthotrope : propriétés symétriques par rapport à deux plans orthogonaux.
- Anisotrope : les propriétés sont différentes selon les différences directions.

Notions de bases

Matériau composite : association d'au moins deux matériaux non miscibles. On obtient un matériau hétérogène.

II-2-Les composants

Matériau composite plastique : association de deux constituants.

II-2-1-Le renfort : Armatures, squelette, il assure la tenue mécanique (résistance à la traction et rigidité). Souvent de nature filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques).

II-2-2-La matrice : Liée les fibres, répartie les efforts (résistance à la compression ou à la flexion), assure la protection chimique. Par définition, c'est un polymère ou une résine organique. En plus de ces deux constituants de base, il faut rajouter: une interface qui assure la compatibilité renfort-matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Des produits chimiques entrent aussi dans la composition du composite, de l'interphase etc. ... qui peuvent jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de la structure composite.

Remarque : on conçoit un composite en fonction du type d'application, de chargement ...Ce qui est différent des matériaux classiques où on adapte la conception d'une structure en fonction du matériau constitutif [26].

Pour les composites, on construit sa structure à la demande :

- La nature, la texture et la forme du renfort
- Le taux de renforcement.
- La nature de la résine et des charges ou additifs.
- La qualité de l'interface renfort-matrice.
- La géométrie de la pièce à réaliser.
- Le procédé de mise en œuvre utilisé.

On cherchera toujours à orienter au mieux les renforts en fonction des efforts auxquels la structure est soumise.

Avantage des matériaux composites

- Grande résistance à la fatigue.
- Non corrosif.

- Insensibles aux produits chimiques, comme les graisses, les huiles, les liquides hydrauliques, les peintures, les solvants, le pétrole.

Les composites sont très anciens : bois (composite naturel), torchis, béton (agrégats et pâte de ciment), béton armé, bois contre-plaqué (sandwichs), lamifiés décoratifs par exemple.

1. Associations fibres-matrices : la liaison entre fibre-matrice est créée pendant la phase d'élaboration : influence fondamentale sur les propriétés mécaniques du composite.
2. Les différents types des constituants de base :

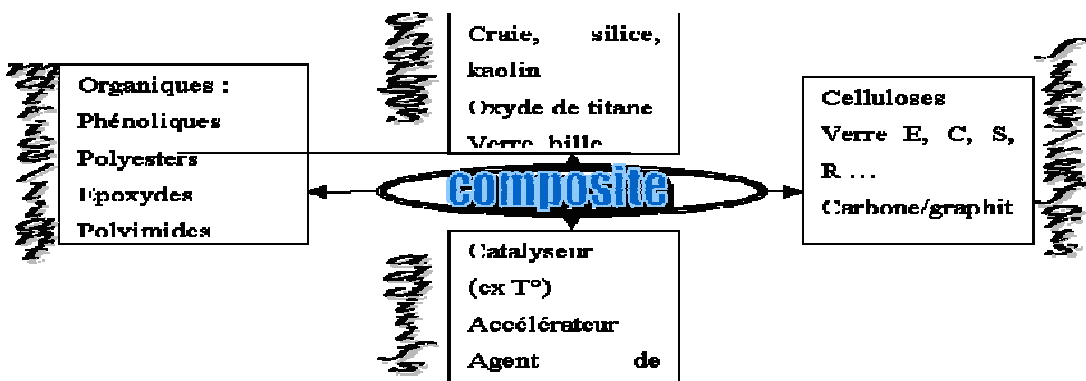


Figure (II.1). Les différents types des constituants du composite [26].

II-3-Les renforts

II-3-1-Les fibres

- Constituées par plusieurs centaines/milliers de filaments de diamètres variant de 5 à 15 μm .
- Traitement sur machines textiles (mèches).

● Forme des renforts :

Incluant des filaments décomposés en fil de base et en mèche puis en demi-produits comme la verranne, les rovings ou stratifié (mèches de fils sans torsion, direct, assemblé, bouclé, ensimés), la sillionne (fils de 102 à 408 filaments ensimés), les fils coupés (de base, textiles, texturés, coupés, broyés, de 3 à 5 mm de longueur, ensimés), qui sont tous des fibres de tissage. Mise en œuvre par compression et cuisson (polymérisation). Facilité d'utilisation, qualité du produit fini (homogène), robotisation possible. Les particules, billes pleines ou creuses, les fibrilles, les écailles, les whiskers. Les renforts sous forme de semi-produit : les mats (feutres de "sillionnes " ou de fils continus coupés, 25 à 50 mm agglomérés par un liant), les feutres, les rubans, les tissus à armature taffetas, sergé, satin, unidirectionnelle, bidirectionnelle, les gaines, les tresses, les préformé (roving+liant

projetés et durcis par étuvage sur une forme, pour les grandes séries) [25,26]. Le tableau (II.1), présente les propriétés mécaniques de quelques renforts.

Remarque : L'ensimage permet de :

- Coller les filaments ->file.
- Lubrifier les fils.
- Diminuer attaque de l'eau.
- Éliminer les charges électrostatiques.
- Améliorer l'adhérence sur les résines (mouillage+adhésion).

● **Fibres thermostables à bas modules :**

- Utilisables jusqu'à 250°C en continu, ininflammables, ne fondent pas, carbonisent vers 400°C.
- Bas module (de 6000 à 16000 MPa).
- Isolants thermiques, électriques, cônes de rentrée des véhicules spatiaux, boucliers thermiques des missiles, vêtements militaires antithermiques.

● **Trichites (whiskers) :**

- Monocristaux de 1 à 50 µm de diamètre et de 1 à 5 cm de longueur.
- Al₂O₃, SiO₂, ZrO₂, MgO, TiO₂, BeO, SiC, ...
- Prix élevé.
- Comportement élastique fragile.
- Résistance bien plus grande que beaucoup de polycristallins.
- Problèmes aux niveaux : manipulation, compatibilité chimique, mouillage.

	P	E (MPa)	R (MPa)
Al₂O₃	3.97	$12 \times 10^5 / 22 \times 10^5$	22 000/15 000
SiC	3.2	480 000	20 000
Graphite	1.8	10^6	20 000
Fer	7.8	300 000	13 000

Tableau (II.1). Propriétés mécaniques des poly-cristallins [26].

● **Autres fibres**

- Économie.
- Isolation thermique.
- Conductibilité thermique et électrique.
- Origine végétale : sisal, jute, lin...
- Amiante : chrysotile, crocidolite...
- Polyester : Tergal, dracon, Térylène...
- Métalliques : cuivre, aluminium, inox...

● **Fabrication**

exemple de la fibre de verre :

1. Composition (mélange des oxydes).
2. Fusion (1500°C).
3. Fibrage (1200°C) : four filière de diamètre de 1 à 2 mm.
4. Etirage : diamètre de 3 à 20 µm.
5. Ensimage (protection, amélioration de l'adhésion fibre-matrice).
6. Bobinage, tissage.

Principaux matériaux de renfort

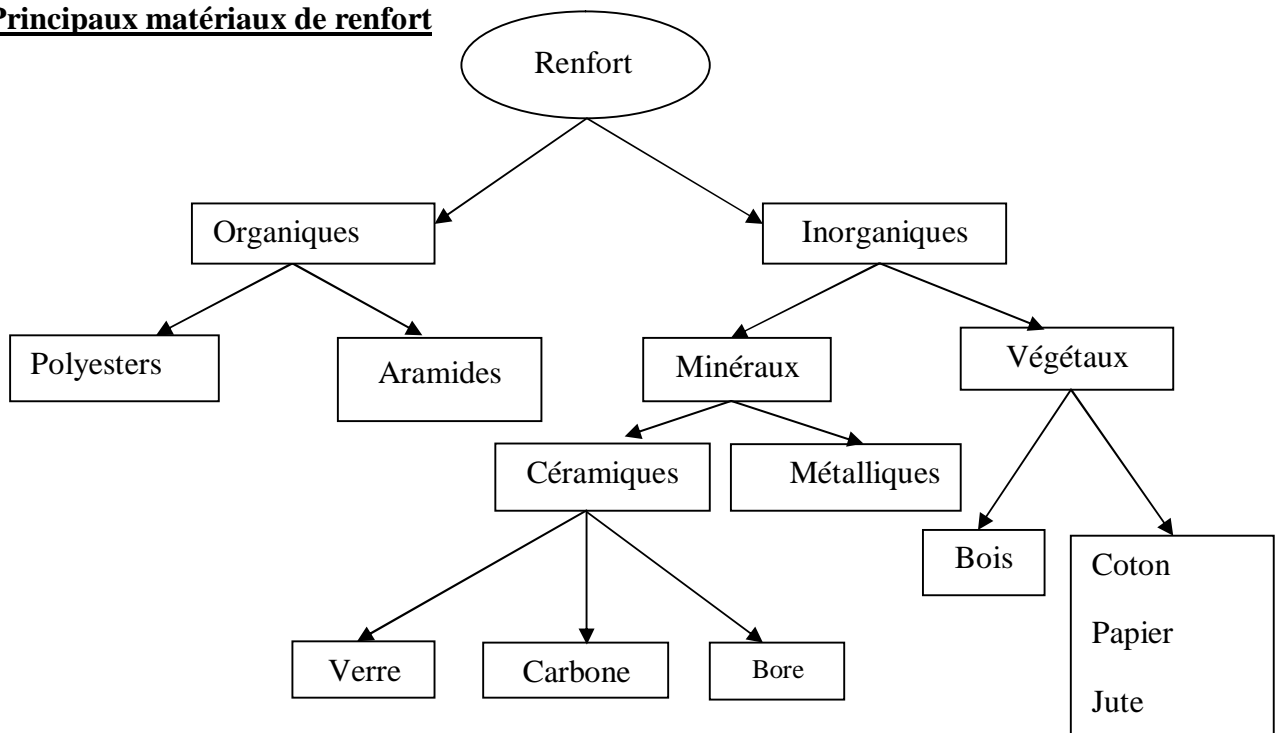


Figure (II.2). Les différents types des matériaux du renfort [26].

Principales caractéristiques mécaniques des fibres de base :

Le tableau (II.2), montre les propriétés mécaniques, des divers renforts (fibre de verre, de carbone, d'aramide...).

Fibre	densité	Charge de rupture en traction MPa	Charge de rupture en compression MPa	Allongt à la rupture en %	Module d'élasticité long MPa	Diamètre du filament élémentaire En μm	Prix F/Kg
Verre E	2.54	3400	1200	4.8	73000	3 - 30	12
Verre R	2.48	4400	1300	5.4	86000	3 - 30	50
Aramide bas module	1.45	3100	500	2	70000	12	150
Aramide haut module	1.45	3100	500	1	130000	12	200
Carbone haute ténacité	1.78	2800	1800	0.5	200000	8	300/1000
Carbone haut module	1.8	2200	1300		400000	8	300/1000
Bore	2.63	3500	3500	0.8	400000	100 - 200	3000
Acier XC10	7.85	1000			210000		
Aluminium	2.63	358			69800		10

Tableau (II.2). Propriétés mécaniques et différents caractéristiques des fibres [26].

II-4-Les matrices**II-4-1-Les différentes familles de matrice**

La figure (II.3), présente les différentes familles de matrices (Thermodurcissable, thermoplastiques, minérales..).

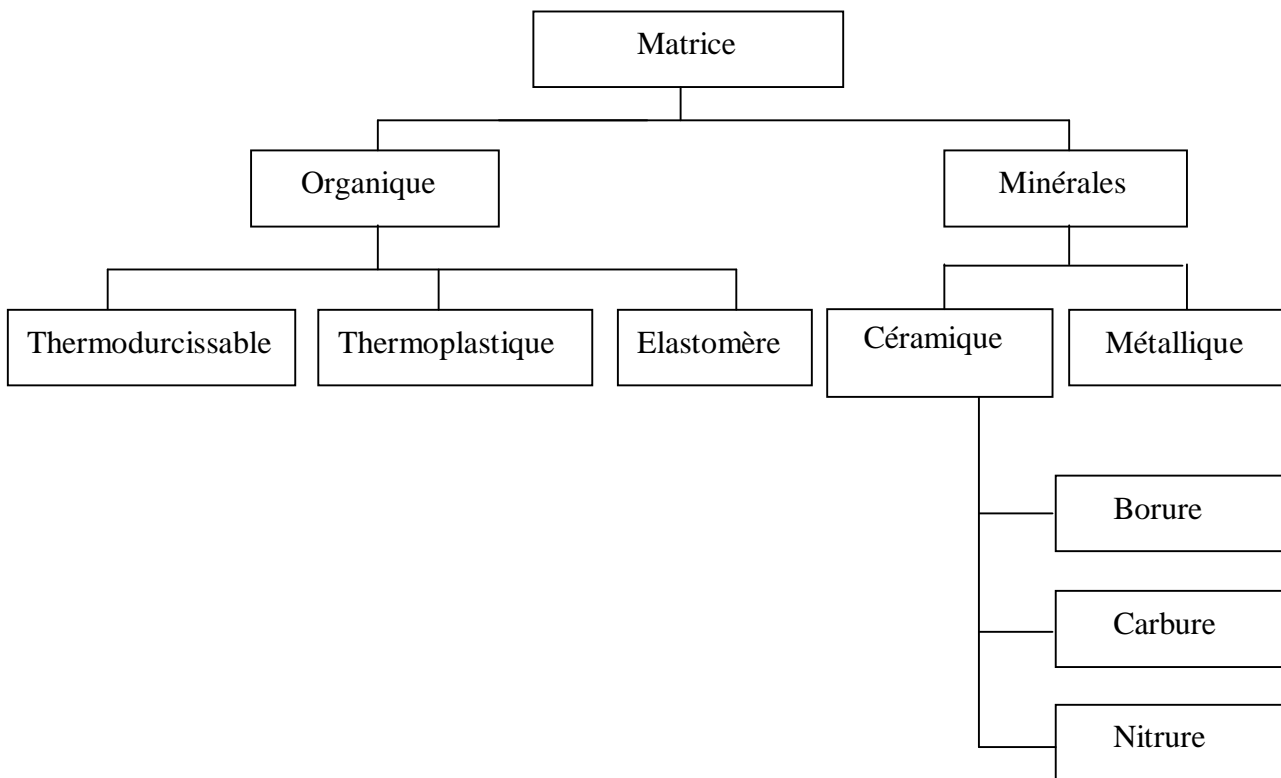


Figure (II.3). Les différentes familles de matrice [27].

II-4-2-Définitions

Résine thermodurcissable : polymère transformée en un produit essentiellement infusible et insoluble après traitement thermique (chaleur, radiation) ou physico-chimique (catalyse, durcisseur).

Résine thermoplastique : polymère pouvant être alternativement ramollie par chauffage et durci par refroidissement dans un intervalle de température spécifique du polymère étudié. Les résines thermoplastiques présentent l'aptitude à l'état ramolli, de se mouler aisément par plasticité.

Résine thermostable : polymère présentant des caractéristiques mécaniques stables sous des pressions et des températures élevées (>200°C) appliquées de façon continue. Cette propriété est mesurée en déterminant la température que peut supporter la résine durant 2000 h sans perdre la moitié de ses caractéristiques mécaniques [27].

Elastomère thermoplastique : polymère fortement élastique.

Principales caractéristiques mécaniques des résines :

Le tableau (II.3), montre les diverses résines utilisées (TD, TP, métaux).

Résines	nom	P (kg/m)	E (MPa)	ν	R (MPa)	α $\mu\text{m}/\text{m}^\circ\text{C}$	Prix (F/kg)
	Polyester	1300	3800	0.37	88	100	15
	Vinylester	1200	3500	0.35	81	65	18
TD	Époxyde	1220	5200	0.38	121	40	40
	Silicone	1550	1000	0.45	3	30	200
	Polyamide	1217	3450	0.35	80	36	150
	Phénolique	1350	3000	0.36	70	80	10
	Polyamide	1130	1900	0.33	70	85	25
TP	Polycarbonate	1100	2300	0.33	60	70	30
	Polyester saturé	1310	2800	0.33	55	90	
métaux	Aluminium	2630	69000	0.33	358	23	13
	Acier XC10	7850	210000	0.29	1000	10	10
	Cuivre	8940	119000	0.30	350	17	11
	Magnésium	1660	42000	0.30	280	25	27

Tableau (II.3). Les différentes caractéristiques mécaniques des résines [27].

II-5-Les matériaux composites structuraux

II-5-1-Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure en composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort: à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes [28].

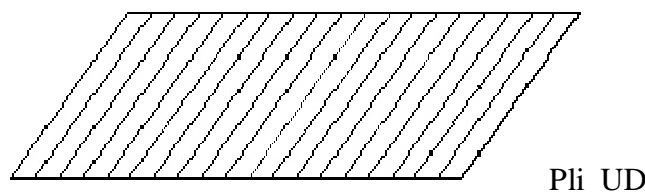


Figure (II.4). Fibres longues (pli unidirectionnelles) [28].

II-5-2-Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié.

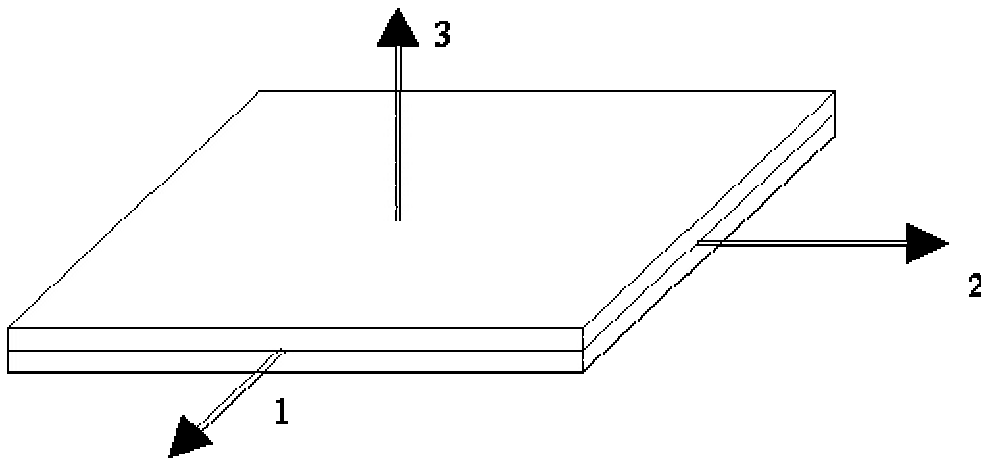


Figure (II.5). Empilement de monocouches du stratifiés [28].

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

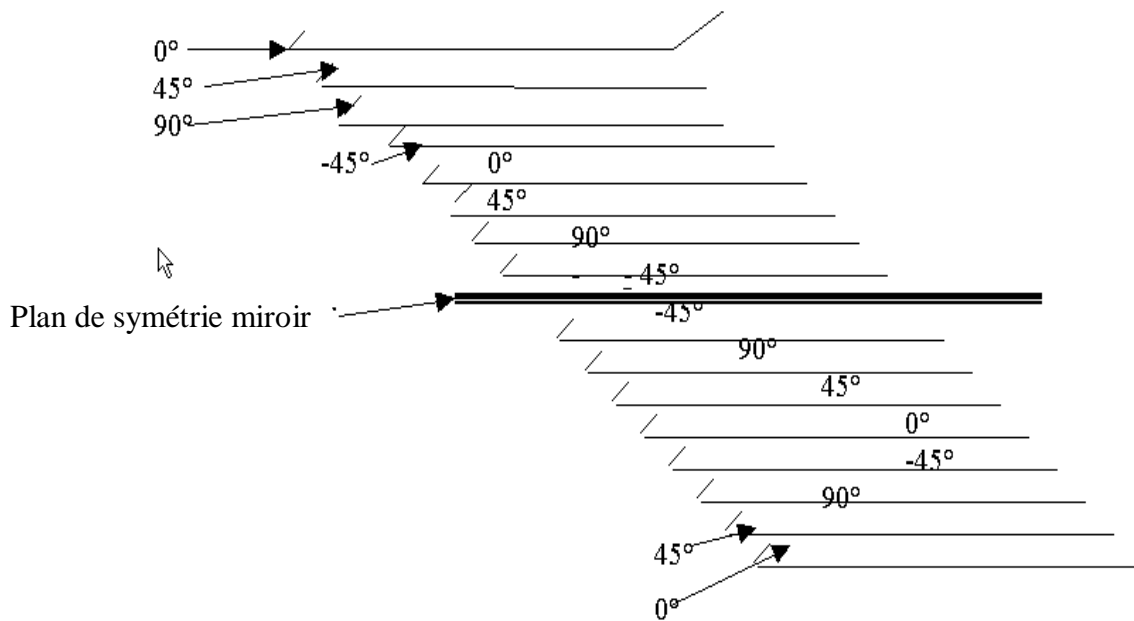


Figure (II.6). Séquentiels d'empilement du stratifiés [28].

On pourra avoir des stratifiés de type :

1. Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$.
2. Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
3. Orthogonal : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .

II-5-3-Sandwichs

Les structures dites « sandwich » occupent un large créneau de la construction des pièces en composites. Elles apparaissent dans quasiment tous les domaines d'application. Historiquement ce sont les premières structures composites allégées et performantes. Dans la majorité des cas on doit les confectionner dans un but bien spécifique ; cependant, certains matériaux sandwichs sont disponibles dans le commerce sous forme de demi-produits.

Les sandwichs sont des matériaux composés de deux parties différents, l'une s'appelle : « revêtement (semelles ou peaux) », et l'autre : « cœur (ou âme) ». Les semelles c'est une partie de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant le cœur une de forte épaisseur et faible résistance figure (II.7). L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

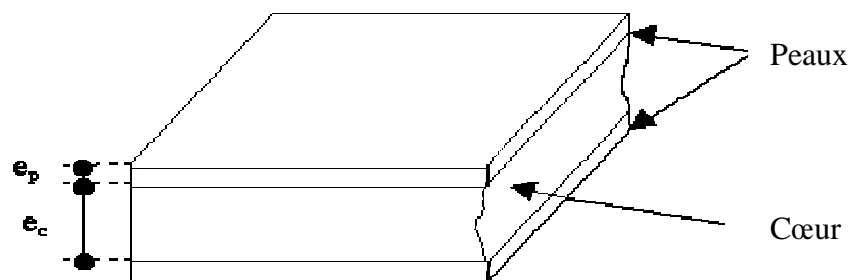


Figure (II.7). Les compositions du sandwich [28].

Chapitre III

Évaluation non destructive de la qualité du collage

CHAPITRE III

Évaluation non destructive de la qualité du collage

III-1-Caractéristique de collage

a)-Applications

Le collage est le processus d'assemblage des matériaux par attachement à la surface à l'aide d'un adhésif [29]. En raison de sa résistance et de sa fiabilité, le collage offre de nombreux avantages importants par rapport aux autres méthodes d'assemblage comme le soudage, le rivetage, et la fixation mécanique. Certains avantages sont :

- Distribution des contraintes de manière plus uniforme et réduit les zones de forte concentration de contraintes et, par conséquent, permet la fabrication de structures légères et plus solides.
- Fournit des joints avec des contours lisses, permettant la fabrication de structures plus aérodynamique favorable.
- Permet d'assemblage de matériaux différents, tels que les métaux aux composites, les caoutchoucs pour les métaux. Ou des métaux à métaux. dans le cas plus tard, le collage minimise la possibilité de problèmes de corrosion électrolytique.
- Permet de faciliter la fabrication de pièces complexes profilées.
- Fournit un bon amortissement des vibrations sonores dans une structure.
- Peut être utilisé comme un joint d'étanchéité contre les liquides ou gazeux, ainsi que d'un isolant électrique ou conducteur.
- Peut réduire le coût de fabrication d'une structure.

D'autre part, le collage a plusieurs inconvénients et limitations. Certains d'entre eux sont comme suit :

- Ne permet pas un examen visuel de la surface collée, et, par conséquent, le contrôle qualité et assurance de la qualité sont plus difficiles.

- Limite généralement à la température de service supérieure à 180 °C, même si certains adhésifs spéciaux tels que les Poly-quinoxalines sont disponibles pour une utilisation limitée à environ de 370 °C.
- Nécessite un contrôle serré des processus tels que la préparation de surface, manutention des matériaux, et le durcissement.
- Se dégrade dans l'exposition à l'environnement.
- Peuvent nécessiter des temps de curation long, en particulier, où les températures de durcissement élevée ne sont pas utilisées.

Application typique de fabrication

Le collage a été largement utilisé pour la fabrication des porteurs composants structuraux utilisés dans les avions, les hélicoptères, les fusées, les missiles, les satellites, et les navettes spatiales. Les raisons principales sont des économies de poids des contours communs lisses. En outre, le collage a été largement utilisé dans d'autres industries comme la construction automobile, l'électronique, et du bâtiment. Des exemples d'applications sont la fabrication d'équipements électriques tels que moteurs, transformateurs, générateurs, micro-ondes, la construction de planchers de tuiles, les toits et les maisons mobiles.

Types de structures collage

Types de structures collées utilisés dans les industries aéronautique et aérospatiale notamment :

- Joints en métal-métal.
- Joints métal-composite.
- Joints métal-caoutchouc.
- Joints composite-composite.
- Structures sandwich nid d'abeille, composée de différentes combinaisons de matériaux d'âme en nid d'abeille (métal, papier, plastique) et les matériaux de revêtement (métalliques, composites, papier).
- Composite en stratifiées.

Beaucoup de conceptions communes ou de configurations (y compris les genoux, sangle, de raidissement, cylindrique, angle, coin, et bride) ont été utilisés dans la fabrication de composants

collés. La figure (III.1), montre des exemples de conception collée. Une structure sandwich nid d'abeille est une construction composée de parements laminaires minces collés sur un noyau relativement épais et léger. Un composite stratifié est réalisée par le collage et le durcissement de deux ou de plusieurs couches de matériau (appelé prepreg) ensemble, le pré-imprégné est produit par des couches d'enrobage à haute résistance, de petit diamètre (environ 10 microns) des fibres de renfort dans une matrice polymérique (figure III.2). Les couches de fibres sont empilés dans des séquences ayant de différentes orientation afin d'avoir des propriétés mécaniques désirées.

Typique de métaux utilisés pour les structures de collage dans les industries aéronautique et aérospatiale sont l'aluminium, le magnésium, acier, titane, acier inoxydable, et leurs alliages respectifs. Noyaux de nid d'abeilles métalliques sont principalement en aluminium. Matériaux utilisés pour le renforcement de fibre composites stratifiés inclure le carbone / graphite, le verre, le bore, l'aramide, et le polyéthylène.

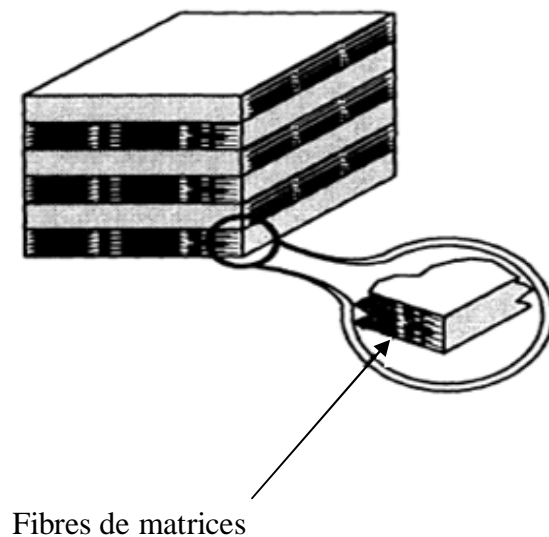


Figure (III.2). Schéma d'une structure renforcée de fibre composite stratifiée (multidirectionnel)

[29].

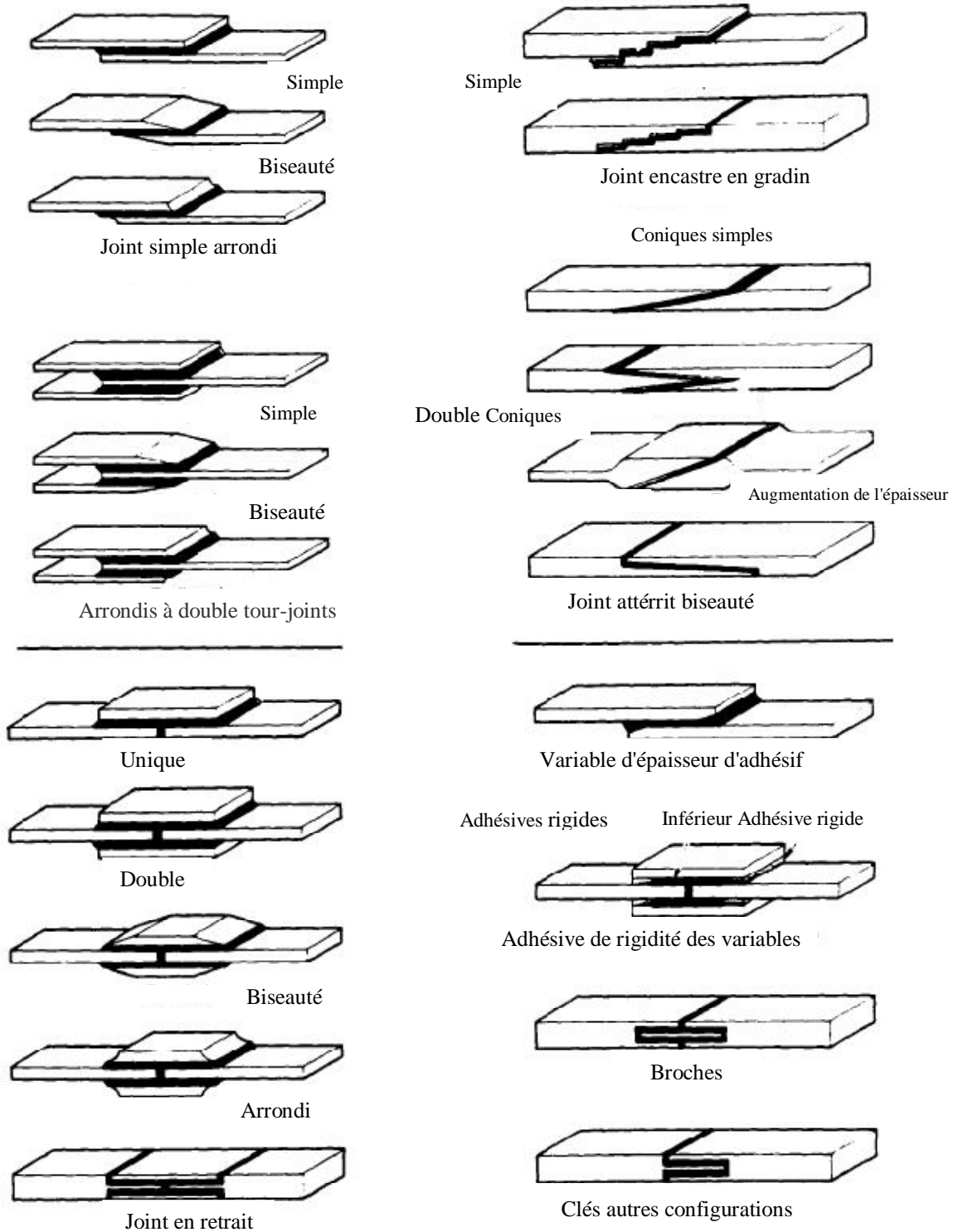


Figure (III.1). Exemples de réalisations de joints [29].

b)-Qualité et résistance

La qualité est obligation liée à l'utilité fonctionnelle de l'assemblage collé. Bien qu'aucune définition ne soit universellement acceptée, la qualité du collage renvoie généralement à l'absence de défauts tels que le décollement, le délaminage, les vides, ou des substances étrangères, les forces mécaniques du joint collé, et la durée de vie dans l'environnement de service. Une obligation de meilleure qualité n'implique généralement que le joint collé à moins de quantité de défauts et une plus grande résistance mécanique et une plus grande durabilité. De nombreux facteurs influencent sur la qualité du collage tels que :

- Type du joint collé et la géométrie.
- Type du matériel adhérent.
- Type d'adhésif et de sa composition.
- Traitement de surface adhérent et résultant des propriétés physiques et chimiques de la surface telles que la rugosité, la propreté, et la mouillabilité.
- Type primer.
- Conditions de l'environnement comme l'humidité, la température et le temps d'exposition pendant le processus de collage.
- Paramètres de séchage tels que la température, la pression, la chaleur, et le temps de durcissement.
- L'épaisseur du joint de colle.
- Contraintes résiduelles dans la colle.
- Présence de défauts induits lors de la fabrication ou de service.
- Fabrication.
- Dégradation sous l'environnement en raison, de l'humidité, la corrosion, aux vibrations, chocs, d'impacts, changements cycliques de température, un chargement de fatigue, et la dégradation bactérienne.

III-2-Configurations des joints

III-2-1-Classification des joints

Les joints adhésifs peuvent être généralement classés en plusieurs types de joints (voir fig. (III.3)) : [30]

- Joints seul ou deux surfaces à coller droites sont reliées par un adhésif. Le joint simple est le plus simple et le type le plus étudié du joint de colle.
- Joints à recouvrement double - y compris ici les joints avec un doubleur - deux joints de colle.
- Unique (ou double) face étagée et assemblés, joints en sifflet.
- Joints en T - y compris les joints ici de type L (joints d'angle, Les T-joints sont largement utilisés dans les structures de bateau; cloison de coque. Il est d'une configuration plus complexe que le joint à recouvrement, il est plus difficile à analyser. Dans la même catégorie il peut être inclus le L-joints, qui est utilisé, par exemple, dans le tablier.
- Joints bout à bout.
- D'autres types de joints (comme sangle ou joints tubulaires).

La plupart de ces joints sont conçus pour transmettre les charges de cisaillement ou de compression. Cependant T-type se joint à transmettre un ensemble complexe de charges. Dans tous les cas Peel contraintes excessives doit être évitée.

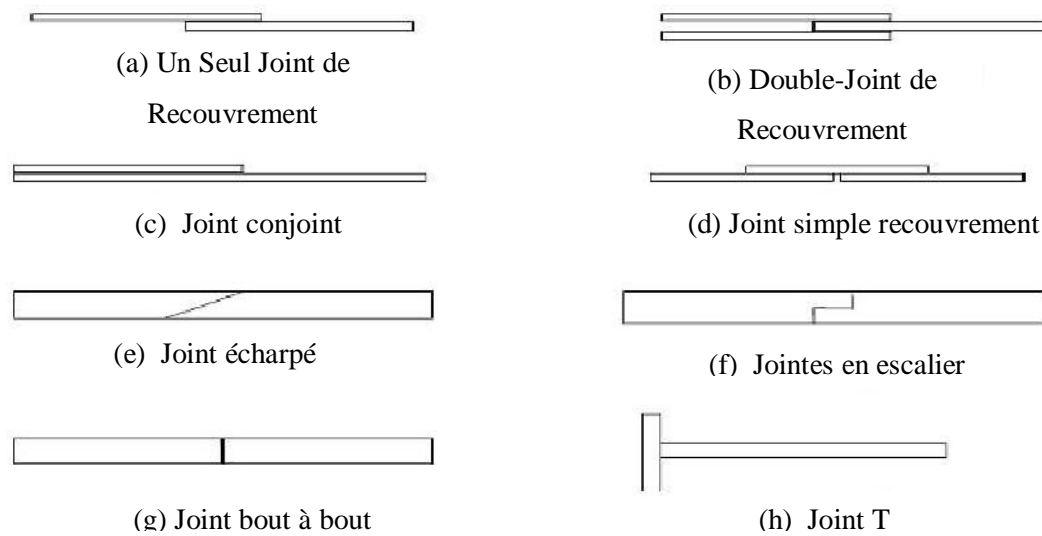


Figure (III.3). Géométries des joints [30].

