



UNIVERSITE ABDELHAMID IBN-BADIS MOSTAGANEM  
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

# MEMOIRE

Présenté pour obtenir

LE DIPLOME DE MAGISTER  
SPECIALITE : GENIE MECANIQUE

OPTION : MODELISATION ET SIMULATION MESOSCOPIQUE DES PHENOMENES  
DE TRANSPORT THERMO-FLUIDE

Par

**BOUAMOUD Benameur**

**Etude de la convection dans une cavité carrée avec  
une paroi partiellement chauffée par la méthode  
de Boltzmann sur réseau**

Soutenu le :23/01/2014

devant le jury composé de :

<b>Président :</b>	Mr OUINAS Djamel	Professeur	Université de Mostaganem
<b>Examineurs :</b>	Mr. AZZI Abbes	Professeur	USTO
	Mr. OUADHA Ahmed	Professeur	USTO
	Mr FEDDAG Ahmed	Maître de conférences A	Université de Mostaganem
<b>Rapporteur :</b>	Mr. HOUAT Samir	Maître de conférences A	Université de Mostaganem

أعوذ بالله من الشيطان الرجيم

بسم الله الرحمن الرحيم

«رب أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي وعلى والدي وأن أعمل صالحا ترضاه وأدخلني برحمتك في عبادك  
الصالحين»

صدق الله العظيم

ماكان هذا العمل المتواضع ليرى النور لولا التوفيق والعون من الله ، فالحمد لله كثيرا الذي أعطى كل شيء خلقه ثم  
هدى...

## **Dédicaces**

Je dédie ce modeste mémoire à:

Ma grand-mère

Mes chers parents

Mes frères et mes sœurs

Mes neveux et mes nièces

Monsieur Samir HOUAT

Tous mes amis

## Remerciements

Jamais ce travail n'aurait pu voir le jour sans la confiance, l'aide, les conseils et l'amitié de nombreuses personnes.

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Modélisation Numérique et Expérimentale des Phénomènes Mécaniques (LMNEPM). Equipe de Modélisation et Simulation Mésoscopique des Phénomènes de Transfert (EMSMPT).

Je tiens tout d'abord à remercier très chaleureusement mon encadreur, le docteur Samir HOUAT (directeur de projet), pour m'avoir permis de réaliser ce modeste travail. Le docteur Samir HOUAT a su me faire confiance. Il a su m'apporter une formation diversifiée et complète en Modélisation Numérique des phénomènes du transport thermo-fluide. Généreux ! Il m'a dispensé son enseignement avec une rare excellence avec une compétence et une passion remarquables que j'admire beaucoup. Monsieur, vous m'avez donné la chance de travailler avec une grande autonomie sur un sujet récent, très intéressant, riche et très diversifié. Grâce à vous, je me suis épanoui professionnellement et intellectuellement. Vous êtes à mes yeux l'un de ces trop rares humanistes qui véhiculent, sans compter, l'héritage des connaissances scientifiques. Je vous en suis profondément reconnaissant !

Je remercie également tous les membres du jury, notamment le Professeur Abbes AZZI, le Docteur Ahmed OUADHA et le Docteur Ahmed FEDDAG, d'avoir accepté d'examiner ce modeste travail. Toute ma gratitude et mes remerciements vont également au Professeur Djamel OUNAS qui a bien voulu présider ce jury.

Mes remerciements vont aussi aux professeurs qui ont marqué ma formation durant l'année théorique de ce Magister. Qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance et gratitude.

## Étude de la convection dans une cavité carrée avec une paroi partiellement chauffée par la méthode de Boltzmann sur réseau

### Résumé :

Le travail exposé dans ce mémoire, porte sur la simulation numérique de la convection naturelle laminaire dans une cavité carrée fermée, avec une paroi partiellement chauffée en utilisant la nouvelle méthode de Boltzmann sur réseau.

Tout d'abord, une étude détaillée sur les généralités du transfert de chaleur par convection notamment la convection naturelle est présentée ainsi qu'une revue bibliographique sur les travaux les plus importants trouvés dans la littérature.

Le travail a été poursuivi par la présentation des différentes méthodes de modélisation conventionnelles en s'étalant sur la méthode des volumes finis ainsi que, la théorie de la nouvelle méthode utilisée notamment la méthode de Boltzmann sur réseau thermique à double population.

La configuration géométrique choisie dans cette étude, est une cavité carrée à deux dimensions où la longueur de la partie de la paroi chauffée à température constante, est variée de 20% à 80% de la largeur total, tandis que la paroi opposée est totalement refroidie. Les parois du haut et du bas sont supposées adiabatiques. Le calcul a été effectué pour un régime laminaire et pour un fluide incompressible avec un nombre de Prandtl  $Pr=0,71$ .

Les calculs sont effectués par les deux méthodes différentes : celle de la méthode de Boltzmann sur réseau thermique à double population où un programme était élaboré et testé durant le travail de ce mémoire, sous l'éditeur MATLAB. Ainsi que la méthode des volumes finis en utilisant le code commercial Fluent.

Une validation des résultats obtenus est présentée pour les deux méthodes et confrontés avec ceux de la littérature pour le cas classique d'une cavité carrée différenciellement chauffée.

Les résultats de l'analyse CFD et une comparaison entre les deux méthodes ont été présentés, en traçant les lignes de courant, les isothermes, les profils de vitesse et de température au milieu de la cavité. Cette analyse est complétée par l'étude de l'influence du nombre de Rayleigh et de la longueur de la partie chauffée sur le nombre de Nusselt avec les deux méthodes. Les résultats ont révélés qu'il y'a un bon accord entre les deux méthodes, et que celle de Boltzmann sur réseau peut parfaitement reproduire le phénomène de la convection naturelle dans une cavité carrée avec une paroi partiellement chauffée.

**Mots clefs :** Convection naturelle laminaire, Méthode de Boltzmann sur réseau thermique, Cavité carrée, Chauffage partiel.

## **Study of the convection in a square cavity with a partially heated wall by the Lattice Boltzmann method**

### **Abstract:**

The work presented focuses on the numerical simulation of laminar natural convection in a closed square cavity, with a partially heated wall using the new method of lattice Boltzmann (LBM).

First, a detailed study of the general heat transfer by convection including natural convection and a literature review of the most important works found in the literature.

The work was followed by the presentation of different conventional modeling methods including finite volumes method with the theory of the new method used, especially the thermal lattice Boltzmann method with double population.

The geometry chosen in this study is a two-dimensional square where the length of the heated wall part of the cavity at a constant temperature, is varied from 20% to 80 % of the total width, while the opposite wall is completely cooled. The walls of the top and bottom are assumed adiabatic. The calculation was performed for a laminar flow and an incompressible fluid with a Prandtl number is  $Pr=0.71$ .

The calculations are carried out by two methods: the thermal lattice Boltzmann method with double population where the code was developed and tested during this work with MATLAB editor. And the finite volume method using the Fluent code.

The validation of results is presented for both methods and compared with those of the literature for the classical case of a square cavity differentially heated.

The results of the CFD analysis and comparison between the two methods were presented by plotting the streamlines, the isotherms, the profiles of velocity and temperature in the middle of the cavity. This analysis is completed by calculating the Nusselt number with the two methods.

These results revealed that there's a good agreement between the two methods and the lattice Boltzmann method can perfectly reproduce the natural convection phenomenon in a cavity.

**Keywords:** laminar natural convection, the thermal lattice Boltzmann method, square cavity, partial heating.

## دراسة عددية للحمل الحراري داخل فجوة مربعة الشكل بجدار مسخن جزئيا اعتمادا على طريقة بولتزمان للشبكات

### ملخص:

إن العمل الذي تم عرضه في هذه المذكرة، يتناول محاكاة عددية للحمل الحراري الرقائقي داخل فجوة مغلقة مربعة الشكل، بجدار مسخن جزئيا وذلك باستعمال الطريقة الجديدة لبولتزمان للشبكات . في البداية، تم عرض دراسة مفصلة لعموميات حول انتقال الحرارة بالحمل وبالخصوص الحمل الحراري الطبيعي متنوعة بعرض لأهم الأعمال الواردة في المراجع. تم التطرق بعدها إلى تقديم مختلف الطرائق المعتادة في النمذجة مع التركيز على طريقة الحجم المحددة وكذا نظرية الطريقة الجديدة المستعملة خصوصا طريقة بولتزمان للشبكات الحرارية بدالتي توزيع التشكيل الهندسي المختار لهذه الدراسة، يتمثل في فجوة ثنائية الأبعاد، مربعة الشكل حيث طول الجزء المسخن من الجدار، ذو درجة حرارة ثابتة، يتغير بنسبة تتراوح ما بين 20% و 80% من الطول الإجمالي في حين يكون الجدار المقابل مبرد كليا. يعتبر الجدارين العلوي و السفلي معزولان حراريا. أنجزت الحسابات مع مراعاة نظام رقائقي و مائع غير قابل للإنضغاط بعدد برانت مساو لـ: 0.71 كما أنجزت هذه الحسابات بطريقتين مختلفتين هما: طريقة بولتزمان للشبكات الحرارية بدالتي توزيع والتي استعدى استعمالها تطوير برنامج بلغة "ماتلاب" واختبار أدائه أثناء القيام بهذا العمل، وكذا طريقة الحجم المحددة باستعمال البرنامج التجاري فليوننت.

تم عرض النتائج المحصل عليها من استعمال هاتين الطريقتين ومقارنتها ببعضها البعض و بتلك الموجودة في المراجع والتي تخص الحالة الكلاسيكية الموافقة لفجوة مربعة الشكل حيث جدرانها العمودية مسخنة بدرجات حرارة متفاوتة نسبيا.

قدم تحليل ديناميكا الموائع العددية المقارن لنتائج الطريقتين وذلك برسم خطوط كل من الجريان والحرارة، منحنيات السرعة ودرجة الحرارة الموافقة لوسط الفجوة. ليشمل هذا التحليل في الأخير دراسة بالطريقتين لتأثير كل من عدد رايلي وطول الجزء المسخن على عدد نوسلت المتوسط. أبانت النتائج عن تطابق جيد بين الطريقتين وأن لطريقة بولتزمان للشبكات القدرة الكاملة على محاكاة ظاهرة الحمل الحراري الطبيعي داخل فجوة مربعة بجدار مسخن جزئيا.

**الكلمات المفتاحية:** الحمل الحراري الطبيعي الرقائقي، طريقة بولتزمان للشبكات الحرارية، فجوة مربعة الشكل، التسخين الجزئي.

**Table des matières**

**Dédicaces** ..... **i**

**Remerciements** ..... **ii**

**Résumé du travail** ..... **iii**

**Table des matières** ..... **vi**

**Nomenclature** ..... **ix**

**Table des figures et tableaux** ..... **xii**

**Introduction générale**

1. La simulation numérique..... 2

2. Les outils de la simulation numérique ..... 2

3. But du travail..... 4

4. Organisation du mémoire..... 4

**Chapitre I. Etude bibliographique**

I.1 Modes de transfert de chaleur..... 7

    I.1.1 La conduction ..... 7

    I.1.2 La Convection ..... 7

    I.1.3 Le rayonnement ..... 9

I.2 Aspects physiques de la convection naturelle ..... 9

    I.2.1 Définition de La convection naturelle ..... 9

    I.2.2 Domaine d’application ..... 11

    I.2.3 Formulation mathématique..... 11

    I.2.4 Approximation de Boussinesq et ses limitations..... 12

    I.2.5 Les paramètres caractéristiques de la convection naturelle ..... 13

I.3 Convection dans une enceinte ..... 15

    I.3.1 Notion de la circulation naturelle ..... 15

    I.3.1 Enceinte rectangulaire différentiellement chauffée ..... 16

I.4 Revue bibliographique..... 16

**Chapitre II. Outils de simulation**

II.1 Approche classique ..... 24

    II.1.1 Méthode des différences finies (MDF) ..... 24

    II.1.2 Méthode des éléments finis(MEF) ..... 25

    II.1.3 Méthode des volumes finis (MVF) ..... 25

    II.1.4 Mise en œuvre de la méthode (MVF) ..... 26

II.2 Approche microscopique (dynamique moléculaire) ..... 31

II.3 Approche Mésoscopique ..... 32

    II.3.1 L’automate cellulaire (CA) ..... 32

    II.3.2 Le gaz sur réseau (LGCA) ..... 33

    II.3.3 Modèles de gaz sur réseau utilisés en simulation ..... 33

    II.3.4 La Méthode de Boltzmann sur réseau ..... 34

**Chapitre III. Problématique et méthodes de solution**

III.1 Position du problème ..... 42

III.2 Hypothèses simplificatrices ..... 42

III.3 Description mathématique du problème ..... 43

    III.3.1 Modèle à deux dimensions ..... 43

    III.3.2 Modélisation sous forme adimensionnelle ..... 44

    III.3.3 Conditions aux limites ..... 44

III.4 Procédures de résolution ..... 45

    III.4.1 Première partie (Méthode des volumes finis) ..... 45

    III.4.2 Deuxième partie (Méthode de Boltzmann sur réseau) ..... 46

**Chapitre IV. Résultats et discussions**

IV.1. Introduction ..... 53

IV.2. Etude de validation ..... 53

    IV.2.1 Méthode des volumes finis (MVF) ..... 54

    IV.2.2. Méthode de double population de Boltzmann sur réseau (TLBM) ..... 55

    IV.2.3 Discussions des résultats de la validation ..... 56

IV.3 Résultats de calcul pour la cavité partiellement chauffée.....	71
IV.3.1 Effet du nombre de Rayleigh.....	71
IV.3.2 Effet de la longueur de la partie chauffée.....	83
IV.3.3. Effets sur le calcul du nombre de Nusselt moyen ( $Nu_{moy}$ ).....	112
<b>V. Conclusion générale.....</b>	<b>117</b>
<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>120</b>
<b>Annexe .....</b>	<b>125</b>

## Nomenclature

$c$ :	La vitesse discrète sur réseau
$C_p$ :	Chaleur spécifique à pression constante, [ <b>J/Kg.°K</b> ]
$c_s$ :	La vitesse du son, [ <b>m/s</b> ]
$f$ :	Fonction de distribution pour le fluide
$\vec{g}$ :	Vecteur d'accélération gravitationnelle, [ <b>m/s<sup>2</sup></b> ]
$g$ :	Fonction de distribution pour la température
Gr:	Nombre de Grashof
H :	Hauteur de l'enceinte, [ <b>m</b> ]
Kn :	Nombre de Knudsen
L :	Longueur de la partie chauffée du mur gauche de l'enceinte, [ <b>m</b> ]
$l$ :	Longueur caractéristique
$Nu$ :	Nombre de Nusselt
$\mathbf{n}$ :	Vecteur normal à la face du volume de contrôle
$Pr$ :	Nombre de Prandtl
Ra:	Nombre de Rayleigh
$q$ :	Flux thermique, [ <b>W</b> ]
$t$ :	Temps, [ <b>s</b> ]
$T$ :	Température, [ <b>°K</b> ]
$u, v$ :	Composantes de la vitesse dans les directions $x$ et $y$ , [ <b>m/s</b> ]
$U, V$ :	Composantes adimensionnelles de la vitesse
$w$ :	Facteurs de poids
$x, y$ :	Coordonnées cartésiennes, [ <b>m</b> ]
$X, Y$ :	Coordonnées adimensionnelles