III-3-Colle sur un seul joint

La conception et l'analyse des assemblages collés sont très complexes. Si une approche numérique est utilisée, un programme est nécessaire pour faire l'analyse de la conception et d'optimisation. Pour une étude préliminaire très simplifiée, certaines recommandations de conception générales peuvent être faites sur les différents types de joints [30] :

- Chaque fois qu'il est possible, il faut joindre les configurations de géométrie identiques. Cela minimise le désalignement de l'adhésif.
- Utilisez des systèmes de matériaux avec des valeurs relativement élevées du module principal (Q_{11}).
- L'utilisation d'un joint de longueur environ dix fois la surface à coller. Cela donne une répartition plus uniforme des contraintes de cisaillement dans l'adhésif.
- Si la surface à coller est stratifiée, le couplage flexion-extension devrait être nul (par exemple en utilisant des stratifiés symétriques).

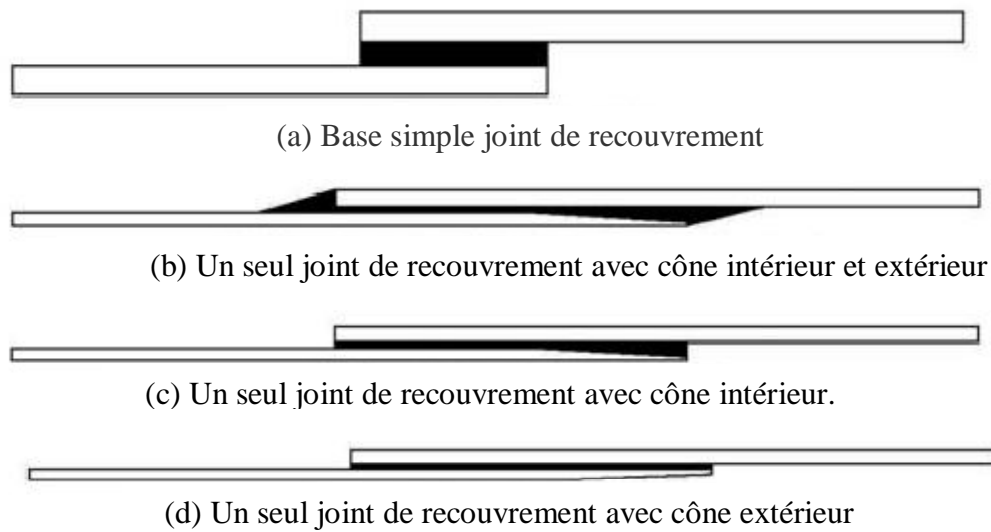


Figure (III.4). Diverses configurations à un seul joint de recouvrement [30].

III-4-Les modes de rupture de joints collés

La compréhension des modes de rupture des joints collés, crée la possibilité de mettre en œuvre les conceptions qui peuvent réduire la probabilité de leur rupture. Il existe quatre principaux types de modes de rupture de l'adhésif : La tension inter-laminaire adhérente, cohésion et d'adhésion tel que présenté sur la figure. (III.10) [31].

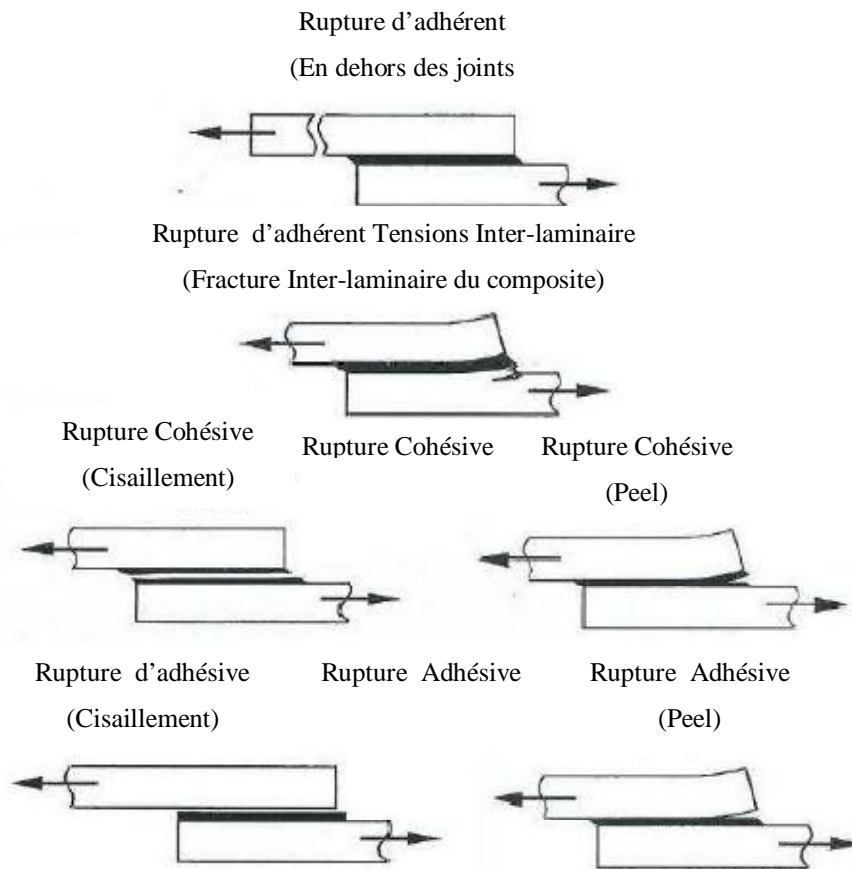


Figure (II.5). Modes de rupture commune des joints [31].

III-5-Etat de connaissances

Hart-Smith [33,34] a amélioré le modèle de Goland et Reissner pour le traitement des joints contenant des colles élasto-plastique. Il a montré que le comportement réel de l'adhésif peut être approché par zone plastique élastique linéaire tant que la superficie totale sous la courbe reste la même. Il a également pris en compte les propriétés des adhésives dans le calcul du moment de bord. Cependant, le modèle néglige la déviation importante du recouvrement. Cela a limité le modèle au cas de court chevauchement et les adhésifs minces flexibles.

Oplinger [35] a surmonté cette limitation par l'inclusion de grands déplacements dans la région de chevauchement et de l'effet de l'épaisseur de la couche de liaison sur la répartition des contraintes dans la colle. Le défaut d'un joint collé dépend du site d'initiation de la fissure et le chemin de sa propagation et peut être classé comme (a) rupture de l'adhésif entre l'adhésif et où les fissures

initiées et se propage le long de l'interface, (b) rupture de la cohésion au sein de l'adhésif, lorsque l'amorçage et la propagation est contenue dans la couche de l'adhésif, et (c) initiation de la fissure à bord d'assemblage en raison de contrainte.

Chai [36] a étudié l'effet de l'épaisseur de l'adhésif sur le comportement à la rupture de joints adhésifs selon le mode I de chargement. Cette étude a conclu que l'énergie de rupture se stabilise à une épaisseur inférieure à 0,03 mm, ou supérieur à 0,5 mm, tandis que l'énergie de rupture maximale a été observée pour une épaisseur de l'ordre de 0,22 mm.

L'étude de la réponse à l'impact des joints adhésifs a reçu une attention limitée par rapport aux chargements quasi-statiques. Les particules d'élastomère, augmentent généralement la ténacité de la colle et tendent à augmenter l'énergie d'impact en raison de la réponse viscoélastique de l'adhésif.

Bezemer et al. [37] ont rapportés que l'absorption d'énergie est plus élevée lorsque l'adhésif a été soumis à la dynamique par opposition à un chargement quasi-statique. Ils ont signalés une augmentation d'absorption d'énergie, même dans un adhésif époxy fragile lorsqu'il est soumis à une vitesse d'essai de 36 m/s, par rapport à une charge quasi-statique. L'épaisseur adhérence optimale a été de 0,25 mm pour des vitesses d'essai statique et moyennes entreprises pour un adhésif fragile.

Beevers et al. [38] a élaboré un dispositif d'essai par poids tombant dans le plan. Les essais des joints collés ont été réalisés à grande vitesse de déformation. Ils ont collés des tôles en acier et mesuré la résistance ultime en cas de choc et de chargement quasi-statique. Ils ont observés que la résistance ultime en cas de choc a été plus élevée que sous chargement quasi-statique, ce qui a été attribuée à la déformation et la sensibilité de la vitesse de déformation.

Kihara et al. [39] ont mis au point un équipement pour mesurer la résistance au cisaillement dans le plan de couches de colle sous une charge d'impact. Ils ont observés qu'à un angle d'incident faible, le problème a été causé par les contraintes de traction. Toutefois, dans le cas d'un angle d'incidence élevé, la rupture a été causée principalement par les contraintes de cisaillement avec une petite contribution de la contrainte de traction. Dans tous ces cas d'impact, le chargement était dans le plan de la structure.

Kilik et al. [41] ont étudiés les effets du Cuivre et de l'Aluminium en poudre sur les propriétés mécaniques des adhésifs. Ils ont rapportés une diminution de la résistance à la traction avec l'ajout de particules métalliques, tandis que la résistance au cisaillement augmente jusqu'à 0,84% du volume de renfort, mais diminué par la suite. En général, un pourcentage minimales de particules métalliques diminué la résistance aux chocs de l'adhésif.

Lin et al. [42] ont proposés un modèle aux éléments finis pour l'analyse des contraintes dans la couche d'adhésif d'un joint de colle simple. Ce modèle repose sur la théorie des poutres de Timoshenko est inclus le cisaillement transversal dans l'épaisseur et la contrainte normale à la surface à coller.

Andruet et al. [43] ont définis des éléments de deux et de trois dimensions pour modéliser les surfaces à coller et la couche de colle. L'adhérente a été modélisée par des éléments poutre avec seulement la déformation axiale, tandis que l'adhésif a été modélisé comme une plaque plane avec des éléments plans. Les nœuds communs étaient strictement liés à ceux des éléments poutre. Ce rapprochement s'est révélé être très efficace pour contrôler la taille du modèle et le temps de convergence, par rapport aux autres modèles d'éléments finis à trois dimensions.

Li et al. [44] ont réalisés en deux dimensions une l'analyse par éléments finis non linéaires géométriquement. Ils ont remarqués des variations dans la distribution des contraintes selon l'épaisseur de la couche adhésive. Il a également été proposé que la fissure se propage dans la mince couche de colle près de l'interface, et que finalement les deux fissures se propagent en diagonale à travers l'épaisseur de l'adhésif et de s'affilier à produire une rupture totale.

En 1938, Völkersen [70] a proposé un modèle de décalage en cisaillement simple pour les joints mécaniques. Plus tard, ce modèle a été adopté pour les joints de colle avec l'hypothèse que les surfaces à coller sont en tension et en cisaillement uniquement, et les deux contraintes sont constantes à travers l'épaisseur.

En 1944, Goland et Reissner [71] ont pris en considération les effets des contraintes de flexion et de Peel sur les surfaces à coller ainsi que la contrainte de cisaillement, dans la couche adhésive dans le cas d'un joint à recouvrement simple.

Oplinger [72] a suggéré que les corrections apportées à la solution de Reissner Goland en utilisant une théorie des couches au lieu du modèle classique homogène pour les joints de recouvrement simples. Hart-Smith [34,33] et Tsai et.al [73], ont modifiés le modèle de traînage de cisaillement afin d'inclure la plasticité de l'adhésif. Tsai et.al [73] ont apportés une correction au modèle de traînage de cisaillement avec l'hypothèse que la contrainte de cisaillement est linéaire à travers les surfaces à coller. Klarbring et Movchan [74] ont modélisés mathématiquement le joint de colle en utilisant une approche asymptotique. Kim et Kedward [75] ont utilisés la méthode des différences finies pour l'analyse des assemblages collés. Penado et Dropek [76] et Tessler et.al [77] ont utilisés la méthode des éléments finis pour l'analyse des assemblages collés.

Adams et Peppiatta [78] ont analysés un joint collé l'aide à une et à deux dimensions par la méthode des éléments finis dans le domaine linéaire élastique avec l'hypothèse de la déformation plane. Des recherches basées sur la méthode des éléments finis des joints collés dans les composites ont été réalisées par Kairouz et Matthews [79], Tong [80], Li et al. [81]. Delale et al. [82] ont développés une solution pour l'analyse en cisaillement des joints avec des surfaces à coller orthotropes en utilisant la théorie des plaques classique. Mortensen [80] a présenté une approche unifiée d'analyse pour des conditions plus générales de chargement. Panigrahi et Pradhan [83] ont étudiés, un joint à recouvrement simple avec les surfaces à coller orthotrope spécialement pour les stratifiées pour l'évaluation du champ des contraintes triaxiales en utilisant l'analyse par éléments. Panigrahi et Pradhan [84] ont étudiés un joint à recouvrement simple avec des surfaces à coller en général orthotropes stratifiées soumissent à une charge transversale.

Chapitre IV

*Formulation par les éléments
finis de l'adhésion entre deux
plaques*

Chapitre IV

Formulation par éléments finis de l'adhésion entre deux plaques

IV-1-Introduction

La modélisation physique des systèmes mécaniques résulte généralement des équations différentielles aux dérivées partielles qui ne peuvent être résolues analytiquement ou qui n'ont pas une solution exacte, pour les raisons de complexité du domaine discrétisé du problème ou des conditions aux limites. Ainsi, une méthode numérique doit être employée pour la solution approximée du problème physique. La Méthode des éléments Finis (MEF) est souvent considérée comme la méthode la plus appropriée pour des études de cette nature.

La MEF est devenue un important outil d'analyse dans les projets modernes d'ingénierie. Aujourd'hui, cette méthode est utilisée avec succès sur de nombreuses applications, telles que dans les problèmes de transfert de chaleur, d'électromagnétisme, d'acoustique, de mécanique de fluides, fracture et d'endommagement.

Les formulations par les éléments finis sont appliquées à la modélisation des structures fabriquées en matériau purement viscoélastique, stratifié ou stratifié sandwich. Les formulations utilisent un élément fini plan à huit nœuds appelé élément de Serendip, pour la discrétisation du champ des déplacements. Celle-ci est approximée numériquement, soit par une théorie équivalente unique (avec les théories FSDT et HSDT), soit discrètes (avec la théorie layerwise-FSDT).

En utilise la théorie HSDT pour l'approximation du champ des déplacements mécaniques de la structure. Ainsi, la théorie HSDT peut être utilisée dans la formulation de structure homogènes, minces. De plus, les structures composites, de géométrie diverse et soumissent aux conditions aux limites variées peuvent être discrétisées par l'élément Serendip, car celles-ci sont à l'origine des éléments iso-paramétriques. De plus, cet élément fini peut également être utilisé dans la formulation de structures composites en utilisant la théorie FSDT. Ce chapitre a pour objectif de d'écrire les relations entre les déformations et les déplacements des théories FSDT, HSDT et layerwise-FSDT, en termes de variables nodales et de fonctions de forme de l'élément finis Serendip [45].

IV-2-Déplacements et déformations des théories FSDT et HSDT

Le champ de déplacements de la théorie HSDT est formulé en adoptant un seul pli équivalent, donc l'épaisseur de la structure composite. Par contre, Le champ des déplacements de la théorie FSDT est obtenu par la réduction du champ d'ordre supérieur de la théorie HSDT et l'élimination de certains composants. Les expressions analytiques correspondantes sont fournies dans les équations (IV.2) et (IV.3). Pour une notation plus compacte ces deux équations sont réécrites, respectivement, sous des formes matricielles suivantes [45] :

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}(x, y, z, t) \\ \hat{v}(x, y, z, t) \\ \hat{w}(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & z^2 & 0 & 0 & z^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & z^2 & 0 & 0 & z^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & z^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\hat{u}(x, y, t)\} \quad (\text{IV.1})$$

Et :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}(x, y, z, t) \\ \bar{v}(x, y, z, t) \\ \bar{w}(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\bar{u}(x, y, t)\} \quad (\text{IV.2})$$

Et qui peuvent être réécrites sous les formes :

$$\{\hat{U}(x, y, z, t)\}_{3 \times 1} = [\hat{A}(z)]_{3 \times 11} \{\hat{u}(x, y, t)\}_{11 \times 1} \quad (\text{IV.3})$$

Et :

$$\{\bar{U}(x, y, z, t)\}_{3 \times 1} = [\bar{U}(z)]_{3 \times 5} \{\bar{u}(x, y, t)\}_{5 \times 1} \quad (\text{IV.4})$$

Soit finalement sous formes plus simplifiées :

$$\{\hat{U}\} = [\hat{A}] \{\hat{u}\} \quad (\text{IV.5})$$

Et :

$$\{\bar{U}\} = [\bar{A}] \{\bar{u}\} \quad (\text{IV.6})$$

Les onze fonctions, fournies dans le vecteur $\hat{U}(x, y, t)$, représentent les onze degrés de liberté (ddl) de la théorie HSDT, par contre les fonctions planes du vecteur $\bar{U}(x, y, t)$ sont les cinq ddl de la théorie FSDT. Ces fonctions sont exprimées respectivement, sous les deux formes suivantes :

$$\hat{u}(x, y, t) = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \psi_x \quad \psi_y \quad \psi_z \quad \xi_x \quad \xi_y \quad \xi_z \quad \phi_x \quad \phi_y\}^T \quad (\text{IV.7})$$

Avec :

$$\bar{u}(x, y, t) = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \psi_x \quad \psi_y\}^T \quad (\text{IV.8})$$

Les déformations mécaniques sont définies en fonction de déplacements par :

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{12}\}^T &= \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy}\}^T \\ &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}^T \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

En appliquant ces relations déformation-déplacement et en tenant compte des équations (IV.1) et (IV.7), on obtient les expressions (IV.10) et (IV.11) des déformations mécaniques formulées avec la théorie HSDT, dont les déformations dues aux effets de flexion, de membranes et de cisaillement plan sont fournis par le vecteur $\{\hat{\varepsilon}_b\}$, les effets des cisaillements transverse, sont donnés par le vecteur $\{\hat{\varepsilon}_s\}$ découplés, ainsi, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} &= \{\hat{\varepsilon}_b(x, y, z, t)\}_{4 \times 1} = [\hat{D}_0 + z\hat{D}_1 + z^2\hat{D}_2 + z^3\hat{D}_3]_{4 \times 11} \{\hat{u}(x, y, t)\}_{11 \times 1} \\ &= [\hat{D}_b(z)]_{4 \times 11} \{\hat{u}(x, y, t)\}_{11 \times 1} \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

Et :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} &= \{\hat{\varepsilon}_s(x, y, z, t)\}_{2 \times 1} = [\hat{D}_4 + z\hat{D}_5 + z^2\hat{D}_6]_{2 \times 11} \{\hat{u}(x, y, t)\}_{11 \times 1} \\ &= [\hat{D}_s(z)]_{2 \times 11} \{\hat{u}(x, y, t)\}_{11 \times 1} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Avec les matrices :

$$[\hat{D}_0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.12})$$

$$[\hat{D}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

$$[\widehat{D}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.14})$$

$$[\widehat{D}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

$$[\widehat{D}_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

$$[\widehat{D}_5] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

$$[\widehat{D}_6] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.18})$$

En appliquant la relation de déformation-déplacement, fournie l'équation (IV.9) combinés aux équations (IV.2) et (IV.8), on obtient les expressions des déformations mécaniques, désormais formulées avec la théorie FSDT. Comme dans le cas précédent, ses déformations sont partagées en effets de flexion, de membrane et de cisaillement plan. Ils sont fournis par le vecteur $\{\widehat{\varepsilon}_b\}$, et les effets de cisaillement transverse, par le vecteur $\{\widehat{\varepsilon}_s\}$. Ainsi, on a les équations :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} &= \{\bar{\varepsilon}_b(x, y, z, t)\}_{4 \times 1} \\ &= [\bar{D}_0 + z\bar{D}_1]_{4 \times 5} \{\bar{u}(x, y, t)\}_{5 \times 1} \\ &= [\bar{D}_b(z)]_{4 \times 5} \{\bar{u}(x, y, t)\}_{5 \times 1} \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

Et :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} &= \{\bar{\varepsilon}_s(x, y, t)\}_{2 \times 1} = [\bar{D}_2]_{2 \times 5} \{\bar{u}(x, y, t)\}_{5 \times 1} \\ &= [\bar{D}_s]_{2 \times 5} \{\bar{u}(x, y, t)\}_{5 \times 1} \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

Ou les matrices $[\bar{D}_0]$, $[\bar{D}_1]$ et $[\bar{D}_2]$ sont données par :

$$[\bar{D}_0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.21})$$

$$[\bar{D}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.22})$$

$$[\bar{D}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.23})$$

IV-3-Description de l'élément fini Serendip

La famille Serendip est composée d'éléments finis qui n'ont pas de nœuds intérieurs REDDY [45]. L'élément Serendip est représenté sur la figure (IV.1), ou les relations entre le système de coordonnées élémentaires et locales de l'élément sont également présentées dont les équations (IV.24) et (IV.25), valable dans le cas particulier d'un élément finis rectangulaire [45].

$$\xi = \frac{(2x - x_8 - x_4)}{x_8 - x_4}, \quad x = \frac{1}{2} (\xi (x_8 - x_4) + x_8 + x_4) \quad (\text{IV.24})$$

$$\eta = \frac{(2y - y_6 - y_2)}{y_6 - y_2}, \quad y = \frac{1}{2} (\eta (y_6 - y_2) + y_6 + y_2) \quad (\text{IV.25})$$

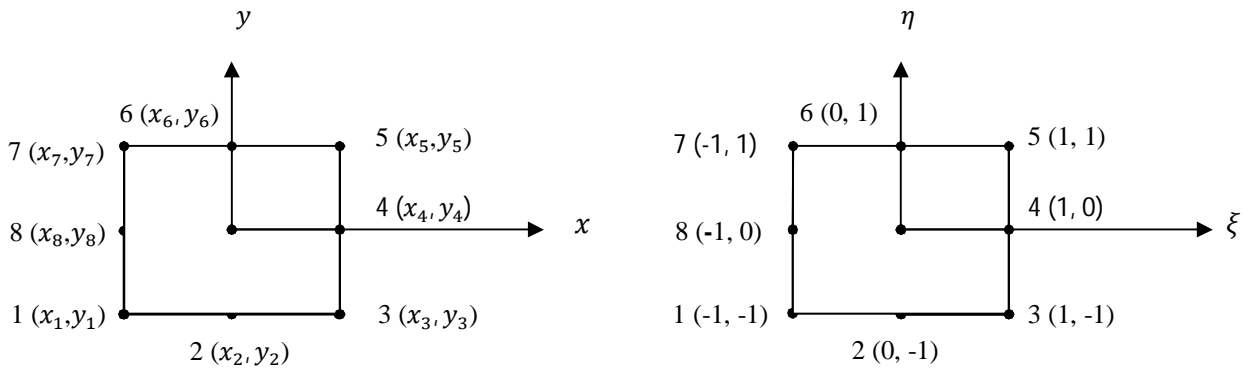


Figure (IV.1). Élément fini rectangulaire à huit nœuds en coordonnées élémentaire (A) et locales (B) [45].

La matrice Jacobienne, associée au changement de coordonnées élémentaires-locales, s'exprime sous la forme :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta \xi} & \frac{\delta y}{\delta \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (x_8 - x_4) & 0 \\ 0 & (y_6 - y_2) \end{bmatrix} \tag{IV.26}$$

Le Jacobien de l'élément fini rectangulaire est défini comme étant le déterminant de la matrice Jacobienne, équation (IV.3) sous la forme suivante :

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{(y_6 - y_2)(x_8 - x_4)}{4} \tag{IV.27}$$

Les huit fonctions de forme, \$N_i(\xi, \eta)\$ avec \$i = 1, 2, \dots, 8\$ de l'élément fini Serendip sont écrites dans le système de coordonnées locales \$(\xi, \eta)\$ par les relations [45] :

$$\begin{Bmatrix} N_1(\xi, \eta) \\ N_2(\xi, \eta) \\ N_3(\xi, \eta) \\ N_4(\xi, \eta) \\ N_5(\xi, \eta) \\ N_6(\xi, \eta) \\ N_7(\xi, \eta) \\ N_8(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/4 (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta) \\ 1/2 (1 - \xi)(1 + \xi)(1 - \eta) \\ -1/4 (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi + \eta) \\ 1/2 (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \eta) \\ -1/4 (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi - \eta) \\ 1/2 (1 - \xi)(1 + \xi)(1 + \eta) \\ -1/4 (1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta) \\ 1/2 (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \eta) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.28})$$

Les dérivées de ces fonctions de forme par rapport au système de coordonnées locales (ξ, η) , sont données par les deux équations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} N_{1,\xi}(\xi, \eta) \\ N_{2,\xi}(\xi, \eta) \\ N_{3,\xi}(\xi, \eta) \\ N_{4,\xi}(\xi, \eta) \\ N_{5,\xi}(\xi, \eta) \\ N_{6,\xi}(\xi, \eta) \\ N_{7,\xi}(\xi, \eta) \\ N_{8,\xi}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/4 (-1 + \eta)(2\xi + \eta) \\ \xi(-1 + \eta) \\ 1/4 (-1 + \eta)(\eta - 2\xi) \\ -1/2 (1 + \eta)(-1 + \eta) \\ 1/4 (1 + \eta)(2\xi + \eta) \\ -\xi(1 + \eta) \\ -1/4 (1 + \eta)(\eta - 2\xi) \\ 1/2 (1 + \eta)(-1 + \eta) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

$$\begin{Bmatrix} N_{1,\eta}(\xi, \eta) \\ N_{2,\eta}(\xi, \eta) \\ N_{3,\eta}(\xi, \eta) \\ N_{4,\eta}(\xi, \eta) \\ N_{5,\eta}(\xi, \eta) \\ N_{6,\eta}(\xi, \eta) \\ N_{7,\eta}(\xi, \eta) \\ N_{8,\eta}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/4 (-1 + \xi)(\xi + 2\eta) \\ 1/2 (1 + \xi)(-1 + \xi) \\ 1/4 (1 + \xi)(2\eta - \xi) \\ -\eta(1 + \xi) \\ 1/4 (1 + \xi)(\xi + 2\eta) \\ -1/2 (1 + \xi)(-1 + \xi) \\ -1/4 (-1 + \xi)(2\eta - \xi) \\ \eta(-1 + \xi) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.30})$$

IV-4-Approximation des déplacements et déformations de la théorie HSDT

La formulation de la théorie HSDT utilise un élément rectangulaire bidimensionnel, montré sur la figure (IV.2) [46]. Les onze variables du champ de déplacement mécanique de la théorie HSDT sont :

$\{\hat{u}(x, y, t)\} = \{u_0 \ v_0 \ w_0 \ \psi_x \ \psi_y \ \psi_z \ \xi_x \ \xi_y \ \xi_z \ \phi_x \ \phi_y\}^T$, sont exprimées en fonction de ses 88 variables mécaniques nodales, c'est-à-dire :

$\{\hat{u}_e\} = \{u_i \ v_i \ w_i \ \psi_{xi} \ \psi_{yi} \ \psi_{zi} \ \xi_{xi} \ \xi_{yi} \ \xi_{zi} \ \phi_{xi} \ \phi_{yi}\}^T$, avec $i = 1, 2, \dots, 8$, défini par les équations (IV.31) et (IV.32).

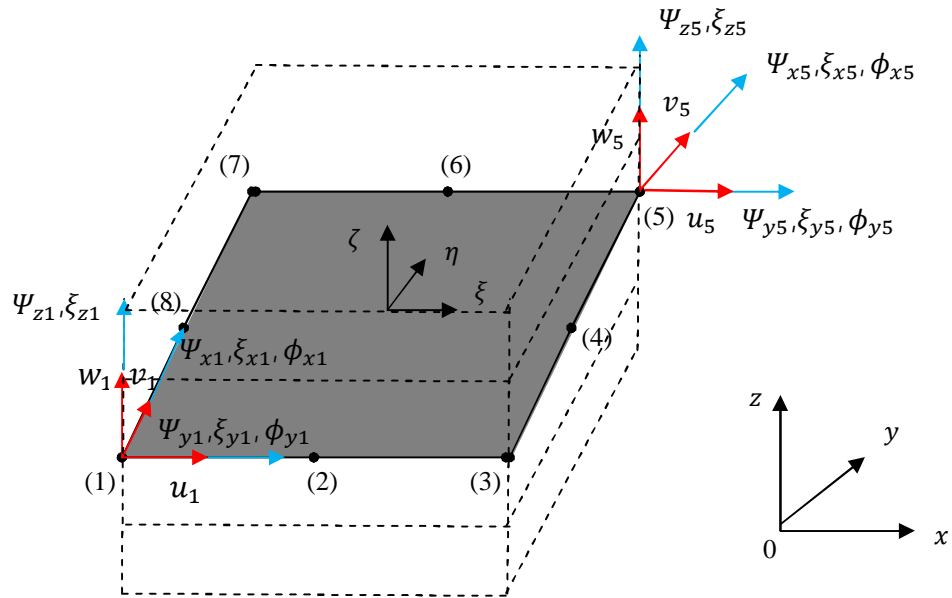


Figure (IV.2). Variables nodales du nœud 1 et 5 d'un élément fini Serendip utilisé par la théorie HSDT pour un modèle de structure composite à trois couches [46].

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \psi_x \\ \psi_y \\ \psi_z \\ \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \psi_{x2} \\ \psi_{y2} \\ \vdots \\ \phi_{x2} \\ \phi_{y2} \\ \vdots \\ \phi_{y8} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.31})$$

Réécrite sous la forme condensée :

$$\{\hat{u}(\xi, \eta, t)\}_{(11 \times 1)} = [\hat{N}(\xi, \eta)]_{11 \times 88} \{\hat{u}_e(t)\}_{88 \times 1} \quad (\text{IV.32})$$

Les fonctions de forme, $N_i(\xi, \eta)$ ($i = 1$ à 8), données par l'équation (IV.28) sont incluses dans la matrice des fonctions de forme $[\hat{N}(\xi, \eta)]$, de taille 11×88 . Utilisant l'équation (IV.33), le champ de déplacements mécaniques de Lo et al. [32] de la théorie HSDT, l'équation (IV.1), est réécrite dans le système de coordonnées locales de l'élément fini Serendip sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}(\xi, \eta, z, t) \\ \hat{v}(\xi, \eta, z, t) \\ \hat{w}(\xi, \eta, z, t) \end{Bmatrix} = [\hat{A}(z)]_{3 \times 11} [\hat{N}(\xi, \eta)]_{11 \times 88} \{\hat{u}_e(t)\}_{88 \times 1} \quad (\text{IV.33})$$

Ou selon l'expression simplifiée :

$$\{\hat{U}(\xi, \eta, z, t)\} = [\hat{A}(z)] [\hat{N}(\xi, \eta)] \{\hat{u}_e(t)\} \quad (\text{IV.34})$$

Soit finalement sous la forme matricielle :

$$\{\hat{U}\} = [\hat{A}][\hat{N}]\{\hat{u}_e\} \quad (\text{IV.35})$$

Ainsi, comme le montre l'équation (IV.35), le vecteur de déplacements mécaniques $\{\hat{U}\}$ de la théorie HSDT peut être exprimé en termes de fonction de forme et variables nodales de l'élément fini

Serendip. Les déplacements de la théorie HSDT, présentées dans les équations (IV.10) et (IV.11), sont réécrits en termes de fonctions de forme et des déplacements nodaux, selon l'expression:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_b(\xi, \eta, z, t) \\ \hat{\varepsilon}_s(\xi, \eta, z, t) \end{Bmatrix}_{6 \times 1} &= \begin{bmatrix} \widehat{D}_b(z) \\ \widehat{D}_s(z) \end{bmatrix}_{6 \times 11} \{ \hat{u}(x, y, t) \}_{11 \times 1} \\
&= \begin{bmatrix} \widehat{D}_b(z) \\ \widehat{D}_s(z) \end{bmatrix}_{6 \times 11} [\widehat{N}(\xi, \eta)]_{11 \times 88} \{ \hat{u}_e(t) \}_{88 \times 1} \\
&= \begin{bmatrix} \widehat{B}_b(\xi, \eta, z) \\ \widehat{B}_s(\xi, \eta, z) \end{bmatrix}_{6 \times 88} \{ \hat{u}_e(t) \}_{88 \times 1}
\end{aligned} \tag{IV.36}$$

Ou sous la forme condensée :

$$\{ \hat{\varepsilon}(\xi, \eta, z, t) \} = [\widehat{D}(z)] [\widehat{N}(\xi, \eta)] \{ \hat{u}_e(t) \} \tag{IV.37}$$

Ou encore, on en séparant les effets découplés de cisaillement plan et transverse :

$$\{ \hat{\varepsilon}_b \} = [\widehat{B}_b] \{ \hat{u}_e \} \tag{IV.38}$$

Et :

$$\{ \hat{\varepsilon}_s \} = [\widehat{B}_s] \{ \hat{u}_e \} \tag{IV.39}$$

Les matrices $[\widehat{B}_b]$ et $[\widehat{B}_s]$, tel que $[\widehat{B}] = [[\widehat{B}_b] [\widehat{B}_s]]$, sont exprimées par une fonction polynomiale de la variable z selon les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\{ \hat{\varepsilon}_b(\xi, \eta, z, t) \}_{4 \times 1} & [\widehat{D}_b(z)]_{4 \times 11} [\widehat{N}(\xi, \eta)]_{11 \times 88} \{ \hat{u}_e(t) \}_{88 \times 1} \\
&= [\widehat{B}_0(\xi, \eta)]_{4 \times 88} \{ \hat{u}_e(t) \}_{88 \times 1} + z [\widehat{B}_1(\xi, \eta)]_{4 \times 88} \{ \hat{u}_e(t) \}_{88 \times 1} \\
&\quad + z^2 [\widehat{B}_2(\xi, \eta)]_{4 \times 88} \{ \hat{u}_e(t) \}_{88 \times 1} + z^3 [\widehat{B}_3(\xi, \eta)]_{4 \times 88} \{ \hat{u}_e(t) \}_{88 \times 1} \\
&= [\widehat{B}_b(\xi, \eta, z)]_{4 \times 88} \{ \hat{u}_e(t) \}_{88 \times 1}
\end{aligned} \tag{IV.40}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\{ \hat{\varepsilon}_s(\xi, \eta, z, t) \}_{2 \times 1} & [\widehat{D}_s(z)]_{2 \times 11} [\widehat{N}(\xi, \eta)]_{11 \times 88} \{ \hat{u}_e(t) \}_{88 \times 1} \\
&= [\widehat{B}_4(\xi, \eta)]_{2 \times 88} \{ \hat{u}_e(t) \}_{88 \times 1} + z [\widehat{B}_5(\xi, \eta)]_{4 \times 88} \{ \hat{u}_e(t) \}_{88 \times 1} \\
&\quad + z^2 [\widehat{B}_6(\xi, \eta)]_{4 \times 88} \{ \hat{u}_e(t) \}_{88 \times 1} \\
&= [\widehat{B}_s(\xi, \eta, z)]_{2 \times 88} \{ \hat{u}_e(t) \}_{88 \times 1}
\end{aligned} \tag{IV.41}$$

IV-5-Approximation des déplacements et déformations de la théorie FSDT

La formulation de la théorie FSDT adopte, de la même façon que la théorie HSDT, l'élément rectangulaire Serendip (Figure IV.1) [46]. Toutefois, ses cinq variables du champ de déplacements mécaniques $\{\bar{u}(x, y, t)\}$, $\{\bar{u}(x, y, t)\} = \{u_0 \ v_0 \ w_0 \ \psi_x \ \psi_y\}^T$, sont exprimées en fonction des variables nodales de la théorie FSDT selon le vecteur

$\{\bar{u}_e\} = \{u_i \ v_i \ w_i \ \psi_{xi} \ \psi_{yi}\}^T$, avec $i = 1$ à 8 , donné par les équations (IV.42) et (IV.43). Ainsi, on :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & \dots & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \psi_{x1} \\ \psi_{y1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \psi_{x2} \\ \psi_{y2} \\ \vdots \\ \psi_{x8} \\ \psi_{y8} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.42})$$

Réécrite sous la forme :

$$\{\bar{u}(x, y, t)\}_{(5 \times 1)} = [\bar{N}(\xi, \eta)]_{5 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1} \quad (\text{IV.43})$$

Les fonctions de forme $N_i(\xi, \eta)$, fournies par l'équation (IV.5) ($i = 1$ à 8 ,) sont contenues dans la matrice en fonction de forme $[\bar{N}(\xi, \eta)]$ de taille 5×40 . En utilisant l'équation (IV.43), le champ des déplacements mécaniques de la théorie FSDT, est donné par l'équation (IV.2), est réécrite dans le système de coordonnées locales, sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}(\xi, \eta, z, t) \\ \bar{v}(\xi, \eta, z, t) \\ \bar{w}(\xi, \eta, z, t) \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = [\bar{A}(z)]_{3 \times 5} [\bar{N}(\xi, \eta)]_{5 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1} \quad (\text{IV.44})$$

Soit :

$$\{\bar{U}(\xi, \eta, z, t)\} = [\bar{A}(z)] [\bar{N}(\xi, \eta)] \{\bar{u}_e(t)\} \quad (\text{IV.45})$$

Est finalement sous la forme matricielle :

$$\{\bar{U}\} = [\bar{A}] [\bar{N}] \{\bar{u}_e\} \quad (\text{IV.46})$$

Ainsi, le vecteur élémentaire de déplacements mécaniques de la théorie FSDT est exprimé, en termes de fonction de forme et variables nodales. En utilisant l'équation (IV.43), les expressions de la déformation mécanique de la théorie FSDT, fournies par les équations (IV.19) et (IV.20), sont réécrites sous la forme:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_b(\xi, \eta, z, t) \\ \bar{\varepsilon}_s(\xi, \eta, t) \end{Bmatrix}_{6 \times 1} &= \begin{bmatrix} \bar{D}_b(z) \\ \bar{D}_s \end{bmatrix}_{6 \times 5} [\bar{N}(\xi, \eta)]_{5 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{B}_b(\xi, \eta, z) \\ \bar{B}_s(\xi, \eta) \end{bmatrix}_{6 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1} \end{aligned} \quad (\text{IV.47})$$

Soit sous formes condensée :

$$\{\bar{\varepsilon}(\xi, \eta, z, t)\} = [\bar{D}(z)] [\bar{N}(\xi, \eta)] \{\bar{u}_e(t)\} \quad (\text{IV.48})$$

L'expression (IV.48) est répartie en termes découplés des déformations de cisaillement plan et cisaillement transverse dans les vecteurs :

$$\{\bar{\varepsilon}_b\} = [\bar{B}_b] \{\bar{u}_e\} \quad (\text{IV.49})$$

Et :

$$\{\bar{\varepsilon}_s\} = [\bar{B}_s] \{\bar{u}_e\} \quad (\text{IV.50})$$

Les deux matrices $[\bar{B}_b]$ et $[\bar{B}_s]$ présentées, sont exprimées comme fonction polynomiale de la variable z , par les expressions :

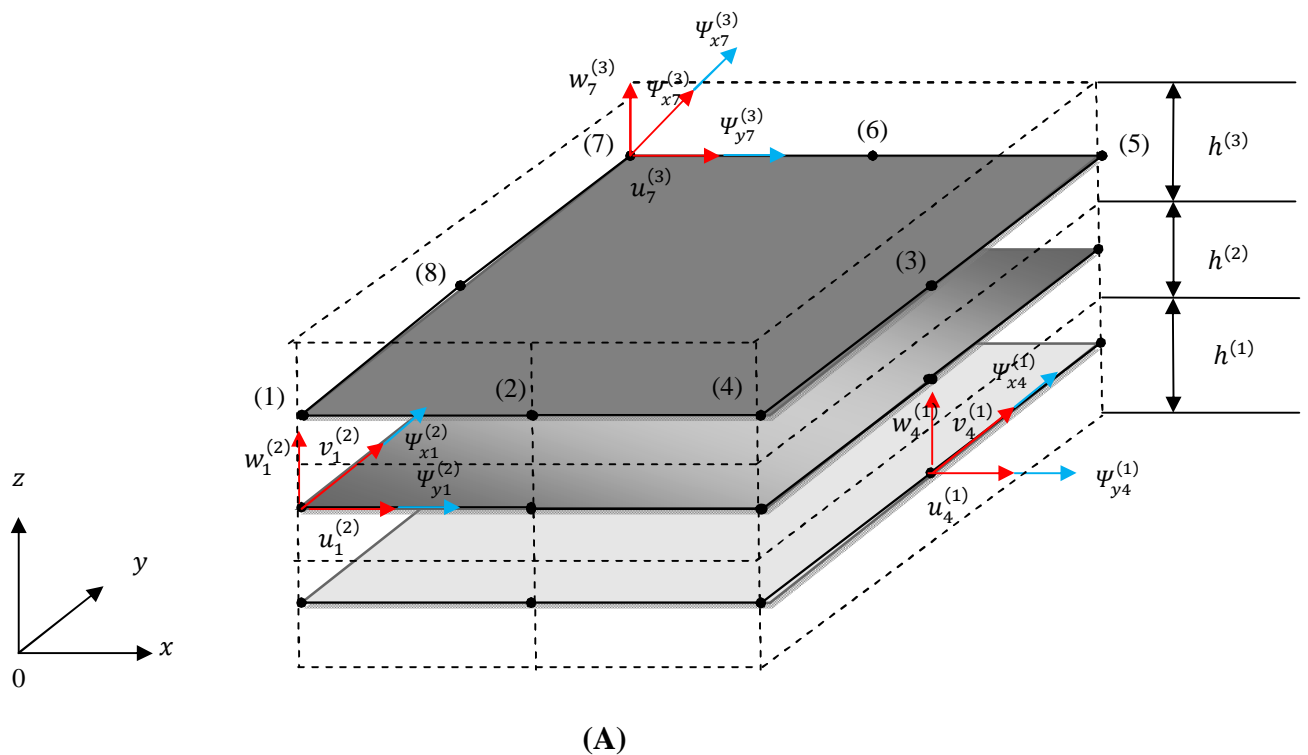
$$\begin{aligned} \{\bar{\varepsilon}_b(\xi, \eta, z, t)\}_{4 \times 1} &= [\bar{D}_b(z)]_{4 \times 5} [\bar{N}(\xi, \eta)]_{5 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1} \\ &= [\bar{B}_0(\xi, \eta)]_{4 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\} + z [\bar{B}_1(\xi, \eta)]_{4 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\} \\ &= [\bar{B}_b(\xi, \eta, z)]_{4 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1} \end{aligned} \quad (\text{IV.51})$$

Et :

$$\begin{aligned} \{\bar{\varepsilon}_s(\xi, \eta, t)\}_{2 \times 1} &= [\bar{D}_s(z)]_{2 \times 5} [\bar{N}(\xi, \eta)]_{5 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1} \\ &= [\bar{B}_2(\xi, \eta)]_{2 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1} \\ &= [\bar{B}_s(\xi, \eta)]_{2 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1} \end{aligned} \quad (\text{IV.52})$$

IV-6-Déplacements et déformations mécanique de la théorie layerwise-FSDT

Le champ des déplacements mécaniques de premier ordre utilisé pour la formulation de la théorie layerwise-FSDT, est donné par pli, selon l'épaisseur du stratifié (Figure IV.3(A)) [46]. Pour la détermination des déplacements et des déformations de la théorie layerwise-FSDT, on adopte une formulation développée pour une structure composite quelconque de trois plis (Figure IV.3(B)), car le nombre de ddIs de la formulation par éléments finis de cette théorie augmente rapidement avec le nombre de plis, et par conséquent le cout numérique de son implémentions est également augmenté. Le nombre total de ddIs (N_{ddI}), pour chaque élément fini formulé en utilisant la théorie layerwise-FSDT, est donné par la relation : $N_{ddI} = 8 \times (3+2 \times N_c)$, ou N_c est nombre total de plis (ou de couches dans le cas de structure sandwiches) d'une structure composite, formulée avec cet élément finis. Ainsi, par exemple, si la structure possède trois plis, on a 72 ddIs pour chaque élément fini, et si elle a quatre plis, ce nombre s'élève à 88 ddIs.



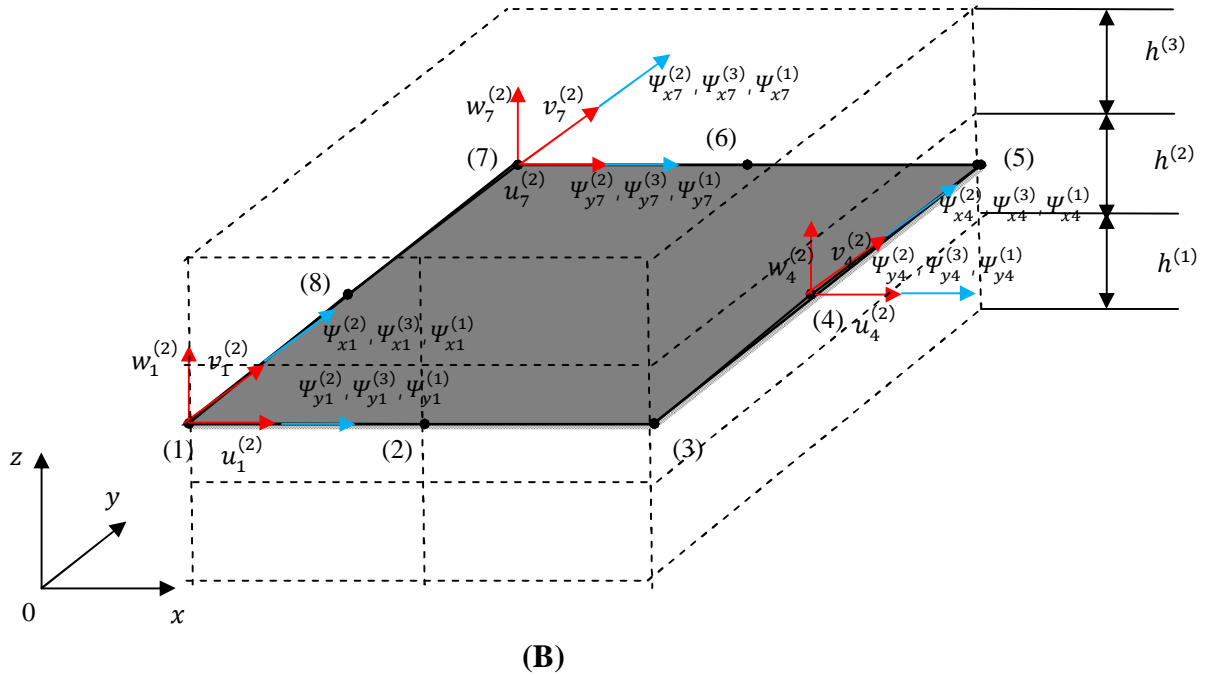


Figure (IV.3). Variables nodales de l'élément fini de la théorie layerwise-FSDT, selon les nœuds 1, 4 et 7 des plis 1, 2 et 3, respectivement, avant (A) et après (B) l'imposition de la continuité de déplacements mécaniques [46].

Les coordonnées moyennes par plis k , illustrées sur la figure (IV.3(A)) avec $k = 1$ à 3, de la structure sandwich à trois couches sont données par les expressions :

$$\begin{aligned}
 z^{(1)} &= -\left(\frac{h^{(1)}}{2} + \frac{h^{(2)}}{2}\right) \\
 z^{(2)} &= 0 \\
 z^{(3)} &= \left(\frac{h^{(2)}}{2} + \frac{h^{(3)}}{2}\right)
 \end{aligned}
 \tag{IV.53}$$

Où les constantes $h^{(1)}$, $h^{(2)}$ et $h^{(3)}$ sont, respectivement, l'épaisseur de la couche inférieure (base), de la couche centrale (noyau) et de la couche supérieure (peau) de la structure sandwich. Les champs des déformations et des déplacements de deux couches adjacentes k et $k+1$, doivent satisfaire la condition de continuité des déplacements. En considérant un stratifié à trois couches, la continuité des déplacements mécaniques entre les interfaces communes à chaque couche, est donnée par les deux équations (IV.54) et (IV.55). Ainsi, pour les interfaces entre la couche base et centrales, on obtient la relation suivante :

$$\begin{cases} u^{(1)}(x, y, z^{(1)} + \frac{h^{(1)}}{2}, t) \\ v^{(1)}(x, y, z^{(1)} + \frac{h^{(1)}}{2}, t) \end{cases}^{(1)} = \begin{cases} u^{(2)}(x, y, -\frac{h^{(2)}}{2}, t) \\ v^{(2)}(x, y, -\frac{h^{(2)}}{2}, t) \end{cases}^{(2)} \quad (\text{IV.54})$$

Et pour les interfaces entre la couche centrale et la couche supérieure, on a :

$$\begin{cases} u^{(2)}(x, y, \frac{h^{(2)}}{2}, t) \\ v^{(2)}(x, y, \frac{h^{(2)}}{2}, t) \end{cases}^{(2)} = \begin{cases} u^{(3)}(x, y, z^{(3)} - \frac{h^{(3)}}{2}, t) \\ v^{(3)}(x, y, z^{(3)} - \frac{h^{(3)}}{2}, t) \end{cases}^{(3)} \quad (\text{IV.55})$$

En utilisant les conditions de continuité sur les interfaces communes ente chaque couche, présentées par les équations (IV.54) et (IV.55), et en utilisant l'équation (IV.53), on peut obtenir les expressions des déplacements mécaniques plans ($u_0^{(k)}, v_0^{(k)}$) en relations aux surfaces moyennes, de la première couche (k=1) et de la troisièmes couche (k=3) de la structure sandwich. Ces expressions sont écrites en fonction des variables du champ des déplacements mécaniques de la couche centrale (k=2). Ainsi, on a les expressions suivantes des déplacements plans de la base et de la peau.

$$u_0^{(1)}(x, y, t) = \left\{ \frac{h^{(1)}}{2} \right\} \psi_x^{(2)}(x, y, t) + u_0^{(2)}(x, y, t) + \left\{ \frac{h^{(2)}}{2} \right\} \psi_x^{(1)}(x, y, t) \quad (\text{IV.56})$$

$$v_0^{(1)}(x, y, t) = \left\{ \frac{h^{(1)}}{2} \right\} \psi_y^{(2)}(x, y, t) + v_0^{(2)}(x, y, t) + \left\{ \frac{h^{(2)}}{2} \right\} \psi_y^{(1)}(x, y, t)$$

$$u_0^{(3)}(x, y, t) = -\left\{ \frac{h^{(3)}}{2} \right\} \psi_x^{(2)}(x, y, t) + u_0^{(2)}(x, y, t) - \left\{ \frac{h^{(2)}}{2} \right\} \psi_x^{(3)}(x, y, t) \quad (\text{IV.57})$$

$$v_0^{(3)}(x, y, t) = -\left\{ \frac{h^{(3)}}{2} \right\} \psi_y^{(2)}(x, y, t) + v_0^{(2)}(x, y, t) - \left\{ \frac{h^{(2)}}{2} \right\} \psi_y^{(3)}(x, y, t)$$

Les équations (IV.56) et (IV.57) sont substituées dans l'équation du champ de déplacement de premier ordre, défini par la couche k de la structure sandwich. Ainsi, le champ de déplacement résultant par la couche k, de la théorie layerwise-FSDT, est écrit sous la forme vectorielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} u^{(k)} \\ v^{(k)} \\ w^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a^{(k)} & 0 & b^{(k)} & 0 & c^{(k)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a^{(k)} & 0 & b^{(k)} & 0 & c^{(k)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\hat{u}(x, y, t)\} \quad (\text{IV.58})$$

Ou:

$$\bar{a}^{(1)} = -\frac{h^{(2)}}{2}, \bar{a}^{(1)} = z, \bar{a}^{(3)} = \frac{h^{(2)}}{2}, \quad (\text{IV.59})$$

$$\bar{b}^{(1)} = 0, \bar{b}^{(2)} = 0, \bar{b}^{(3)} = \left(z - \frac{h^{(2)}}{2}\right), \quad (\text{IV.60})$$

$$\bar{c}^{(1)} = \left(z + \frac{h^{(2)}}{2}\right), \bar{c}^{(2)} = 0, c^{(3)} = 0, \quad (\text{IV.61})$$

Ou les 9 ddIs par nœud de l'élément fini Serendip de la théorie layerwise-FSDT sont groupés dans le vecteur $\{\hat{u}(x, y, t)\}$ et représentent les ddIs associés aux déplacements $(u_0^{(2)}, v_0^{(2)}, w_0^{(2)})$ de la couche moyenne de référence $(x, y, 0, t)$ et les relations des trois couches $(\psi_x^{(1)}, \psi_y^{(1)}, \psi_x^{(2)}, \psi_y^{(2)}, \psi_x^{(3)}, \psi_y^{(3)})$ du MEF la structure sandwich.

Le vecteur $\hat{u}(x, y, t)$ peut être selon l'expression :

$$\hat{u}(x, y, t) = \left\{ u_0^{(2)} \quad v_0^{(2)} \quad w_0^{(2)} \quad \psi_x^{(2)} \quad \psi_y^{(2)} \quad \psi_x^{(3)} \quad \psi_y^{(3)} \quad \psi_x^{(1)} \quad \psi_y^{(1)} \right\}^T \quad (\text{IV.62})$$

Ainsi, on peut écrire l'équation (III.58) sous la forme plus simplifiée suivante :

$$\{\hat{U}\}^{(k)} = [\hat{A}^{(k)}] \{\hat{u}\} \quad (\text{IV.63})$$

En appliquant la relation entre déformations et déplacements mécaniques, exprimée par l'équation (IV.9), combinée avec les équations (IV.58) et (IV.62) on obtient les expressions fournies dans les expressions (IV.64) et (IV.65) et par la suite de représentation par éléments finis de la déformation mécanique en utilisant la théorie layerwise-FSDT. Les déformations de chaque couche sont découplées en termes des effets de flexion, de membrane et de cisaillement plan, fournis par le vecteur $\{\hat{\epsilon}_b\}$, et en termes des effets de déformation de cisaillement transverse, fournis par le vecteur $\{\hat{\epsilon}_s\}$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} &= \left\{ \hat{\varepsilon}_b^{(k)}(x, y, z, t) \right\}_{4 \times 1} = \left[\hat{D}_0^{(k)} + z \hat{D}_1^{(k)} \right]_{4 \times 9} \{ \hat{u}(x, y, t) \}_{9 \times 1} \\
&= \left[\hat{D}_b^{(k)}(z) \right]_{4 \times 9} \{ \hat{u}(x, y, t) \}_{9 \times 1}
\end{aligned} \tag{IV.64}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix}^{(k)} &= \left\{ \hat{\varepsilon}_s^{(k)}(x, y, z, t) \right\}_{2 \times 1} = \left[\hat{D}_2^{(k)} \right]_{2 \times 9} \{ \hat{u}(x, y, t) \}_{9 \times 1} \\
&= \left[\hat{D}_s^{(k)}(z) \right]_{2 \times 9} \{ \hat{u}(x, y, t) \}_{9 \times 1}
\end{aligned} \tag{IV.65}$$

Avec les matrices : $[\hat{D}_0^{(k)}]$, $[\hat{D}_1^{(k)}]$ et $[\hat{D}_2^{(k)}]$ écrites sous la forme :

$$[\hat{D}_0^{(k)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & a^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & b^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & c^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & a^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & b^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & c^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & a^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & a^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & b^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & b^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & c^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & c^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{IV.66}$$

$$[\hat{D}_1^{(k)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{a}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \bar{b}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \bar{c}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\bar{b}^{(k)} \partial y} & 0 & \bar{c}^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & \bar{a}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & \bar{b}^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & \bar{b}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & \bar{c}^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\bar{c}^{(k)} \partial x} \end{bmatrix} \tag{IV.67}$$

$$[\hat{D}_2^{(k)}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \bar{a}^{(k)} & 0 & \bar{b}^{(k)} & 0 & \bar{c}^{(k)} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \bar{a}^{(k)} & 0 & \bar{b}^{(k)} & 0 & \bar{c}^{(k)} & 0 \end{bmatrix} \tag{IV.68}$$

Avec $k=1\dots 3$, selon la couche k de la structure sandwich $\bar{a}^{(k)}$, $\bar{b}^{(k)}$ et $\bar{c}^{(k)}$ sont donnés, selon la couche k , par les expressions :

$$\bar{a}^{(1)} = 0, \bar{a}^{(2)} = 1, \bar{a}^{(3)} = 0, \quad (\text{IV.69})$$

$$\bar{b}^{(1)} = 0, \bar{b}^{(2)} = 0, \bar{b}^{(3)} = 1 \quad (\text{IV.70})$$

$$\bar{c}^{(1)} = 1, \bar{c}^{(2)} = 0, \bar{c}^{(3)} = 0 \quad (\text{IV.71})$$

IV-7-Approximation par éléments finis de déplacements et déformations de la théorie LAYERWISE-FSDT

La formulation de la théorie layerwise-FSDT utilise le même élément rectangulaire bidimensionnel Serendip employé précédemment dans les autres théories, et qui est illustré par la Fig. (IV.2) [46]. Les neuf variables du champ de déplacements mécaniques sont :

$\{\hat{u}(x, y, t)\} = \{u_0^{(2)} \quad v_0^{(2)} \quad w_0^{(2)} \quad \psi_x^{(2)} \quad \psi_y^{(2)} \quad \psi_x^{(3)} \quad \psi_y^{(3)} \quad \psi_x^{(1)} \quad \psi_y^{(1)}\}^T$ de la théorie layerwise-FSDT sont exprimées en fonction de leurs correspondants 72 variables :

$\{\hat{u}_e\} = \{u_i^{(2)} \quad v_i^{(2)} \quad w_i^{(2)} \quad \psi_{xi}^{(2)} \quad \psi_{yi}^{(2)} \quad \psi_{xi}^{(3)} \quad \psi_{yi}^{(3)} \quad \psi_{xi}^{(1)} \quad \psi_{yi}^{(1)}\}^T$ (i=1 à 8), tel qu'est indiqué par l'équation suivante, en utilisant les coordonnées locales (ξ, η) de l'élément fini Serendip :

$$\{\hat{u}(\xi, \eta, t)\}_{(9 \times 1)} = [\hat{N}(\xi, \eta)]_{9 \times 72} \{\hat{u}_e(t)\}_{72 \times 1} \quad (\text{IV.72})$$

Les fonctions de forme de l'élément fini Serendip, présentées dans l'équation (IV.28), constituent la matrice de fonction de forme $[\hat{N}(\xi, \eta)]$, de taille 9×72 . Le champ de déplacement de la théorie layerwise-FSDT, fourni dans l'équation (IV.58), est réécrit dans le système de coordonnées locales, en substituant l'équation (IV.72) dans l'équation (IV.63) :

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, z, t) \\ v(\xi, \eta, z, t) \\ w(\xi, \eta, z, t) \end{Bmatrix}_{3 \times 1}^{(k)} = [\bar{A}^{(k)}(z)]_{3 \times 9} [\hat{N}(\xi, \eta)]_{9 \times 72} \{\hat{u}_e(t)\}_{72 \times 1} \quad (\text{IV.73})$$

Soit :

$$\{\hat{U}(\xi, \eta, z, t)\}^{(k)} = [\hat{A}^{(k)}(z)] [\hat{N}(\xi, \eta)] \{\hat{u}_e(t)\} \quad (\text{IV.74})$$

Enfin, sous la matricielle :

$$\{\hat{U}\}^{(k)} = [\hat{A}^{(k)}] [\hat{N}] \{\hat{u}_e\} \quad (\text{IV.75})$$

Le champ de déplacement de chaque couche k , défini par l'équation (IV.73) de la structure sandwich utilisant la théorie layerwise-FSDT, est exprimé en termes de ses 72 variables nodales par élément fini, au lieu des 40 ou 88 respectivement, avec théories FSDT et HSDT.

Après l'imposition de la continuité des déplacements dans la théorie FSDT (formulée avec une couche équivalente simple) par couche selon l'épaisseur de la structure, Fig. (IV.3 (A)), on obtient la théorie layerwise-FSDT (formulée N_c en couches discrètes) avec l'addition de quatre degrés ddIs supplémentaires par nœud de l'élément fini Serendip. Ces ddIs associées aux rotations $(\psi_{ix}^{(k)}, \psi_{iy}^{(k)})$ de la base ($k=1$) et de la peau ($k=3$), d'un nœud i quelconque de l'élément fini ($i=1\dots 8$), sont additionnés aux $ddIs$ $(u_{0i}^{(2)}, v_{0i}^{(2)}, w_{0i}^{(2)}, \psi_{xi}^{(2)}, \psi_{yi}^{(2)})$ du noyau (couche référence). Celle-ci est la couche que présente le plan moyen de référence de la structure sandwich, avec les coordonnées $(x, y, 0)$. Le vecteur de déformation de la théorie layerwise-FSDT, présenté par les équations (IV.64) et (IV.65), est réécrit en termes de fonction de forme et variables nodales d'élément Serendip, par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_b(\xi, \eta, z, t) \\ \hat{\varepsilon}_s(\xi, \eta, t) \end{Bmatrix}_{6 \times 1}^{(k)} &= \begin{bmatrix} \hat{D}_b^{(k)}(z) \\ \hat{D}_s^{(k)} \end{bmatrix}_{6 \times 9} [\hat{N}(\xi, \eta)]_{9 \times 72} \{\hat{u}_e(t)\}_{72 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{B}_b^{(k)}(\xi, \eta, z) \\ \hat{B}_s^{(k)}(\xi, \eta) \end{bmatrix}_{6 \times 72} \{\hat{u}_e(t)\}_{72 \times 1} \end{aligned} \quad (\text{IV.76})$$

Ou :

$$\{\hat{\varepsilon}(\xi, \eta, z, t)\}^{(k)} = [\hat{D}^{(k)}(z)] [\hat{N}(\xi, \eta)] \{\hat{u}_e(t)\} \quad (\text{IV.77})$$

Ou alors dons sa forme découplée :

$$\{\hat{\varepsilon}_b\}^{(k)} = [\hat{B}_b^{(k)}] \{\hat{u}_e\} \quad (\text{IV.78})$$

$$\{\hat{\varepsilon}_s\}^{(k)} = [\hat{B}_s^{(k)}] \{\hat{u}_e\} \quad (\text{IV.79})$$

Les matrices $[\hat{B}_b^{(k)}]$ et $[\hat{B}_s^{(k)}]$, avec $[\hat{B}]^{(k)} = \left[[\hat{B}_b^{(k)}] [\hat{B}_s^{(k)}] \right]$, sont exprimées comme une fonction polynomiale de premier ordre de la variables z, selon les deux expressions :

$$\begin{aligned} \{\hat{\varepsilon}_b(\xi, \eta, z, t)\}_{4 \times 1}^{(k)} &= [\hat{D}_b^{(k)}(z)]_{4 \times 9} [\hat{N}(\xi, \eta)]_{9 \times 72} \{\hat{u}_e(t)\}_{72 \times 1} \\ &= [\hat{B}_0^{(k)}(\xi, \eta)]_{4 \times 72} \{\hat{u}_e(t)\} + z [\hat{B}_1^{(k)}(\xi, \eta)]_{4 \times 72} \{\hat{u}_e(t)\} \\ &= [\hat{B}_b^{(k)}(\xi, \eta, z)]_{4 \times 72} \{\hat{u}_e(t)\}_{72 \times 1} \end{aligned} \quad (IV.80)$$

Et :

$$\begin{aligned} \{\hat{\varepsilon}_s(\xi, \eta, t)\}_{2 \times 1}^{(k)} &= [\hat{D}_s^{(k)}(z)]_{2 \times 9} [\hat{N}(\xi, \eta)]_{9 \times 72} \{\hat{u}_e(t)\}_{72 \times 1} \\ &= [\hat{B}_2^{(k)}(\xi, \eta)]_{2 \times 72} \{\hat{u}_e(t)\}_{72 \times 1} \\ &= [\hat{B}_s^{(k)}(\xi, \eta)]_{2 \times 72} \{\hat{u}_e(t)\}_{72 \times 1} \end{aligned} \quad (IV.81)$$

Où les matrices $[\hat{B}_b^{(k)}]$ et $[\hat{B}_s^{(k)}]$, sont dépendantes de la couche k de la structure sandwich.

IV-8-Théorie mathématique

IV-8-1-Séparation des composantes de contrainte de Von Mises

Il ya un certain nombre de formules d'analyse nécessaires à cette analyse. En particulier, la condition Von Mises rendement (Henshell (4)) est basée sur la contrainte effective σ_e où :

$$2 \sigma_e^2 = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6 (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2). \quad (IV.82)$$

Cela a été scindé en deux σ_{xy} composants (unidimensionnels) important et un élément supplémentaire σ_a .

$$\sigma_e^2 = 3 \{\sigma_a^2 + \sigma_{xy}^2\}. \quad (IV.83)$$

Restreindre le problème de déformation plane, les équations suivantes sont obtenues.

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \quad \sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{3} \{ [1-\nu + \nu^2] (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + [1 - 2\nu]^2 \sigma_{xx} \sigma_{yy} \} \quad (\text{III.84})$$

La substitution de la valeur pour l'adhésif FM73, $\nu = 0,35$, ce qui réduit à

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{6} \{ 1.545 (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 0.18 \sigma_{xx} \sigma_{yy} \} \quad (\text{IV.85})$$

IV-8-2-Longueur de transfert de charge et de charge de rendement : un modèle unidimensionnel

Le Hart-Smith [34,35] a utilisé un modèle unidimensionnel calculant les contraintes longitudinales dans la plaque, et du cisaillement dans l'adhésif. En considérant l'équilibre de ces forces agissantes sur les composants (figure IV.4(a)), les équations peuvent être obtenues. La contrainte dans l'adhésif, $\sigma_{xy}^A(x)$ décroît de manière exponentielle avec $\exp(-\beta x)$. La longueur de transfert de charge, β^{-1} , est donnée dans ce modèle par :

$$\beta^{-1} = \sqrt{\frac{E^P t_P}{\mu^A / t_A}} \sqrt{\frac{S}{1+S}} \quad \text{Où le rapport rigidité est} \quad S = \frac{E^R t_R}{E^P t_P} \quad (\text{IV.86})$$

Ici, R et P se réfèrent à l'armature et la plaque respectivement. Le modèle de Hart-Smith prédit une augmentation linéaire de la longueur de la zone plastique avec la charge appliquée. Ceci peut être vu dans la figure (IV.4) montrant la contrainte σ_{xy} dans la colle (la contrainte considérée que dans la colle dans ce modèle). La force totale transmise à travers l'adhésif (Figure IV.4(b)) est donnée par l'aire sous la courbe.

$$F_{Trans} = w \times [l_p \times \sigma_{xy}^Y + \int_{l_p}^{\infty} \sigma_{xy}^Y \exp(-\beta[x - l_p]) dx] = w \times E^P t_P \times \frac{F/F_R}{1000} \quad (\text{IV.87})$$

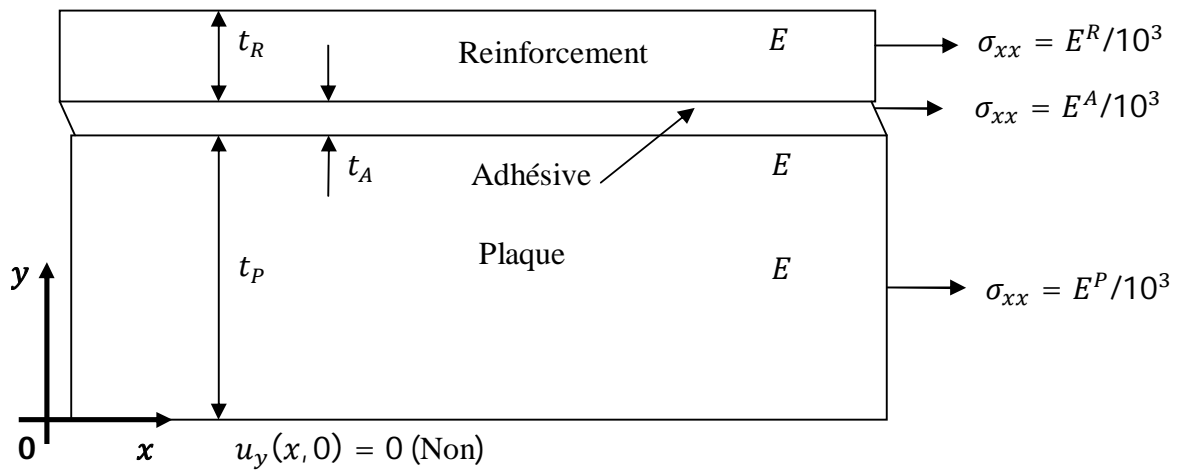


Figure (IV. 4). -a) l'élément infinitésimal utilisé pour calculer la théorie unidimensionnelle, montrant les contraintes et les déplacements considérés. -b) la zone plastique de l_p longueur avec exponentielle queue dans la contrainte de cisaillement d'adhésif.

Chapitre V

Rappels sur la mécanique de la rupture

Chapitre V

Rappels sur la mécanique de la rupture

V-1-Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter les méthodes numériques les plus utilisées pour l'analyse mécanique d'une pièce fissurée. La mécanique de la rupture couvrant un domaine extrêmement vaste, nous commencerons par spécifier de façon précise le cadre de l'étude. Puis nous introduirons les notions fondamentales liées aux approches locales et globales en mécanique linéaire de la rupture. Cela nous amènera à faire un tour d'horizon des différentes méthodes numériques utilisées pour le calcul de grandeurs caractéristiques telles que les facteurs d'intensité de contraintes, ou le taux de restitution d'énergie. Enfin, nous terminerons cette partie bibliographique par la mécanique non linéaire de la rupture, et l'élasto-plasticité [47].