***Symboles grecs :***

$\alpha$ :	Diffusivité thermique, [ $\mathbf{m}^2/\mathbf{s}$ ]
$\beta$ :	Coefficient d'expansion thermique, [ $^{\circ}\mathbf{K}^{-1}$ ]
$\rho$ :	Densité, [ $\mathbf{Kg}/\mathbf{m}^3$ ]
$\delta x$ :	Unité de longueur réseau
$\delta t$ :	Unité de temps réseau
$\lambda$ :	Conductivité thermique, [ $\mathbf{W}/\mathbf{m} \cdot \mathbf{K}$ ]
$\nu$ :	Viscosité cinématique, [ $\mathbf{m}^2/\mathbf{s}$ ]
$\mu$ :	Viscosité dynamique, [ $\mathbf{Kg}/\mathbf{m} \cdot \mathbf{s}$ ]
$\theta$ (Thêta):	Température adimensionnelle
$\tau$ :	Temps de relaxation
$\omega$ :	Fréquence de relaxation
$\Pi$ :	Tenseur de flux d'impulsion

***Indices :***

$\infty$ :	Loin de la surface chauffée
$0$ :	Valeur moyenne
$c$ :	Valeur critique
$e, w$ :	Est, Ouest
$i$ :	La direction de la fonction de distribution sur le réseau D2Q9
$j$ :	La direction de la fonction de distribution sur le réseau D2Q5
$L$ :	Local
$m$ :	Valeur maximale
$moy$ :	Moyen
$n, s$ :	Nord, Sud
$P$ :	Noeud principal
$N, S$ :	Nord, Sud
$W, E$ :	Ouest, Est

***Exposants :***

*eq* : d'équilibre

***Abréviations utilisées :***

BGK : Bhatnagar, Gross & Krook  
LBE : Lattice Boltzmann Equation  
LBM: Lattice Boltzmann Method  
LGCA: Lattice Gas Cellular Automata  
MDF : Méthode des Différences Finies  
MEF : Méthode des Eléments Finis  
MVF : Méthode des Volumes Finis  
NS : Navier-Stokes  
SRT : Single Relaxation Time  
TLBM : Thermal Lattice Boltzmann Method

**Liste des figures**

(Fig. I. 1) : Ecoulement de la convection naturelle dans une cavité carrée ..... 10

(Fig. I. 2) : Circulation du fluide en convection naturelle dans une cavité carrée ..... 16

(Fig. II.1) : Volume de contrôle typique en cas du maillage bidimensionnel structuré ..... 28

(Fig.II.2) : Modèles des réseaux LBM..... 39

(Fig. III. 1) : Configuration physique et conditions aux limites ..... 42

(Fig. III.3) : Les distributions manquantes sur la frontière inférieure ..... 49

(Fig. III.4) : Organigramme de la méthode à double population ..... 51

(Fig. IV. 1) : Comparaison des isothermes,  $L = H$ ..... 58

(Fig. IV. 2) : Comparaison des lignes de courant,  $L = H$ ..... 60

(Fig. IV. 3) : Profils de température,  $L = H$  ..... 63

(Fig. IV. 4) : Profils de vitesse  $U$ ,  $L = H$ ..... 65

(Fig. IV. 5) : Profils de vitesse  $V$ ,  $L = H$ ..... 67

(Fig. IV.6) : Validation du Nombre de Nusselt Moyen ( $Nu_{moy}$ ) ..... 69

(Fig. IV. 7): Isothermes,  $L = 0.2 H$  ..... 72

(Fig. IV. 8) : Lignes de courant,  $L = 0.2 H$  ..... 74

(Fig. IV. 9) : Profils de température,  $L = 0.2 H$  ..... 77

(Fig. IV. 10) : Profils de vitesse  $U$ ,  $L = 0.2 H$ ..... 79

(Fig. IV. 11) : Profils de vitesse  $V$ ,  $L = 0.2 H$ ..... 81

(Fig. IV. 12): Isothermes,  $L = 0.4 H$  ..... 85

(Fig. IV. 13) : Lignes de courant,  $L = 0.4 H$  ..... 86

(Fig. IV. 14) : Profils de température,  $L = 0.4 H$  ..... 88

(Fig. IV. 15) : Profils de vitesse  $U$ ,  $L = 0.4 H$ ..... 90

(Fig. IV. 16) : Profils de vitesse  $V$ ,  $L = 0.6 H$ ..... 92

(Fig. IV. 17): Isothermes,  $L = 0.6 H$  ..... 94

(Fig. IV. 18) : Lignes de courant,  $L = 0.6 H$  ..... 95

(Fig. IV. 19) : Profils de température,  $L = 0.6 H$  ..... 97

(Fig. IV. 20) : Profils de vitesse U, $L = 0.6 H$ .....	99
(Fig. IV. 21) : Profils de vitesse V, $L = 0.6 H$ .....	101
(Fig. IV. 22): Isothermes, $L = 0.8 H$ .....	103
(Fig. IV. 23) : Lignes de courant, $L = 0.8 H$ .....	104
(Fig. IV. 24) : Profils de température, $L = 0.8 H$ .....	106
(Fig. IV. 25) : Profils de vitesse U, $L = 0.8 H$ .....	108
(Fig. IV. 26) : Profils de vitesse V, $L = 0.8 H$ .....	110
(Fig. IV. 27): Variations du nombre de Nusselt moyen en fonction..... du nombre de Rayleigh .....	113
(Fig. IV. 28) : Variations du nombre de Nusselt moyen en fonction de la longueur..... de la partie chauffée .....	115
<b>Liste des tableaux</b>	
(Tableau. 1) : Validation du nombre de Nusselt Moyen (MVF) .....	55
(Tableau.2) : Maillages optimaux pour la TLBM.....	56
(Tableau.3) : Présentation des résultats de $Nu_{moy} (L=H)$ .....	69
(Tableau.4) : Comparaison des vitesses maximales et leurs positions .....	70
(Tableau.5) : Valeurs de $Nu_{moy}$ (chauffage partiel).....	112

---

# **Introduction générale**

## **1 Simulation numérique :**

Les chercheurs, les ingénieurs et bien d'autres professionnels sont toujours incités à : étudier des phénomènes réels, améliorer des systèmes, ou résoudre avec précision les problématiques de conception les plus complexes. Cette communauté peut se servir donc de l'expérience pour prédire les résultats ; cependant ce moyen peut être dans de nombreux cas irréalisable et coûteux. Pour contourner cette difficulté, on a depuis longtemps fait appel à des simulations (moyens et outils utilisés dans le but de prédire les résultats) qui sont plus ou moins proches de l'expérience et plus ou moins faciles à mettre en œuvre.

Depuis quelques années un nouvel outil de simulation a fait son apparition : l'ordinateur et la simulation numérique. Le principe de base en est la représentation du phénomène réel à étudier par une équation, l'ordinateur permet toutefois de s'affranchir de la limitation principale qui est la représentation des phénomènes les plus simples (solutions analytiques). Grâce à une puissance de calcul toujours croissante, et à l'augmentation du volume de stockage des données, il est devenu possible de simuler les phénomènes complexes. Par exemple, en cas des tests aérodynamiques d'une voiture de course, la simulation numérique aide beaucoup les ingénieurs à évaluer rapidement de nombreuses itérations de conception et à apporter les changements nécessaires qui s'imposent avant les tests physiques. Contrairement à l'expérimentation, la simulation est moins coûteuse et comporte beaucoup moins de risques lorsque l'homme fait partie du système étudié. Au fil des années, les scientifiques se consacrent au développement des méthodes de calcul afin de s'affranchir des limitations constatées au cours d'utilisation des méthodes existantes.

## **2 Outils de la simulation numérique :**

La simulation numérique est basée sur des méthodes numériques assistées par ordinateur ; les méthodes de calcul s'avèrent être des techniques puissantes pour étudier et explorer les phénomènes physiques et chimiques et de résoudre les problèmes réels

d'ingénierie. La méthode des éléments finis (MEF) a été appliquée pour résoudre un problème structurel en 1956. À la fin des années soixante, la (MEF) est devenue une puissante technique de résolution des équations différentielles aux dérivées partielles, les problèmes de transfert de chaleur et les problèmes de la dynamique des fluides. Entre temps, la méthode des différences finies (MDF) a également été utilisée pour résoudre les problèmes de la dynamique des fluides. En 1980, la méthode des volumes finis (MVF) a été développée principalement pour résoudre aussi bien les problèmes de la dynamique des fluides que les problèmes qui présentent un couplage fort entre les champs de température et de vitesse. Depuis lors, la (MVF) était largement utilisée pour résoudre les problèmes liés aux phénomènes de transport thermo-fluide.

La résolution des équations différentielles aux dérivées partielles (NS) et l'équation d'énergie permet de décrire les écoulements rencontrés dans les domaines de la dynamique des fluides et la thermique. Mais en raison de leur complexité, ces équations gouvernantes ont besoin d'être résolues numériquement. Les méthodes conventionnelles s'utilisent pour résoudre les équations conservatives (NS) de : la masse, la quantité de mouvement et l'énergie sur des nœuds discrets, des éléments ou des volumes. Autrement dit, les équations différentielles aux dérivées partielles quasi-non linéaires sont converties en un système d'équations algébriques itérativement résoluble.

En 1988, la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM), a été introduite pour contourner les inconvénients de l'automate cellulaire « gaz sur réseau [2] ». Depuis lors, la méthode (LBM) s'avère comme une méthode puissante dans la résolution des problèmes de la dynamique des fluides et de la thermique.

En LBM, le fluide est remplacé par des particules fictives. Ces particules se déplacent dans une direction donnée (en suivant les liens existants entre les sites du réseau) et entrent en collision au niveau de ces sites. Ces deux processus de base sont appelés donc, propagation et collision. Dans ce qui va suivre, l'essentiel de la méthode conventionnelle des volumes finis et celui de Boltzmann sur réseau sont présentés.

### **3. But de travail :**

La méthode de Boltzmann sur réseau est une méthode numérique relativement récente et originale. Il est important de connaître ses performances et l'étendue de son application dans le domaine de la modélisation et la simulation des écoulements thermo-fluides, en la comparant avec l'une des méthodes numériques classiques utilisées (MVF).

De ce fait, l'étude présentée dans ce travail a pour but l'analyse du phénomène de transfert de chaleur dans un écoulement de convection naturelle en régime laminaire, dans une cavité carrée fermée, avec une paroi partiellement chauffée. On considère où les parois latérales isothermes et celles horizontales adiabatiques

Le modèle thermique de la méthode de Boltzmann sur réseau à double population en deux dimensions est appliqué. Le réseau à neuf vitesses (D2Q9) est utilisé pour reproduire le champ dynamique et celui simplifié à cinq vitesses (D2Q5) est utilisé pour le champ de température.

Un code de calcul sera développé et testé durant cette étude sous l'éditeur MATLAB. Les résultats obtenus seront confrontés et validés avec ceux de la littérature pour le cas classique d'une cavité carrée différentiellement chauffée.

Le travail se poursuivra par une analyse thermique et dynamique des résultats obtenus par les deux méthodes : celle de Boltzmann sur réseau thermique (TLBM) et celle des volumes finis MVF avec le logiciel Fluent. L'influence des paramètres comme le nombre de Rayleigh et la portion de chauffage  $L/H$ , sur la structure de l'écoulement est étudiée. Ce travail permettra de tester la capacité et les performances du LBM de reproduire ce type d'écoulement.

### **4. Organisation du mémoire :**

Le premier chapitre expose brièvement les modes fondamentaux du transfert de chaleur. On se concentre beaucoup plus sur la convection naturelle, son domaine d'application et les paramètres qui y sont associés. Une revue bibliographique, portant sur l'étude de quelques configurations concernant la modélisation de la convection

naturelle dans des enceintes bidimensionnelles avec quelques cas de chauffage partiel, y est également présentée.

Le deuxième chapitre est dédié à la présentation des différentes approches utilisées dans la simulation numérique. Cela vise en particulier à cerner l'essentiel de la méthode des volumes finis et celui de la méthode de Boltzmann sur réseau en raison de leur utilisation dans le présent travail. Vu que l'étude est essentiellement basée sur la méthode de Boltzmann sur réseau, ce chapitre en fait apparaître les connaissances nécessaires à savoir : l'équation de Boltzmann sur réseau (LBE), modèles de réseaux (LBM), implémentation des conditions aux limites en (LBM).

Dans le troisième chapitre, on présente le modèle du problème physique faisant objet de l'étude, sa configuration géométrique et les conditions aux limites imposées. La formulation mathématique du problème ainsi que les hypothèses simplificatrices considérées sont également présentées.

Pour résoudre le problème, deux procédures de simulation ont été présentées : la première en est l'utilisation du code Fluent basé sur la méthode des volumes finis et la deuxième en est basée sur l'utilisation de la méthode de Boltzmann sur réseau à double population. Le but de la présente étude vise à valider la deuxième méthode (TLBM).

Les résultats de la simulation par les deux méthodes et leur discussion sont présentés dans le quatrième chapitre. L'étude a été entamée par une validation de la procédure de simulation pour les deux codes de calcul et s'étendait sur la simulation du problème de la cavité carrée partiellement chauffée. La confrontation des résultats obtenus par les deux méthodes (TLBM et MVF) est mise en évidence sous formes : d'isothermes, de lignes de courant, de variation du nombre de Nusselt moyen et de valeurs maximales des composantes de vitesse à la mi-hauteur de l'enceinte. Une analyse de la structure de l'écoulement est également présentée.

---

# **Chapitre I.**

## **Etude bibliographique**

## **I.1 Modes de transfert de chaleur :**

Les transferts thermiques sont d'une importance capitale dans la vie quotidienne et dans la « vie » de la planète. Il est nécessaire donc de décrire les modes de transfert de chaleur ; cette description est essentiellement basée sur une approche phénoménologique en utilisant les énoncés suivants :

- Un système non isotherme sera toujours le siège de transferts de chaleur internes.
- La chaleur passe spontanément du corps le plus chaud vers le corps le plus froid.

Les modes fondamentaux qui permettent le transfert de chaleur d'un endroit à une température donnée, à un autre endroit à une température différente, sont les suivants [1] :

### **I.1.1 La conduction :**

La conduction représente le processus de diffusion de la chaleur par le contact direct entre les particules du corps dont les différentes parties ne sont pas isothermes. Autrement dit, la chaleur se propage au sein d'un même corps ou passe d'un corps à un autre sous l'influence d'un gradient de température bien qu'il n'y ait pas de transfert de matière. Dans les gaz en l'absence de la convection, la conduction s'effectue par la diffusion moléculaire : l'énergie se propage par contact direct entre molécules au gré des chocs aléatoires à l'échelle microscopique. Dans un solide ou un fluide stationnaire, la vibration des atomes autour de leur position d'équilibre, se transmet de proche en proche permettant donc un transfert de chaleur.

### **I.1.2 La Convection :**

La convection se réfère aux transferts thermiques qui ont lieu dans les fluides en mouvement macroscopique. Le transfert est déterminé par le mouvement des particules élémentaires du fluide, entre les zones ayant des températures différentes. Ce mouvement entraîne un mélange intense de particules qui échangent de l'énergie sous forme de chaleur et de quantité de mouvement entre elles.

On en distingue trois types :

### **I.1.2.1 Convection naturelle :**

Contrairement à la convection forcée, le mouvement de fluide en convection naturelle n'est pas dû à un apport d'énergie mécanique extérieure, mais qu'il trouve sa source au sein même du fluide, sous l'effet conjugué de gradients de masse volumique et d'un champ de pesanteur. Les variations de masse volumique sont généralement dues à des gradients de températures ou à des gradients de concentration.

### **I. 1.2.2 Convection forcée :**

Pour laquelle le mouvement de fluide est dû à un apport externe d'énergie mécanique, sous l'action des forces extérieures créées par exemple par une pompe ou un ventilateur. Les gradients de densité se produisent aussi en convection forcée mais leurs effets sont à peu près nuls. Dans ce cas, le mouvement du fluide accélère le transfert de chaleur ; il est trouvé que pour une même surface d'échange et pour un même écart de température, la valeur de l'échange thermique est notablement améliorée dans le cas de la convection forcée que dans celui de la convection naturelle.

### **I. 1.2.3 Convection mixte :**

Le cas général de la convection présente un grand nombre de situations intermédiaires où les mécanismes de la convection naturelle et de la convection forcée coexistent avec des ordres de grandeur comparables ; les deux mécanismes vont s'aider ou se contrarier selon le sens relatif du mouvement forcé par rapport au mouvement dû aux effets de la pesanteur ; trois cas peuvent se présenter :

- Si l'écoulement forcé s'oppose aux forces de pesanteur, l'écoulement sera freiné, le transfert thermique diminue et on parle de la convection mixte « contrariée ».
- Si l'écoulement forcé est de même sens que les forces de pesanteur, les transferts thermiques s'amplifient alors et on parle de la convection mixte « aidée ».
- Si l'écoulement forcé est perpendiculaire à la direction des forces de pesanteur, il y aura une amélioration des échanges thermiques.

### **I.1.3 Le rayonnement :**

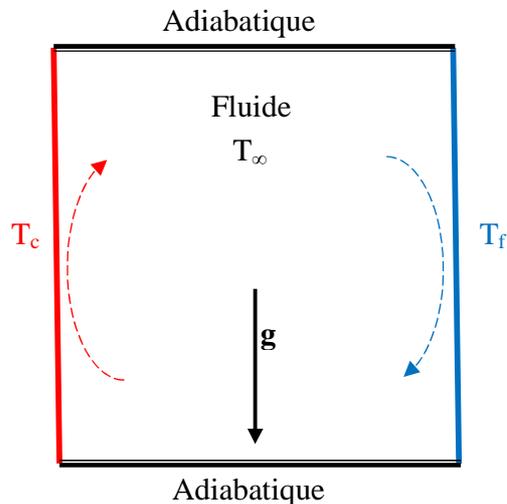
Par définition, le transfert d'énergie se fait par rayonnement électromagnétique. Quelle que soit sa température (à partir de 0°K), un corps émet un rayonnement thermique qui est plus ou moins intense selon la température de ce corps. Ce transfert de chaleur est le seul à se réaliser dans le vide tel est le cas du rayonnement solaire arrivant sur terre. Néanmoins, celui-ci se réalise aussi dans les fluides (l'air par exemple) et dans certains solides (comme le verre) ; dans ce mode de transfert, l'échange de chaleur peut avoir lieu entre deux surfaces ou une surface et le fluide qui l'entoure par le moyen de longues ondes électromagnétiques.

## **I.2. - Aspects physiques de la convection naturelle :**

### **I.2.1 Définition de la convection naturelle :**

Lorsque deux corps (surface solide/fluide) de températures différentes, sont mis en contact prolongé dans un champ de pesanteur (**Fig.I.1**); le gradient de température imposé entraîne une différence de densité au sein du fluide ce qui donne naissance à une force de flottabilité (poussée d'Archimède) qui à son tour ne fait que déclencher des mouvements de particules. Ceux-ci, dits mouvements de convection, s'accompagnent par un transport d'énergie (chaleur et quantité de mouvement) au sein du fluide dont les particules (molécules) agitées se déplacent, aléatoirement, entre des points du domaine considéré. Si aucun dispositif externe tel qu'une pompe ou un ventilateur n'intervient dans son déclenchement, ce phénomène physique se fait "naturellement" d'où vient le nom « convection naturelle » : seul l'effet de l'interaction entre le gradient de la densité et la gravité en est la cause [3]. Le transfert de chaleur est plus actif lorsque les paramètres suivants à savoir: vitesse d'écoulement du fluide, sa masse volumique, sa conductivité thermique (ou sa diffusivité thermique), sa chaleur spécifique sont plus grandes. Cependant, il est d'autant plus actif que la viscosité cinématique est plus faible. Cela peut également dépendre des dimensions de la surface d'échange, de sa nature, de sa forme

géométrique et de son orientation. Or la nature de l'écoulement du fluide (laminaire ou turbulent) a beaucoup d'influence sur le transfert de chaleur.



**Fig.I.1.** Écoulement de la convection naturelle dans une cavité carrée

En ce qui concerne la mécanique des écoulements de la convection naturelle, on remarque que, puisque les gradients de masse volumique sont à l'origine du mouvement sont eux-mêmes dus à des gradients de température, il y a là un couplage structurel entre bilan de quantité de mouvement et bilan d'énergie, c'est-à-dire entre champ de vitesse et champ de température. En outre, l'écoulement de la convection naturelle peut passer d'un régime laminaire à la turbulence après une phase de transition (laminaire/turbulent). En général, on en peut distinguer :

- Les écoulements externes (sont le plus souvent de régime turbulent).
- Les écoulements internes : ceux sont les écoulements (généralement de régime laminaire ou transitoire) qui se produisent dans des régions fermées tel est le cas des enceintes dont on trouve plusieurs configurations dans la littérature ; le domaine physique d'écoulement peut être partiellement fermé (avec des ouvertures à travers lesquelles l'échange du fluide avec le milieu ambiant pourrait avoir lieu)

ou complètement fermé par des frontières solides. Par ailleurs, ces frontières solides peuvent être : isothermes ou adiabatiques et peuvent également subir un flux de chaleur.

Dans ce travail on s'intéresse beaucoup plus aux écoulements internes de la convection naturelle laminaire.

### **I.2.2 Domaine d'application de la convection naturelle:**

La communauté scientifique avait un intérêt croissant aux écoulements causés par la force de flottabilité résultant des différences de densité dues aux différences de température et qui prennent lieu dans des enceintes partiellement ou complètement fermées ; par conséquent, des recherches incessantes sont menées dans ce sens. La grande partie de cet intérêt surgit en raison de la demande insistante du refroidissement des circuits électriques et électroniques dont l'industrialisation prend de plus en plus de l'ampleur. Le phénomène de la convection naturelle peut être également généré en régions fermées à savoir [3]: l'extraction de l'énergie géothermique, le traitement des matériaux, fours et chaudières, tours de refroidissement, bassins solaires, les processus environnementaux, les réacteurs nucléaires et chimiques, l'isolation des canalisations, la thermique du bâtiment et le confort humain, la thermique de l'atmosphère et des océans.

### **I.2.3 Formulation mathématique :**

L'écoulement du fluide est gouverné par les équations de Navier-Stokes NS pour (la continuité et la quantité de mouvement) tandis que le transfert de chaleur accompagnant cet écoulement est contrôlé par l'équation d'énergie. Ces équations ont les formes conservatives suivantes:

- Équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.1)$$

- Équation du bilan de quantité de mouvement :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \rho \nu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{f} \quad (1.2)$$

$\vec{f}$  est le vecteur terme source.

$\vec{u}$  est le vecteur vitesse

- Équation du bilan énergétique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T = \alpha \cdot \nabla^2 T \quad (1.3)$$

#### I.2.4 Approximation de Boussinesq :

Comme l'écoulement de la convection naturelle présente un fort couplage entre le champ de la température et celui de la vitesse, les équations (équations NS et celle de l'énergie) régissant l'écoulement sont d'une complexité considérable [3]. Pour obtenir une solution à ces équations, on se trouve face à un autre problème lié à l'inévitable variation de la densité avec la température (et/ ou la concentration). Plusieurs approximations sont généralement utilisées pour simplifier ces équations ; parmi celles-ci, on trouve la plus importante approximation de Boussinesq.

L'approximation de Boussinesq utilise deux aspects :

- La variation de la densité dans l'équation de la continuité est négligée, donc :

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.4)$$

- La différence de densité qui implique l'écoulement est approximée comme une pure température ou concentration (l'effet de la pression sur la densité est négligé et par conséquent, celle-ci ne dépend que de la température ou de la concentration ou des deux à la fois selon le cas qui se présente).

En cas de présence de la poussée thermique uniquement, la différence de densité est estimée par la formule suivante :

$$\rho_0 - \rho = \rho_0 \beta (T - T_f) \quad (1.5)$$

$$\text{d'où : } \rho = \rho_0 [1 - \beta (T - T_f)] \quad \text{avec} \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (1.6)$$

Cette approximation est très utilisée dans les problèmes de la convection naturelle et sa validité repose sur l'importante condition :

$$\beta (T - T_f) \ll 1 \quad (1.7)$$

D'après cette formule, il est tout à fait clair que l'approximation de Boussinesq n'est donc valide que pour un écart de température suffisamment petit et dans la mesure où  $\beta$  est essentiellement constant.

## I.2.5 Les paramètres caractéristiques de la convection naturelle :

L'utilisation de la méthode de l'analyse dimensionnelle dans la résolution des équations aux dimensions, propres à la convection a fait apparaître des nombres adimensionnels très utiles dans l'étude de la mécanique des fluides et en particulier dans les phénomènes convectifs. Ces nombres adimensionnels sont en particulier :

### I.2.5.1 Nombre de Rayleigh (Ra) :

Le nombre de Rayleigh est un nombre adimensionnel utilisé en mécanique des fluides et caractérise le transfert de chaleur au sein d'un fluide ; il est donc le paramètre majeur du contrôle de la convection naturelle. L'écoulement de la convection naturelle peut être de régime laminaire, transitoire ou turbulent. Le passage d'un régime à un autre est caractérisé par le nombre de Rayleigh qui est défini comme suit :

$$Ra = Gr.Pr \quad (1.8)$$

L'expérience montre que pour  $Ra$  inférieur à une valeur critique  $Ra_c$ , le transfert d'énergie thermique s'opère essentiellement par conduction ; la convection naturelle ne s'initialise que si le nombre de Rayleigh dépasse cette valeur critique.

**I.2.5.2 Le nombre de Grashof ( $Gr$ ):**

Ce nombre adimensionnel caractérise la force de viscosité du fluide ; il est exprimé par la relation :

$$Gr = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\nu^2} \quad (1.9)$$

**I.2.5.3 Le nombre de Prandtl ( $Pr$ ) :**

Ce nombre adimensionnel caractérise la distribution des vitesses par rapport à la distribution de la température ; il est défini par :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (1.10)$$

D'où :

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\nu\alpha} \quad (1.11)$$

**I.2.5.4 Le nombre de Nusselt ( $Nu$ ):**

Le nombre de Nusselt ( $Nu$ ) est un nombre adimensionnel utilisé dans les opérations de transfert thermique. Il caractérise l'importance de la convection par rapport à la conduction : C'est le rapport de la quantité de chaleur échangée par convection à la quantité de chaleur échangée par conduction. Si la conduction est le principal mode de transfert, alors le nombre de Nusselt sera de l'ordre de l'unité. En cas de présence de convection (due par exemple à une différence de température), le transfert thermique s'effectuera principalement par déplacement du fluide ce qui fait que le nombre de Nusselt aura une valeur supérieure à 1.

- Le nombre de Nusselt local ( $Nu_L$ ) est égal au gradient de température adimensionné à la paroi :

$$Nu_L = \frac{\partial\theta}{\partial Y}\Big|_{Paroi} \quad (1.12)$$

- Une intégration du nombre de Nusselt local le long de la partie chauffée permet d'obtenir le nombre de Nusselt moyen ( $Nu_{moy}$ ) comme suit :

$$Nu_{moy} = \int_{\frac{H-L}{2}}^{\frac{H+L}{2}} Nu_L dy \quad (1.13)$$

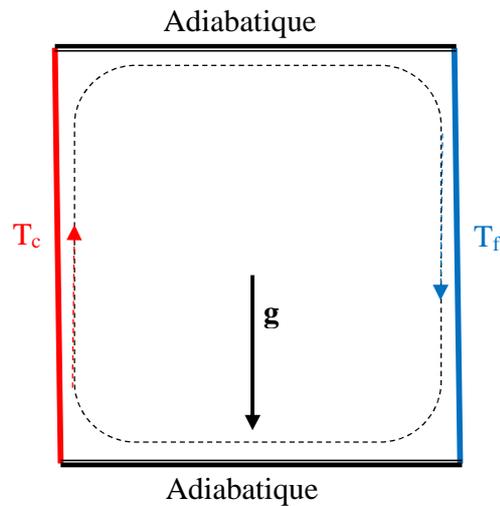
### I.3 Convection naturelle dans une enceinte :

#### I.3.1 Notion de la circulation naturelle :

Dans une enceinte fermée où la masse de fluide emprisonné est constante, tout mouvement local se répercutera de façon plus ou moins marquée sur l'ensemble du domaine fluide. En convection naturelle, un tel mouvement sera généré par des gradients de température, et il pourra donner naissance à une circulation du fluide contenu dans l'enceinte.

À titre d'exemple, le cas classique de la cavité carrée différentiellement chauffée (**Fig. I.1**) illustre bien la nature du phénomène. La température de la paroi droite est inférieure à la température ambiante à l'intérieur de la cavité. Un écoulement de fluide va donc s'établir vers le bas. La paroi opposée est plus chaude que l'ambiance, et c'est un écoulement ascendant qui va se mettre en place.