V-2-Hypothèses

V-2-1-Endommagement et mécanique de la rupture

Lorsqu'une pièce est soumise à des efforts d'origines variées, il existe des limites, en contraintes ou en déformations, qu'elle ne doit pas dépasser, sous peine d'endommager le matériau et de provoquer sa rupture. Suivant que l'on s'intéresse à la dégradation du matériau d'un point de vue micromécanique ou macro-mécanique, deux approches peuvent être utilisées [47]. La mécanique de l'endommagement propose de décrire continûment la dégradation progressive du matériau due à l'apparition, à la croissance, puis à la coalescence de microfissures ou de microcavités présentes dans le matériau. Cette approche, initialement introduite par Kachanov, a été reprise et développée par de nombreux auteurs tels que Chaboche, Lemaitre [50], Bui [51], Ehrlacher [52], Gurson [53], Tvergaard, Needleman [54], Rousselier [55], etc.... Lorsque les microfissures, les microcavités créées par croissance ou par coalescence des défauts sont de taille assez grande, cette façon d'aborder le problème n'est plus valable, et il faut alors utiliser la mécanique de la rupture. La mécanique de la rupture a pour objet l'étude du comportement mécanique d'un matériau en présence de fissures macroscopiques. Cela revient notamment à déterminer le champ des contraintes et des déformations au voisinage de la pointe d'une fissure.

L'étude de ces champs mécaniques permettant ensuite de juger de la stabilité ou non d'une fissure. Il est également possible, comme nous le verrons par la suite, d'aborder la mécanique de la rupture à travers une étude énergétique du solide fissuré. Le choix de l'approche dépend essentiellement de l'étude que l'on désire effectuer. Dans certains procédés de mise en forme des matériaux, l'endommagement est souvent critique, et il n'est donc pas nécessaire d'étudier la propagation de fissures. Par contre, dans d'autres procédés (usinage, découpage) et en génie civil, l'étude des fissures se propageant dans le matériau est nécessaire et est basée sur la mécanique de la rupture.

De plus, la capacité du code de calcul utilisé à permettre la propagation d'une fissure à travers un maillage est un paramètre important. En effet, en mécanique de l'endommagement, on ne modélise pas réellement les étapes d'amorçage et de propagation de fissures. Ces étapes se produisent naturellement lorsque l'adoucissement dû à la croissance des cavités l'emporte sur l'écroutissage du matériau. Il se produit alors une instabilité mécanique traduite notamment par la chute des contraintes dans la zone endommagée. La fissure correspond alors aux zones qui ne transmettent plus d'efforts normaux. Cette approche présente donc l'avantage de ne pas significativement modifier la topologie du maillage en introduisant une fissure mais reste approximative dans la mesure où la précision sur le chemin de propagation est directement liée à la finesse du maillage. De plus, en grandes déformations, la dégénérescence des éléments correspondant aux zones les plus endommagées peut rapidement entraîner la fin du calcul. Dans la suite du manuscrit, nous nous intéresserons spécifiquement à la mécanique de la rupture, en effectuant de temps en temps quelques parenthèses concernant l'endommagement.

V-2-2-Fissures statiques, quasi-statiques, dynamiques

Les premiers travaux réalisés en mécanique de la rupture visaient à établir, de façon précise, les champs mécaniques au voisinage d'une fissure statique. La difficulté d'une telle étude réside dans la prise en compte de la singularité introduite par la pointe d'une fissure. Le calcul précis de paramètres mécaniques tels que les facteurs d'intensité des contraintes, ou le taux de restitution d'énergie réside en grande partie dans la bonne prise en compte de cette singularité. L'étude des champs mécaniques entourant une pointe de fissure statique fait l'objet de cette étude bibliographique [47].

Ces paramètres mécaniques ainsi calculés, il est possible de prévoir la propagation ou non de la fissure. Suivant le type de matériau étudié, et le chargement appliqué, la propagation pourra être qualifiée de stable (la fissure a besoin de plus d'énergie pour reprendre sa progression) ou d'instable (la fissure poursuit sa progression jusqu'à la ruine de la structure, sans nécessiter d'énergie supplémentaire).

On est alors amené à étudier la propagation quasi-statique de fissures, à l'aide de critères d'amorçage, de bifurcation, et de stabilité.

Enfin dans les problèmes de chargement rapide, ou lorsque les vitesses de propagation de fissures sont importantes, il devient nécessaire de prendre en compte les termes d'inertie dans la formulation et dans la résolution du problème. On parle alors de propagation dynamique des fissures [56], ce domaine ne sera pas abordé dans ce manuscrit.

V-2-3-Modes de rupture

La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties, appelées lèvres de la fissure, ce qui introduit une discontinuité au sens des déplacements. Les mouvements possibles des lèvres de chaque fissure sont des combinaisons de trois modes indépendants [47] :

- Mode I : ouverture (ou clivage).
- Mode II : cisaillement plan.
- Mode III : cisaillement anti-plan.

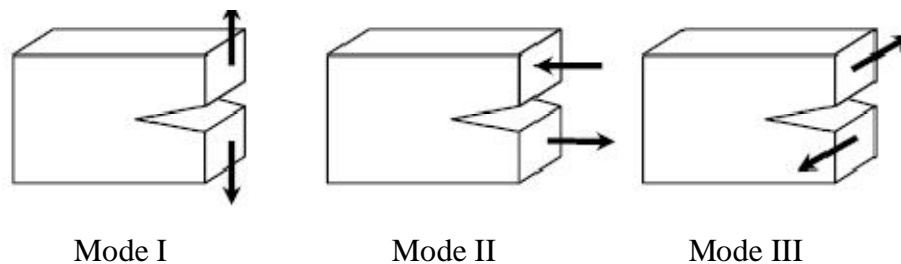


Figure (V.1). Modes de rupture [47].

Le mode I est le plus dangereux pour l'extension d'une fissure, cependant, une fois amorcée et pour des sollicitations mixtes ou des géométries complexes, la fissure a tendance à bifurquer, et reste donc rarement rectiligne (2D) ou plane (3D).

V-2-4-Mécanique linéaire, et non-linéaire de la rupture

La mécanique de la rupture se propose de décrire les étapes d'amorçage et de propagation de la fissuration. Selon le comportement du matériau durant la propagation d'une fissure, on peut être confronté à deux types de rupture :

- **Rupture fragile**, en l'absence de déformation plastique significative (mécanique linéaire de la rupture).
- **Rupture ductile**, en présence de déformation plastique non négligeable (mécanique non linéaire de la rupture). Dans ce cas, suivant l'étendue de la zone plastique en pointe de fissure, on différencie le cas de la plasticité confinée, de celui de la plasticité étendue.

• Etude d'un milieu élastique fissuré

Dans un milieu élastique fissuré, la région proche de la pointe de fissure peut être décomposée en trois zones [57] :

1. La zone d'élaboration : au voisinage direct de la pointe de fissure, l'étude de cette zone (considérée comme ponctuelle d'un point de vue mécanique) est très complexe dans la mesure où les contraintes tendent vers l'infini (d'un point de vue théorique) à la pointe de fissure.
2. La zone singulière : dans cette zone, le champ de contrainte présente une singularité en $r^{-1/2}$.
3. La zone des champs lointains : extérieure aux deux précédentes, elle raccorde la zone singulière aux conditions aux limites de chargement et déplacement.

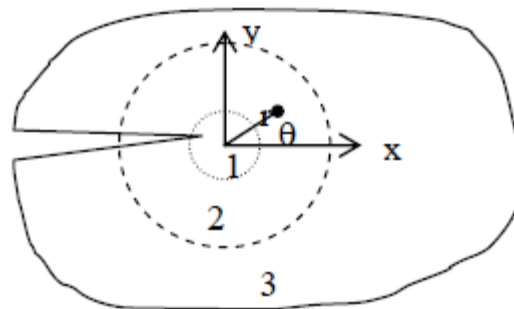


Figure (V.2). Les zones de champs mécaniques [47].

C'est la singularité d'ordre $(-1/2)$ dans la zone singulière qui caractérise la solution obtenue en élasticité pure.

Cette solution n'est malheureusement pas physiquement réaliste. En fait, les contraintes en pointe de fissure sont « écrêtées » par la plasticité (Figure (V.3)) [58]. De plus, la signification énergétique de la rupture proposée par Griffith devient plus ambiguë, dans la mesure où elle consiste à représenter la propagation de fissure comme un déchargement. Or, en plasticité, une partie de l'énergie est dissipée (phénomène irréversible) et on ne peut donc pas toujours évaluer la fraction d'énergie « disponible » pour la propagation.

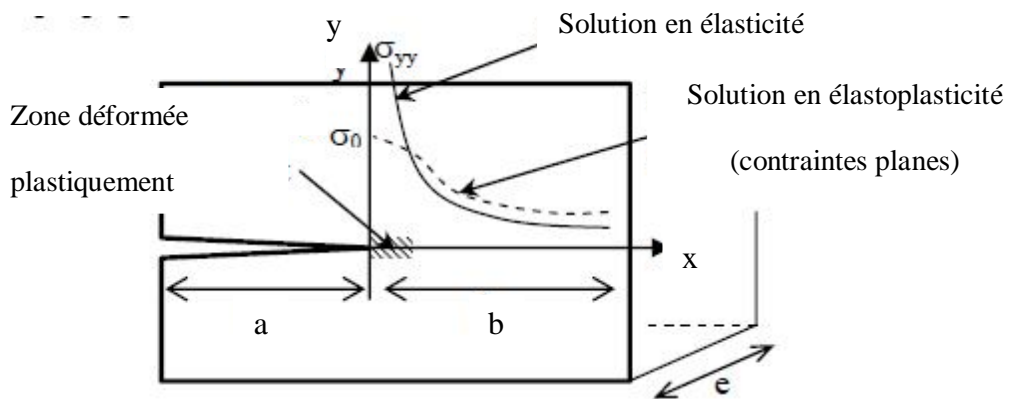


Figure (V.3). Plasticité en pointe de fissure [47].

• Plasticité confinée

La concentration de contraintes en pointe de fissure créant une plastification locale, il est nécessaire que la taille de cette zone reste petite par rapport à la longueur de la fissure, et aux dimensions de la structure, de façon à ne pas trop perturber la distribution élastique des contraintes. A titre d'exemple, la norme ASTM impose aux éprouvettes utilisées pour le calcul de la ténacité la condition suivante :

$$\min (e, a, b) \geq \frac{5}{2} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_0} \right)^2 \quad (\text{V.1})$$

Où σ_0 est la limite élastique, et K_{IC} la ténacité du matériau. Lorsque c'est le cas, on peut continuer à utiliser les concepts de la mécanique linéaire de la rupture.

Plusieurs modèles proposent de déterminer la taille de la zone plastique en pointe de fissure : modèles d'Irwin, et de Dugdale-Barenblatt qui sont détaillés dans [58] et [59].

• Plasticité étendue

La plasticité étendue est le domaine pour lequel la taille de la zone plastique n'est plus négligeable devant la longueur de la fissure ou la dimension du ligament. Elle s'inscrit dans le cadre de la mécanique de la rupture à comportement non linéaire, et son étude n'est que très récente. Si en élasticité linéaire, la singularité est d'ordre $-1/2$, elle est plus faible en plasticité, et vaut $-n/(n+1)$, où n , le coefficient d'érouissage du matériau, est compris entre 0 et 0,2.

La zone d'élaboration définie en élasticité linéaire est remplacée par un champ de déformation qui ne dépend que de la limite d'élasticité en cisaillement et de l'orientation par rapport à l'axe de la fissure (champ de Prandtl).

A la pointe de la fissure, l'émoussement et le champ de Prandtl conduisent à des contraintes finies. Plus loin de l'extrémité de la fissure (zone de champs semi-lointains), la distribution des contraintes et des déformations peut être approchée par la solution asymptotique proposée par Hutchinson [60], Rice et Rosengren [61] (HRR).

Même si l'étude de la mécanique non linéaire de la rupture est en plein essor actuellement, la majorité des résultats obtenus d'un point de vue numérique concernent la mécanique linéaire de la rupture. Il est souvent difficile de différencier les méthodes applicables à tout type de matériau, ou uniquement aux matériaux élastiques. Sauf indications contraires, notre étude sera donc basée sur une analyse élastique du champ des contraintes, en admettant les hypothèses générales de l'élasticité linéaire classique, mais en tolérant néanmoins l'existence d'une zone de plasticité sous la condition suivante : cette zone doit à la fois être confinée et de dimension constante.

Les ruptures obtenues par fatigue, par choc thermique, ou par corrosion couvrent également un domaine de recherche important, mais elles ne seront pas abordées dans ce manuscrit. De plus, notre étude est volontairement restreinte aux fissures planes, et supposées rectilignes par morceaux. Enfin, nous nous placerons, dans ce chapitre, dans le cas de matériaux homogènes et isotropes. On peut alors distinguer deux approches concernant l'étude de la zone singulière :

- Une **approche locale**, caractérisée par une étude des champs de contrainte et de déformation au voisinage du front de fissure ;
- Une **approche globale** (ou énergétique), caractérisée par l'étude du comportement global de la structure fissurée sur le plan énergétique.

V-2-5-Approche locale

Certains auteurs définissent l'approche locale comme l'approche liée aux modèles d'endommagement. Dans notre cas, cette approche consiste à déterminer les paramètres de mécanique de la rupture à l'aide des champs de contraintes et de déformations locaux en pointe de fissure. Pour définir ces champs en pointe de fissure, nous introduirons la notion de facteurs d'intensité des contraintes. Ces champs étant fortement perturbés par la singularité créée par la pointe de fissure, nous verrons qu'il est nécessaire d'utiliser des outils spécifiques afin de calculer ces facteurs d'intensité des contraintes de façon précise.

V-2-5-1-Facteurs d'intensité des contraintes

Dans le cadre de la mécanique élastique isotrope et linéaire de la rupture l'état de contrainte au voisinage d'une fissure est constitué par la superposition de trois sollicitations caractérisées par trois facteurs d'intensité des contraintes k_I , k_{II} , k_{III} tels que [47] :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) \quad (V.2)$$

Où r et θ sont les coordonnées polaires centrées sur la pointe de la fissure, f_{ij} fonction de l'angle polaire par rapport à l'extrémité de la fissure. Les solutions analytiques pour les trois modes ont été déterminées de manière similaire en élasticité linéaire.

En contraintes planes : $\sigma_{zz} = 0$ et $k = (3-\nu)/(1+\nu)$

et en déformations planes : $\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ et $k = (3-4\nu)$

Ainsi les champs de contraintes, de déformations et de déplacements en élasticité linéaire sont-ils connus, leur forme ne dépend pas de la longueur de la fissure ou de la contrainte appliquée sur la structure, seule leur intensité en dépend.

Cette intensité, appelée aussi facteur d'intensité des contraintes varie linéairement avec la contrainte appliquée et évolue comme la racine d'une dimension caractéristique du défaut [48].

$$\text{On notera} \quad K_I = Y\sigma\sqrt{a} \quad (\text{V.3})$$

où a : est la longueur de la fissure.

σ : la contrainte appliquée.

Y : un facteur géométrique dépendant de la forme de la fissure et du type d'éprouvette.

Mode I

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \\ u_y &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \\ \kappa &= 3 - 4\nu \quad \text{En déformations planes} \\ \kappa &= \frac{3-\nu}{1-\nu} \quad \text{En contraintes planes} \end{aligned} \quad (\text{V.5})$$

Mode II

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} &= +\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{xy} &= +\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{V.6})$$

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \kappa + \cos \theta) \\ u_y &= \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (2 - \kappa - \cos \theta) \end{aligned} \quad (\text{V.7})$$

Mode III

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{yz} = +\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0 \end{cases}$$

(V.8)

$$u_z = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (V.9)$$

Ces relations de contraintes et déformations au voisinage d'une fissure peuvent s'écrire sous la forme condensée suivante [48] :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_\alpha}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^\alpha(\theta) \quad (V.10)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{K_\alpha}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}^\alpha(\theta) \quad \alpha = \text{I, II, III}$$

Lorsque la structure fissurée est sollicitée dans les 3 modes simultanément, en appliquant le principe de superposition en élasticité linéaire [48] :

$$\sigma_{ij}^{(total)} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III} \quad (V.11)$$

Les expressions analytiques des trois facteurs d'intensité de contraintes dépendent, dans le cas de la rupture statique, de la longueur de la fissure, de la géométrie et du chargement ; ils déterminent à eux seuls les champs asymptotiques de contraintes et de déplacements. Dans le cas de la rupture dynamique, les facteurs d'intensité de contrainte dépendent en plus du temps, et d'autres paramètres particuliers développés par la suite. Finalement le paramètre mécanique pertinent pour caractériser le comportement d'une fissure est donc le facteur d'intensité des contraintes.

V-2-5-2-Calcul des facteurs d'intensité des contraintes

Les facteurs d'intensité des contraintes s'exprimant en fonction du champ des contraintes au voisinage de la fissure, et ce champ de contraintes étant parfaitement accessible numériquement, ce calcul ne devrait pas poser de problèmes à priori. Pourtant, nous allons voir qu'une bonne précision sur ces facteurs est difficile à obtenir [48].

• **Eléments singuliers**

L'utilisation standard de la méthode des éléments finis ne permettant pas de rendre compte des singularités des champs de contrainte au voisinage de la pointe de la fissure, il a été nécessaire d'effectuer quelques modifications. Plusieurs idées ont été proposées : du raffinement de la zone singulière à l'introduction brutale de la singularité dans les fonctions de forme, la plupart de ses techniques ont peu à peu été abandonnées.

Ce sont Henshell et Shaw [62] d'une part, et Barsoum [63] d'autre part, qui finirent par trouver une solution préservant à la fois les fonctions de forme et les fonctions d'interpolation. Le fait de déplacer les nœuds milieux des côtés correspondant à la pointe de la fissure (arêtes 1-2 et 1-4) au quart de la longueur (Figure IV.5.a) permet de forcer la singularité, tout en représentant correctement un champ constant de déformation, et un déplacement d'ensemble.

Toutefois, si la singularité existe le long des côtés en contact avec la pointe de la fissure, elle disparaît sur les autres rayons émanant du nœud 1. Hibbitt [64] a de plus montré en 1977 que l'énergie de déformation (et donc la raideur) n'était plus bornée lorsque l'on tendait vers la pointe de fissure. Il a alors fallu introduire le triangle à 8 nœuds avec nœuds au quart (Figure IV.5.b), la pointe de fissure se trouvant aux trois nœuds confondus 1-8-4. Cet élément garantit alors la singularité pour toutes les arêtes émanant du nœud 1, ainsi qu'une énergie de déformation bornée lorsqu'on tend vers la pointe de fissure [48]. Tong et Pian [65] ont également proposé un super-élément mixte à 9 ou 17 nœuds, avec présence d'une fissure centrée et qui permet de prendre en compte la singularité.

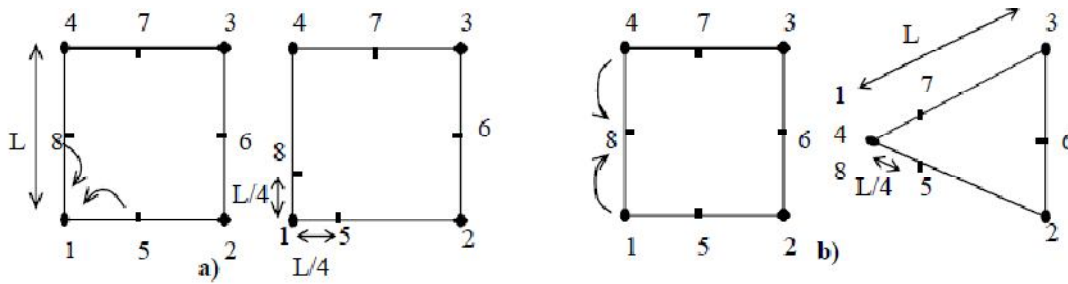


Figure (V. 4). – a) Élément quadrangle singulier – b) Élément triangulaire singulier [48].

• **Principe de superposition**

Cette méthode, la plus couramment utilisée, consiste à ramener le problème traité à une suite de problèmes déjà résolus et dont les solutions se trouvent dans certains Handbooks [66]. Le principe utilisé est celui de la superposition des solutions, qui résulte de l'élasticité linéaire.

• **Méthode des fonctions de poids**

On recherche la valeur de K_I produite par une force unité, placée à une distance x de l'extrémité de la fissure. Pour une distribution $P(x)$, on peut alors écrire :

$$K_I = \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^\ell M(x)P(x)dx \tag{V.12}$$

Avec $M(x)$ fonction de poids introduites par Bueckner et par Rice qui ne dépendent que de la géométrie du solide fissuré. ℓ profondeur de la fissure. $p(x)$ pression appliquée sur la fissure.

• **Calcul par extrapolation**

Cette méthode, également utilisée en élasto-plasticité, consiste à effectuer une extrapolation du champ des contraintes ou des déplacements lorsque r tend vers 0. Par exemple, en déformations planes, le déplacement est une fonction linéaire de r , et pour $\theta = \pi$, K_I et K_{II} peuvent s'exprimer en fonction du déplacement :

$$\left\{ \begin{aligned} K_{Iu}(r) &= \frac{E}{1-\nu^2} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{u_y}{\sqrt{r}} \\ K_{IIu}(r) &= \frac{E}{1-\nu^2} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{u_x}{\sqrt{r}} \end{aligned} \right. \tag{V.13}$$

Puis, par passage à la limite :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I = \lim_{r \rightarrow 0} K_{Iu}(r) \\ K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} K_{IIu}(r) \end{array} \right. \quad (\text{V.14})$$

La même extrapolation peut être faite en exprimant K_I en fonction du champ des contraintes. La solution obtenue sera cependant moins précise dans la mesure où les contraintes sont calculées aux points d'intégration et non aux nœuds. Ces méthodes ont l'avantage de ne pas nécessiter de code spécialisé en mécanique de la rupture et de pouvoir séparer les modes I et II. Elles peuvent indifféremment être appliquées aux éléments classiques ou aux éléments spéciaux. Cependant, elles nécessitent un maillage fin lorsque l'on n'utilise pas d'éléments spéciaux, et il est préférable d'effectuer une étude de sensibilité par rapport à la finesse du maillage. Il existe également une incertitude sur l'intervalle à considérer pour l'extrapolation dans la mesure où il faut éliminer les points les plus proches de la pointe de la fissure pour effectuer un lissage.

V-3-Approche globale ou énergétique

La propagation de fissure est un phénomène dissipateur d'énergie. Dans la théorie de Griffith, l'énergie consommée est la différence entre l'état énergétique du système avant et après fissuration. Cette énergie peut s'assimiler à une énergie de surface, et Griffith a postulé que c'était une caractéristique intrinsèque du matériau.

V-3-1-Le taux de restitution d'énergie

Noté G , le taux de restitution d'énergie représente l'énergie nécessaire pour faire progresser la fissure d'une longueur unité. Elle correspond à la décroissance de l'énergie potentielle totale W_p pour passer d'une configuration initiale avec une longueur de fissure a , à une autre où la fissure s'est propagée d'une longueur da :

$$\left\{ \begin{array}{l} G = -\frac{\partial W_P}{\partial A} \\ W_P = W_e + W_{ext} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} W_e = -\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon \\ W_{ext} = \int_{\Omega} f \cdot u \end{array} \right. \quad (V.15)$$

Où W_e représente l'énergie de déformation élastique, W_{ext} l'énergie potentielle des forces extérieures f , et ∂A l'incrément de surface correspondant à l'extension de la fissure.

En utilisant le champ des contraintes dans la zone singulière et la loi de comportement élastique linéaire, il est possible de relier le taux de restitution d'énergie aux facteurs d'intensités de contraintes par :

$$G = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} E' = E \quad \text{en contraintes planes} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{est le module de cisaillement} \\ E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \text{en déformations planes} \end{array} \right.$$

Remarque : Il est également possible de relier G à la complaisance C de la structure par

$$G = \frac{P^2}{2} \frac{\partial C}{\partial A}$$

Sur la courbe Force/Déplacement ci-contre, OA correspond à une fissure de longueur a , et OB à une fissure de longueur $a + \delta a$. G représente l'aire située dans le triangle OAB pour un essai effectué à charge imposée ou dans le triangle OAC pour un pilotage en déplacement imposé.

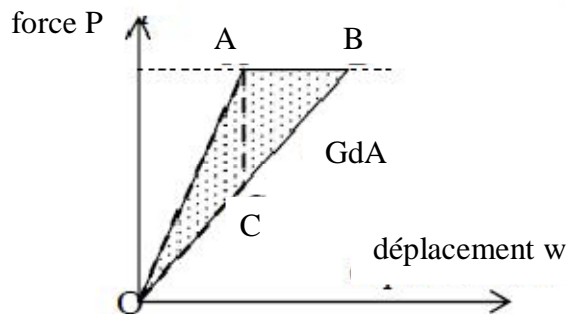


Figure (V.5). Relation entre G et la complaisance de la structure.

V-3-2-Intégrales de contour

La singularité du champ des contraintes au voisinage de la pointe d'une fissure peut également être étudiée grâce à certaines intégrales de contour déduites de la loi de conservation de l'énergie [67]. Ces intégrales ont la particularité d'être équivalentes au taux de restitution d'énergie, et d'être indépendantes du contour d'intégration choisi. Parmi les plus connues, on peut citer l'intégrale J de Rice [68], l'intégrale duale I de Bui [69], l'intégrale hybride s'appuyant sur le super-élément de Tong et Pian [58] ou encore les intégrales T et A proposées par Bui et Proix [51] et mises en œuvre et étudiées par Zhang [61]. Pour l'intégrale de Rice, on considère un milieu bidimensionnel fissuré, dont la fissure sera supposée rectiligne. Le contour C est un contour ouvert, orienté dont les extrémités se trouvent sur les faces supérieure et inférieure de la fissure.

$$J = \int_C \left(W_e(\varepsilon) n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds \quad (\text{V.14})$$

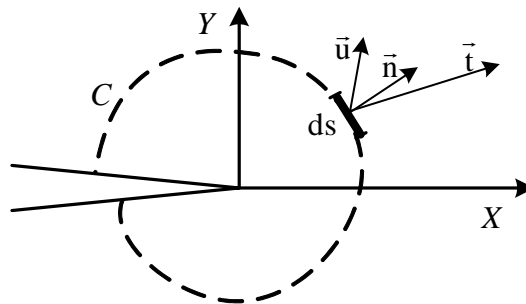


Figure (V.6). Contour d'intégration [49].

Où W_e est la densité d'énergie de déformation élastique telle que $\sigma_{ij} = (\partial W_e / \partial \varepsilon_{ij})$, u est le vecteur déplacement en un point M du contour C avec la normale n tournée vers l'extérieur et σ représente le champ de contraintes.

- L'intégrale J est indépendante du contour (à condition qu'il n'y ait pas de forces de surface sur les lèvres de la fissure, que l'on soit en conditions isothermes, et en quasi-statique).
- L'intégrale J représente le taux de décroissance de l'énergie potentielle. $J = -\frac{\partial W_p}{\partial A} = G$

- L'intégrale J permet, dans certaines conditions¹, de décrire le champ des contraintes et des déformations à la pointe de la fissure à travers le champ HRR.

$$J = - \int_0^w \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right)_w dw = \int_0^P \left(\frac{\partial w}{\partial a} \right)_P dP \quad (\text{V.15})$$

Dans les cas où la plasticité est importante, on effectue une analogie avec un matériau élastique non linéaire. Cette hypothèse est valable à condition qu'il n'y ait pas de brusques variations dans la direction du chargement appliqué, et donc, pas de déchargement. En effet, le déchargement en élasticité non linéaire s'effectue suivant la même courbe qu'à la montée, ce qui n'est pas le cas en élasto-plasticité. Dans ce cadre, l'intégrale J est étendue au cas des matériaux élastiques non linéaires, et permet ainsi d'intégrer le champ des contraintes et des déplacements à la pointe de la fissure. Ayant ainsi fait l'analogie entre l'élasto-plasticité et l'élasticité non linéaire, l'intégrale J peut être obtenue, comme précédemment, par la méthode de la complaisance :

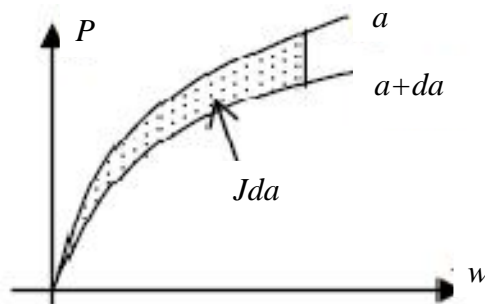


Figure (IV.7). Détermination de J par la méthode de la complaisance.

Chapitre VI

Résultats et Interprétations

Chapitre VI

Résultats et interprétations

VI-1-Introduction

Dans ce chapitre, plusieurs cas sont traités de deux plaques en composite stratifiées collées entre elles par un adhésive. On trouve le traitement de l'effet de la longueur de la fissure sur les contraintes et les déformations. Un deuxième cas, prend en compte l'effet de l'épaisseur des plaques à coller. Le troisième est dirigé vers l'influence de l'épaisseur de l'adhésive sur les contraintes et les déformations.

VI-2-Modélisation de problèmes

La figure (VI.1), montre l'association de deux plaques en composite au moyen d'un adhésive. Toutes les dimnesions sont en (mm).

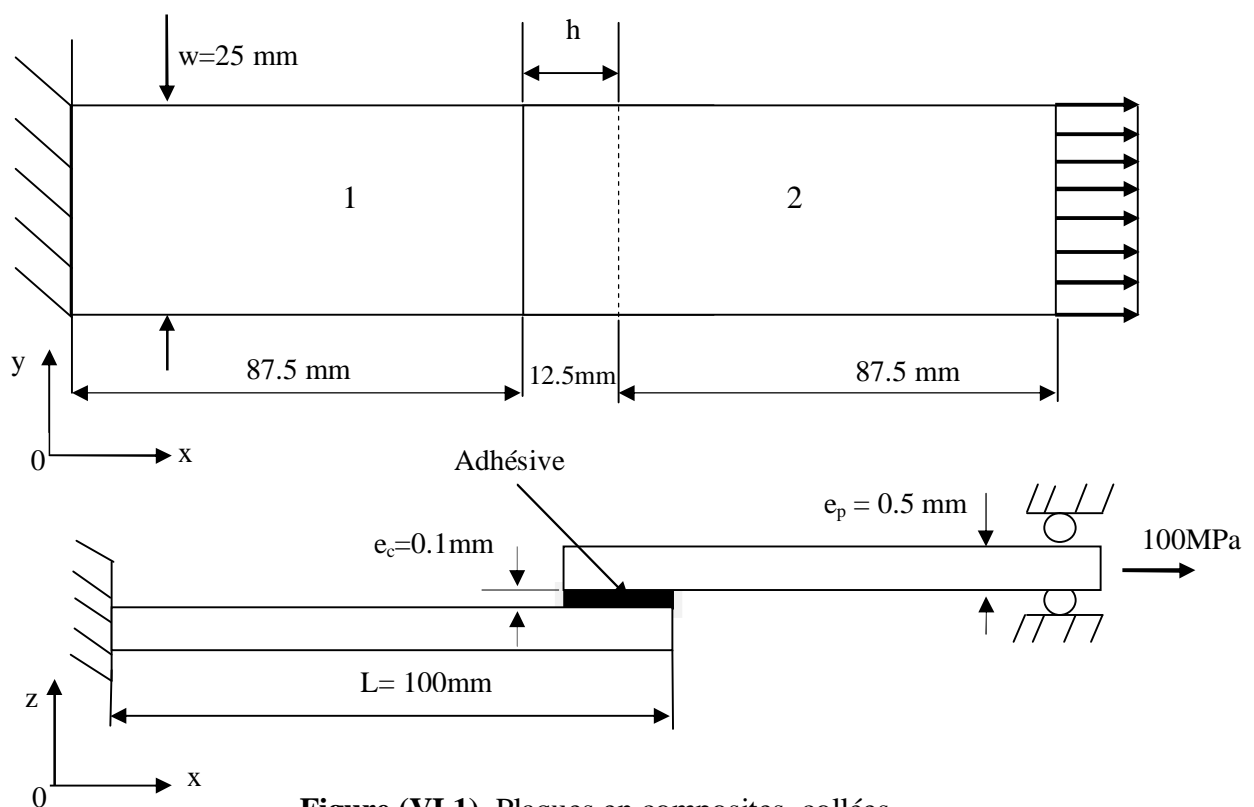


Figure (VI.1). Plaques en composites collées.

VI-2-1-Modèle par éléments finis

Le maillage d'éléments finis est généré en utilisant un élément brique en trois dimensions 'Abaqus' [18]. Cet élément (Fig.VI.2) est un élément structurel solide conçu sur la base théorie de l'élasticité à trois dimensions et est utilisée pour modéliser des solides orthotropes d'épaisseur. L'élément est défini par huit nœuds ayant trois degrés de liberté par nœud: traductions dans le nodaux x, y, et z.

VI-2-2-Le chargement

Une charge uniforme longitudinale $\sigma=100$ MPa est appliquée sur le coté droit de la plaque en composite (2).

VI-2-3-Conditions aux limites

La plaque en composite (1) est encastree à son extrémité gauche, tandis que la plaque (2) est appuyée sur un système de rouleau.

VI-2-4-Propriétés mécaniques des matériaux

Les plaques sont de fibres en carbone et de matrice époxy de référence le T300/934, est de séquence d'empilement (0/90/90/0). Les propriétés mécaniques des deux plaques en composites sont données par le tableau (VI.1) [43]. Les deux plaques en composites sont reliées par un adhésive (Epoxy) sur une longueur de 25 mm et une largeur de 12.5 mm. Le tableau (VI.2), montre les propriétés mécaniques de l'adhésive époxy.

E_L (GPa)	E_T (GPa)	E_Z (GPa)	ν_{LT}	ν_{LZ}	ν_{TZ}	G_{LT} (GPa)	G_{LZ} (GPa)	G_{TZ} (GPa)
127.5	9.0	4.8	0.28	0.28	0.41	4.8	4.8	2.55

Tableau (VI.1). Propriétés mécaniques du matériau composite T300/934 graphite / époxy

La fissure est localisée dans la plaque en composite de numéro (2), voir figure (VI.2). La modélisation numérique a été réalisée avec de différentes longueurs de fissures (4,5,6 et 8 mm), ayant de différentes orientations d'angle θ (0,10,20,30,40,50,60,70,80,90°). Les contraintes et les déformations sont représentées pour les différentes longueurs de fissures et d'orientation d'angle.

Propriétés mécaniques	
Température de transition vitreuse	120-130°C
Contrainte à la traction	85N/mm ²
Module élastique	10500N/mm ²
Elongation	0.8%
Contrainte à la flexion	112N/mm ²
Module de flexion	10.000N/mm ²
Contrainte de compression	190N/mm ²
Coefficient de dilatation thermique	34 10 ⁻⁶
Absorption d'eau à 24°C (ISO 62(1980))	5-10 mg
Module de cisaillement G	2800 MPa
Contrainte de cisaillement	100 MPa

Tableau (VI.2). Propriétés mécaniques du matériau époxy (colle) [43].