L'expérience montre que, si aucun échange de chaleur ne vient perturber les choses au niveau des parois horizontales (et si la largeur de la cavité n'est pas trop grande par rapport à sa hauteur), une circulation naturelle en cellule (rouleau) va s'installer, schématisée par des pointillés sur la **Fig.I.2** : le fluide chaud mis en mouvement par la paroi chaude vient remplacer celui qui descend le long de la paroi froide et ainsi de suite. Autrement dit, un écoulement interne se met en place par le simple moyen des écarts de température, sans dispositif auxiliaire. Ce mécanisme transporte la chaleur de la source chaude à la source froide, en assurant sa conservation ; quant à l'énergie mécanique nécessaire au mouvement (qui est dissipée par viscosité comme dans n'importe quel écoulement), elle est fournie gratuitement par le champ de la pesanteur terrestre.



**Fig.I.2.** Circulation du fluide en convection naturelle dans une cavité.

### I.3.2 Enceinte rectangulaire différentiellement chauffée :

Le problème général de la convection dans les enceintes est assez complexe. D'une part, les formes des cavités sont très variées ; par conséquent la structure de l'écoulement dépend de la géométrie du système : dessin des angles, dimensions, et en particulier le rapport hauteur-largeur (ou rapport de forme). Ce dernier paramètre est particulièrement sensible dans une cavité étroite (car les couches limites qui se développent sur les grandes parois peuvent interférer l'une avec l'autre). En outre, l'inclinaison des parois est un paramètre majeur, surtout pour les cavités de grand allongement [3]. En ce qui concerne les conditions aux limites, assez souvent, on considère que deux parois planes parallèles en regard sont soumises à des températures distinctes (et/ou à un flux imposé), uniformes ou non (parois dites actives) tandis que les autres sont adiabatiques.

### I.4 Revue bibliographique :

Les mécanismes de base de la convection naturelle interne et le transport thermo-fluide qui l'accompagne ont été l'objet d'un vif intérêt des scientifiques pour toujours du moment que ce sujet a été évoqué par de nombreux chercheurs à plusieurs reprises (même

si les configurations physiques et les conditions dans lesquelles s'évolue le phénomène sont différentes).

L'écoulement bidimensionnel de la convection naturelle dans une enceinte rectangulaire, avec deux murs verticaux de températures constantes, relativement différentes alors que les frontières horizontales sont, soit isolées thermiquement ou maintenues à des températures qui varient linéairement entre celles des frontières verticales, a été expérimentalement et numériquement étudié au cours des trois décennies passées [3].

D'autres configurations d'écoulements de la convection naturelle interne ont été soigneusement étudiées vu l'importance de leurs applications dans le domaine industriel telles que [3]:

- Les enceintes rectangulaires fermées inclinées ou horizontales en raison de leur intérêt dans l'exploitation de l'énergie solaire ;
- La convection de Rayleigh-Bénard : il s'agit d'un écoulement de convection naturelle entre deux frontières horizontales l'inférieure étant chauffée par le bas tandis que la supérieure est maintenue froide ; ce problème classique présente un état d'instabilité qui n'a fait que captiver plusieurs chercheurs à se lancer dans son étude pour plusieurs décennies.

Les travaux des auteurs exposés dans la revue bibliographique qui va suivre porte sur la simulation de la convection naturelle dans des enceintes de forme bidimensionnelle régulière. Les parois non mentionnées sur cette revue sont considérées comme adiabatiques.

L'intérêt croissant porté au phénomène de la convection naturelle remonte au début du dernier siècle, où Henri Bénard [4] a observé lors d'une expérience simple l'apparition spontanée des cellules de convection au sein d'un liquide exposé à une source de chaleur externe. Ces cellules de Bénard « appelées parfois rouleaux de convection » qui sont stables et leur sens de rotation est inverse pour deux cellules contiguës dans le sens

horizontal, ont été étudiées par Rayleigh [5] ; l'étude de Rayleigh consistait en une approche mathématique.

Novembre et Nansteel [6] ont présenté une étude analytique et numérique de la convection naturelle dans une enceinte carrée chauffée par le bas et refroidie par l'un de ses côtés.

Ganzarolli et Milanez [7] ont étudié numériquement la convection naturelle dans une enceinte de forme rectangulaire, chauffée par le bas et refroidie par ses côtés verticaux. Cette étude a porté sur l'effet de la variation du nombre de Rayleigh (allant de  $10^3$  à  $10^7$ ), le nombre de Prandtl ainsi que l'effet de la variation du rapport de forme de l'enceinte (variant de 1 à 9) sur le mouvement du fluide et le transfert de chaleur.

Vahl Davis [8] a étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée dont les parois verticales sont différentiellement chauffées.

Lakhal et Hasnaoui [9] ont présenté une étude numérique de la convection naturelle transitoire dans une cavité carrée dont la paroi inférieure est soumise à une source de chaleur périodique. Ce type de chauffage paraît bénéfique dans la mesure où l'amplitude de la température est de plus en plus élevée.

Hasnaoui et al. [10] ont étudié numériquement la convection naturelle laminaire dans une enceinte partiellement chauffée par le bas et refroidie par le haut. L'étude s'étendait sur l'effet de la variation du rapport de forme de l'enceinte et de la position de chauffage sur la convection naturelle.

Bourich et al. [11] ont présenté une étude numérique de la convection naturelle dans une enceinte carrée délimitant un milieu poreux et chauffée partiellement par le bas alors que les murs verticaux sont maintenus à une température basse constante.

Ho et Chang [12] ont étudié numériquement et expérimentalement l'effet du rapport de forme sur le transfert thermique par convection dans une enceinte rectangulaire verticale avec un chauffage discret. Frederick [13] a étudié numériquement la convection naturelle dans les cavités rectangulaires. Tong [14] a étudié l'effet du rapport de forme sur la convection naturelle dans l'eau.

Une étude de la convection naturelle dans une enceinte rectangulaire a été présentée par P. Alam et al. [15] L'écoulement est dû à un chauffage partiel constant de la moitié inférieure du mur gauche et un refroidissement partiel de la moitié supérieure du mur droit. Les expériences numériques montrent que la croissance du nombre de Rayleigh implique une amélioration de la force de flottabilité thermique qui, à son tour, contribue à l'augmentation de la convection thermique dans l'enceinte.

N. Nithyadevi, Ruey-jen Yang [16] ont numériquement examiné la convection naturelle de l'eau induite par double diffusion et effets de Soret et Duffour dans une enceinte partiellement chauffée. Le mur gauche est partiellement chauffé, le mur droit ayant une température légèrement inférieure alors que le reste de l'enceinte est thermiquement isolé. Deux cas ont été étudiés: dans le premier cas, la concentration dans le mur droit est maintenue supérieure à celle du mur gauche contrairement au deuxième cas. Les simulations, basées sur la méthode MVF, ont été réalisées pour des déplacements de la partie chauffée du haut vers le bas sur le mur gauche et pour un nombre de Rayleigh compris entre  $10^3$  et  $10^6$ . Cette étude avait pour conclusions : le transfert de chaleur augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh quel que soit l'emplacement de la partie chauffée sur le mur gauche ; pour un coefficient de Duffour élevé, le fluide se déplace plus vite et le transfert de chaleur est plus important dans le premier cas. Dans le deuxième cas le constat est tout à fait opposé au premier.

M. Bhuvaneswari, S.Sivasankaran et Y.J. Kim [17], ont étudié numériquement l'écoulement convectif et le transfert de chaleur dans une enceinte rectangulaire et poreuse avec un chauffage partiel des murs verticaux. Cette étude s'articule autour les effets du rapport de forme ainsi que l'emplacement des parties chauffées différemment. Le model de Darcy est utilisé et les équations gouvernantes ont été résolues par la MVF. Les résultats en ont montré que l'emplacement des parties chauffées a une influence significative sur la convection et que le transfert de chaleur dans l'enceinte se réduit d'autant plus que son rapport de forme augmente.

M. Paroncini, F. Corvaro, A. Montucchiari et G. Nardini [18], ont expérimentalement et numériquement analysé la convection naturelle dans une cavité carrée, remplie d'air et partiellement chauffée. Au cours de l'étude expérimentale, ils ont utilisé l'interférométrie holographique (technique d'enregistrement) pour mesurer les distributions de température dans l'air ainsi que d'autres coefficients du transfert de chaleur. Pour fin de comparaison, leur travail a été consolidé par une étude numérique basée sur la MVF. L'objectif principal en était d'examiner l'influence de la taille et du nombre des sources de chaleur sur la convection naturelle dans la cavité carrée. Cette étude révèle que la taille et le nombre de bandes chauffées influent sur le champ de vitesse et font augmenter le transfert de chaleur.

H. Bararnia, Souheil Souleimani et D.D. Ganji [19], ont effectué des simulations de la convection naturelle dans une cavité carrée renfermant un cylindre de forme elliptique, horizontale et chauffé. Les murs verticaux de la cavité sont maintenus à une température légèrement basse par rapport à celle du cylindre alors que les murs horizontaux sont adiabatiques. L'étude, basée sur la méthode de Boltzmann sur réseau, montre que le changement de la position du cylindre à l'intérieur de la cavité et l'augmentation du nombre de Rayleigh (allant de  $10^3$  à  $10^6$ ) ont des effets remarquables sur les divers contours et la formation des vortex à l'intérieur de la cavité ainsi que l'augmentation du nombre de Nusselt moyen.

Anil Kumar Sharma, K.Velusamy et C.Balaji [20], ont étudié numériquement la convection naturelle turbulente dans une enceinte partiellement chauffée par le bas tandis que ses murs verticaux sont maintenus à une température légèrement basse et le reste est considéré comme adiabatique. L'étude s'est concentrée sur l'effet de l'augmentation du nombre de Rayleigh et la longueur de la partie chauffée en cas d'application de deux types de conditions aux limites à celle-ci : en cas où elle est isotherme et en cas de l'application d'un flux de chaleur constant. Il est trouvé que l'augmentation du nombre de Nusselt moyen dépend de l'augmentation de la longueur de la partie chauffée quand celle-

ci a une température imposée alors que ce n'est pas le cas pour l'application d'un flux de chaleur constant.

En utilisant la MVF, Tzong Huei-chen et Li-Yeuh Chen [21], ont étudié la convection naturelle dans une enceinte avec des sources de chaleur discrètes sur le bas et le mur gauche, le mur droit est refroidi tandis que le reste est considéré comme adiabatique. Les simulations ont été effectuées pour un nombre de Rayleigh variant de  $10^2$  à  $10^7$  avec une augmentation de la température des sources de chaleur et leurs longueurs tantôt à gauche tantôt au bas. L'analyse des résultats a permis de constater que l'emplacement des sources de chaleur sur le mur inférieur et l'augmentation de leurs longueurs ainsi que leurs températures peuvent améliorer le taux du transfert de chaleur.

M. Paroncini et F. Corvaro [22] ont analysé expérimentalement le transfert de chaleur convectif généré par une source avec trois hauteurs différentes. La bande (source) est placée au milieu de l'enceinte carrée. L'étude a montré comment influe la hauteur de la source sur la distribution de vitesse et par conséquent l'efficacité du transfert de chaleur : On a constaté que le transfert de chaleur par convection naturelle s'accroît par l'augmentation de la hauteur de la source. Enfin, ils ont comparé les résultats obtenus par les expériences avec ceux obtenus par une étude numérique basée sur la MVF. Leur but en est la validation de la procédure numérique.

B. Calcagni, F. Marsili et M. Paroncini [23] ont expérimentalement et numériquement étudié le transfert de chaleur par convection naturelle laminaire dans une cavité carrée caractérisée par une source de chaleur placée sur son mur inférieur, des murs latéraux refroidis et le reste est considéré comme adiabatique. Leur étude a permis d'analyser comment le transfert de chaleur se développe dans la cavité quand la longueur de la source de chaleur augmente. Pour les résultats expérimentaux, ils ont utilisé la technique d'interférométrie holographique alors qu'ils ont utilisé le code Fluent 6.0 pour obtenir les résultats numériques. D'après l'étude, la simulation tout comme l'expérience, a montré que le transfert de chaleur dépend du nombre de Rayleigh et de la longueur de la source de chaleur : le transfert de chaleur est prédominé par la conduction pour  $Ra \leq 10^4$  alors

que la convection se développe complètement à partir de  $Ra = 10^5$  ; l'augmentation des dimensions de la source de chaleur implique une augmentation du taux du transfert de chaleur, en particulier, en cas de grands nombres de  $Ra$ .

Une étude numérique basée sur la MVF et portant sur la convection naturelle dans une cavité carrée partiellement chauffée a été publiée par Ridha Jmai, Brahim Ben-Beya et Taieb Lili [24]. Deux sources de chaleur maintenues à un flux de chaleur constant ont été intégrées aux murs verticaux, les murs horizontaux sont refroidis tandis que le reste est isolé thermiquement ; en outre plusieurs configurations ont été étudiées. L'influence des paramètres comme : le nombre de  $Ra$ , le type de nanoparticules et leur fraction volumique, la position des sources de chaleur sur le transfert de chaleur a été mise en évidence.

---

# **Chapitre II.**

## **Outils de simulation**

## II. Outils de simulation:

En dynamique des fluides numérique, toute simulation vise à résoudre les équations de Navier-Stokes décrivant le transport thermo-fluide (chaleur, masse et quantité de mouvement) ce qui présente quelques difficultés. Pour accomplir cette tâche, la simulation tire profit de l'une des approches suivantes :

### II.1 Approche classique :

À l'échelle macroscopique, les écoulements des fluides et les phénomènes qui y sont liés, peuvent être décrits par les équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires, elliptiques et couplées [3]. En raison de leur complexité, celles-ci ne peuvent pas être résolues analytiquement sauf que dans des cas spéciaux ce qui nous oblige d'adopter des méthodes numériques appropriées. En effet, pour obtenir une solution approximée numériquement, on fait recours à une *méthode de discrétisation* qui approxime les équations différentielles par un système d'équations algébriques. Ce système d'équations peut être résolu itérativement par un ordinateur. Les approximations sont appliquées à de petits sous-domaines d'espace et de temps de sorte que la résolution numérique offre des résultats dans des emplacements discrets. Parmi les méthodes de discrétisation, on trouve les méthodes conventionnelles dont les principes fondamentaux sont brièvement rappelés ici [25]:

#### II.1.1 La Méthode des différences finies (MDF) :

C'est la plus ancienne méthode de résolution des équations aux dérivées partielles, elle a été introduite en 18<sup>ème</sup> siècle par Euler [25]. Cette méthode utilise comme point de départ, l'équation de conservation dans sa forme différentielle. En premier lieu, on procède à la création de la géométrie ainsi que le maillage du domaine de solution donné. La variable inconnue  $\phi$  est décrite par plusieurs valeurs dans les points d'un maillage. Le développement de l'inconnue en séries de Taylor tronquées est utilisé pour approximer les dérivées de l'inconnue, dans chaque point du maillage, par différences finies en utilisant les inconnues voisines. En remplaçant les dérivées dans les équations

différentielles par différences finies on obtient un système d'équations algébriques pour les valeurs de l'inconnue dans chaque point du maillage. En cas des maillages structurés, cette méthode est d'une simplicité et efficacité remarquables ; cependant il est très difficile de l'utiliser en cas des géométries complexes.

### **II.1.2 La Méthode des éléments finis (MEF) :**

Cette méthode est similaire à celle des volumes finis ; le domaine de solution  $\Omega$  est subdivisé en volumes discrets ou en éléments finis qui sont généralement non-structurés. Pour un domaine bidimensionnel, ceux-ci sont souvent de forme triangulaire ou quadrilatérale ; en cas d'un domaine tridimensionnel, ils ont une forme de tétraèdre ou hexaèdre dans la plupart des temps. Dans cette méthode, on utilise des fonctions linéaires ou quadratiques, sur chaque élément, pour décrire la variation locale de l'inconnue  $\phi$ . Les équations différentielles sont exactement vérifiées par la solution exacte. En remplaçant l'approximation de  $\phi$  dans les équations différentielles, on constate que celles-ci ne sont pas vérifiées, et un résidu est défini dans ce cas pour mesurer l'erreur. Le résidu est minimisé, en le multipliant par une fonction de pondération, avant d'être intégré sur tout le domaine. Le résultat de l'intégration est un système d'équations algébriques pour les coefficients des fonctions d'approximation (ensemble d'équations algébriques non-linéaires). Toutefois, il est important de savoir qu'il existe d'autres méthodes telles que la méthode hybride: (MVF-MEF) appelée méthode des volumes de contrôle- basée sur - la méthode des éléments finis.

### **II.1.3 La Méthode des volumes finis (MVF) :**

La méthode (MVF) utilise la forme intégrale des équations de conservation comme point de départ. Le domaine de solution est subdivisé en un nombre fini de petits sous-domaines contigus appelés volumes de contrôle. Mathématiquement parlant, cette méthode consiste à intégrer les équations aux dérivées partielles sur des volumes dont chacun entoure un point du maillage de manière à obtenir un système d'équations algébriques solvable sur ordinateur. Par ailleurs, elle possède des qualités qui en font

l'une des méthodes les plus adaptées à l'étude des écoulements turbulents. En effet, celle-ci est très robuste et permet de traiter des équations comportant des termes sources complexes et non-linéaires. De plus, elle a l'avantage de satisfaire la conservation de la masse sur chaque volume de contrôle. Enfin, elle peut être utilisée avec des maillages relativement grossiers, ce qui permet la mise en œuvre de code pour un coût raisonnable [26]. Contrairement à la méthode des différences finies, cette méthode peut être appliquée à n'importe quel type de maillage, cependant son développement présente quelques difficultés en trois dimensions.

#### II.1.4 Mise en œuvre de la méthode des volumes finis (MVF):

Les méthodes numériques les plus utilisées pour résoudre les équations de la dynamique des fluides sont celles de discrétisation. Dans ces méthodes, les équations aux dérivées partielles sont remplacées par des expressions algébriques dont chacune correspond à une dimension discrète du domaine fluide. Parmi ces méthodes, on trouve la méthode des volumes finis (MVF) qui permet de prédire la masse, la quantité de mouvement et l'énergie dans tous les points discrets du domaine de calcul tout en convertissant les équations gouvernantes en un système d'équations algébriques facilement solvable par une méthode numérique itérative comme celle de Gauss-Seidel. L'ensemble des points discrets forme une grille appelée « Maillage ».

La méthode (MVF) utilise comme point de départ, en considérant un cas stationnaire, l'équation suivante de conservation d'une quantité scalaire  $\phi$  [27] :

$$\oint \rho \phi \vec{u} \cdot d\vec{A} = \oint \Gamma_{\phi} \nabla \phi \cdot d\vec{A} + \int_V S_{\phi} dV \quad (2.1)$$

Où :

- $\rho$  est la masse volumique.
- $\vec{u}$  : est le vecteur de vitesse.
- $d\vec{A}$  : est le vecteur surface.
- $\Gamma_{\phi}$  : est le coefficient de diffusion de  $\phi$ .
- $\nabla \phi$  est le gradient de  $\phi$ .

$S_\phi$  : est la source de  $\phi$  par unité de volume.

$V$  : est le volume élémentaire.

Dans un cas stationnaire et pour un écoulement incompressible et Newtonien avec les propriétés  $\mu$  et  $C_p$  constantes, l'équation (2.1) devient :

- L'équation de continuité : si  $\phi=1$ ,  $\Gamma_\phi=0$  et  $S_\phi=0$ .
- L'équation de quantité de mouvement suivant l'axe  $ox$ : si  $\phi = u$ ,  $\Gamma_\phi = \mu$  et  $S_\phi = \rho g \vec{i} - \text{grad } p \vec{i}$
- L'équation de quantité de mouvement suivant l'axe  $oy$  : si  $\phi = v$ ,  $\Gamma_\phi = \mu$  et  $S_\phi = \rho g \vec{j} - \text{grad } p \vec{j}$
- L'équation d'énergie pour la température: si  $\phi = T$ ,  $\Gamma_\phi = (\mu/Pr)$  et  $S_\phi = 0$ .

#### II.1.4.1 Discrétisation:

D'abord, Le domaine de solution sera subdivisé en un nombre fini d'éléments infinitésimaux (quadrilatéraux) de côtés  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  chacun, dits volumes de contrôle de sorte d'obtenir une grille structurée définissant les frontières du domaine (**Fig.II.1**). Ayant quatre faces planes et indicées par une lettre selon les directions des principaux points cardinaux, chaque volume de contrôle contient un nœud central P.

La discrétisation de l'équation (2.1) sur la maille P du domaine, montrée sur la figure (**Fig.II.1**) donne :

$$\sum_f^{N_{faces}} \rho_f \phi_f \vec{u}_f \cdot \vec{A}_f = \sum_f^{N_{faces}} \Gamma_\phi (\nabla \phi)_n \cdot \vec{A}_f + S_\phi V \quad (2.2)$$

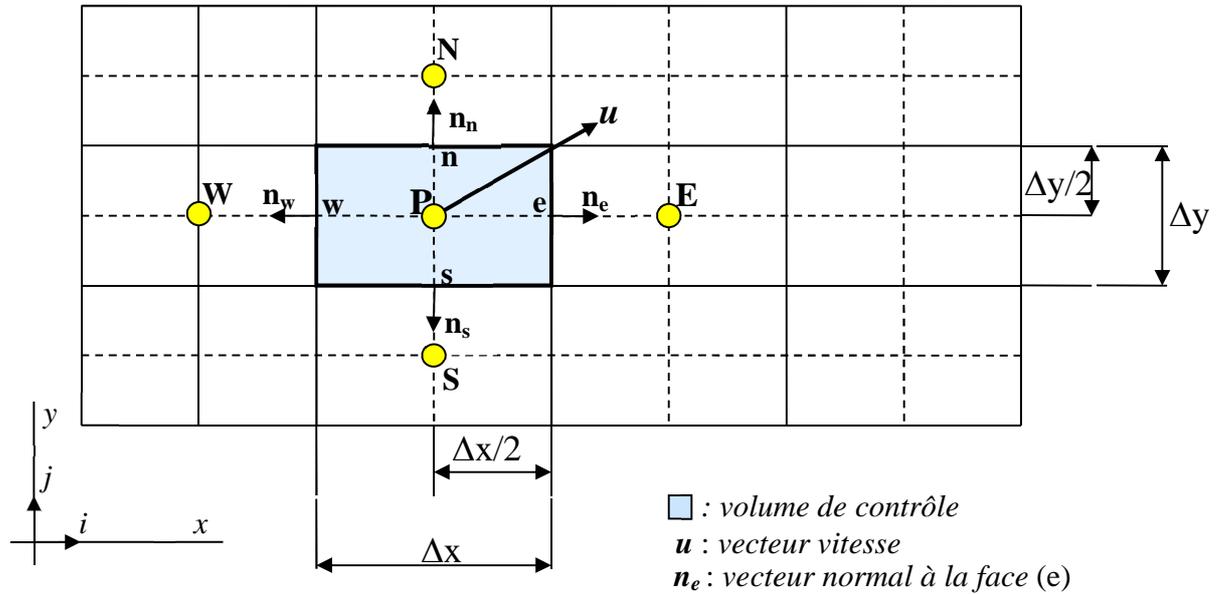
Où :

$N_{faces}$  : est le nombre de faces formant la maille.

$\phi_f$  : est la valeur de  $\phi$  de convection à travers la face.

$\rho_f \vec{u}_f \cdot \vec{A}_f$  : est le flux de masse à travers la face.

- $\vec{A}_f$  : est la surface de la face.
- $(\nabla \phi)_n$  : est la norme du  $\nabla \phi$  dans la direction normale à la face  $f$ .
- $V$  : est le volume de la maille.



**Fig. II.1** Volume de contrôle typique en cas d'un maillage bidimensionnel structuré

Le développement de l'équation (2.2), permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
 (\rho u \phi)_e \Delta y - (\rho u \phi)_w \Delta y + (\rho v \phi)_n \Delta x - (\rho v \phi)_s \Delta x = & \Gamma_e (\nabla \phi \vec{i})_e \cdot \vec{A}_e + \Gamma_w (\nabla \phi \vec{i})_w \cdot \vec{A}_w \\
 & + \Gamma_n (\nabla \phi \vec{j})_n \cdot \vec{A}_n + \Gamma_s (\nabla \phi \vec{j})_s \cdot \vec{A}_s \\
 & + S_\phi \Delta x \Delta y
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ensuite un schéma de discrétisation des termes convectif et diffusif est utilisé pour évaluer  $\phi$  et le gradient de  $\nabla \phi$  aux faces des mailles quand les propriétés physiques et les vecteurs des vitesses aux centres des cellules sont connus.

### II.1.4.2 Evaluation du terme de convection :

Les valeurs  $\phi_f$  aux faces se calculent par interpolation à partir des valeurs aux centres des mailles en utilisant un schéma de type « *amont* » ; il en existe plusieurs à savoir : *premier ordre*, *second ordre*, *loi de puissance* ou *Quick*,...

L'utilisation du schéma amont de second ordre « *second order upwind scheme* », permet de déterminer la valeur  $\phi_f$  par l'expression suivante :

$$\phi_f = \phi + (\nabla \phi) \cdot \vec{\Delta S} \quad (2.4)$$

Où :

- $\phi$  : est la valeur dans le centre de la cellule.
- $(\nabla \phi)$  : est le gradient de  $(\phi)$  calculé dans la cellule en amont.
- $\vec{\Delta S}$  : est le vecteur de position allant du point situé au centre de la cellule vers le point situé au centre de la face.
- $f$  : désigne la face.

Le gradient de  $(\phi)$  se calcule à partir de la forme discrète du théorème de Gauss :

$$\nabla \phi = \frac{1}{V} \sum_f^{N_{faces}} \bar{\phi}_f \vec{A}_f \quad (2.5)$$

Où :  $\bar{\phi}_f$  est calculé en moyennant  $(\phi)$  sur les deux cellules adjacentes à la face  $f$ .

L'application du schéma de discrétisation (**Fig.II.1**) donne :

$$\phi_e = \phi_p + \nabla \phi_p \cdot \vec{\Delta S} \quad (2.6)$$

$$\text{Avec : } \nabla \phi_p \cdot \vec{\Delta S} = \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta y} \left( \bar{\phi}_e \Delta y \hat{i} - \bar{\phi}_w \Delta y \hat{i} + \bar{\phi}_n \Delta x \hat{j} - \bar{\phi}_s \Delta x \hat{j} \right) \cdot \frac{\Delta x}{2} \hat{i} \quad (2.7)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \right) - \left( \frac{\phi_W + \phi_P}{2} \right) \right]$$

$$\text{D'où : } \phi_e = \phi_P + \frac{1}{4}(\phi_E - \phi_W) \quad (2.8)$$

### II.1.4.3 Evaluation du terme de diffusion :

Le terme diffusif sur l'équation (3.2) est calculé dans le cas illustré sur la figure (Fig. II.1) et sur la face (e) comme suit :

$$\Gamma_e (\nabla \phi)_e \cdot \vec{A} = \Gamma_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\Delta x} \Delta y \quad (2.9)$$

Ensuite, les équations (2.8) et (2.9) seront injectées dans l'équation discrète (2.3), ce qui permet d'aboutir à une équation linéaire de la forme [27]:

$$a_P \phi_P = \sum_{\text{voisin}} a_{\text{voisin}} \phi_{\text{voisin}} + b \quad (2.10)$$

Pour le cas illustré sur la figure (II.1) et en utilisant un schéma « amont premier ordre », les coefficients  $a_P, a_E, a_W, a_N, a_S$  et  $b$  sont évalués comme suit :

$$a_E = \Gamma_e \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad a_N = \Gamma_n \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (2.11)$$

$$a_W = (\rho u)_e \Delta y + \Gamma_w \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad a_S = (\rho v)_s \Delta x + \Gamma_s \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad \text{et : } b = S_\phi \Delta x \Delta y$$

Le regroupement de toutes les équations linéaires pour tous les nœuds du domaine de calcul, fournit un système d'équations algébriques ayant la forme matricielle suivante :

$$[\xi] = [A]^{-1} [B] \quad (2.12)$$

Avec :  $[A]$  est la matrice des coefficients  $a_{ij}$ ;  $[\xi]$  est la matrice du champ de la variable recherchée et  $[B]$  est la matrice du terme source  $b_i$

Ce système va être résolu itérativement par l'un des logiciels commerciaux utilisés en simulation de la dynamique des fluides comme *Fluent*.

Cependant, la résolution des équations de quantité de mouvement discrétisées, dans un écoulement incompressible tel est le cas dans le présent travail, présente quelques difficultés ; cela vient du fait que les valeurs de la vitesse et de la pression aux centres des mailles ne sont pas connues a priori. Puisqu'il y a un couplage pression-vitesse (eqs 2.10 et 2.11), *Fluent* utilise un processus itératif (algorithme SIMPLE pour le présent travail) qui consiste à supposer un champ de pression, grâce auquel on calcule le champ de vitesse (à partir des équations de quantité de mouvement) ; la vitesse ainsi obtenue sera introduite dans l'équation de continuité ce qui permet de trouver une pression corrigée grâce à laquelle on calcule la nouvelle vitesse. Si la continuité est vérifiée on arrête les itérations et on passe à l'équation suivante (d'énergie) sinon, on recommence les itérations jusqu'à obtenir une convergence de l'algorithme. Par ailleurs le calcul de pression sur chaque face de la maille se fait par le schéma PRESTO ! qui utilise l'équation de la continuité discrétisée pour un volume de contrôle décalé jusqu'aux faces des mailles.