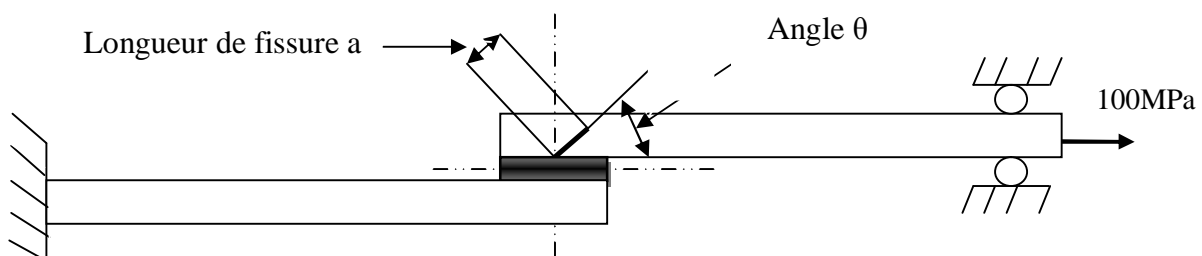
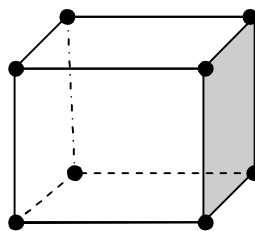


Figure (VI.2). Localisation de la fissure.

La figure (VI.3), présente le maillage par éléments finis de la jonction de deux plaques. L'élément utilisé est tridimensionnelle à huit nœuds sur les cotés. Le nombre d'élément est de 7099, tandis que le nombre de nœuds est de 36098.



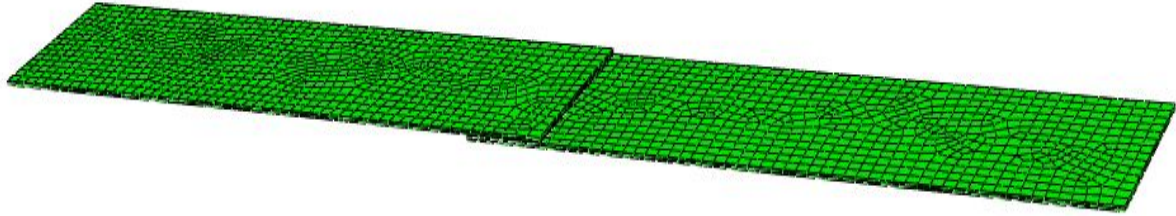


Figure (VI.3). Maillage par éléments finis des plaques collées.

VI-3-Effet de l'orientation de la fissure sur les contraintes et les déformations

La figure (VI.4), montre les variations de la contrainte σ_{xx} en fonction de la taille de la fissure et son angle d'orientation. De cette figure, on remarque que la contrainte maximale est obtenue pour une fissure de longueur 8mm et un angle de l'ordre de 65° atteignant une valeur de 1550MPa. Un niveau de contrainte minimale est obtenue pour une fissure de taille de 4mm et un angle de 20° pour une valeur de 950MPa. Pour un angle de 60° , le niveau de contrainte est de 1150MPa pour des tailles de fissures de 5 et 6mm.

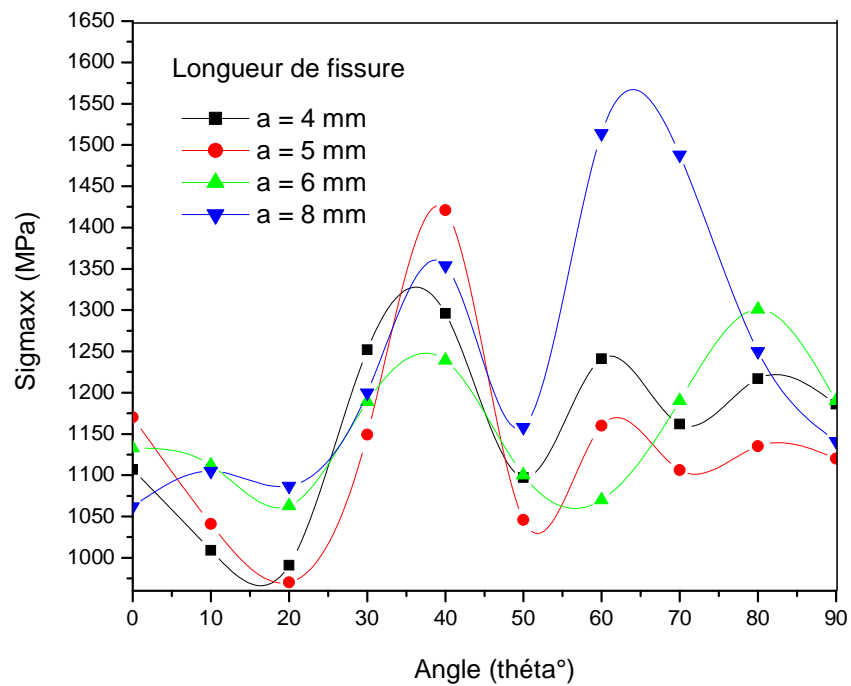


Figure (VI.4). Variation de la contrainte normale σ_{max} en fonction de θ° .

Sur la figure (VI.5), on représente la variation du niveau de contrainte σ_{yy} en fonction des tailles de fissures (4,5,6 et 8)mm pour des variation d'angle de 0 à 90°. La contrainte maximale est obtenue pour une longueur de fissure de 5 mm et un angle de 45° de l'ordre de 655MPa, tandis que la contrainte minimale est obtenue pour une taille de fissure de 8mm et un angle de 5° d'une valeur de 25MPa. Une longueur de 6mm pour un angle de 40°, la contrainte σ_{yy} est de l'ordre de 655MPa.

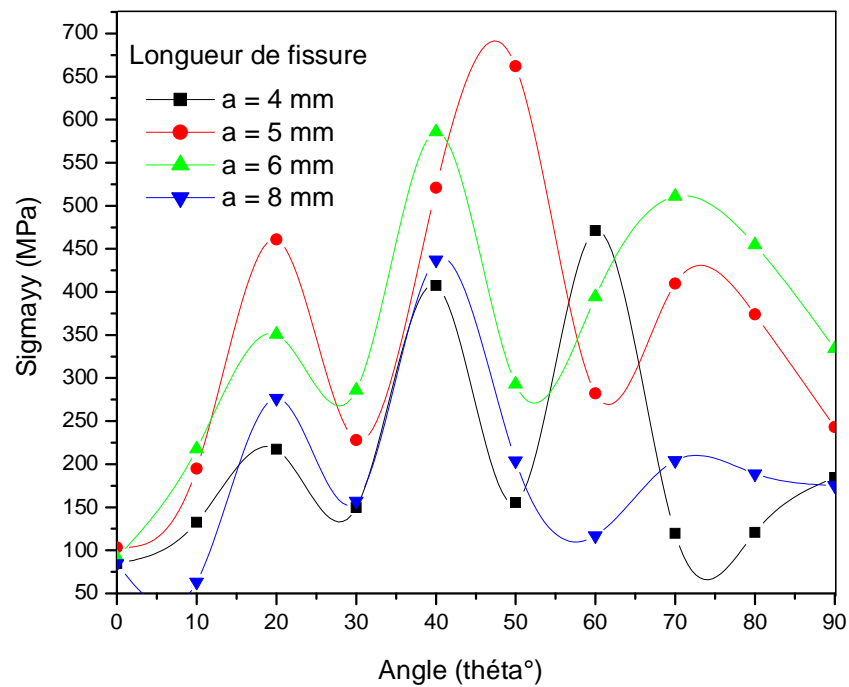


Figure (VI.5). Variation de la contrainte normale Sigmayy en fonction de θ .

Les contraintes tangentielles τ_{xy} sont montrées sur la figure (VI.6). De cette figure, on remarque qu'une taille de fissure de 8mm pour un angle d'inclinaison de 25° , la contrainte tangentielle atteint une valeur de 110MPa. La même longueur de fissure (8mm) donne une valeur minimale de contrainte de l'ordre de 10MPa. Une taille de fissure de 6mm, fournit des contraintes croissantes pour des augmentations de l'angle d'inclinaison.

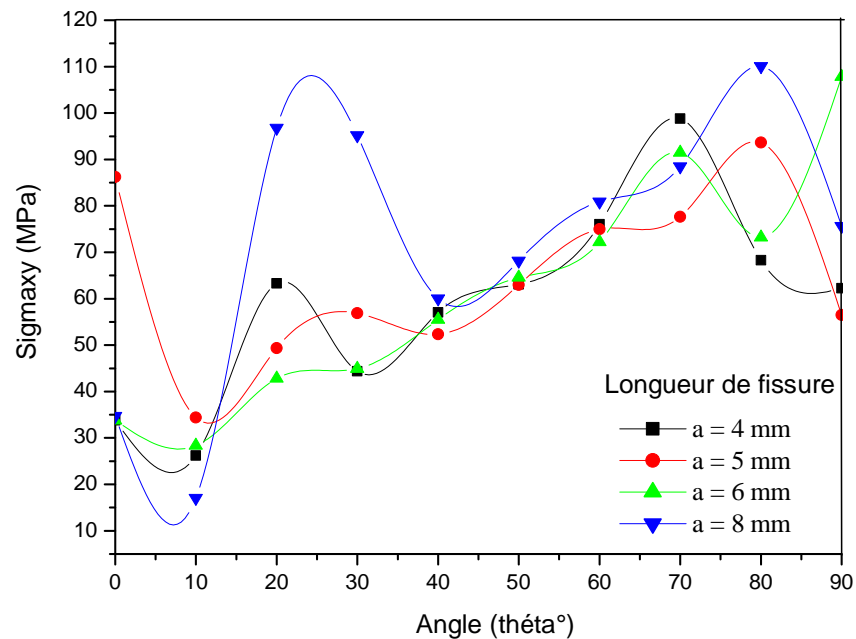


Figure (VI.6). Variation du contraintes tangentielle en fonction de θ° .

Les états de déformations γ_{xx} sont représentés sur la figure (VI.7). A partir de cette figure, on remarque qu'une longueur de fissure de 8mm, la déformation γ_{xx} est de l'ordre de 0.016 pour un angle d'inclinaison de 50° . Un angle de 0° , fournit une déformation minimale de l'ordre de 0.009 pour les longueurs de fissures de 4,5,6 et 8mm. La figure (VI.8), montre les variations de la déformation γ_{yy} en fonction de l'angle θ . On note des formes paraboliques de la déformation atteignant une valeur maximale de l'ordre de 0.014 pour une taille de fissure de 8mm correspondant à un angle de 45° , suivie d'une valeur max de 0.015 pour une longueur de fissure de 6mm et un angle de 65° . La plus petite valeur de la déformation (0.0065) est obtenue pour un angle de 0° pour toutes les longueurs de fissures. Sur la figure (VI.9), on représente les déformations angulaires γ_{xy} , on note une valeur max de l'ordre de 0.023 pour une taille de fissure de 8 mm (angle 80°), et un minimum de l'ordre de 0.005 pour des tailles de 4 et 6mm correspondant à un angle de 10° .

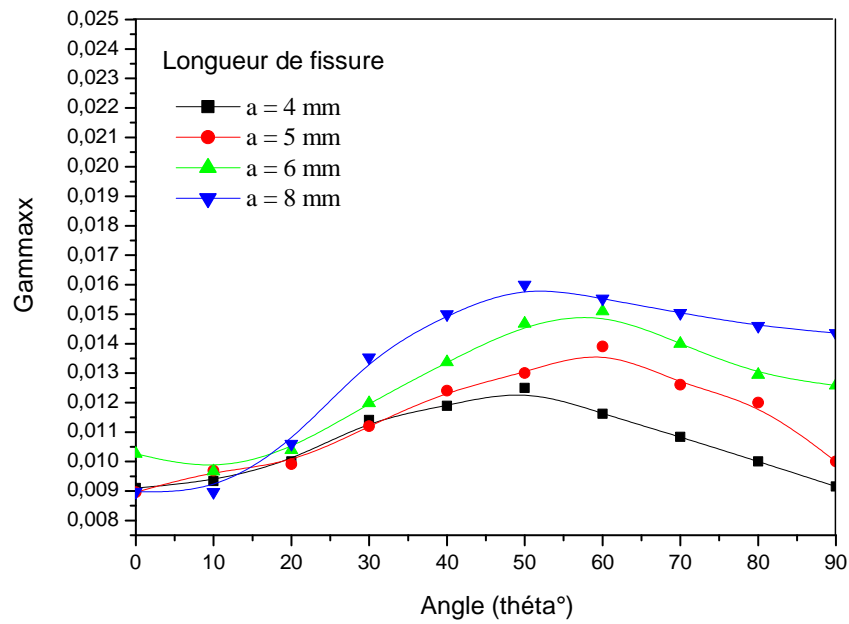


Figure (VI.7). Variation de la déformation en fonction de θ° .

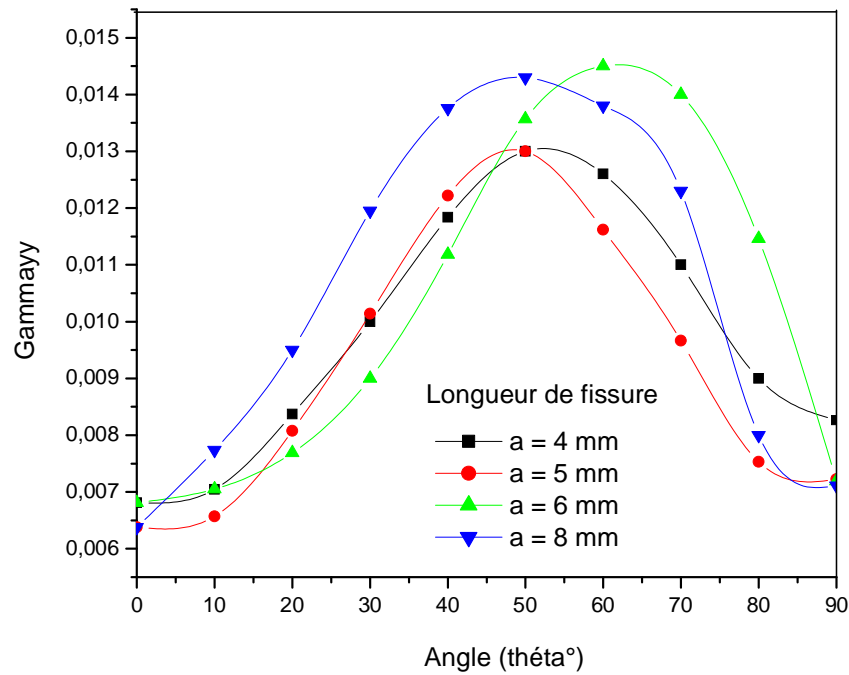


Figure (VI.8). Variation de la déformation en fonction de θ° .

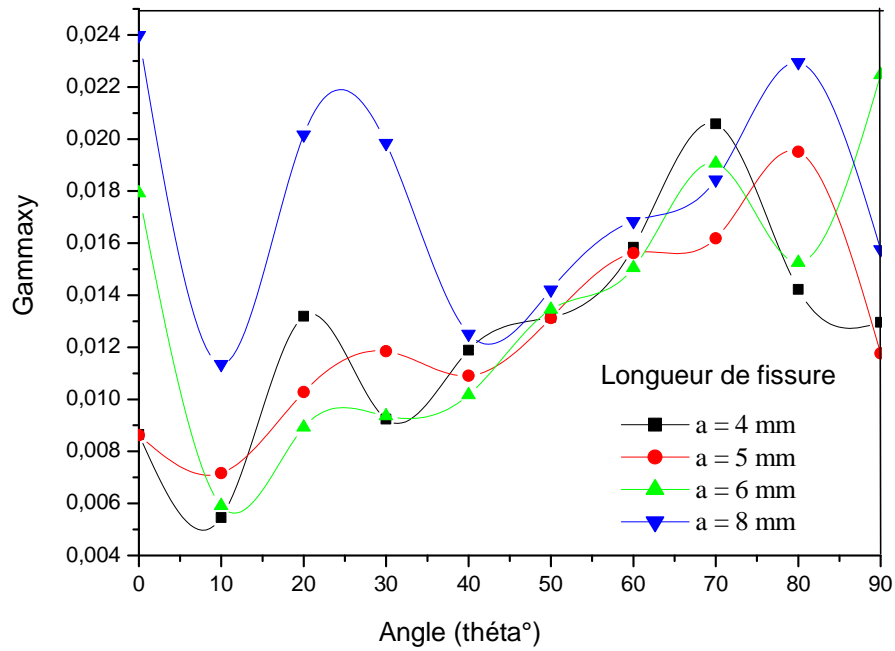
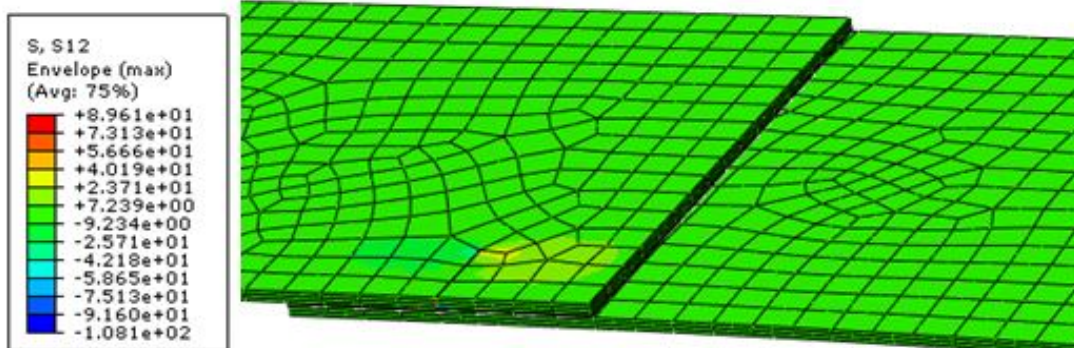
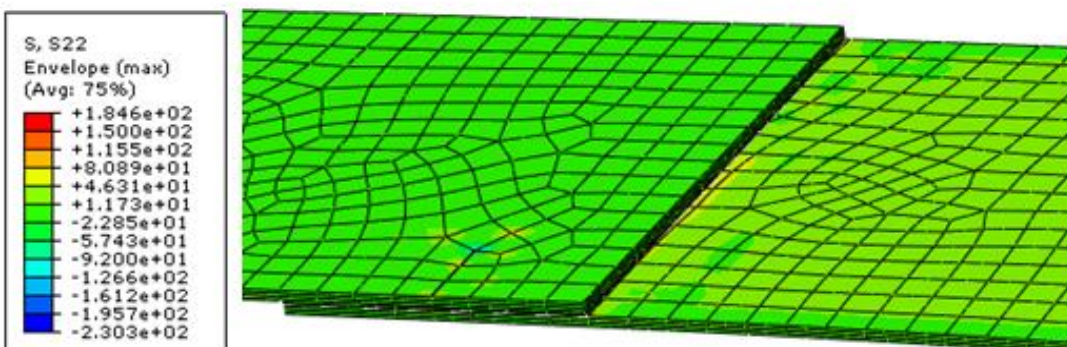
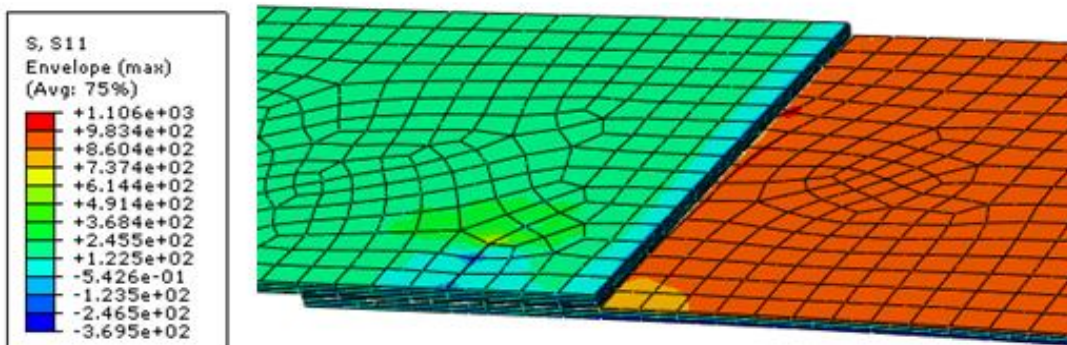


Figure (VI.9). Variation de la déformation en fonction de θ .



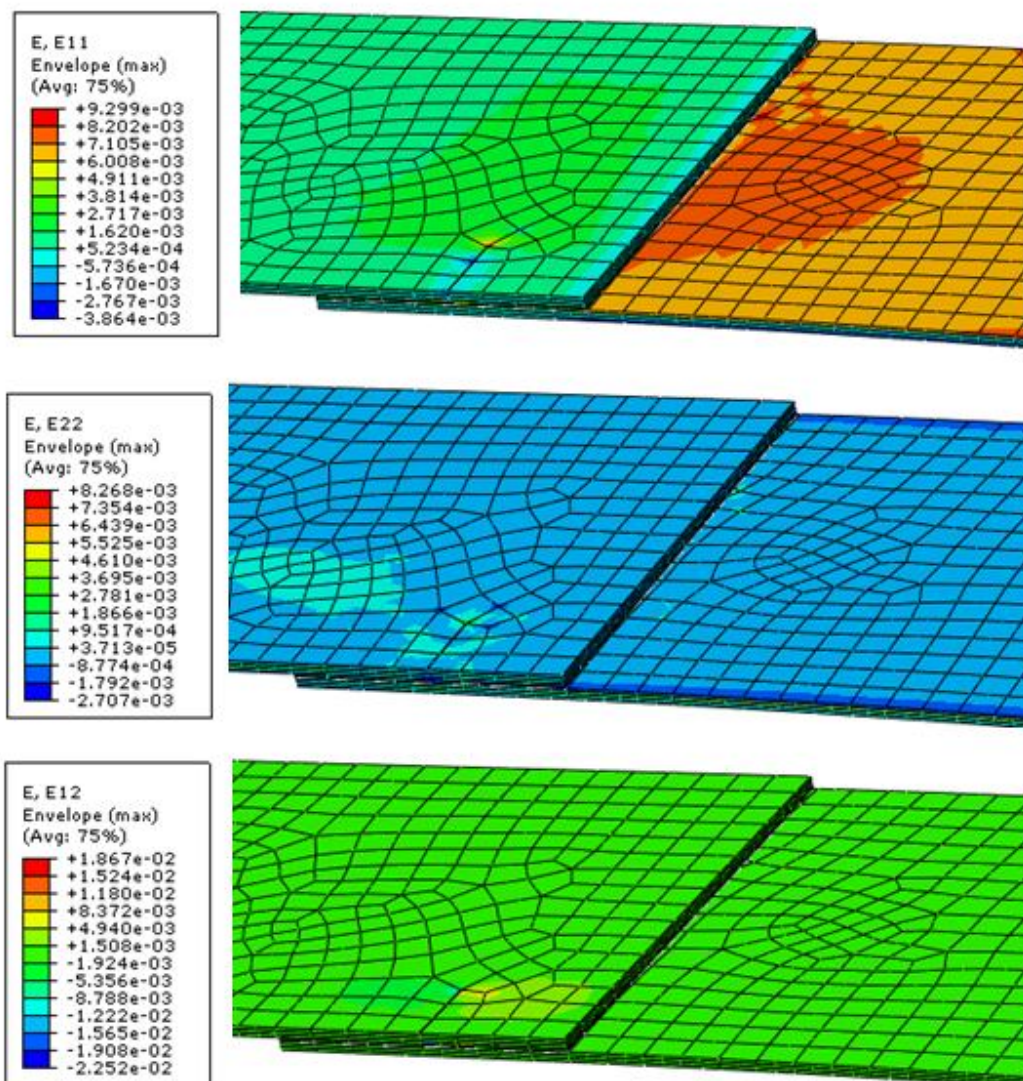


Figure (VI.10). Etats de contrainte et de déformation pour une taille de fissure de 4mm et un angle de 90°.

VI-4-Effet de l'épaisseur des plaques et les rayons d'entaille sur les contraintes et les déformations

Cette partie est consacrée à la modélisation de l'effet de l'épaisseur des plaques en composite stratifiées et les rayons d'entaille sur les contraintes et les déformations. Les épaisseurs des plaques varient de 0.5mm à 1.5mm pour des rayons d'entailles demi circulaire variant de 1mm à 4mm. L'entaille demi circulaire est localisée dans la plaque en composite 2, voir figure (VI.11).

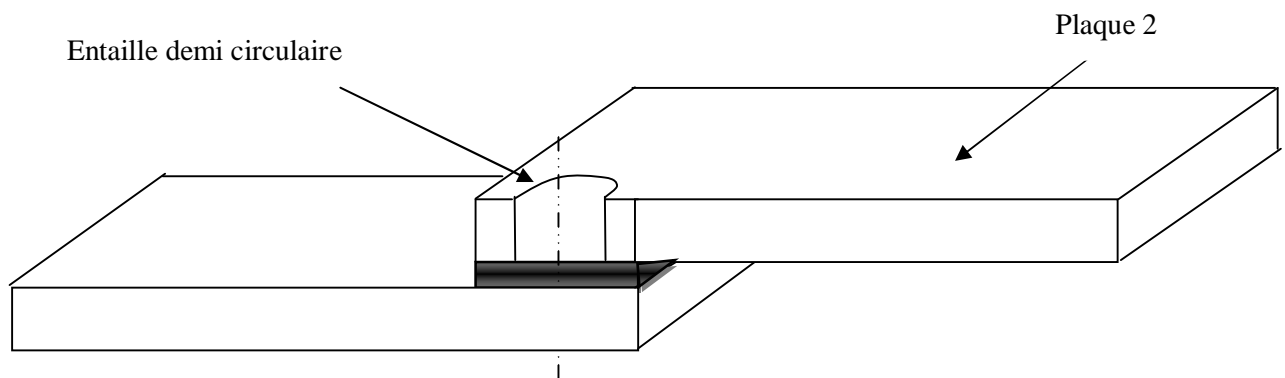


Figure (VI.11). Localisation de l'entaille semi-circulaire.

A partir de la figure (VI.12), le niveau de contrainte normale σ_{xx} , diminue le long de l'augmentation de l'épaisseur des toles. Pour un rayon d'entaille semi circulaire, la contrainte maximale est obtenue pour une épaisseur des plaques de l'ordre de 0.75mm de l'ordre de 860MPa. Dans le cas d'un rayon de 1mm pour une épaisseur de 0.9mm, la contrainte est minimale de l'ordre 660MPa. L'augmentation de l'épaisseur des plaques , diminue la contrainte normale, à l'opposition pour un rayon d'entaille de 4mm.

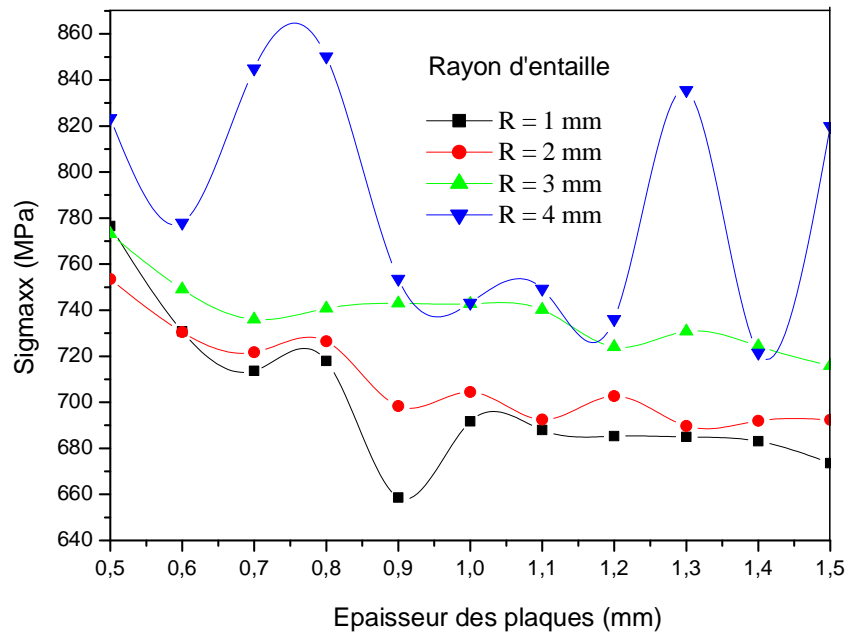


Figure (VI.12). Variation de la contrainte en fonction de l'épaisseur des plaques.

De la figure (VI.13), on remarque une fluctuation ascendante de la contrainte normale selon l'axe y en fonction de l'augmentation de l'épaisseur des plaques. La valeur maximale est obtenue pour une épaisseur de 0.7mm et un rayon d'entaille de 2mm d'une valeur approximative de 160MPa. Au delà d'une épaisseur de 0.9mm, les allures des courbes plus ou moins se ressemblent.

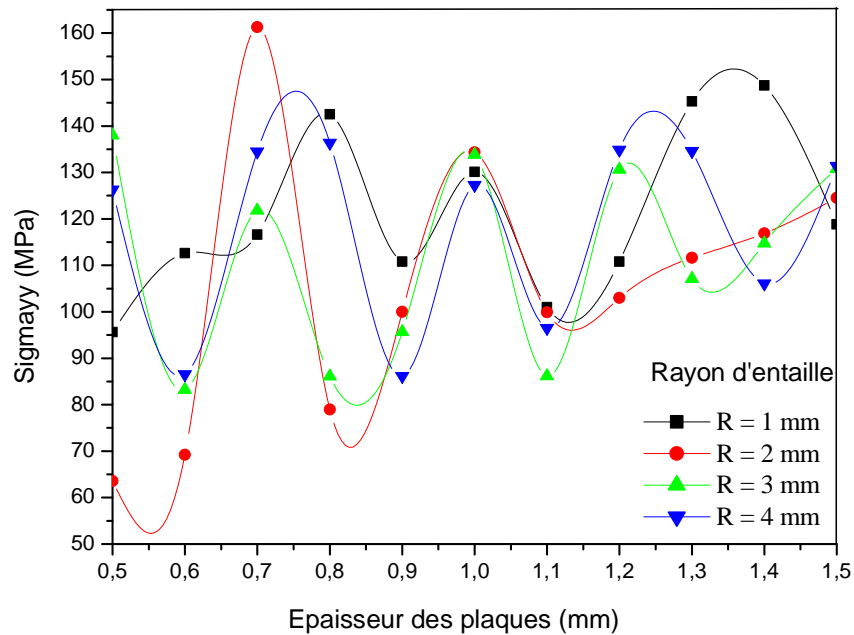


Figure (VI.13). Variation de la contrainte en fonction de l'épaisseur des plaques.

De la figure (VI.14), on remarque que les courbes de la contrainte τ_{xy} sont plus ou moins linéaires avec quelques fluctuations pour un rayon d'entaille de 4mm. Pour un rayon d'entaille de 1mm, les contraintes tangentielles sont plus ou moins constantes pour les diverses épaisseurs des toles de l'ordre de 0.5mm. Un rayon de 3mm, fourni un niveau de contrainte de l'ordre de 60MPa.

Dans le cas des déformations linéaire γ_{xx} , voir figure (VI.15), pour une enaille de rayon 4mm, la déformation atteint une valeur de 0.02, suivie d'une légère stabilisation. Un rayon de 1mm et pour une épaisseur de 0.5mm, on obtient une déformation de 0.018, suivie d'une augmentation avec la variation croissante de l'épaisseur des plaques. Les rayons d'entailles 2 et 3mm, donnent des niveaux de déformations plus ou moins similaires. La déformation γ_{yy} est montrée sur la figure (VI.16). Un rayon d'entaille de 1mm, donne une valeur de la déformation de 0.012 pour une épaisseur de 0.5mm, cette déformation augmente rapidement atteignant une valeur maximale de 0.03 pour une épaisseur de 1.5mm. Les autres rayons fournissent des courbes d'allure similaires.

La déformation tangentielle γ_{xy} est montrée sur la figure (V.17), on note que les rayons d'entaille de 1,3 et 4mm donnent une valeur de la déformation de l'ordre de 0.06 pour une épaisseur de 0.5mm ; la déformation augmente rapidement atteignant la valeur de 0.08 pour une épaisseur de 1.5mm. Un rayon d'entaille de 2mm, fourni une déformation plus petite de l'ordre de 0.057 pour une épaisseur de 0.8 mm.

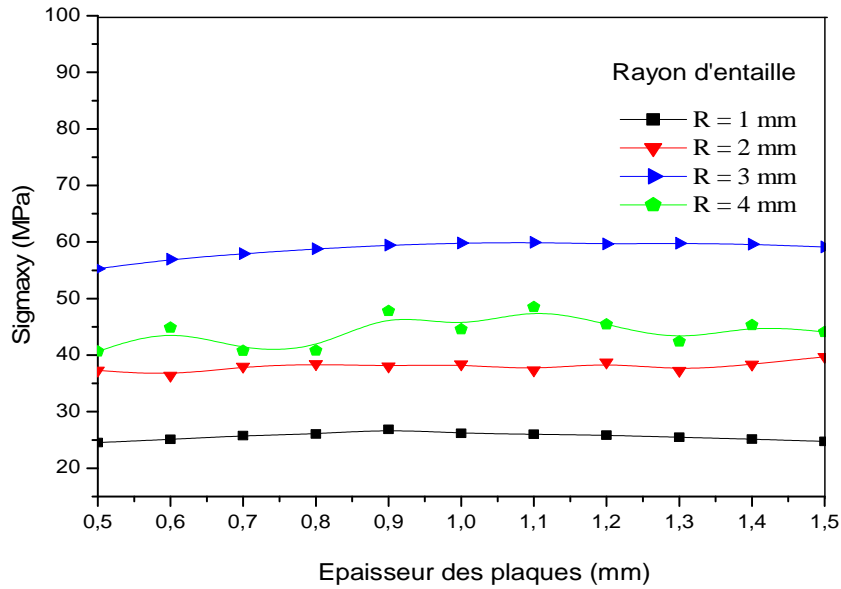


Figure (VI.14). Variation de la contrainte tangentielle en fonction de l'épaisseur des plaques.

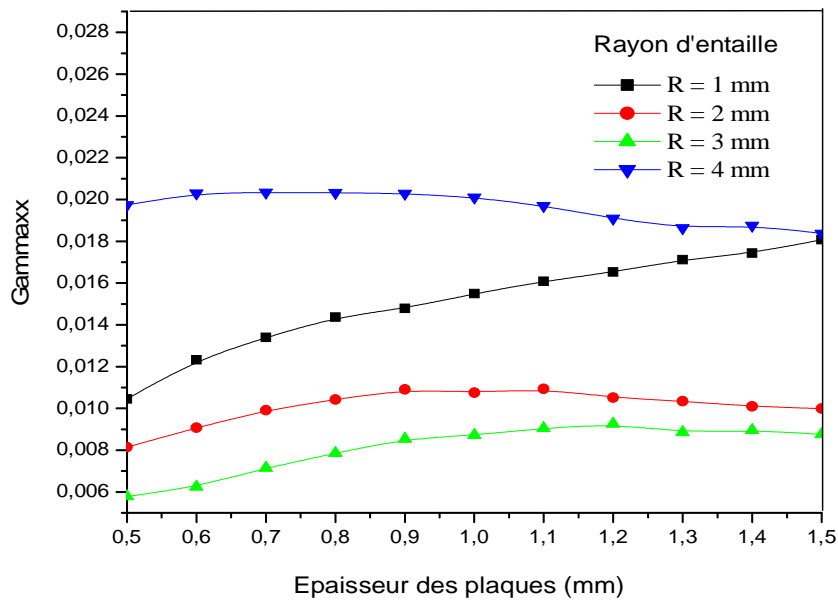


Figure (VI.15). Variation de la déformation en fonction de l'épaisseur des plaques.