## II.2 Approche microscopique (dynamique moléculaire):

À l'échelle microscopique, le fluide est considéré comme étant constitué de petites particules (molécules) qui ne font que s'entrechoquer (chocs considérés comme élastiques) entre elles d'une part ou contre les parois du récipient qui les contient de l'autre part. Dans cette approche, on s'intéresse à identifier les forces intermoléculaires et résoudre l'équation différentielle de conservation de Newton (2<sup>ème</sup> loi). Par conséquent, à chaque unité de temps, la position et la vitesse de chaque particule doivent être identifiées, mais en raison d'innombrables particules, ceci nécessite un travail colossal donc des ressources informatiques gigantesques! En outre cette technique de simulation ne permet pas de calculer directement les variables macroscopiques comme la température, la pression et les autres propriétés thermo-physiques telles que : la viscosité,

la conductivité thermique,... de ce fait, la mécanique statistique doit être là pour quantifier les variables macroscopiques recherchées à partir des différentes quantités microscopiques. Cette technique simple, peut facilement simuler des changements de phase et des géométries complexes bien qu'elle revienne chère en matière d'espace mémoire et de temps de calcul.

### II.3 Approche mésoscopique :

Ludwig Boltzmann (1844-1906) physicien autrichien considéré comme « le père de la physique statistique » a validé l'hypothèse de Démocrite philosophe grec (460 av.J.C-370 av.J.C), selon laquelle « la matière peut être considérée comme un *ensemble d'entités invisibles* », et à l'aide de son équation cinétique baptisée « *équation de Boltzmann* », il a théorisé de nombreuses équations de la mécanique des fluides.

Contrairement à l'approche microscopique et au lieu de considérer le comportement d'une particule, Boltzmann considère le comportement d'un ensemble de particules traité comme une unité. Celle-ci a comme propriété une quantité ( $f$ ) dite fonction de distribution. À un tel niveau, l'échelle est dite mésoscopique.

L'équation de Boltzmann décrit la variation de cette propriété en fonction d'espace et de temps (en présence et/ ou en absence d'une force externe agissant sur le système étudié). L'estimation des paramètres macroscopiques d'écoulement du fluide se fait en utilisant des formes intégrales de l'ensemble des unités constituant le fluide.

#### II.3.1 L'automate cellulaire (CA) :

Généralement, l'histoire des automates cellulaires remonte aux années quarante et à Stanislaw Ulam et John Von Neumann [28]. La base en était un espace bidimensionnel divisé en cellules dont chacune passe d'un état à un autre en suivant des règles simples de voisinage : à chaque unité de temps, l'application des mêmes règles à toutes les cellules de la grille ainsi obtenue, produit une nouvelle génération ( $t+1$ ) de cellules dépendant entièrement de la génération précédente ( $t$ ). Les automates cellulaires sont

sortis des laboratoires en 1970 avec le célèbre jeu de la vie (Game of Life) de John Horton Conway [28].

### II.3.2 Le gaz sur réseau (LGCA):

Le gaz sur réseau est un automate cellulaire destiné à la simulation du comportement microscopique d'un fluide [2]. Cet automate dans lequel le temps, les vitesses de particules et l'espace sont tous discrétisés, modélise le fluide par des particules fictives, identiques et qui peuvent se déplacer entre les nœuds d'un réseau.

Chaque itération de l'automate cellulaire en temps procède en deux phases :

- *Phase de propagation* : les particules se déplacent vers les nœuds adjacents.
- *Phase de collision* : lorsque plusieurs particules arrivent au même nœud (en même temps), des règles de collision déterminent leur nouvelle direction tout en conservant leur nombre, la quantité de mouvement et l'énergie avant et après les collisions.

L'équation d'évolution de cet automate cellulaire s'écrit comme suit [2]:

$$n_i(\vec{x} + \vec{c}_i, t + 1) = n_i(\vec{x}, t) + \Omega_i(n(\vec{x}, t)), i = 0, 1, \dots, M \quad (2.13)$$

Où :  $n_i(\vec{x}, t)$  : représente une variable booléenne

$\vec{c}_i$  : est la vitesse locale de la particule.

$\Omega_i(n(\vec{x}, t))$  : est l'opérateur de collision.

### II.3.3 Les modèles de gaz sur réseau utilisés en simulation :

Les modèles de gaz sur réseau les plus répandus en simulation étaient :

#### II.3.3.1 Le modèle HPP :

Ce modèle de gaz sur réseau a été développé et introduit par Hardy, de Pazzis et Pomeau (HPP) [29] en 1973, pour simuler le comportement d'un fluide en utilisant une

grille quadratique; l'idée de base en était de créer un simple automate cellulaire en tenant compte des lois de conservation au niveau microscopique ; les particules-fluide, considérées comme ayant des masses identiques, peuvent se déplacer en suivant les directions « liens » du site qui n'en a que quatre (une seule particule par direction). À chaque unité de temps, une collision (considérée comme étant élastique et obéissant aux règles de collisions qui conservent la densité et la quantité de mouvement) tient lieu sur chaque site après quoi les particules continuent à se déplacer suivant des lignes droites jusqu'à ce qu'elles rencontrent d'autres particules ou la frontière (paroi solide). La facilité du codage de ce modèle sur ordinateur n'empêche pas l'inconvénient qu'il présente : il s'agit de l'anisotropie.

### **II.3.3.2 Le modèle FHP :**

En 1986, Frish, Hasslacher, Pomeau [30] ont changé la forme de la grille connue en HPP ; celle-ci a été remplacée par une grille de forme hexagonale ce qui a permis de contourner le problème d'anisotropie constaté en HPP. Le FHP qui utilise les mêmes opérations logiques qu'utilise le HPP, a réussi à développer l'automate cellulaire en matière de puissance de simulation des écoulements de fluides ; Cependant il présente un problème de bruit statistique.

## **II.3.4 La Méthode de Boltzmann sur réseau :**

### **II.3.4.1 L'origine de la méthode :**

La méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) est basée sur la méthode de gaz sur réseau (LGCA) historiquement développée à partir d'automates cellulaires ; en partant de l'idée de Boltzmann, McNamara et Zanetti [31] ont proposé une nouvelle méthode dans laquelle les variables booléennes utilisées dans les gaz sur réseau sont remplacées par des fonctions de distribution de vitesse des particules. Cette méthode introduite en 1988 sous le nom de Boltzmann sur réseau, a remarquablement fait diminuer le bruit statistique constaté dans les méthodes (LGCA) et a permis d'obtenir de meilleurs résultats dans diverses applications.

### II.3.4.2 Avantages de la méthode de Boltzmann sur réseau :

La méthode de Boltzmann sur réseau est donc fondée sur les lois de la physique statistique et la théorie cinétique des gaz. Cette méthode qui repose sur une forme discrétisée de l'équation de Boltzmann, est une approche explicite qui jouit de nombreuses qualités à savoir:

- Précision.
- Stabilité.
- Efficacité et robustesse.
- Manipulation directe de la géométrie extrêmement complexe.
- Facile à coder sur machine.
- Localité des données.
- De par ses caractéristiques algorithmiques, elle se révèle bien adaptée au calcul parallèle, etc.

En raison de nombreux avantages qu'elle présente, cette méthode LBM devient plus populaire ces derniers temps en simulation des problèmes de la dynamique de fluides. Elle fait aujourd'hui figure de nouvelle alternative aux méthodes numériques conventionnelles.

### II.3.4.3 L'équation de transport de Boltzmann :

Pour un système en l'absence d'une force externe, l'équation de transport de Boltzmann, peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{c} \nabla f = \Omega \quad (2.14)$$

Où :  $\vec{c}$  et  $\nabla f$  sont des vecteurs.

L'équation (2.14) est une équation d'advection avec un terme source ( $\Omega$ ) ; celle-ci peut être résolue si ( $\Omega$ ) est explicitement connu. Le problème est que ( $\Omega$ ) est en fonction de  $f$

et que l'équation (2.14) est une équation intégra-différentielle ; ce qui fait que sa résolution est difficile.

### II.3.4.5 Approximation BGK :

Pour résoudre l'équation de Boltzmann (2.14), le terme de collision a besoin d'être déterminé, pour ce faire, on se sert d'un modèle introduit en 1954 par Bhatnagar, Gross et Krook (SRT model-BGK) [32], ce modèle simplifié, approxime l'opérateur de collision, comme suit :

$$\Omega(f) = \omega(f^{eq} - f) = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f) \quad \text{avec:} \quad \omega = \frac{1}{\tau} \quad (2.15)$$

La résolution de l'équation (2.14) permet de déterminer les quantités macroscopiques telles que : la densité et la vitesse du fluide qui sont définies par :

La masse :

$$\rho(\vec{r}, t) = \int m f(\vec{r}, \vec{c}, t) d\vec{c} \quad (2.16)$$

La vitesse :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\rho(\vec{r}, t)} \int m \vec{c} f(\vec{r}, \vec{c}, t) d\vec{c} \quad (2.17)$$

Où :  $\vec{r}$  est le vecteur de position de la particule et  $m$  est la masse moléculaire (masse de la particule).

### II.3.4.6 Discrétisation de l'équation de transport de Boltzmann :

Après remplacement de l'opérateur de collision par l'approximation BGK et la discrétisation suivant une direction donnée, l'équation de Boltzmann (2.14) peut avoir la forme suivante :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{c}_i \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i) \quad (2.18)$$

Contrairement aux méthodes conventionnelles dont la résolution des équations de Navier-Stokes se fait directement, c'est l'équation de transport de Boltzmann sur réseau (LBE) qui doit être résolue en premier avant qu'il soit possible d'en dériver les équations de Navier-Stokes (NS) en utilisant le développement mathématique de Chapman-Enskog[33].

Dans la méthode de Boltzmann sur réseau, le domaine de calcul a besoin d'être subdivisé en réseaux ; les nœuds d'un réseau peuvent être occupés par des sous-ensembles de particules fictives dont certaines entrent en collision et se propagent, suivant des directions données, vers les nœuds voisins. Ceci nécessite la discrétisation de l'équation de transport de Boltzmann (2.14) qui aura la forme suivante [33]:

$$f_i(\vec{x} + \vec{c}_i \delta t, t + \delta t) - f_i(\vec{x}, t) = \Omega_i(f) \quad (2.19)$$

### II.3.4.7 Algorithme de l'équation de transport de Boltzmann sur réseau:

Comme elle est développée à partir du gaz sur réseau (LGCA), la méthode de Boltzmann sur réseau est donc basée sur une règle de mise à jour : les fonctions de distribution changent de valeurs en chaque unité d'espace et de temps du fait des collisions et des propagations qui tiennent lieu, tout en tenant compte des conditions aux limites appliquées et la condition de convergence à vérifier.

La détermination des quantités  $(f_i)$  se fait en utilisant l'algorithme suivant :

- **Étape de propagation:**

Cette étape est caractérisée par les déplacements des fonctions de distributions vers les nœuds adjacents du réseau, ce qui permet d'écrire :

$$f_i(\vec{x} + \vec{c}_i \delta t, t + \delta t) = f_i(\vec{x}, t + \delta t) \quad (2.20)$$

- **Calcul des paramètres macroscopiques :**

Les quantités hydrodynamiques de bases telles que : la densité, la vitesse d'écoulement sont déterminées par :

La densité :

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_i f_i(\vec{x}, t) \quad (2.21)$$

La vitesse :

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \frac{\sum_i \vec{c}_i f_i(\vec{x}, t)}{\sum_i f_i(\vec{x}, t)} \quad (2.22)$$

- **Détermination de la fonction de distribution à l'état d'équilibre :**  $(f_i^{eq})$

La fonction de distribution d'équilibre sera déterminée par l'équation (3.26) en utilisant les valeurs de la densité et la vitesse trouvées au cours de l'étape qui précède.

- **Étape de collision:**

Au cours de celle-ci, les collisions probables font que les fonctions de distributions changent de valeurs et une nouvelle propagation aurait lieu et ainsi de suite. Ce processus peut être décrit par l'équation suivante :

$$f_i(\vec{x}, t + \delta t) = f_i(\vec{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_i(\vec{x}, t) - f_i^{(eq)}(\vec{x}, t)] \quad (2.23)$$

À chaque itération dans le temps, les quantités comme la densité, la vitesse et la fonction de distribution d'équilibre se réactualisent jusqu'à la vérification du critère de convergence imposé.

#### II.3.4.8 Les modèles de réseaux LBM :

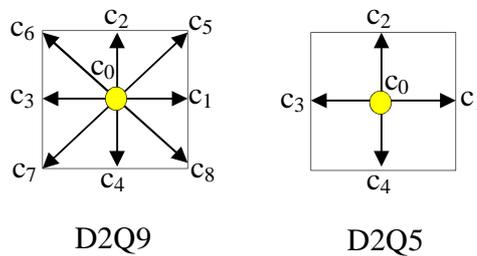
Pour mieux s'adapter avec la nature de toutes les géométries des problèmes qui peuvent se présenter à la simulation, La méthode de Boltzmann sur réseau utilise plusieurs modèles de réseaux où la discrétisation de l'espace et de vitesse prend toujours la forme  $D_n Q_m$  Où : n : représente la dimension du domaine.

m : représente le nombre de vitesses discrètes sur le réseau.

Les tests ont montré que l'option pour un modèle avec plus de vitesses discrètes pour la même dimension donne des résultats beaucoup plus précis bien que la simulation soit couteuse en matière d'espace mémoire et temps de calcul.

Selon la géométrie du problème physique à simuler ; on cite à titre d'exemple quelques modèles réseaux utilisés en LBM :

- D1Q2 et D1Q3 : ces deux modèles s'utilisent en cas d'une géométrie unidimensionnelle.
- D2Q4, D2Q5, D2Q7 et D2Q9 : ceux-ci s'utilisent en cas d'une géométrie bidimensionnelle (Fig.II.2).
- D3Q15 et D3Q19 : ces deux derniers s'utilisent en cas d'une géométrie tridimensionnelle.



**Fig. II.2** Modèles des réseaux LBM

Dans ce travail, on se penche beaucoup plus sur les deux modèles D2Q9 et D2Q5 et ce en raison de leur utilisation :

#### II.3.4.8.1 Modèle D2Q9 :

Ce modèle est spécialement utilisé pour résoudre, indirectement, les équations macroscopiques de Navier-Stokes dans le cas des problèmes bidimensionnels. Il utilise trois modules de vitesses discrètes sur réseau [34] dont les valeurs:  $0$ ,  $c$  et  $\sqrt{2}c$  ; de ce fait, on aura 9 vecteurs de directions ( $\vec{c}_i$ ) : Huit vecteurs de vitesse destinés au mouvement et une particule au repos (**Fig.II.2**);

Les unités de particules s'y déplacent suivant la  $i^{\text{ème}}$  direction avec les modules de vitesses définies comme suit :

$$\begin{aligned}
 c_i &= (0,0) && \text{pour } i = 0 && (2.24) \\
 c_i &= \left( \cos \left[ (i-1) \frac{\pi}{2} \right], \sin \left[ (i-1) \frac{\pi}{2} \right] \right) c && \text{pour } i = 1, 2, 3, 4 \\
 c_i &= \sqrt{2} \left( \cos \left[ (2(i-5)+1) \frac{\pi}{4} \right], \sin \left[ (2(i-5)+1) \frac{\pi}{4} \right] \right) c && \text{pour } i = 5, 6, 7, 8 \\
 \text{Où : } & c = \frac{\delta x}{\delta t} = 1
 \end{aligned}$$

### II.3.4.8.2 Modèle D2Q5 :

Ce modèle (**Fig.II.2**) a quatre vecteurs de vitesses discrètes ( $\vec{c}_i$ ) et une particule au repos. Leurs modules sont définis comme suit :

$$c_i = (0,0) \quad \text{Pour } i = 0 \quad (2.25)$$

$$c_i = \left( \cos \left[ (i-1) \frac{\pi}{2} \right], \sin \left[ (i-1) \frac{\pi}{2} \right] \right) \quad \text{Pour } i = 1, 2, 3, 4$$

### II.3.4.9 La fonction de distribution d'équilibre :

En LBM, dans le cas d'utilisation de la méthode à double population, la résolution des équations comme celle de la quantité de mouvement ou celle de la température suit le même algorithme, sauf que chacune d'elles dépend de sa propre fonction de distribution d'équilibre. La forme générale de la fonction de distribution à l'état d'équilibre ( $f_i^{eq}$ ) s'écrit :

$$f_i^{eq} = \phi \omega_i [A + B \vec{c}_i \cdot \vec{u} + C (\vec{c}_i \cdot \vec{u})^2 + D \vec{u}^2] \quad (2.26)$$

Où:  $\phi$  représente un paramètre scalaire comme la densité ou la température et  $w_i$  dont les valeurs varient d'un modèle réseau à un autre, représentent les facteurs de poids.

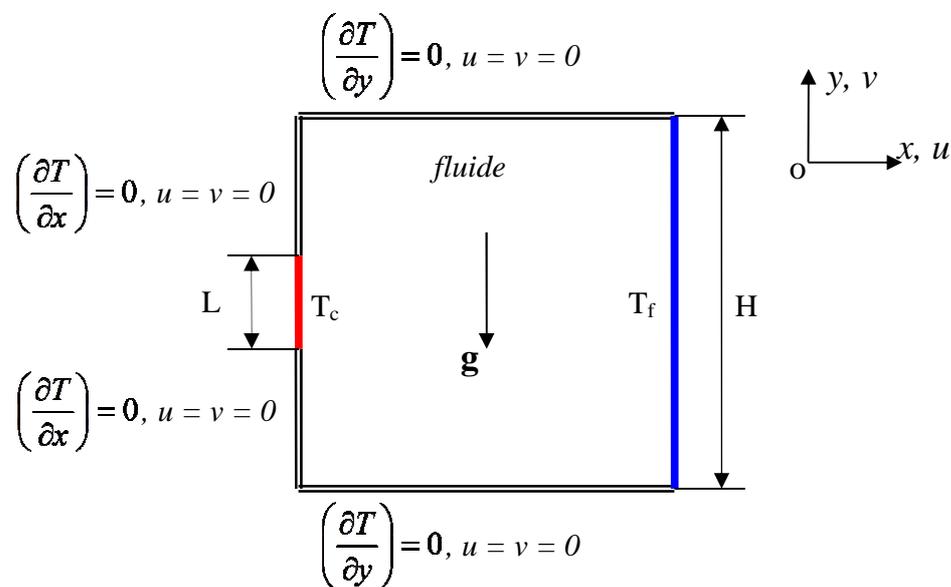
A, B, C et D : sont des constantes proprement liées au modèle de réseau choisi.  
 $\vec{u}$  : est le vecteur de vitesse d'écoulement du fluide.

---

**Chapitre III.**  
**Problématique et méthodes de solution**

### III.1 Position du problème :

L'enceinte carrée de longueur  $H$  (**Fig.III.1**) est remplie d'un fluide newtonien et incompressible ( $\text{Pr} = 0.71$ ) ; Une partie de longueur  $L$  de son mur gauche et le mur droit sont isothermes et différemment chauffés ( $T_c = 323^\circ\text{K}$ ) et ( $T_f = 283^\circ\text{K}$ ) respectivement. Le reste des murs de l'enceinte est considéré comme adiabatique.



**Fig. III.1** : Configuration physique et conditions aux limites.

### III.2 Hypothèses simplificatrices :

Pour but de faciliter la résolution du problème considéré, les hypothèses simplificatrices suivantes sont appliquées :

- Le problème est considéré comme bidimensionnel.
- Le fluide est newtonien et incompressible.
- L'écoulement est en régime laminaire permanent.
- l'approximation de Boussinesq est appliquée : la masse volumique du fluide ne dépend que de la température.

- Les autres propriétés physiques du fluide sont supposées constantes et sont calculées à la température moyenne du fluide.
- L'enceinte se trouve dans le champ gravitationnel de la Terre.
- Les parois de l'enceinte sont rigides.
- Le transfert de chaleur par rayonnement est considéré comme négligeable.

### III.3 Description mathématique du problème

#### III.3.1 Modèle en deux dimensions :

En utilisant les hypothèses simplificatrices, les équations (1.1), (1.2) et (1.3) prennent respectivement les formes suivantes :

- Équation de Continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

- Équations de quantité de mouvement :

*Suivant l'axe ox :*

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.2)$$

*Suivant l'axe oy :*

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_f) \quad (3.3)$$

- Équation d'énergie :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.4)$$

**III.3.2 Modélisation sous forme adimensionnelle :**

- Variables adimensionnelles : Ainsi s'écrivent les variables adimensionnelles :

$$X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad U = \frac{uH}{\alpha}, \quad V = \frac{vH}{\alpha}, \quad \theta = \frac{T - T_f}{T_c - T_f}, \quad P = \frac{H^2}{\rho\alpha^2} p \quad (3.5)$$

L'introduction de ces variables dans les équations (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4) on aura :

- Équation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (3.6)$$

- Équation de quantité de mouvement :

*Suivant ox :*

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (3.7)$$

*Suivant oy :*

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \text{Pr} Ra \theta \quad (3.8)$$

- Équation d'énergie :

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (3.9)$$

**III.3.3 Conditions aux limites :**

Les parois horizontales  $y = 0$  et  $y = H$  sont considérées comme adiabatiques.

$$\left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=H} = 0 \quad (3.10)$$

La condition de non-glissement des parois permet d'écrire :

$$u = v = 0 \text{ en } y = 0 \text{ et } y = H$$

$$u = v = 0 \text{ en } x = 0 \text{ et } x = H$$

La partie chauffée de la paroi gauche est maintenue à une température uniforme :

$$T = T_c \text{ en } x = 0$$

Le reste de la paroi en  $x = 0$  est thermiquement isolé.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$$

La paroi droite est maintenue à une température uniforme :  $T = T_f$  en  $x = H$

### III.4 Procédures de résolution :

Le présent travail comprend deux parties ; Il s'agit de la mise en œuvre de deux méthodes de résolution tout à fait différentes : la méthode conventionnelle des volumes finis (MVF) et une nouvelle méthode dite la méthode à double population de Boltzmann sur réseau (TLBM).

#### III.4.1 Première partie(MVF) :

##### III.4.1.1 La méthode des volumes finis (MVF) :

Les équations (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9) décrivant, l'écoulement de la convection naturelle à l'intérieur de l'enceinte carrée et partiellement chauffée (Fig.III.1), ont été résolues numériquement en utilisant le code commercial *Fluent 6.3*, basé sur la méthode des volumes finis. Celui-ci utilise l'outil de maillage *Gambit 2.3.16*. Pour ce faire, on procède comme suit [37] :

##### III.4.1.2 Qualité du maillage utilisé :

L'option pour un maillage structuré et non-uniforme, basé sur un schéma exponentiel d'exposant augmentant ainsi le nombre des nœuds au voisinage des parois physiques, s'est avérée nécessaire pour prendre en compte à la fois les gradients de température, de part et d'autre de chacune des deux limites de la partie chauffée, et le développement de la couche limite près des parois de l'enceinte.

### III.4.1.3 Résolution du système d'équations :

La procédure de la résolution des équations est décrite dans [37] ; pour un tel écart de température, l'approximation de Boussinesq est appliquée. Par conséquent, la résolution doit tenir compte du terme du couplage qui apparaît au terme source de l'équation (3.8) de quantité de mouvement relative à la composante verticale de la vitesse décrivant la contribution du gradient thermique au mouvement du fluide.

L'algorithme de type SIMPLE, développé par Patankar [26], a été choisi pour sa robustesse et sa rapidité [27] afin de résoudre les équations de Navier-Stokes; le choix du solveur 'Pressure based' recommande l'utilisation du schéma 'Presto' connu comme étant le plus adapté pour les écoulements rotatifs [27], en tant que méthode de discrétisation de la pression.

Afin d'améliorer la précision des calculs, le contrôle de la solution se fait en choisissant le schéma d'interpolation « *amont de second ordre* » pour les équations de la quantité de mouvement et celle de l'énergie. Les facteurs de sous-relaxation sont pris par default. La convergence est considérée comme atteinte lorsque les valeurs des résidus :

- de l'équation de continuité devient inférieure à une valeur de l'ordre de  $10^{-3}$  ;
- des équations de quantité de mouvement deviennent inférieures à une valeur de l'ordre de  $10^{-6}$

## III.4.2 Deuxième partie

### III.4.2.1 Mise en œuvre pratique de la méthode à double population de Boltzmann sur réseau (TLBM) :

Les conditions aux limites, hydrodynamique et thermique, pour la convection naturelle sont illustrées par la figure (Fig.III.1). Les températures sur la partie chauffée de la frontière ouest et la frontière est sont  $T_c$  et  $T_f$ , respectivement, où  $T_c > T_f$ . La différence de température implique une convection naturelle à l'intérieur de l'enceinte. Les frontières : nord, sud et le reste de la frontière ouest sont thermiquement isolés. L'approximation de

Boussinesq est appliquée au terme force de flottabilité. Le coefficient d'expansion thermique  $\beta$  et la viscosité cinématique  $\nu$  sont considérés comme constants et le terme force de flottabilité est supposé en dépendance linéaire de la température.

$$\vec{F}_f = \rho \beta (T_c - T_0) \vec{g} \quad (3.11)$$

Où  $T_0$  est la température de référence ;  $T_0 = (T_c + T_f)/2$ . Dans notre cas  $T_0 = T_f$ .

La force de volume dans la direction  $oy$  apparait dans les équations de Navier-Stokes. La similarité dynamique dépend de deux paramètres adimensionnels : le nombre de Prandtl (1.10) et le nombre de Rayleigh (1.11). Dans le présent travail, le nombre de Prandtl est égal à **0.71**.

Dans la méthode à double population de Boltzmann sur réseau, on aura besoin de modéliser le champ hydrodynamique et le champ thermique, donc on aura besoin de deux fonctions de distributions différentes et deux modèles réseaux différents: D2Q9 et D2Q5.

#### III.4.2.2 Modélisation du fluide :

L'approximation BGK de l'équation de Boltzmann sur réseau, en cas de présence d'une force externe, peut être écrite comme suit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \Omega(f) + \vec{F}_f \quad (3.12)$$

En cas du modèle BGK-SRT (*Single Relaxation Time*), le terme de collision sera remplacé par :

$$\Omega(f) = \frac{1}{\tau_f} (f^{eq} - f) \quad (3.13)$$

Pour le modèle D2Q9, l'équation (2.26) peut prendre la forme [38] :

$$f_i^{eq} = \rho \omega_i [1 + 3\vec{c}_i \cdot \vec{u} + 4,5 (\vec{c}_i \cdot \vec{u})^2 - 1,5 \vec{u}^2] \quad (3.14)$$

Les facteurs constants de poids  $\omega_i$  sont donnés par :

$$\omega_0 = 4/9, \quad \omega_{1,2,3,4} = 1/9, \quad \omega_{5,6,7,8} = 1/36 \quad (3.15)$$

Les quantités macroscopiques comme la densité et la vitesse sont déterminées par :

$$\rho = \int f d\vec{c}; \quad \rho \vec{u} = \int \vec{c} f d\vec{c} \quad (3.16)$$

En appliquant l'expansion de Chapman-Enskog, les équations ci-dessus peuvent conduire aux équations macroscopiques de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie [33].

Les vitesses discrètes ( $\vec{c}_i$ ) pour le modèle D2Q9 (**Fig.II.2**) sont données par l'équation (2.24) et la viscosité ( $\nu$ ) liée au modèle réseau D2Q9 est définie comme suit :

$$\tau_f = 3\nu + \frac{1}{2} \quad (3.17)$$

### III.4.2.3 Modélisation du transport de chaleur :

Le modèle D2Q5 est utilisé pour modéliser le transport de chaleur à l'intérieur de l'enceinte. Avec la fonction de distribution pour le champ thermique définie comme suit :

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \vec{c} \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} = \Omega(g) \quad \text{où :} \quad \Omega(g) = \frac{1}{\tau_g} (g^{eq} - g) \quad (3.18)$$

La fonction de distribution d'équilibre correspondante est comme suit [33]:

$$g_i^{eq} = T \omega_i [1 + 3\vec{c}_i \cdot \vec{u}] \quad (3.19)$$

Les facteurs de poids  $\omega_i$  correspondants sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 1/3 \\ \omega_{1-4} &= 1/6 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Les vitesses discrètes ( $\vec{c}_i$ ) pour le modèle D2Q5 (**Fig.II.2**) sont données par l'équation (2.25) et la diffusivité thermique ( $\alpha$ ) liée au modèle réseau D2Q5 est déterminée par [33]:

$$\tau_g = 3\alpha + \frac{1}{2} \quad (3.21)$$

Le nombre de Nusselt moyen est déterminé par:

$$Nu_{moy} = 1 + \frac{\langle u \cdot T \rangle}{\alpha \cdot \Delta T / L} \quad (3.22)$$

La méthode à double population de Boltzmann sur réseau définit deux distributions. Le modèle D2Q9 a été utilisé pour résoudre le champ de vitesse, alors que le modèle D2Q5 a été utilisé pour résoudre le champ de température. Le nombre de réseaux utilisé dans la direction  $ox$  est toujours pris égal à celui utilisé dans la direction  $oy$ . L'approximation de Boussinesq est appliquée au terme de la force de flottabilité comme suit :

$$\vec{G} = \beta g (T - T_0) \vec{j} \tag{3.23}$$

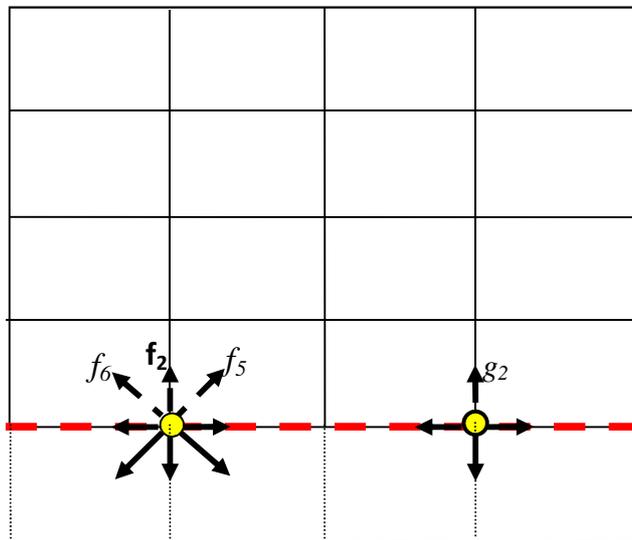
Cette force de flottabilité a été ajoutée comme un extra-terme, est définie comme suit :

$$\vec{F}_f = 3 \vec{G} (\vec{c} - \vec{u}) f^{eq} \tag{3.24}$$

La température est déterminée par :  $T = \int g d\vec{c}$  (3.25).