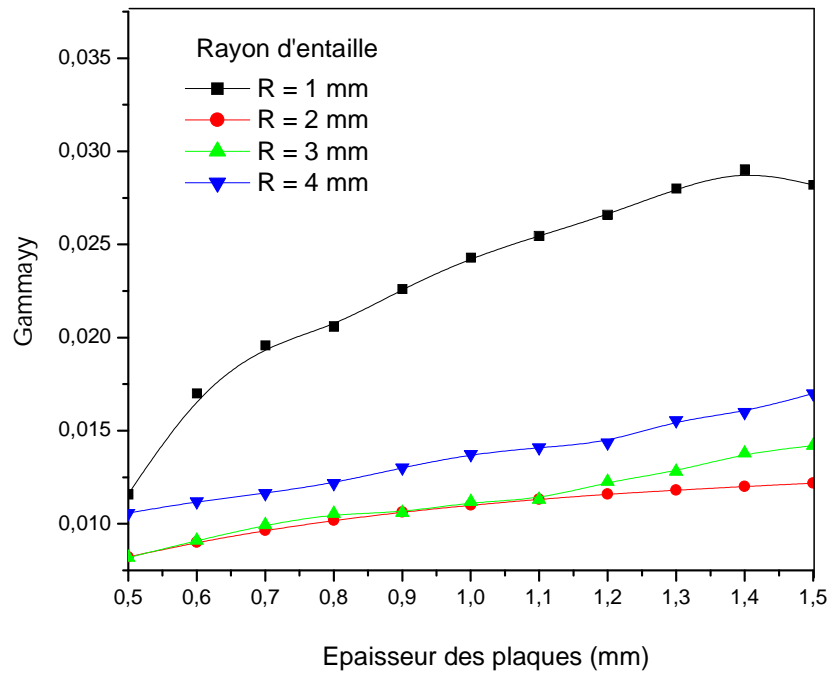


Figure (VI.16). Variation de la déformation en fonction de l'épaisseur des plaques.

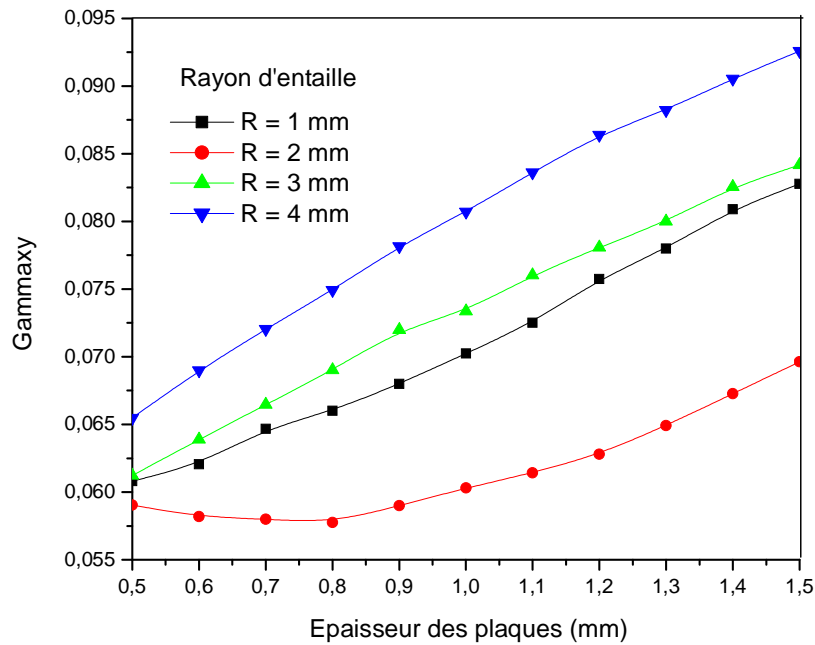
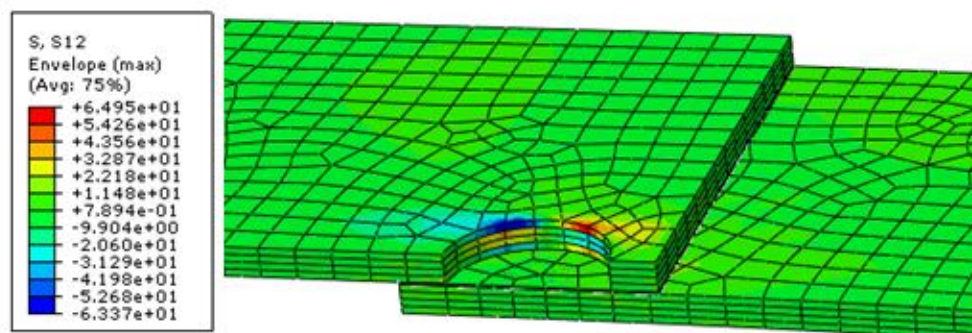
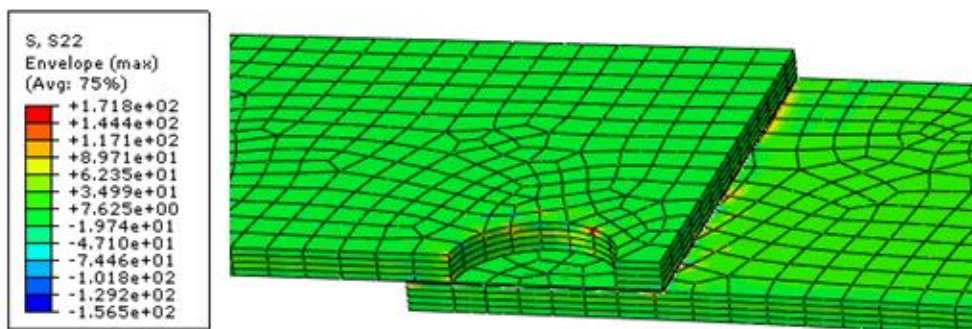
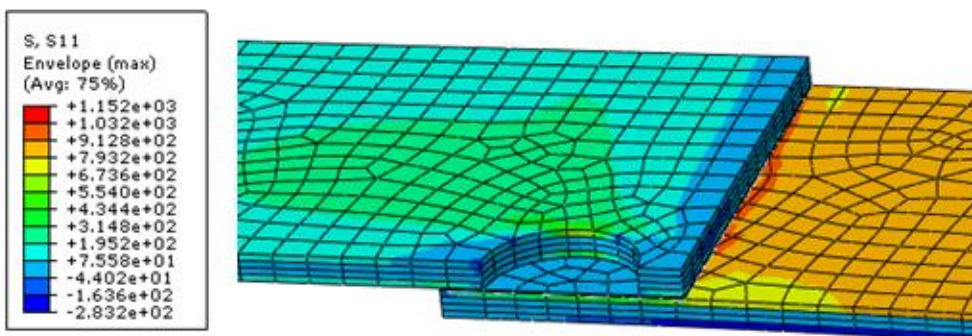


Figure (VI.17). Variation de la déformation tangentielle en fonction de l'épaisseur des plaques.



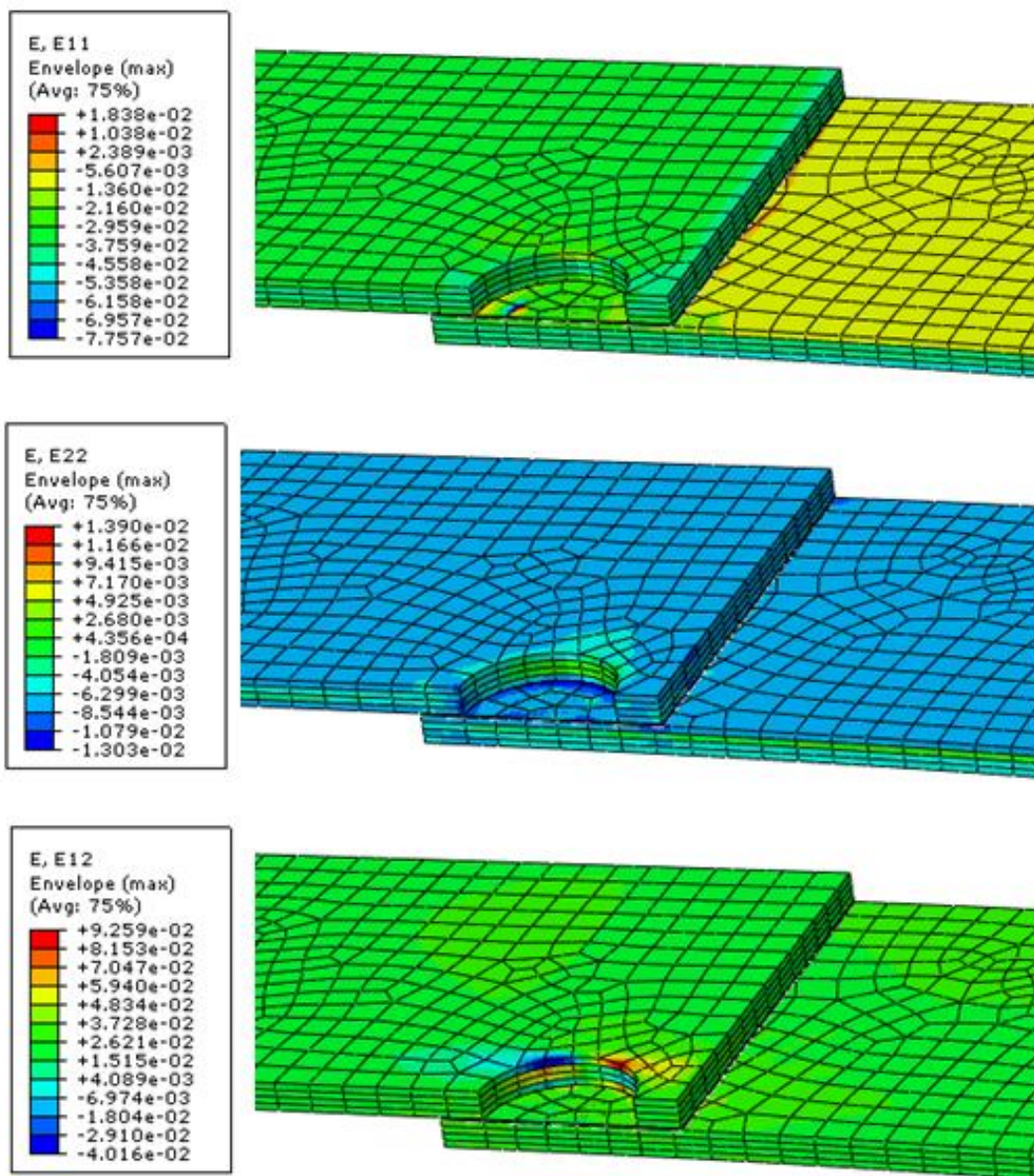


Figure (VI.18). Variation des contraintes et les déformations pour un rayon d'entaille de 4mm et 1.5mm d'épaisseur.

VI-5-Effet de l'épaisseur de l'adhésive et le rayon d'entaille sur les contraintes et les déformations

Cette partie traite l'influence de l'épaisseur de la couche adhésive sur les états de contraintes et des déformations maximales. L'épaisseur de la couche adhésive varie de 0.1mm à 1mm. Le rayon de l'entaille semi-circulaire varie de 1 à 5mm. Les plaques stratifiées ont une épaisseur de 0.5mm. La figure (VI.19), montre les contraintes pour les différentes épaisseur de la colle et les rayons d'entaille. On remarque, que les courbes ont une allure plus ou moins linéaire ascendantes. Un rayon d'entaille de 3mm, fourni une contrainte σ_{xx} de l'ordre de 1830MPa pour une épaisseur d'adhésive de 1mm. La plus faible contrainte est obtenue pour un rayon d'entaille de 1mm avoisinant la valeur de 1000MPa.

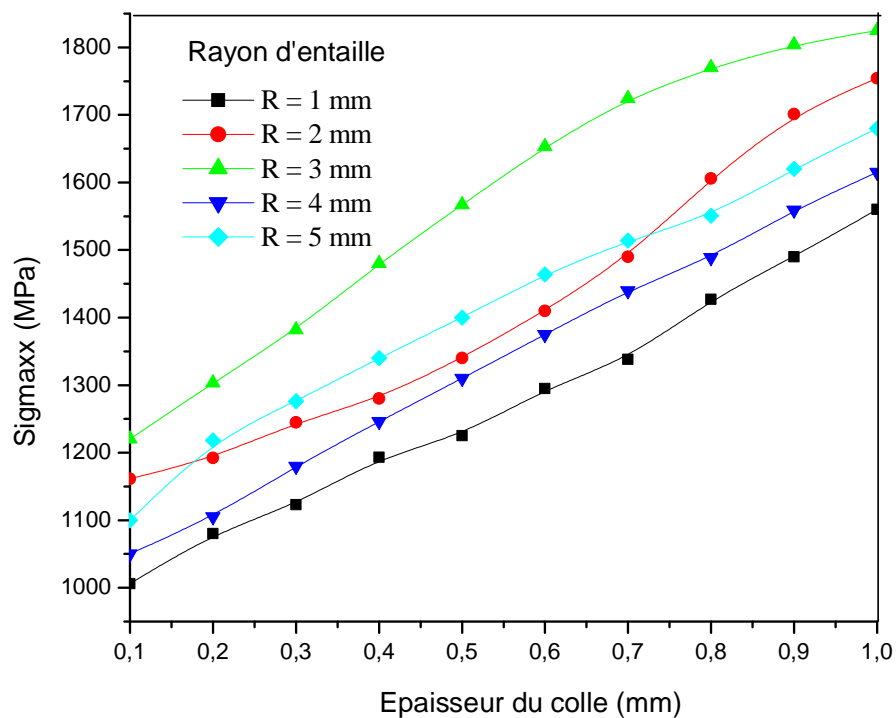


Figure (VI.19). Variation de la contrainte en fonction de l'épaisseur de l'adhésive.

La figure (VI.20), présente la contrainte tangentielle τ_{xy} , à partir de cette figure, on note que le rayon d'entaille de 1mm donne des contraintes linéaire le long de l'épaisseur de la colle. De l'ordre de 30MPa. Un rayon d'entaille de 5mm donne des contraintes ascendantes variants de 75MPa pour une épaisseur d'adhésive de 0.1mm jusqu'à 100MPa pur 1mm d'épaisseur. Au contraire les rayons d'entaille de 2 et 4mm, les niveaux de contraintes sont plus ou moins similaires.

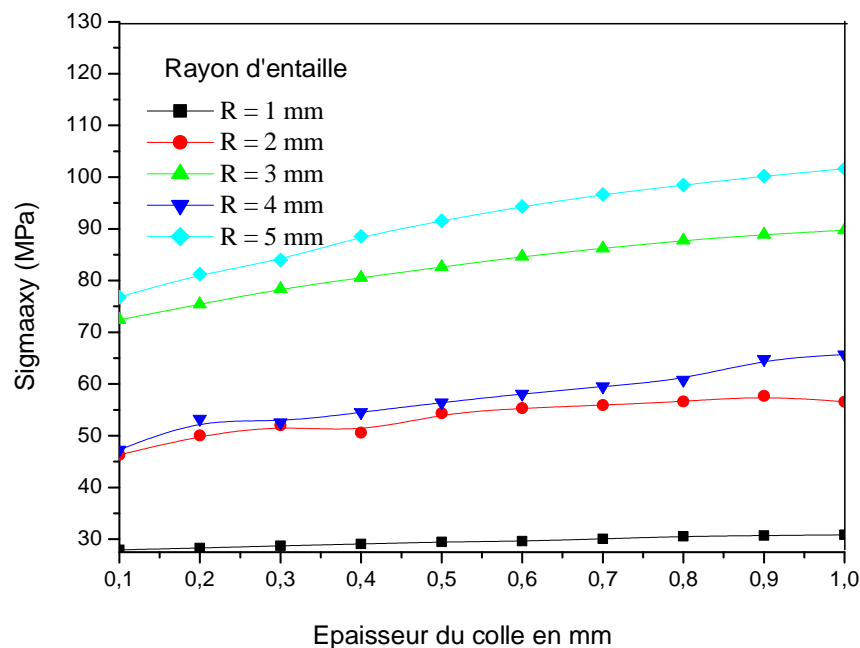


Figure (VI.20). Variation de la contrainte en fonction de l'épaisseur de l'adhésive.

A partir de la figure (VI.21), la contrainte normale σ_{yy} diminue avec l'augmentation de l'épaisseur de l'adhésive. Pour un rayon d'entaille de 5mm et une épaisseur de colle de 0.1mm, la contrainte est de 1200MPa, cette contrainte atteint une valeur minimale pour une épaisseur de l'adhésive de 1mm (950MPa).

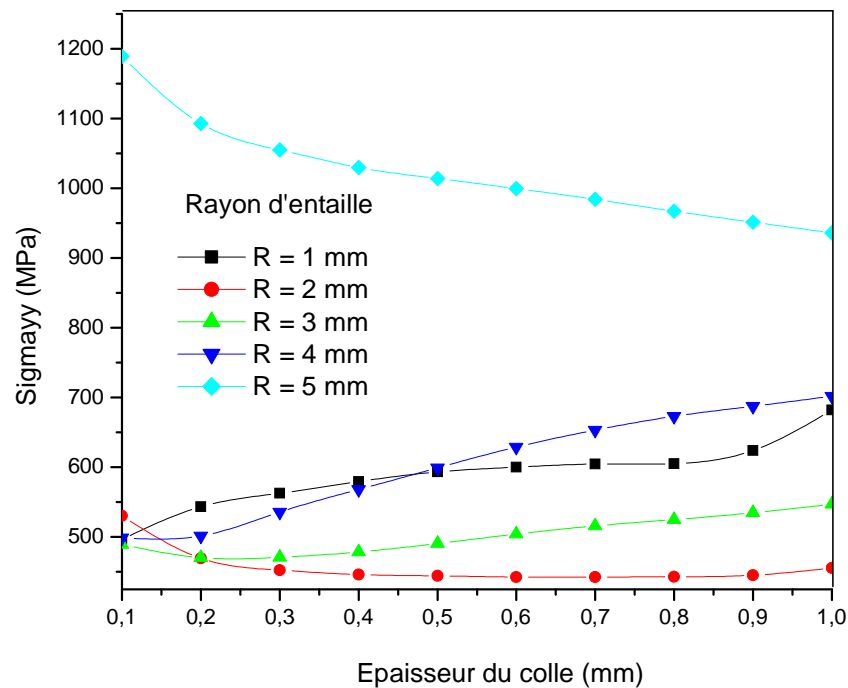


Figure (VI.21). Variation de la contrainte en fonction de l'épaisseur de l'adhésive.

La figure (VI.22), montre les déformations γ_{xx} en fonction de l'épaisseur de l'adhésive pour de différents rayons d'entaille. On remarque que les courbes de rayon d'entaille de 4 et 5mm ont la même allure décroissante. Un rayon d'entaille de 5mm pour une épaisseur d'adhésive de 0.1mm, la déformation maximale est de 0.023, cette valeur diminue avec l'augmentation de l'épaisseur adhésive atteignant une valeur de 0.006 pour 1mm. Les rayons d'entaille de 1et de 2mm fournissent des courbes plus ou moins linéaire est constante donnant une valeur de la déformation de 0.012.

A partir de la figure (VI.23), on note des variations paraboliques de la déformation γ_{yy} . Pour un rayon d'entaille de 1mm, la déformation maximale obtenue est de l'ordre de 0.029 pour une épaisseur de 0.5mm. La déformation minimale est obtenue pour un rayon de 3mm de l'ordre de 0.01.

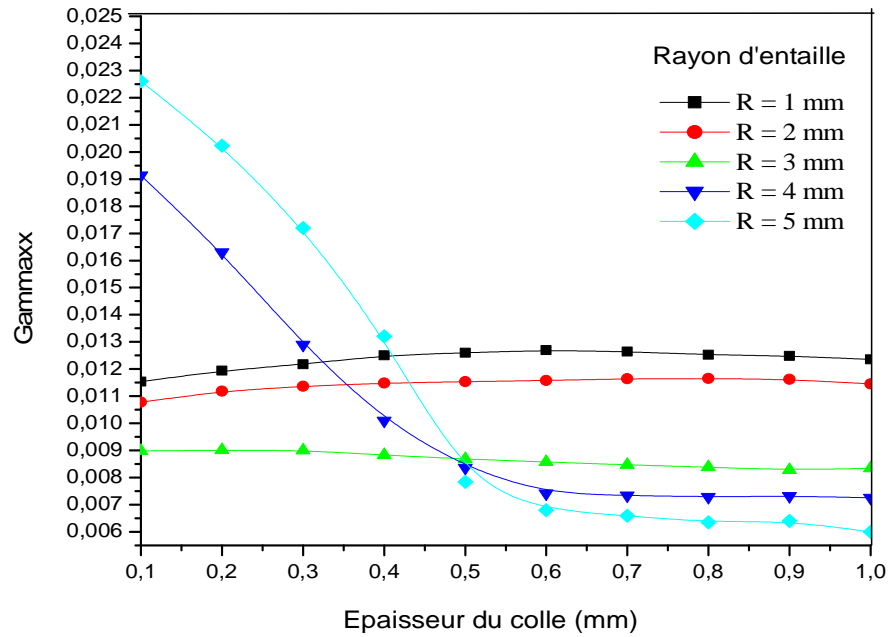


Figure (VI.22). Variation de la déformation en fonction de l'épaisseur de l'adhésive.

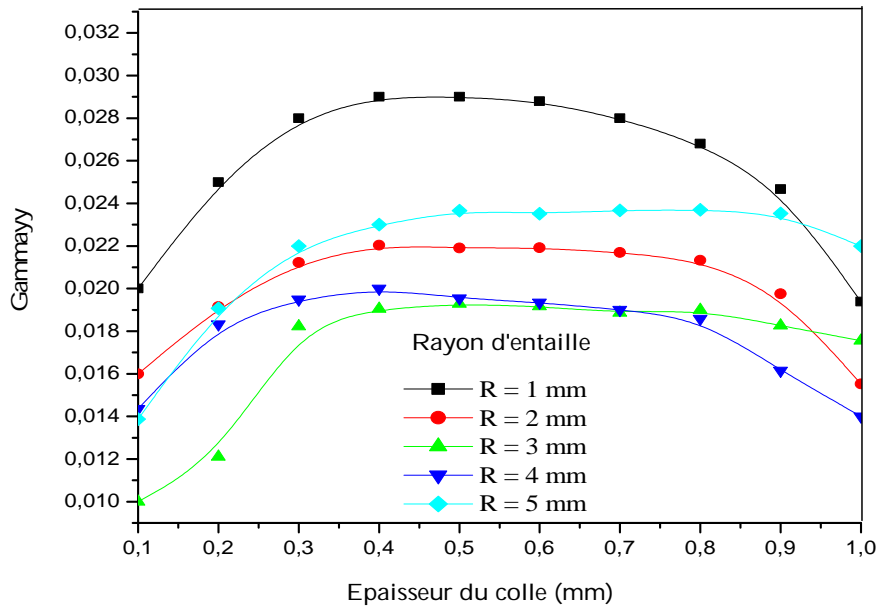


Figure (VI.23). Variation de la déformation en fonction de l'épaisseur de l'adhésive.

La figure (VI.24) représentant la déformation angulaire, on remarque une variation décroissante de la déformation. Un rayon d'entaille de 5mm, donne une valeur de γ_{xy} maximale de 0.090 pour 0.1mm d'épaisseur de la couche adhésive. La plus petite déformation est obtenue pour un rayon de 2mm avoisinant la valeur de 0.052 pour une épaisseur 1mm.

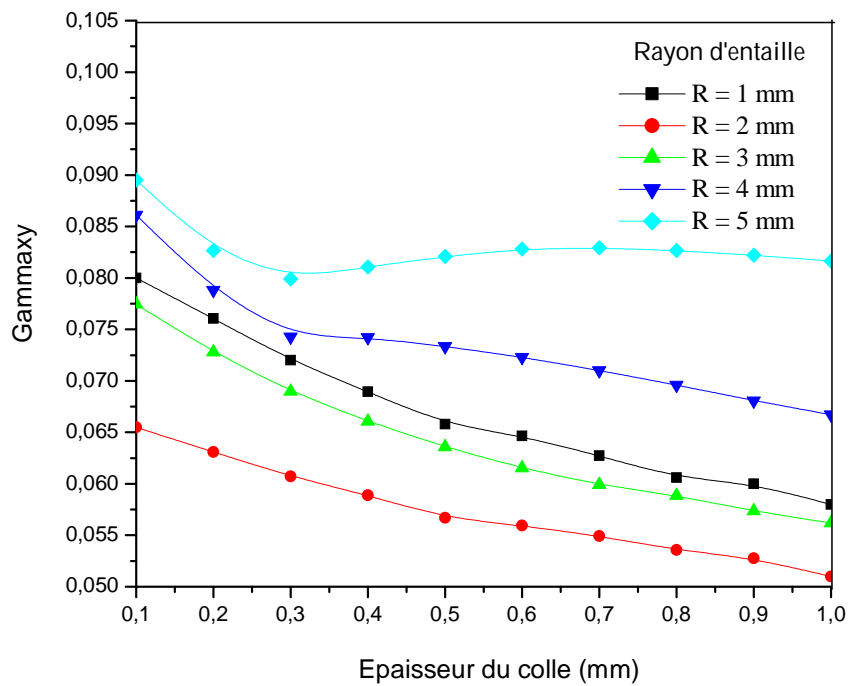
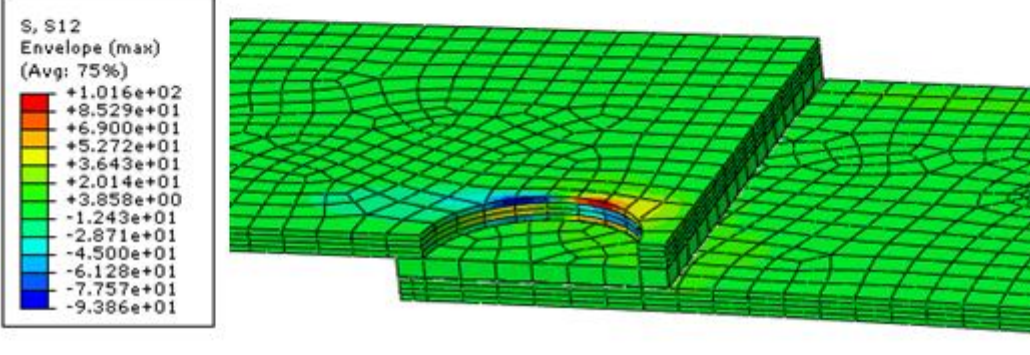
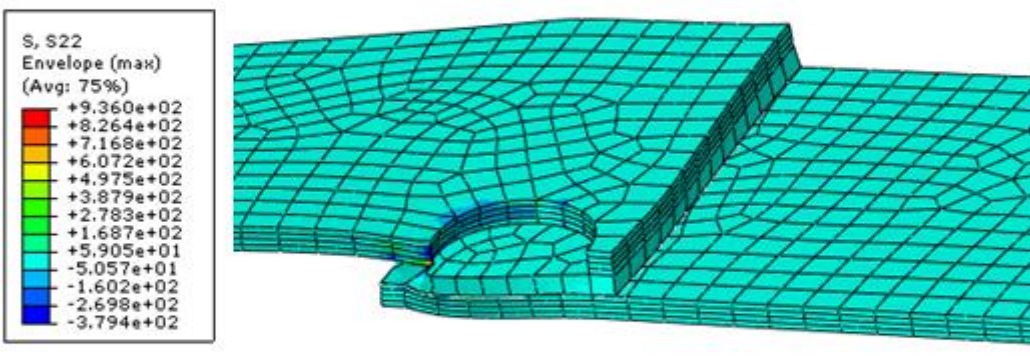
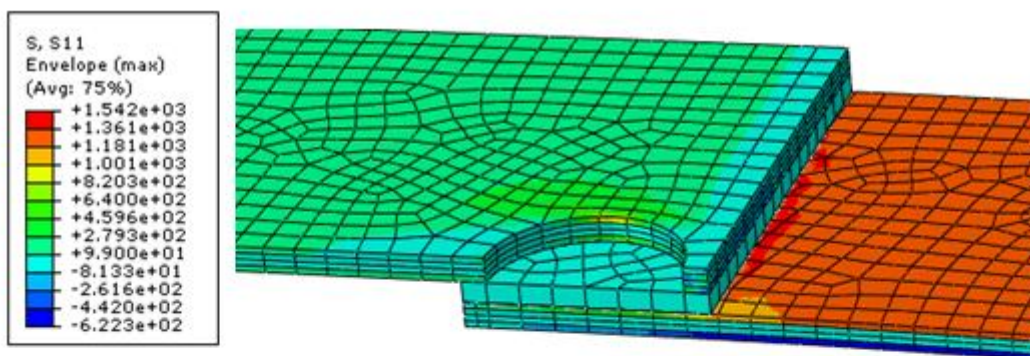


Figure (VI.24). Variation de la déformation en fonction de l'épaisseur de l'adhésive.



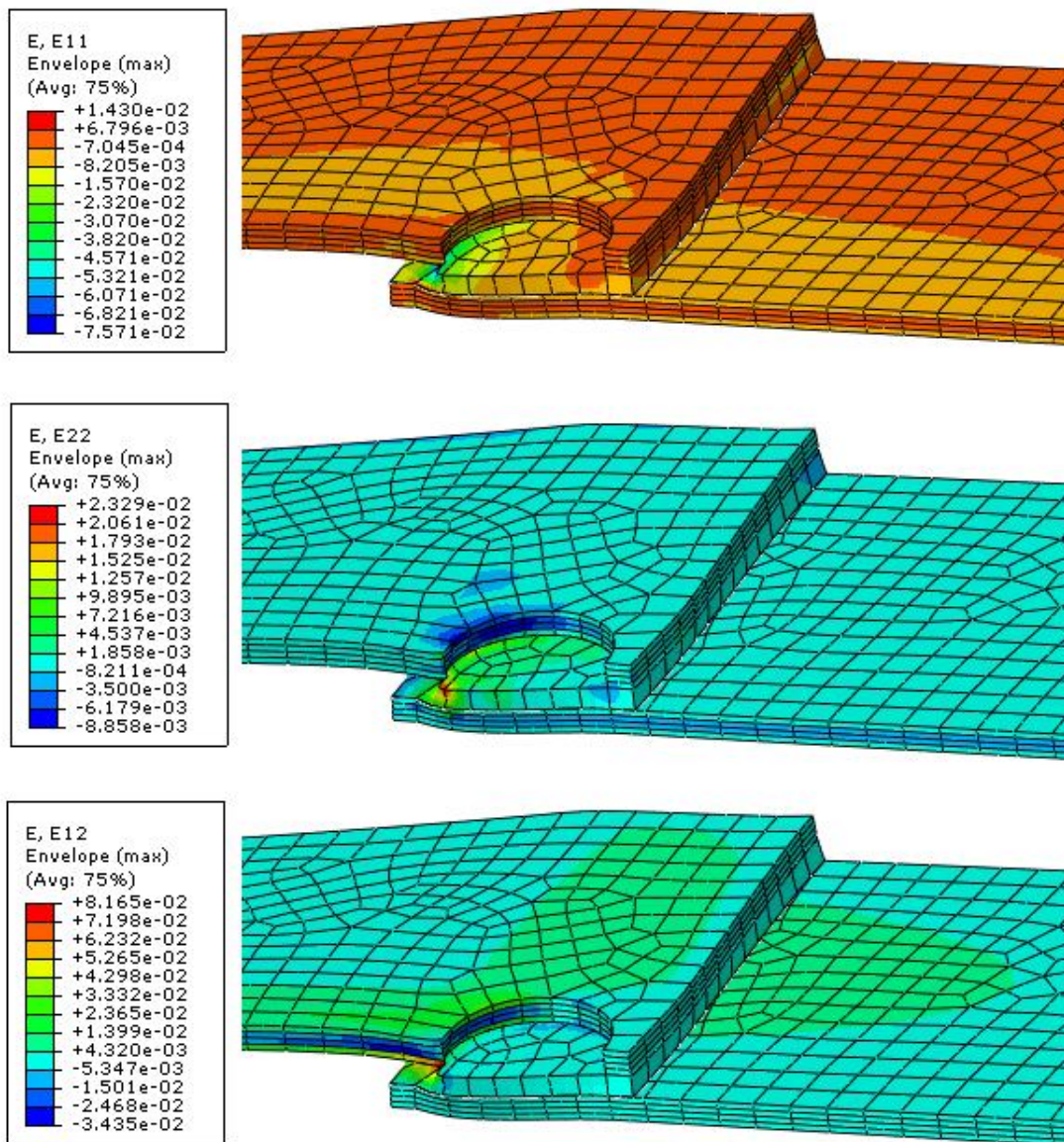


Figure (VI.25). Variation des contraintes et les déformations pour un rayon d'entaille de 5mm et 1mm l'épaisseur de l'adhésive.

VI-6-Effet de l'orientation de la fissure sur l'intégrale J

La figure (VI.26), présente la variation de l'intégrale J en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure (0 à 90°). De cette figure, on remarque que l'énergie maximale égal 25 est obtenue pour une fissure de longueur de 8mm et un angle de 10°. Une taille de fissure de 6mm fournit une énergie minimale de -50. Au-delà d'un angle de 40°, l'énergie plus ou moins se stabilise pour toutes des longueurs de fissures atteignant une valeur moyenne de l'ordre de 10.

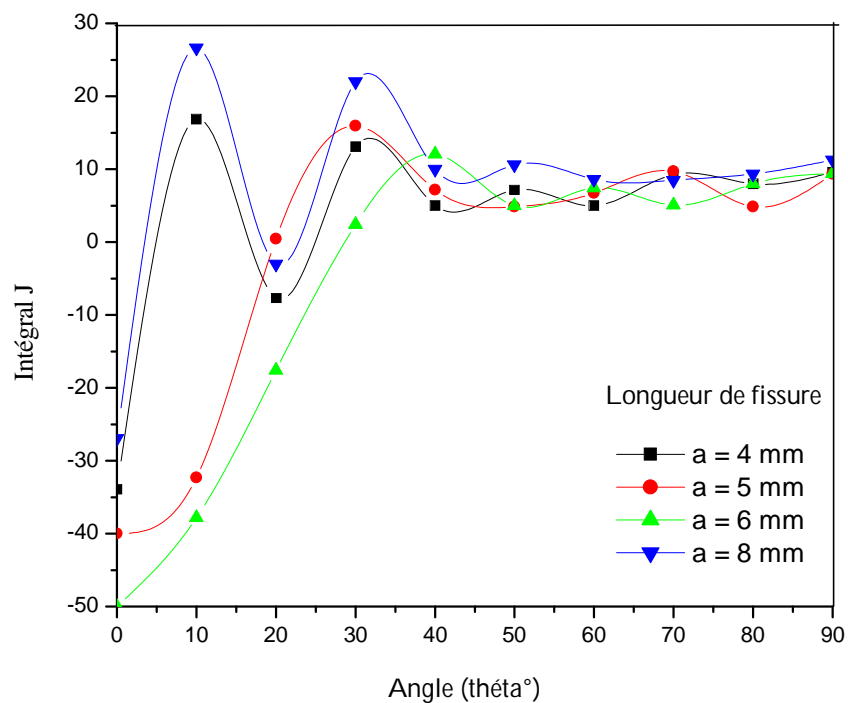


Figure (VI.26). Variation de J de la 1^{ère} pointe en fonction de l'orientation de la fissure.

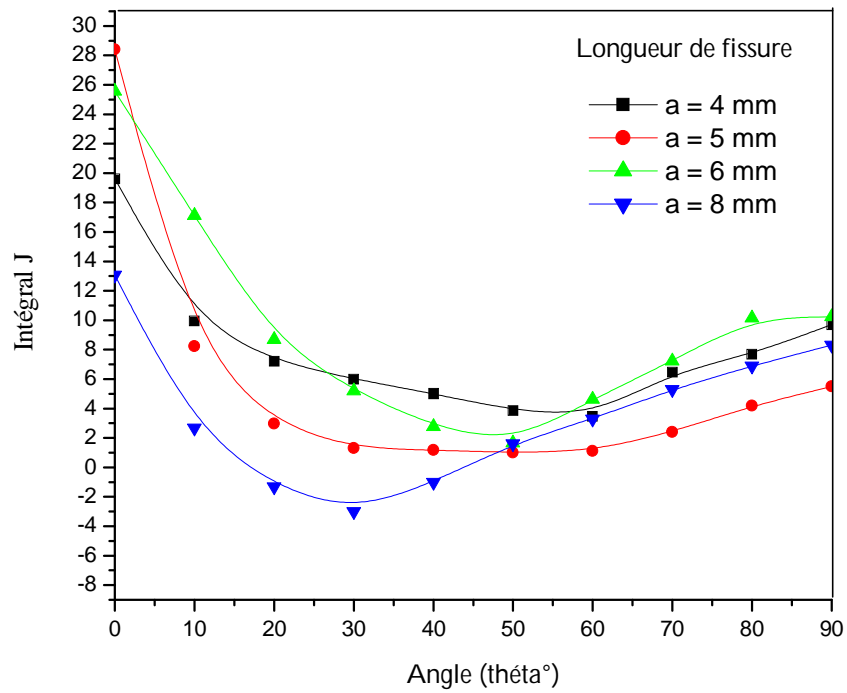


Figure (VI.27). Variation de J de la 3^{ème} pointe en fonction de l'orientation de la fissure.

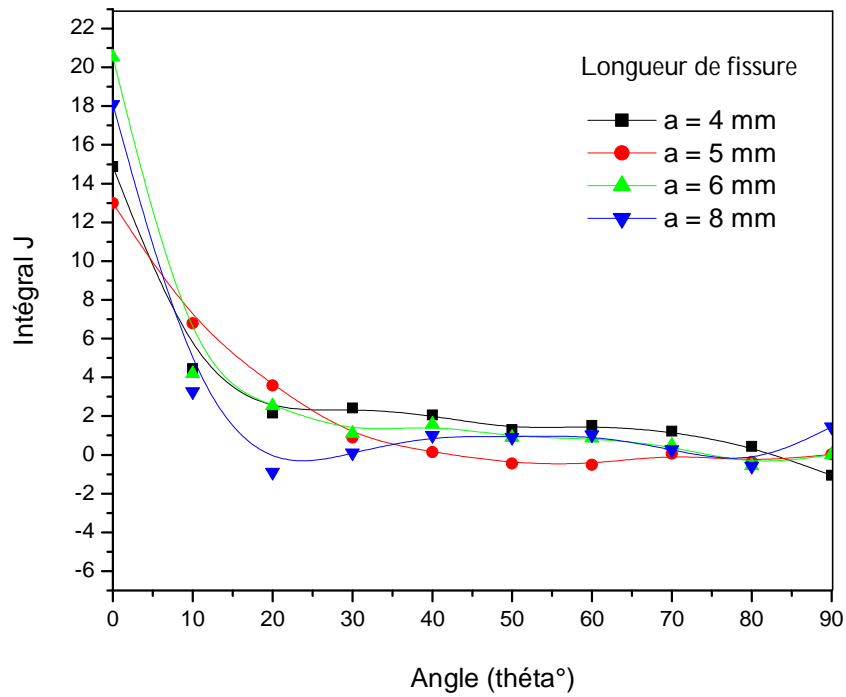


Figure (V.28). Variation de J de la 5^{ème} pointe en fonction de l'orientation de la fissure.

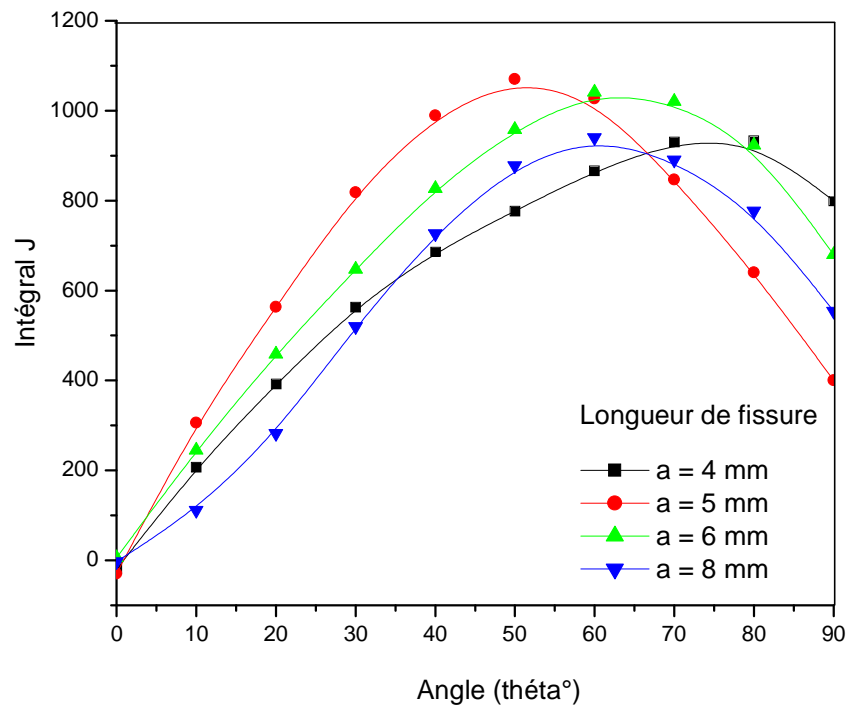


Figure (VI.29). Variation de J de la 9^{ème} pointe en fonction de l'orientation de la fissure.

VI-7-Effet de l'épaisseur de plaques sur l'intégrale J

La figure (VI.30), montre les variations de l'intégrale J de la première pointe en fonction de l'épaisseur des plaques stratifiées pour les différents rayons d'entaille. Un rayon d'entaille de 4mm, donne de faibles valeurs de J, par contre pour un rayon de 1mm, fourni des valeurs de J croissante à partir d'une épaisseur de plaque de 0.6mm, atteignant à la fin une valeur de 33 pour une épaisseur de 1.5mm.

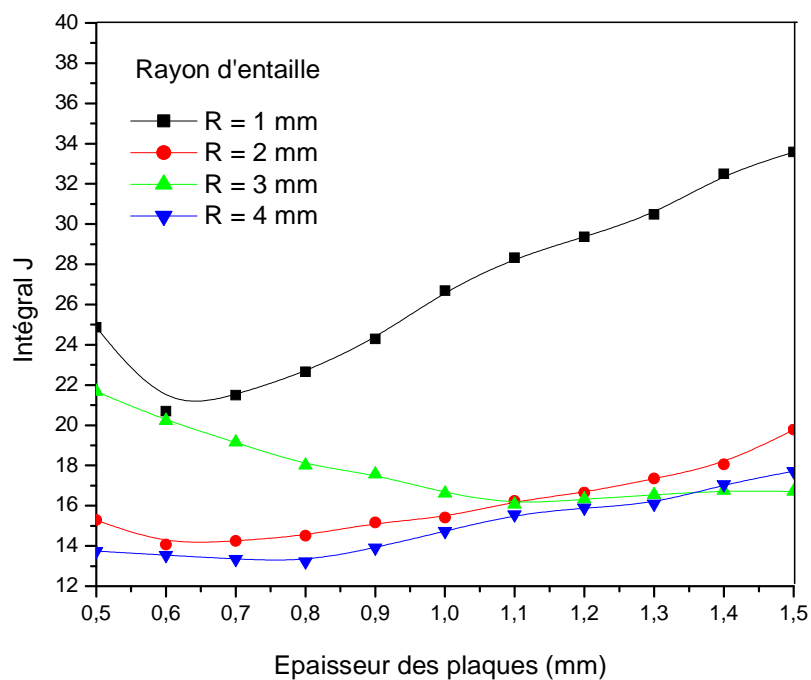


Figure (VI.30). Variation de J de la 1^{ère} pointe en fonction de l'épaisseur des plaques.

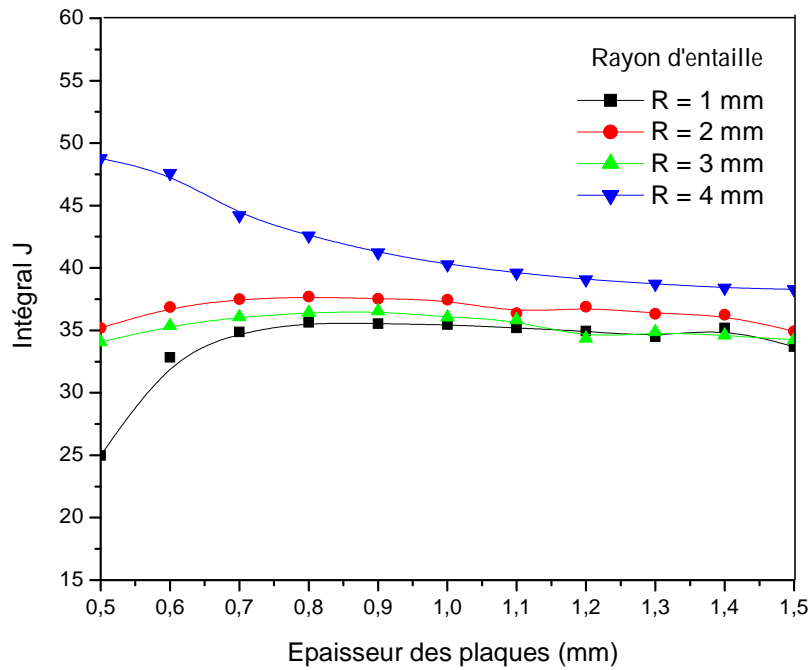


Figure (VI.31). Variation de J de la 3^{ème} pointe en fonction de l'épaisseur des plaques.

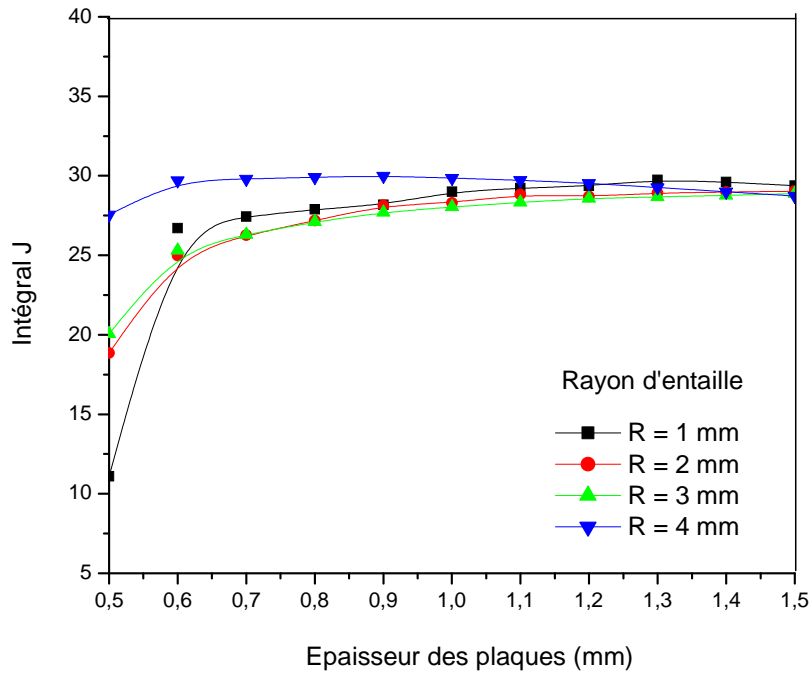


Figure (VI.32). Variation de J de la 5^{ème} pointe en fonction de l'épaisseur des plaques.

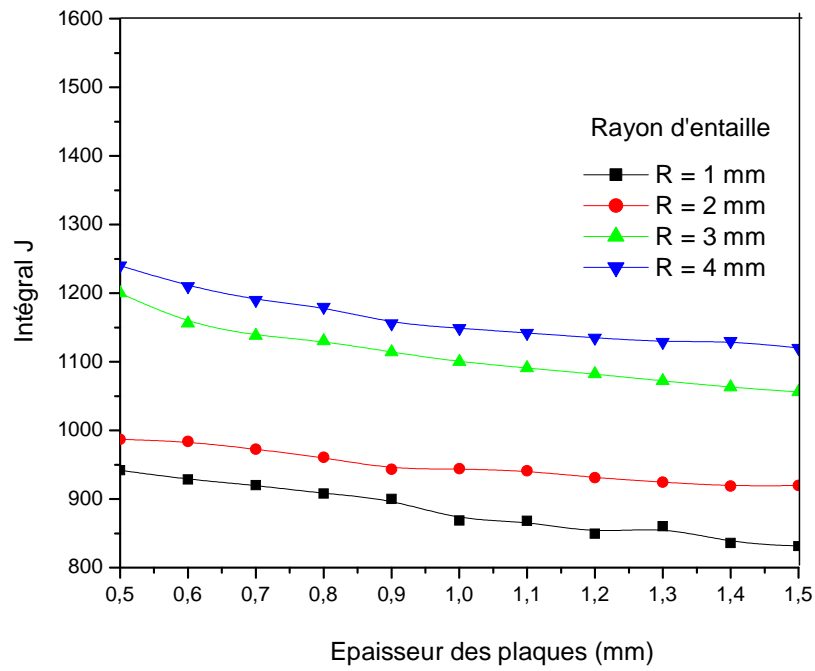


Figure (VI.33). Variation de J de la 9^{ème} pointe en fonction de l'épaisseur des plaques.

VI-8-Effet de l'épaisseur de colle sur l'intégrale J

Sur la figure (VI.34), un rayon d'entaille de 1mm fourni de grandes valeurs de J (croissante) atteignant la valeur de 43 pour une épaisseur d'adhésive de 1.0mm. On augmentant le rayon d'entaille, les valeurs de J diminuent le long de l'épaisseur de la colle atteignant la valeur de 12 pour une épaisseur de 1.0mm. Les rayons d'entaille de 2,3 et 4mm donnent des allures de courbes plus ou moins identiques croissantes.

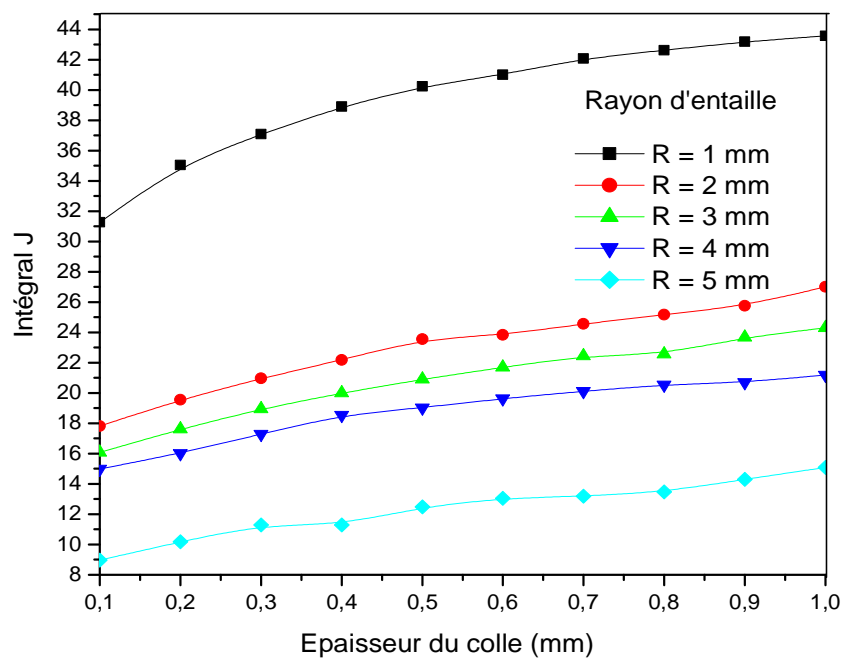


Figure (VI.34). Variation de J de la 1^{ère} pointe en fonction de l'épaisseur du colle.

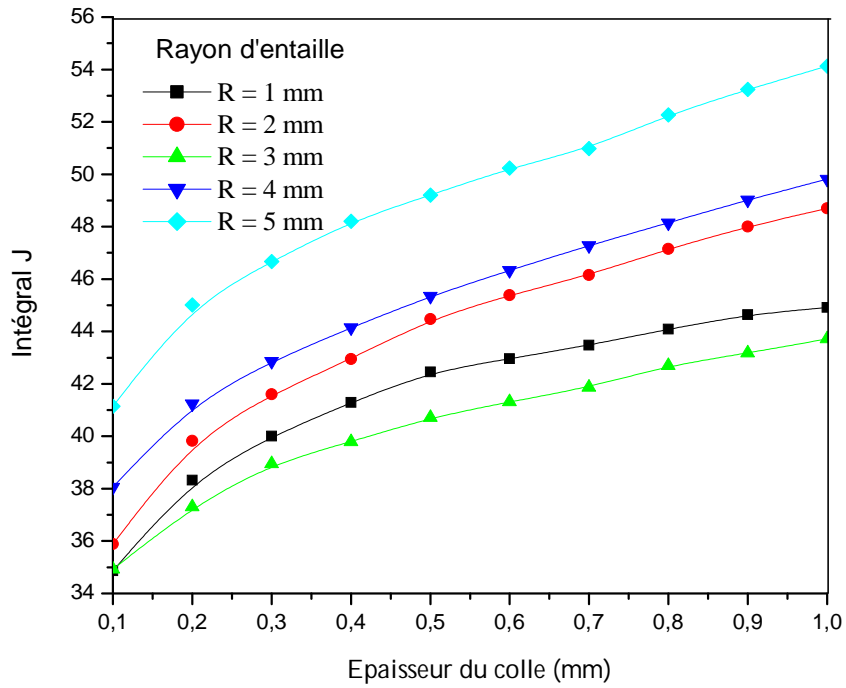


Figure (VI.35). Variation de J de la 3^{ème} pointe en fonction de l'épaisseur du colle.

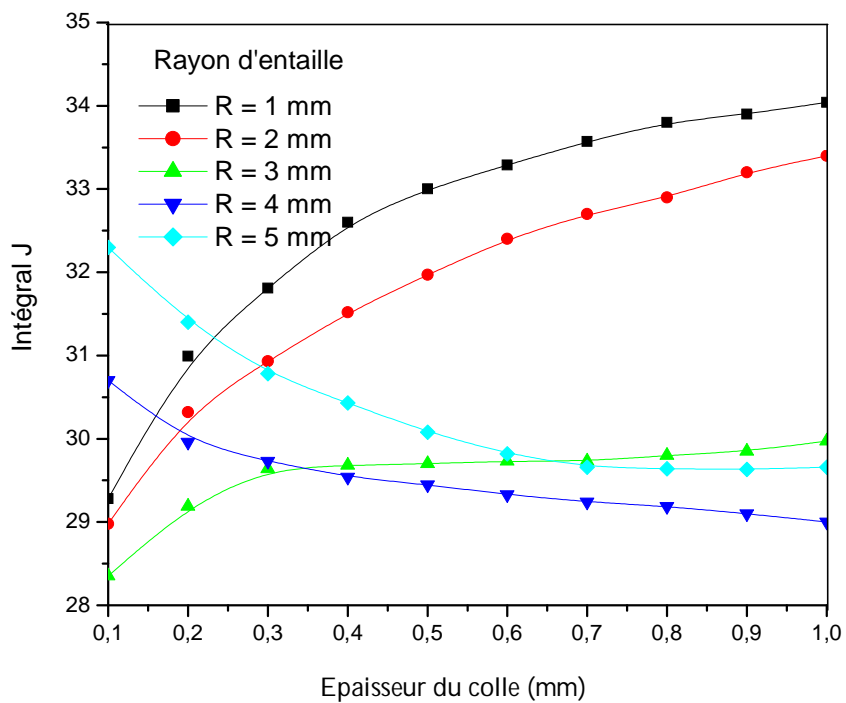


Figure (VI.36). Variation de J de la 5^{ème} pointe en fonction de l'épaisseur du colle.

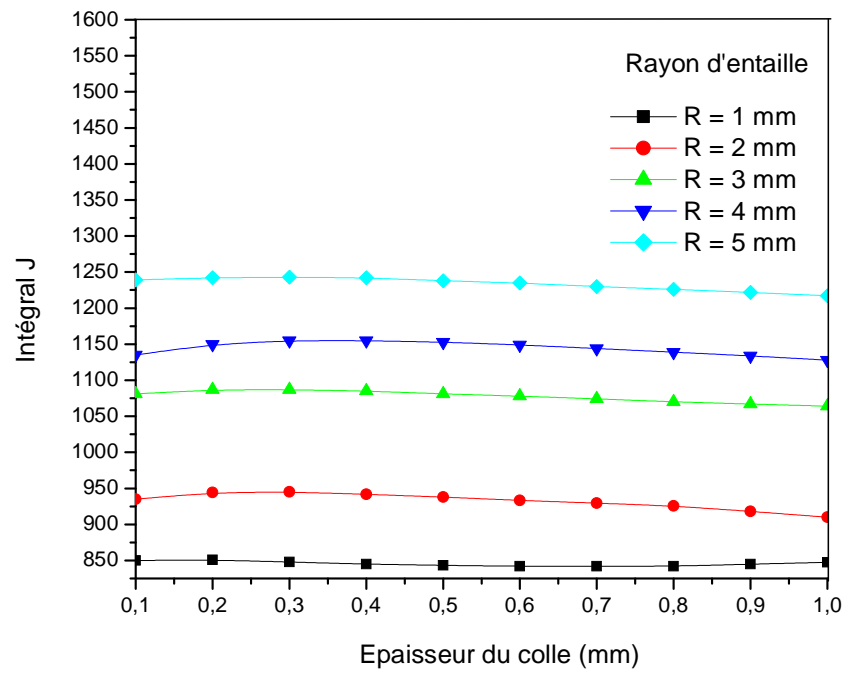


Figure (VI.37). Variation de J de la 9^{ème} pointe en fonction de l'épaisseur du colle.

V-9-Contour des contraintes

V-9-1-Plaque en présence d'une seule entaille semi-circulaire

Les deux plaques en composite ont un nombre de couches égal à quatre, une entaille semi circulaire de rayon de 4mm, a été pratiquée dans la plaque soumise à la traction. A chaque simulation, on considère une orientation donnée de couche. Les angles d'orientations de pli $\theta=(0^{\circ}, 10^{\circ}, 20^{\circ}, 30^{\circ}, 40^{\circ}, 50^{\circ}, 60^{\circ}, 70^{\circ}, 80^{\circ}, 90^{\circ})$. Les figures (VI.38, 39, 40) représentent la variation du niveau de contrainte σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} en fonction du contour d'entaille L (mm) selon le critère de la contrainte maximale. Le contour a été divisé en 121 segments. De la figure (VI.38), on note une variation non linéaire des contraintes σ_{xx} , atteignant une valeur maximale de l'ordre de 1000MPa pour toutes les orientations de pli et pour un intervalle de longueur de contour L de 6 à 8mm.

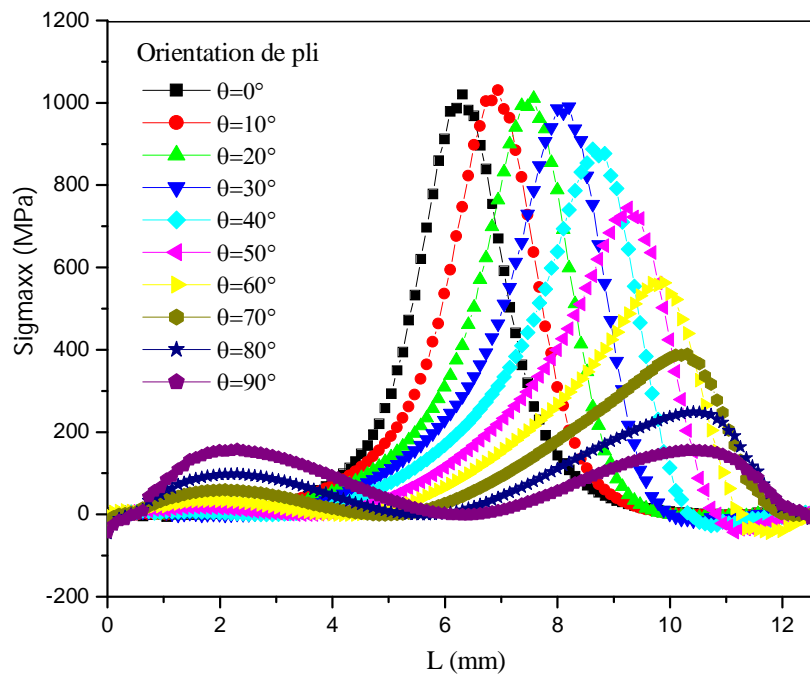


Figure (VI.38). Contraintes σ_{xx} sur le contour de l'entaille (Critère maximale).

De la figure (VI.39), la contrainte σ_{yy} maximale de 400MPa est obtenue pour une longueur de contour L égale à 6.25mm et pour un angle de pli $\theta=90^{\circ}$.

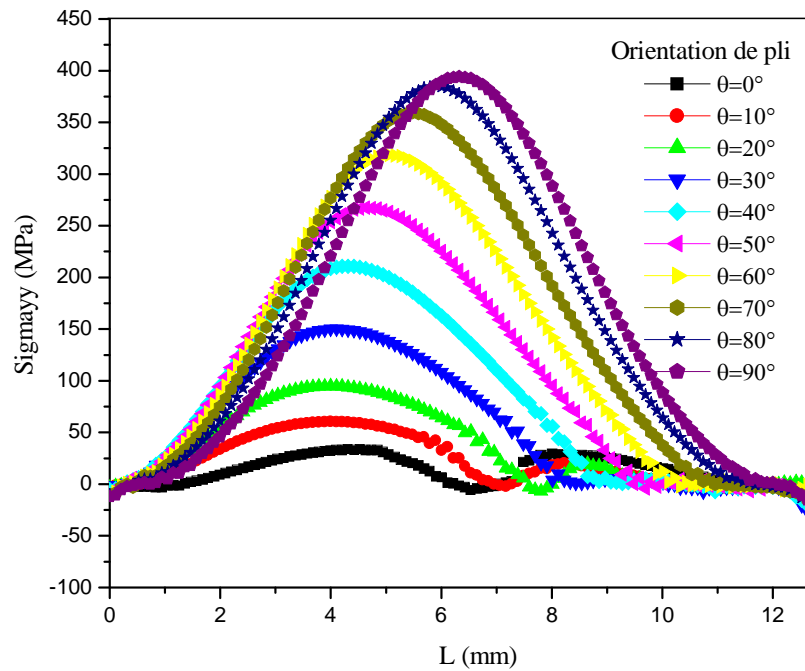


Figure (VI.39). Contraintes σ_{yy} sur le contour de l'entaille (Critère maximale).

La contrainte τ_{xy} varie d'une valeur maximale à une autre minimale. Pour une longueur de contour de 4mm et pour un angle de pli de 90° , la contrainte est de l'ordre de 150MPa, le minimum est obtenu de l'ordre de -200MPa pour une longueur de 8mm pour les angles de 50° et de 60° .

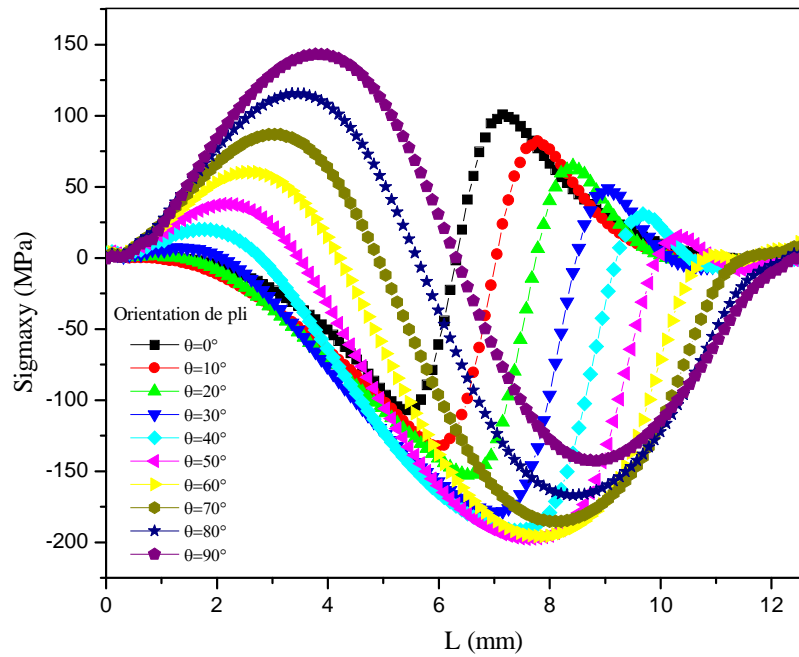


Figure (VI.40). Contraintes τ_{xy} sur le contour de l'entaille (Critère maximale).

V-9-2-Plaque en présence d'une seule entaille circulaire

Sur la figure(VI.41), l'entaille circulaire de rayon de 4mm a été mécanisée sur la plaque 2 au centre la zone de collage.

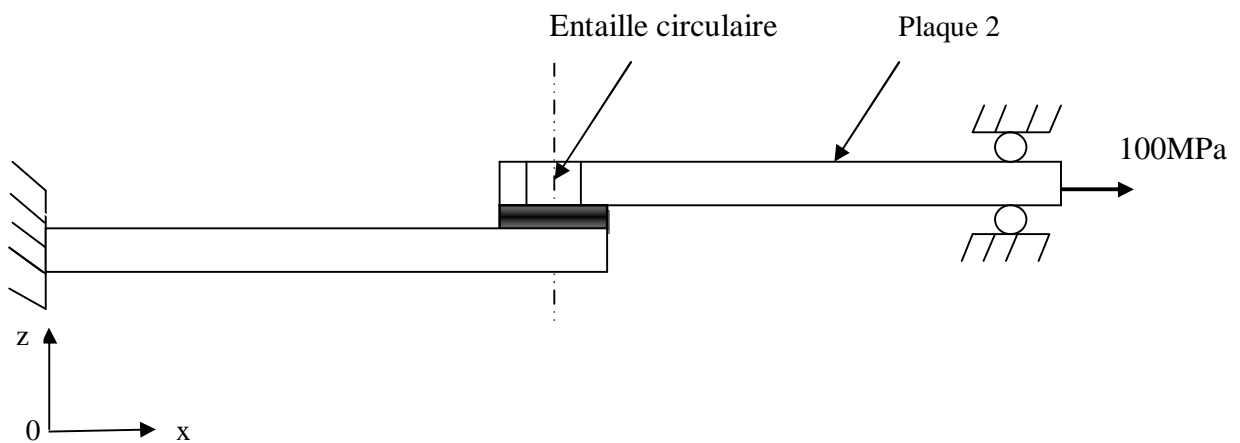


Figure (VI.41). Entaille circulaire.

De la figure (VI.42), on remarque des variations de la contrainte d'une valeur de 550MPa pour un angle de 0° pour une longueur de 6mm. La valeur minimale de l'ordre de -400MPa est obtenue pour une longueur de contour de 12.5mm pour un angle de 90° .

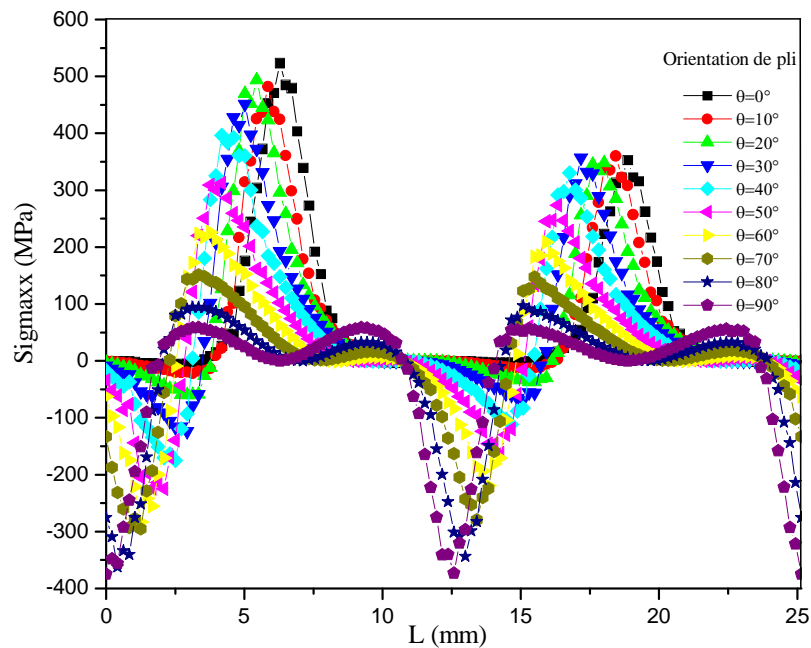


Figure (VI.42). Contraintes σ_{xx} sur le contour de l'entaille (Critère maximale).

A partir de la figure (VI.43), la contrainte maximale σ_{yy} de valeur égale à 260MPa est obtenue pour un angle de pli de 90° et une longueur de contour de 6mm. La plus petite contrainte de -40MPa, est obtenue pour les angles de pli de 40° et 50° pour une longueur de 12mm. De la figure (VI.44), la contrainte maximale de 85MPa est obtenue pour un angle de pli de 90° et une longueur de contour de 8mm. Un angle de pli de 80° fourni une contrainte τ_{xy} plus ou moins similaires à celle donnée par un angle de 90° .

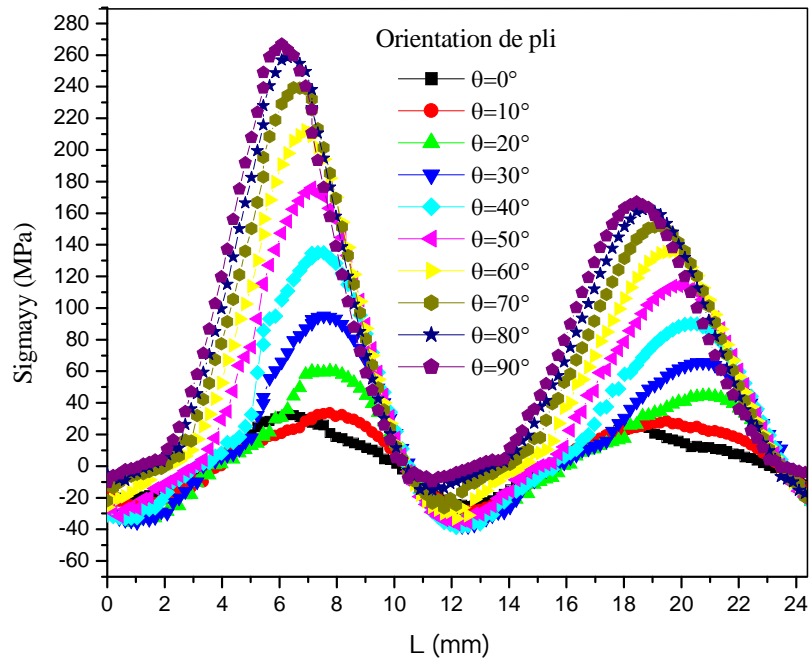


Figure (VI.43). Contraintes σ_{yy} sur le contour de l'entaille (Critère maximale).

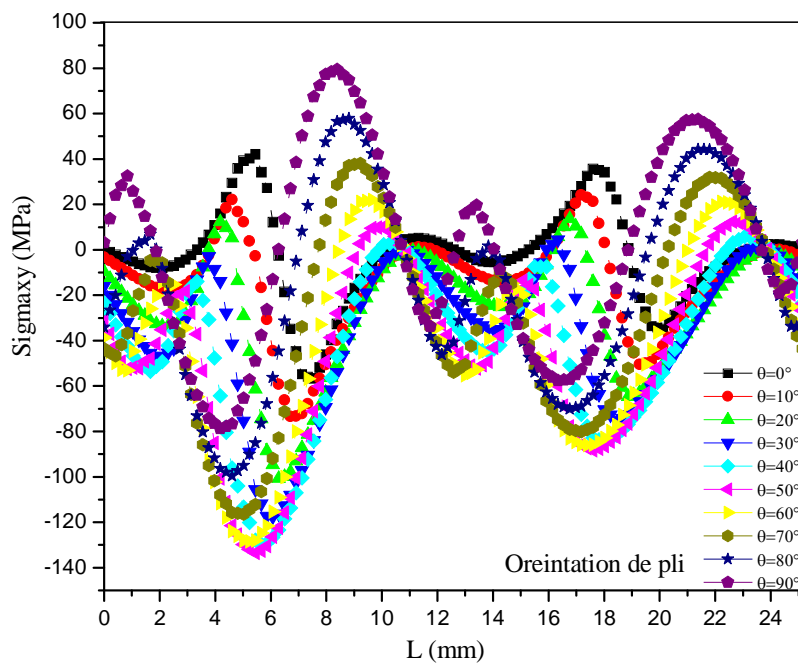


Figure (VI.44). Contraintes τ_{xy} sur le contour de l'entaille (Critère maximale).

V-10-Contour des déformations

V-10-1-Plaque en présence d'une seule entaille semi-circulaire

Les figures (VI.45,46,47) représentent la variation du niveau de déformation γ_{xx} , γ_{yy} , γ_{xy} en fonction du contour d'entaille L (mm) selon le critère maximale, le contour a été divisé en 121 segments. Une déformation maximale de l'ordre de 0.008 pour une variation d'intervalle de contour entre 6 à 8mm correspondant à des orientations de pli de $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ et 30° . La déformation maximale est au centre de l'entaille.

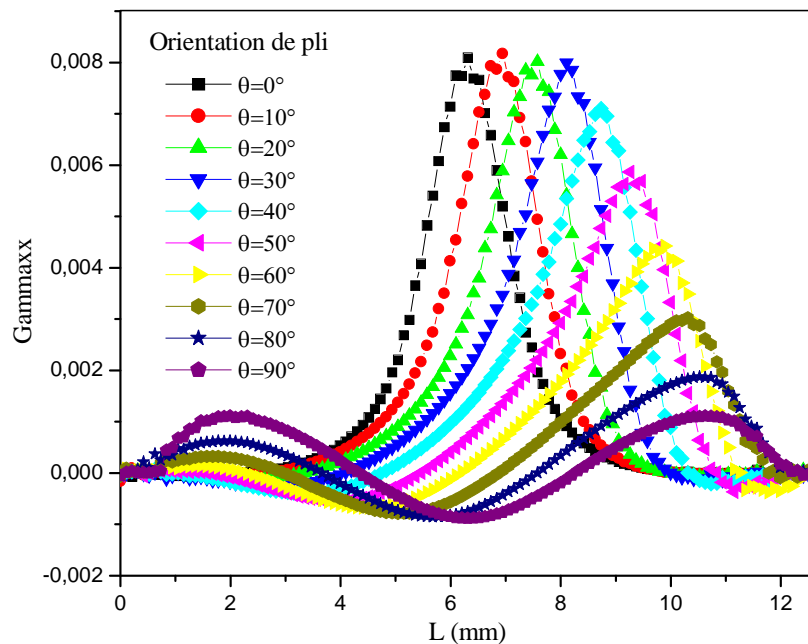


Figure (VI.45). Déformations γ_{xx} sur le contour de l'entaille (Critère maximale).

Les déformations γ_{yy} sont montrées sur la courbe (VI.46), la valeur maximale obtenue de valeur égale à 0.04376 pour une longueur $L=6.25$ mm et un angle de 90° . Une déformation γ_{xy} de l'ordre de 0.03 pour $L=4$ mm et un angle de pli de 90° pour la courbe (VI.47).

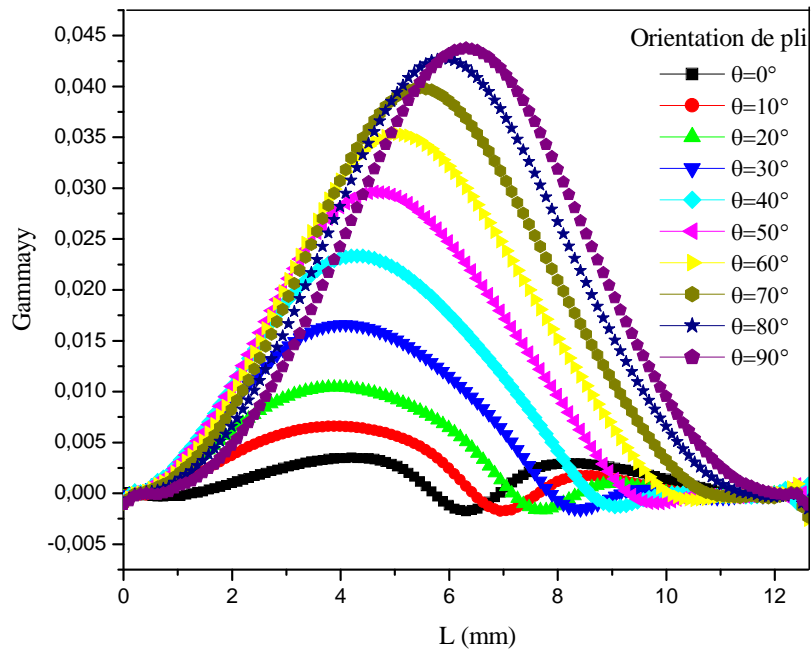


Figure (VI.46). Déformations γ_{yy} sur le contour de l'entaille (Critère maximale).

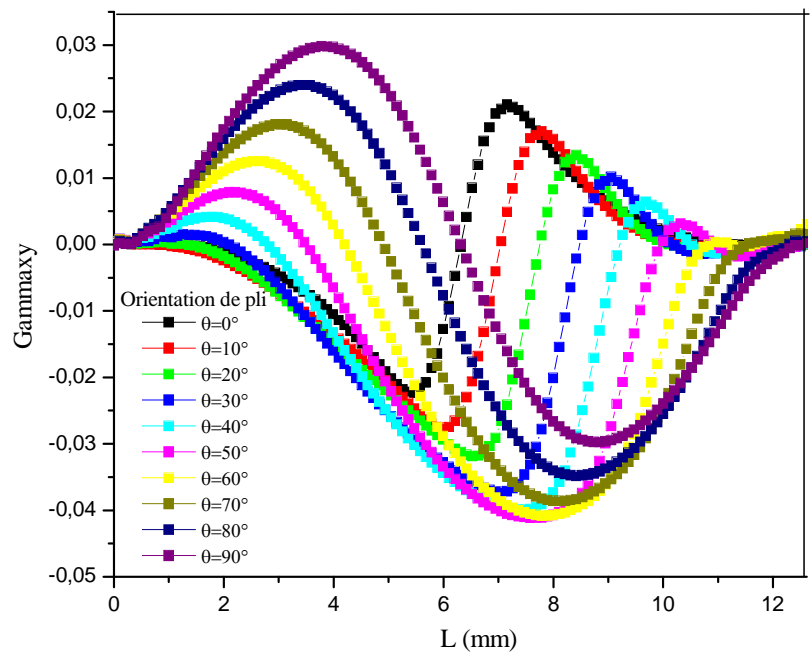
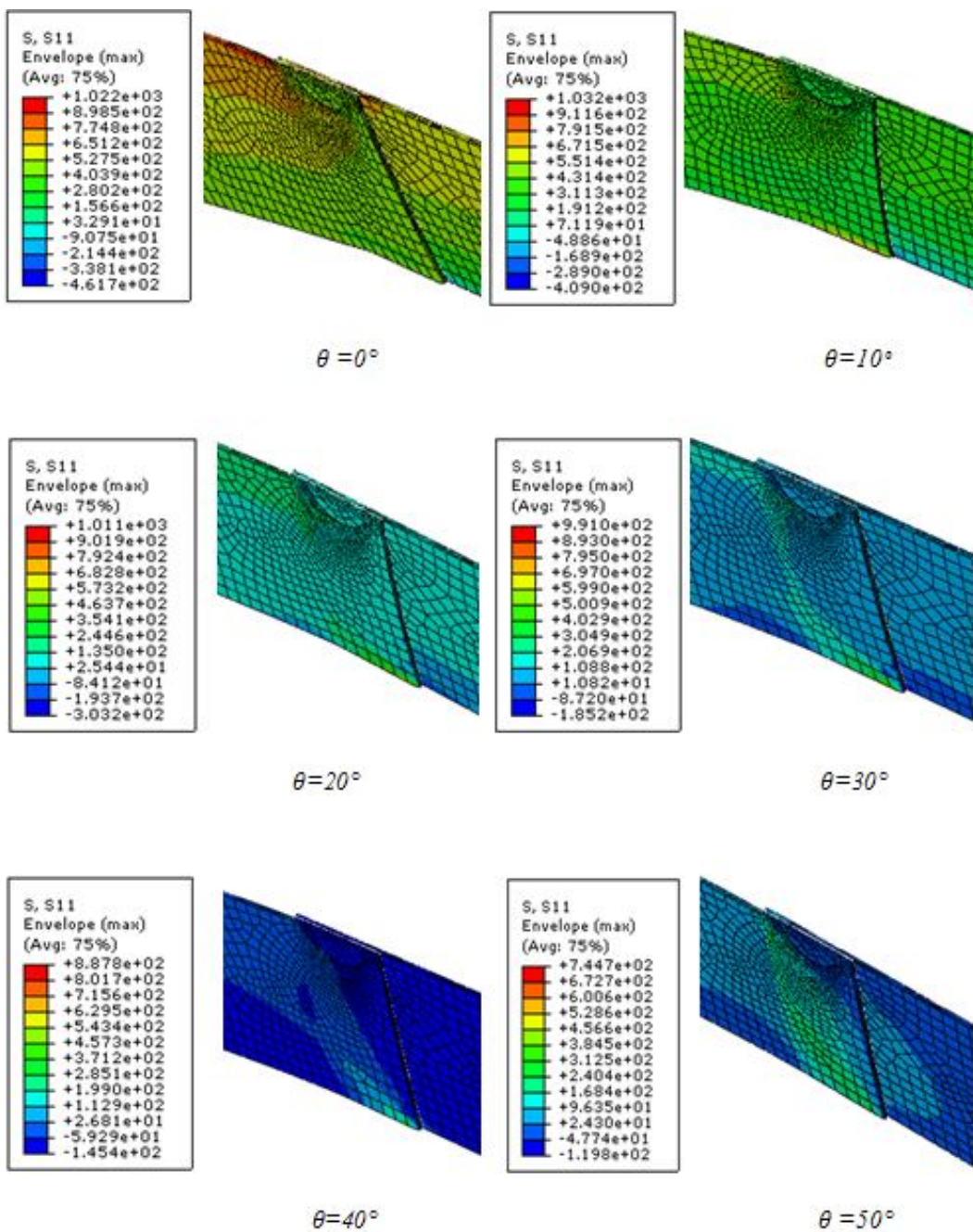


Figure (VI.47). Déformations γ_{xy} sur le contour de l'entaille (Critère maximale).



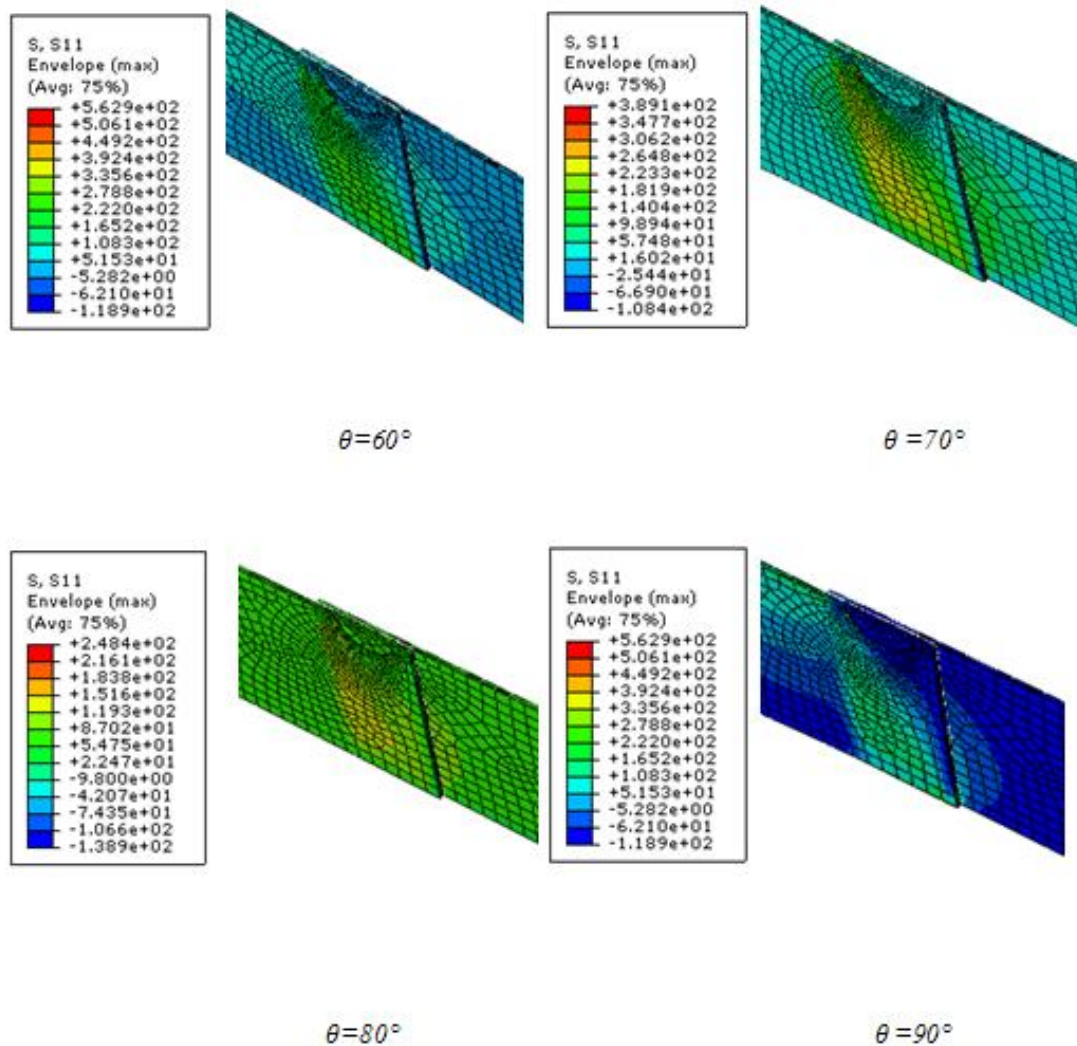


Figure (VI.48). Variation des niveaux de contraintes normales σ_{xx} au fond de l'entaille (semi-circulaire).

*Conclusion générale et
perspectives futures*

Conclusion générale et perspectives futures

Le mémoire de magister a pour objectif la modélisation par la méthode des éléments finis de la jonction adhésive de deux plaques en composite stratifiée au moyen de l'adhésive époxy. Les plaques en composites sont en fibre en carbone est de matrice époxy, avec une séquence d'empilement de 0/90/90/0. Une plaque est encastrée à son extrémité gauche, tandis que l'autre repose sur un système de rouleau est soumise à une force uniforme de 100MPa. Trois cas ont été traités, il s'agit de l'effet de la taille et de l'orientation de la fissure sur les contraintes, les déformations maximales et l'intégrale J. Différentes longueur de fissure variant de 4, 5, 6 et 8mm pour une variation d'angle de 0 à 90° ont été choisies. Les contraintes et les déformations sont représentées sur des graphes. Le deuxième cas, est orienté à l'influence du rayon d'entaille et de l'épaisseur des plaques sur les états des contraintes et des déformations. L'épaisseur des plaques varient de 0.5 à 1.5mm pour des rayons d'entaille de 1, 2, 3 et 4mm. Le troisième cas est dirigé à l'effet de l'épaisseur de la colle et le rayon d'entaille sur les contraintes et les déformations. Le rayon d'entaille varie de 1, 2, 3, 4 et 5mm pour une variation de l'épaisseur de la colle de 0.1 à 1mm.

Perspectives futures

Comme travaux futurs, on peut modéliser le comportement des plaques et de l'adhésive dans le domaine non linéaire, dynamique en tenant compte des divers paramètres d'environnement tels que la température, l'humidité...etc.

Références
Bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] M. Golan and E. Reissner, 'Stresses in cemented joints,' *J. Appl. Mech, Trans ASME* 11, A17-A27, (1944).
- [2] L. J. Hart-Smith, 'Adhesive-bonded single-lap joints,' NASA CR-112236, Jan. (1973)
- [3] I. U. Ojalvo and H. L. Eidinoff, 'Bond thickness effects upon stresses in single-lap adhesive joints', *AIAA Journal* 16, No. 3 pp. 204-211, (1977).
- [4] W. J. Renton and J. R. Vinson, 'Analysis of adhesively bonded joints between panels of composite materials', *J. of Appl. Mech* pp. 101-106, (1977).
- [5] D. Chen and S. Cheng, 'An analysis of adhesive-bonded single-lap joints', *J. Appl. Mech* 50, pp. 109-115, (1983).
- [6] J. A. Harris and R. D. Adams, 'Strength prediction of bonded single lap joints by non-linear finite element methods,' *Int. J. Adhesion and Adhesives*, 4, No. 2 pp. 65-78 (1984).
- [7] U. Edlund and A. Klarbring, 'A geometrically nonlinear model of the adhesive joint problem and its numerical treatment,' *Comp. Meth. Appl'd. Mech. and Eng.*, 96, pp. 329-350, (1992).
- [8] K. Temma, T. Sawa and A. Iwata, 'Three-dimensional stress analysis of adhesive butt joints with disbanded areas and spew fillets,' *Int. J. Adhesion and Adhesive*, Vol. 10, No. 4, pp. 294-300, (1990).
- [9] R. D. Adams and J. A. Harris, 'The influence of local geometry on the strength of adhesive joints,' *Int. J. Adhesion and Adhesives*, pp. 69-80, (1987).
- [10] G. R. Wooley and D. R. Carver, 'Stress concentration factors for bonded lap joints,' *AIAA Journal* 8, No. 10 pp. 817-820, (1971).
- [11] Adhesion and adhesives, science. and technology. Chapman and Hall (1987). KINLOCH (A.J.). – Structural adhesives. Chapman. and Hall (1986). LEE (H.) et...
- [12] N. L. Harrison and W. J. Harrison, 'The stresses in an adhesive layer,' *J. Adhesion*, Vol. 3, pp. 195-212, (1972).
- [13] Y. Weitsman, 'Stresses in adhesive joints due to moisture and temperature,' *J. Comp. Mat.*, Vol. 11, pp. 378-394, (1977).
- [14] D. A. Bigwood and A. D. Crocombe, 'Elastic analysis and engineering design formulae for bonded joints,' *Int. J. Adhesion and Adhesive*, Vol. 9, No. 4, pp. 229-242, (1989). 65
- [15] D. J. Allman, 'A theory for elastic stresses in adhesive bonded lap joint,' *Q. J. Mech. Appl. Math*, Vol., Pt. 4, (1977).
- [16] R. D. Adams and N. A. Peppiatt, 'Stress analysis of adhesive bonded tubular lap joints,' *J. Adhesion* 9, pp. 1-18, (1977).

- [17] K. Temma, T. Sawn and A. Iwata, 'Two-dimensional stress analysis of adhesive butt joints subjected to cleavage loads,' *Int. J. Adhesion and Adhesive*, Vol. 10, No. 4, pp. 285-293, (1990).
- [18] A. S. Kuo, 'A two-dimensional shear spring element,' *AIAA Journal* 22, No. 10 pp. 1460-1464, (1983).
- [19] R. M. Barker and F. Hatt, 'Analysis of bonded joints in vehicular structures,' *AIAA Journal* 11, No. 12 pp. 1650-1654, (1973).
- [20] W. C. Carpenter, 'Stresses in bonded connections using finite elements,' *Int. J. of Numer. Meth. Engrg* 15 pp. 1659-1680, (1980).
- [21]- H. L. Goth, 'Calculation of stresses in bonded joints using the substructuring technique,' *Int. J. Adhesion and Adhesives*, Vol. 6, No. 1, pp. 31-35, (1986).
- [22] S. Aivazzadeh and G. Verchery, 'Stress analysis at the interface in adhesive joints by special finite elements,' *Int. J. Adhesion and Adhesives*, Vol. 6, No. 4, pp. 185-187, (1986).
- [23] T. H. H. Pian and K. Sumihara, 'Rational approach for assumed stress finite element', *Ing. J. Num. Meth. Engrg.* 20, 1685-1695, (1984).
- [24] T. H. H. Pian and C.C. Wu, 'A rational approach for choosing stress terms for hybrid finite element formulations,' *Ing. J. Num. Meth. Engrg.* 26, 2331-2343, (1988).
- [25] 27 déc. 2009...MECAVENIR-COURS MATERIAUX COMPOSITES v18_10_2006 0. PLAN DU COURS MATERIAUX COMPOSITES! 1. GENERALITES! 2.
- [26] Nadia Bahlouli, Cours Composites sur le site Internet " [http://www ipst.ustrasbg.fr/cours/matériaux-composites](http://www.ipst.ustrasbg.fr/cours/matériaux-composites)".
- [27] J.M. Berthelot " Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures ", Ed. Masson.
- [28] M.L. Benzeggagh, Polycopié du cours MQ13 en 4 tomes sur les matériaux composites. D. Gay, «Matériaux Composites ", 3ème édition Ed. Hermès, 1991.
- [29] Non destructive evaluation of adhesive bond quality. STATE-OF-THE-ART REVIEW Project 17-7958-838 by G.M. Light Hegeon Kwun, SOUTHWEST RESEARCH INSTITUTE San Antonio, Texas, pp. 1-8, June 1989.
- [30] Adhesively Bonded Carbon/Titanium Joints under In-plane and Bending Loads. Mahmood M. Shokrieh, Larry B. Lessard, and Adnan Golubovic. (1) Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran, (2) Department of Mechanical Engineering, McGill University, Montréal, Canada, pp.292-297, Received 5 February 2006; accepted 27 May 2007.
- [31] Analysis of bonded joints for small craft and marine applications. A thesis submitted in partial fulfilment of the requirements for the Degree of Master of Engineering at the University of Waikato by Liviu Eduard Armeanu University of Waikato 2010. pp.10-13.

- [32] LO, K. H; CHRISTENSEN, R. M. and WU, E. M. A High Order Theory of Plate Deformation – Part 1: Homogeneous Plates. *Journal of Applied Mechanics*. v. 44, p. 663-668, 1997.
- [33] Boeing Paper MDC 00K00100, in preparation. 5. Hart-Smith, LJ (1973) Adhesive-Bonded Double-Lap Joints. NASA Langley Contract Report NASA CR-112235....
- [34] (1973) Hart-Smith. NASACR112236. ... By L J Hart-Smith...hidden. NASA CR 112236 ... Prepared under Contract NASI-II234...Langley Research Center....
- [35] 9. D. W. Oplinger, *Int. J. Solids Struct.* 31, 2565–2587 (1994). 10. C. C. Lin and Y. S. Lin, *Int. J. Solids Struct.* 30, 1679–1692 (1993). 11. M. Y. Tsai and J. Morton...
- [36] Chai H. In: *Composite materials: testing and design*. Philadelphia: ASTM STP 893; 1986. p. 209–31.
- [37] Bezemer AA, Guyt CB, Volt A. New impact specimen for adhesives: optimization of high-speed loaded adhesive joints. *Int J. Adhes Adhes* 1998; 18:255–60.
- [38] Beevers, A. and Ellis, MD (1984) *Int. J. Adhesion Adhesives* 4, 13. 81. Harris, JA and Adams, RD (1985) *Proc. Inst. Mech. Eng.* 199, 121. 82. Volkersen, O. (1965)...
- [39] *Journal of Adhesion Science and Technology* 24 (2010) 291–304 ... the single lap joint has been frequently taken as test specimen for tensile-shear ex-..... K. Kihara, H. Isono, H. Yamabe and T. Sugibayashi, A study and evaluation of the ... impact loads, *Int. J. Adhes. Adhes.* 23, 253–259 (2003). 3. K. Shahin and F. Taheri...
- [40] George Y. Wu, Khalid Aziz, Lily H. Fiduccia, and Giles F. Whalen,. 2003 OTHER BEDSIDE TECHNOLOGIES ... agriculture industry to assess the composition of grains and seeds, is.....*Facts Res. Gerontol* 1994; 4(suppl 2):15–19. 31. Katz S, Ford AB, Markowitz RW, et al ... *J Pediatric Gastroenterol Nutr* 1997; 18:453–456.
- [41] Abstract—Electronically conductive adhesives (ECAs) have received a great deal..... S. M. Darwish, A. Niazi, A. Ghania and M. E. Kassem, *Int. J. Adhesion Adhesives* 9, 224... R. Kilik and R. Davis, *Int. J. Adhesion Adhesives* 9 (4), 224 (1989).
- [42] 28 Mar 2011...*Comput Struct* 1987;27:445. Lin CC, Lin YS. *Int J Solids Struct* 1993; 30:1679. Reddy JN, Roy S. *Int J Non-Linear Mech* 1988; 23:97. Roy S...
- [43] *Int J Fract* (2011) 168:197–207...ened adhesives, the nonlinear zone beyond the crack tip caused by the cohesiveAndruet RH, Dillard DA, Holzer SM (2001) Two- and three- dimensional ... *Int J Adhes Adhes* 21:17–34. Bachrach WE...
- [44] 21 Mar 2011 ... Joints rely unload transfer from one part of the structure to another, which allows the.... Li G, Lee-Sullivan P. “Finite element and experimental studies on single-lap ... Li G, Lee-Sullivan P, Thring RW. ... 1999; 46:395–403. 18.
- [45] REDDY, J. N. A generalization of two-dimensional Theories of Laminated Composite Plates. *Communications In Appl. Num. Meth.* v. 3. P. 173-180, 1987.

- [46] REDDY, J. N. and MIRAVETE, A. Practical Analysis of Composite Laminates. CRC Press, 1995.
- [47] Chapitre II – ANALYSE MECANIQUE D'UNE PIECE FISSUREE 40 II 1 ... d'une piece fissuree La mecanique de la bib rilc com 1395 01 Chapitre 2 pdf.P-42-52.
- [48] 11 janv. 2008 ... Mécanique des Structures Navales de l'ENSIETA, le Laboratoire de Physique et ... Aussi, je voudrais remercier Abderrahim ZEGHLOUL, Professeur à l'Université de Metz. Je lui.....VII-1-1 Mécanique linéaire de la rupture. P-155-159).
- [49] Site Internet "<http://www.Rappels sur la mécanique de la rupture>".
- [50] J.Lemaitre et J.L Chaboche - Mécanique des matériaux solides Dundo, 2^{ème} édition, Paris, 1988.
- [51] H.D. Bui et A. Ehrlachaer – Propagation of damage in elastic and plastic solids, advances in fracture research 2, Pergamon Press, London 1981.
- [52] A. Ehrlachaer – Contribution à l'étude thermodynamique de la progression de fissure et à la Mécanique de l'endommagement brutal, Thèse de doctorat d'état de l'Université Pierre et Marie Curie Paris 6, Février 1985.
- [53] A. L. Gurson – Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media, Transaction of the ASME, Janvier 1977.
- [54] A. Needleman and V. Tvergaard – An analysis of ductile rupture modes et a crack tip, J mech. Phys. Solids, Vol. 35, N^o 2, pp. 151-183, 1987.
- [55] G. Rousselier – Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture, Nucl. Engng. And Design, Vol. 105, pp.97-111, 1987.
- [56] M. Attigu i– Modélisation du comportement dynamique des structures fissurées par la Mécanique de la rupture, Thèse de doctorat de l'université de Limoges, Décembre 1997.
- [57] X. B. Zhang – Etude numérique de la propagation de fissures par la mécanique de la rupture, Thèse de Doctorat de l'université de Clermont-Ferrand II, Juin 1992.
- [58] D. Francois, A. Pineau, A. Zaoui – Comportement mécanique des matériaux. Ed. Hermes, Paris, 1993.
- [59] D. Baouch – Validation numérique des paramètres de fissuration en élastoplasticité, Thèse de Doctorat de l'Université Blaise Pascal Clermont II, 1998.
- [60] J. W. Hutchinson – Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material, J. Mech. Phys. Solids, Pergamon Presse, Vol. 16, pp. 13-31, 1968.
- [61] J.R. Rice and G.F. Rosenberg – Plain strain deformation near a crack tip in a power law hardening material, J. Mech. Phys. Solids, Pergamon Press, Vol. 16, pp.1-12, 1968.
- [62] R.D. Henshell, K.G. Shaw – Crack tip finite elements are unnecessary, Int. J. for Num. Meth. In Engng, Vol. 10, pp. 25-37, 1976.

- [63] R.S. Barsoum – On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, *Int. J. for Num. Meth. In Engng*, Vol. 10, pp. 25-37, 1976.
- [64] H.D. Hibbitt – Some properties of singular isoparametric elements, *Int. J. for Num. Meth. In Engng*, Vol. 11, N^o 1, pp. 180-184, 1977.
- [65] P. Tong, T.H.H Pian, S.J. Lasry – A hybrid element approach to crack problems in plane elasticity. *Int. J. for Num. Meth. In Engng*, Vol. 7, pp. 297-308, 1973.
- [66] Y. Murakami et al – Stress intensity factors handbook. Pergamon Press, 1987.
- [67] J.D. Eshelby – The continuum theory of lattice defects, *Solid Stat. Physics*, Vol. II, pp.79-144, 1968.
- [68] J.R. Rice – A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and crack. *J. of Appl. Mech*, Vol. 35, pp.379-386, 1968.
- [69] H.d. Bui – Dualité entre les integrals de contour. *Compte Rendu Acad. Sciences*, T. 276, Paris, Mai 1973.
- [70] Volkersen, O., 1938, “Die Niekraftverteilung in Zugbeanspruchten mit Konstantin Laschenquerschriften. *Luftfahrtforschung*”, 15, pp. 41–47.
- [71] Goland, M. and Reissner, E., 1944, “The Stresses in Cemented Joints”, *ASME Trans., Journal of Applied Mechanics*, 11. pp. 17–27.
- [72] Oplinger, D. W., 1991, “A Layered Beam Theory for Single Lap Joints”, *Army Materials Technology Laboratory Report*, MTL TR91–23.
- [73] Tsai, M. Y., Oplinger, D. W. and Morton, J., 1998, “Improved Theoretical Solutions for Adhesive Lap Joints”, *Int. Journal of Solids Structures*, 35(13), pp.1163–1185.
- [74] Klarbring, A. and Movchan A.B., 1988, “Asymptotic modeling of adhesive joints”, *Mechanics of materials*, 28, pp.137-145.
- [75] Kim H. and Kedward K., 2001, “Stress analysis of adhesively bonded joints under in plane shear loading”, *J. Adhesion*, 76, pp.1-36
- [76] Penado F.E. and Dropek R.K., 1990, “Numerical design and analysis”, *Engineered materials Hand book*, 3, Adhesives and Sealants, ASM International.
- [77] Tessler, A., Dambach M.L. and Oplinger D. W., 2000, “Efficient adaptive mesh refinement modeling of adhesive joints”, presented at the work shop on bonded joints and assemblies in aircraft, ASTM/ASC, Texas A&M.

- [78] Adams, R. D. and Peppiatt, N. A., 1974, "Stress Analysis of Adhesively Bonded Lap Joints", *Journal of Strain Analysis*, 9, pp.185–196.
- [79] Kairouz, K. C. and Matthews, F. L., 1993, "Strength and Failure Modes of Bonded Single Lap Joints between Cross-Ply Adherends", *Composites*, 24(6), pp.475–484.
- [80] Tong, L. and Steven, G. P., 1999, "Analysis and Design of Structural Bonded Joints", Kluwer Academic Publishers.
- [81] Li, Gang and Lee-Sullivan, Pearl, 2001, "Finite Element and Experimental Studies on Single-lap Balanced Joints in Tension", *Int. Journal of Adhesion and Adhesives*, 21(3), pp. 211–220.
- [82] Delale, F., Erdogan, F. and Aydinoglu, M. N., 1982, "Stresses in Adhesively Bonded Joints: A Closed-form Solution", *Journal of Composite Materials*, 15, pp.249–271.
- [83] Mortensen, F. and Thomsen, O. T., 2002, "Analysis of Adhesive Bonded Joints: A Unified Approach", *Composite Science and Technology*, 62(7–8), pp.1011–1031.
- [84] Panigrahi, S. K. and Pradhan, B., 2007, "Three dimensional Failure analysis and damage Propagation behavior of Adhesively bonded Single lap joints in laminated FRP Composites", *Journal of Reinforced plastics and Composites*, 26(2), pp.183-201.