### III.4.2.4 Conditions aux limites:

Les fonctions de distribution orientées vers l'extérieur du domaine (**Fig. III.2**) sont connues à partir du processus de propagation. Les fonctions de distribution orientées vers l'intérieur du domaine sont inconnues et doivent être déterminées. Cela nécessite l'application de certaines conditions aux limites.



**Fig.III.2.** les distributions manquantes sur la frontière inférieure pour le modèle D2Q9 à gauche et le modèle D2Q5 à droite

À titre d'exemple, la (**Fig. III.2**) montre les fonctions de distribution manquantes, représentées par des lignes discontinues, qui ont besoin d'être déterminées comme suit :

- **Pour l'écoulement du fluide :**

La condition aux limites du non glissement 'le rebond en arrière' [35] en anglais 'Bounce-Back No-slip' est utilisée pour modéliser les frontières solides (est, ouest, nord et sud).

- **Pour la température :**

La condition de Dirichlet de température imposée est utilisée pour modéliser les frontières différemment chauffées :  $\theta|_{x=0} = 1$  la partie de la frontière ouest et  $\theta|_{x=H} = 0$  pour la frontière est.

Les fonctions de distribution manquantes se calculent d'après l'équation suivante:

$$\theta = \sum_{j=0}^4 g_j \quad (3.26)$$

Le schéma de simple extrapolation [39] pour la condition aux limites de Neumann, en l'absence de flux thermique imposé, est utilisé pour modéliser l'isolation thermique des frontières du (nord, sud et le reste de la frontière gauche).

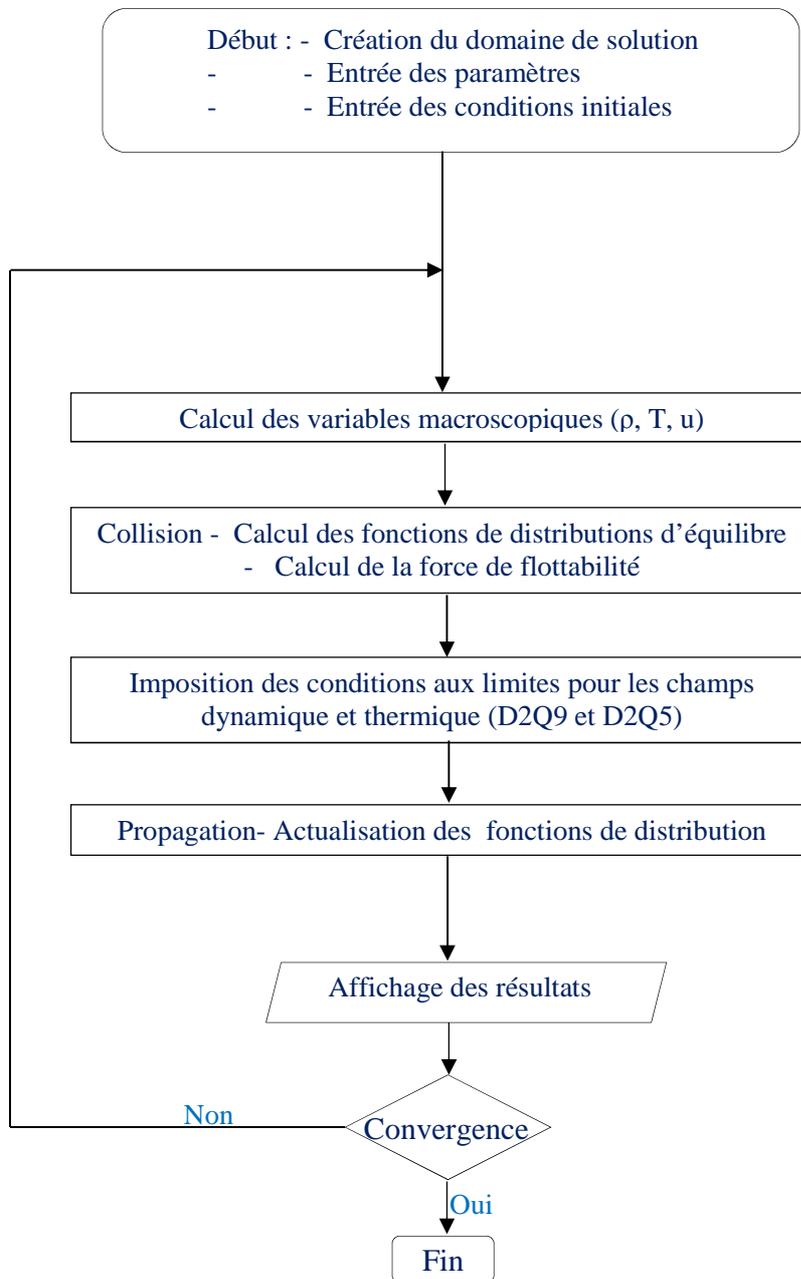
Pour la frontière de sud, la fonction de distribution est déterminée par [33]:

$$\theta_0 = \frac{4\theta_1 - \theta_2}{3} \quad (3.27)$$

Où l'indice dont les valeurs sont: 0, 1 et 2 représentent respectivement le nœud frontière, le premier et le deuxième proche voisin.

#### III.4.2.5 Implémentation de la méthode de Boltzmann sur réseau thermique :

La mise en œuvre de la méthode de Boltzmann sur réseau thermique nécessite un code informatique. En suivant l'organigramme basé sur la méthode à double population de Boltzmann (**Fig.III.3**), un code Matlab a été développé pour simuler le comportement du fluide ainsi que le transfert de chaleur à l'intérieur de l'enceinte carrée.



**Fig. III.3** Organigramme de la méthode à double population

---

**Chapitre IV.**  
**Résultats et discussions**

## IV. Résultats et discussions:

### IV.1 : Introduction :

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de l'étude numérique de la convection naturelle, laminaire en deux dimensions dans une cavité carrée partiellement chauffée en régime permanent (**Fig.III.1**).

L'étude numérique est effectuée en utilisant le code de calcul élaboré et implémenté sur l'éditeur Matlab basé sur la méthode de Boltzmann sur réseau thermique; ainsi que l'utilisation du code de calcul Fluent basé sur la méthode des volumes finis. Ceci permettra la comparaison entre les résultats obtenus avec les deux méthodes.

Tout d'abord, une étude de la validation du code de calcul élaboré avec TLBM et la procédure de modélisation et simulation par le logiciel *Fluent* s'impose. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux des travaux trouvés dans la littérature [8], [40], [41].

De ce fait, une étude de la convection naturelle dans une cavité carrée différentiellement chauffée est utilisée (**Fig.I.1**). Ce type de configuration est associé à un problème classique intensivement étudié et utilisé pour vérifier l'exactitude des codes numériques.

### IV.2 : Etude de validation :

La cavité carrée considérée est de côté  $H$  avec les parois horizontales du haut et du bas adiabatiques et celles verticales sont isothermes et différentiellement chauffée. On note que la paroi de gauche est totalement chauffée  $L=H$  (**Fig.I.1**).

Il convient de signaler que les présentes simulations ont été réalisées avec les deux méthodes et dans les mêmes conditions appliquées dans les travaux de la bibliographie [8], [40], [41]. Notamment le fluide emprisonné dans l'enceinte est d'un nombre de Prandtl égal à **0.71**; son écoulement est considéré comme étant bidimensionnel, incompressible et de régime laminaire stationnaire, avec l'application d'un gradient de

température orthogonal à la force de volume tandis que le reste de l'enceinte est thermiquement isolé. Le nombre de Rayleigh est choisi entre  $10^3$  à  $10^6$ .

### IV.2.1 Méthode des volumes finis (MVF) :

La précision des résultats dépend dans une large mesure de la qualité du maillage utilisé. Cela doit donc tenir compte de l'existence d'importants gradients thermiques et le développement de la couche limite auprès des parois de l'enceinte. De ce fait, l'option pour un maillage structuré, non-uniforme (de plus en plus raffiné dans le sens allant du centre de l'enceinte aux parois) semble être nécessaire à la simulation de la convection à l'intérieur de l'enceinte. La création de la géométrie et son maillage en a été faite par *Gambit 2.3.16* le préprocesseur du code commercial *Fluent 6.3*.

#### IV.2.1.1 Procédure de simulation sous Fluent :

La méthode des volumes finis (MVF) permet de convertir les équations aux dérivées partielles en expressions algébriques, le système d'équations (2.12) ainsi obtenu sera itérativement résolu par le code *Fluent 6.3*. Pour ce faire efficacement, les options suivantes ont été choisies sur l'interface de *Fluent 6.3* :

- a- La résolution des équations discrétisées est effectuée par l'algorithme SIMPLE [26].
- b- Le schéma *Presto!* Connu comme étant le plus adapté pour les écoulements rotatifs [27] a été utilisé pour le calcul de la pression.
- c- Le schéma amont de second ordre « *Second Order Upwind Scheme* » a été choisi pour la quantité de mouvement et l'énergie.
- d- Critère de convergence égal à  $10^{-6}$  pour la quantité de mouvement et l'énergie, et de  $10^{-3}$  pour la continuité.

### IV.2.1.2 Choix des maillages optimaux :

Le post-traitement des résultats de la simulation de la convection laminaire à l'intérieur de l'enceinte carrée (**Fig. I.1**) pour  $L = H$  et pour les différents maillages a permis de valider les valeurs du nombre de Nusselt moyen (**Tableau. 1**). Ainsi que les maillages optimaux, qui varient de  $40^2$  pour  $10^3$  à  $80^2$  pour  $10^6$ .

**Tableau. 1** : Validation du nombre de Nusselt Moyen pour ( $L = H$ )

<b>Ra</b>	<b>Maillage</b>	<b>Nu<sub>moy</sub> [MVF]</b>	<b>Nu<sub>moy</sub> [8]</b>	<b>Nu<sub>moy</sub> [41]</b>
$10^3$	<b><math>40^2</math></b>	1.116	1.118	1.112
$10^4$	<b><math>60^2</math></b>	2.242	2.243	2.168
$10^5$	<b><math>80^2</math></b>	4.515	4.519	4.228
$10^6$	<b><math>80^2</math></b>	8.802	8.800	8.243

### IV.2.2 Méthode thermique à double population de Boltzmann sur réseau (TLBM) (choix du maillage):

Le code de calcul basé sur le TLBM a été testé pour plusieurs tailles de maillage allant de  $61^2$  à  $301^2$ . Les résultats présentés dans (**tableau. 2**) révèlent les maillages optimaux pour les différentes valeurs du nombre de Rayleigh et qui varient de  $151^2$  pour  $Ra=10^3$  à  $251^2$  pour  $Ra=10^6$ .

**Tableau. 2 :** Maillages optimaux pour la méthode TLBM

<b>Ra</b>	<b>Maillage</b>	<b>Nu<sub>moy</sub></b> <b>[TLBM]</b>	<b>Nu<sub>moy</sub></b> <b>[8]</b>	<b>Nu<sub>moy</sub></b> <b>[41]</b>
10 <sup>3</sup>	<b>151<sup>2</sup></b>	1.115	1.118	1.112
10 <sup>4</sup>	<b>171<sup>2</sup></b>	2.221	2.243	2.168
10 <sup>5</sup>	<b>251<sup>2</sup></b>	4.441	4.519	4.228
10 <sup>6</sup>	<b>301<sup>2</sup></b>	8.615	8.800	8.243

### IV.2.3 Discussions des résultats de la validation:

Les résultats physiques et comparatifs sont présentés par les figures de (**Fig. IV.1**) à (**Fig. IV.6**) avec les deux méthodes de calcul sous forme d'isothermes, de lignes de courants, des profils de température et de vitesse et du nombre de Nusselt moyen. L'examen de ces figures permet d'analyser le comportement du transport thermo-fluide ayant lieu lors de la convection naturelle à l'intérieur de l'enceinte carrée différentiellement chauffée en régime laminaire permanent.

#### IV.2.3.1 Transfert thermique :

Comme le système de la cavité est fermé (pas d'échange de fluide avec le milieu extérieur), un écoulement de fluide se pose à l'intérieur de la cavité et déforme le champ de température résultant de la pure conduction. Le fluide en mouvement absorbe de la chaleur du mur gauche puis la cède au mur froid :

Comme l'illustre la figure (**Fig.IV.1.a**), pour une faible valeur du nombre de Rayleigh ( $Ra = 10^3$ ), les isothermes semblent être normales aux parois adiabatiques horizontales, donc quasiment parallèles aux parois actives ; cela se traduit par le fait qu'il

n'y a pas de transfert de chaleur à travers les parois horizontales et que le transfert de chaleur à travers la cavité est principalement dominé par la conduction : puisqu'il a une température assez supérieure à celle du fluide contenu à l'intérieur de la cavité, le mur gauche transmet de la chaleur au fluide par conduction ; ce qui va, naturellement, élever la température des couches fluide se trouvant au voisinage du mur gauche et ainsi de suite.

Pour un nombre de Rayleigh égal à  $10^4$ , des couches limites thermiques font leur apparition près des parois chauffées dans lesquelles l'échange de la chaleur se fait beaucoup plus rapidement qu'avant, ce qui implique un changement brusque dans la température comme le montrent les isothermes (**Fig.IV.1.b**). Par ailleurs, du fait que le transfert de chaleur se produit dans la partie supérieure de la cavité, une stratification de la température se forme progressivement. Il convient de signaler que la conduction joue encore un rôle important, comme mécanisme de transfert de chaleur, par rapport à la convection.

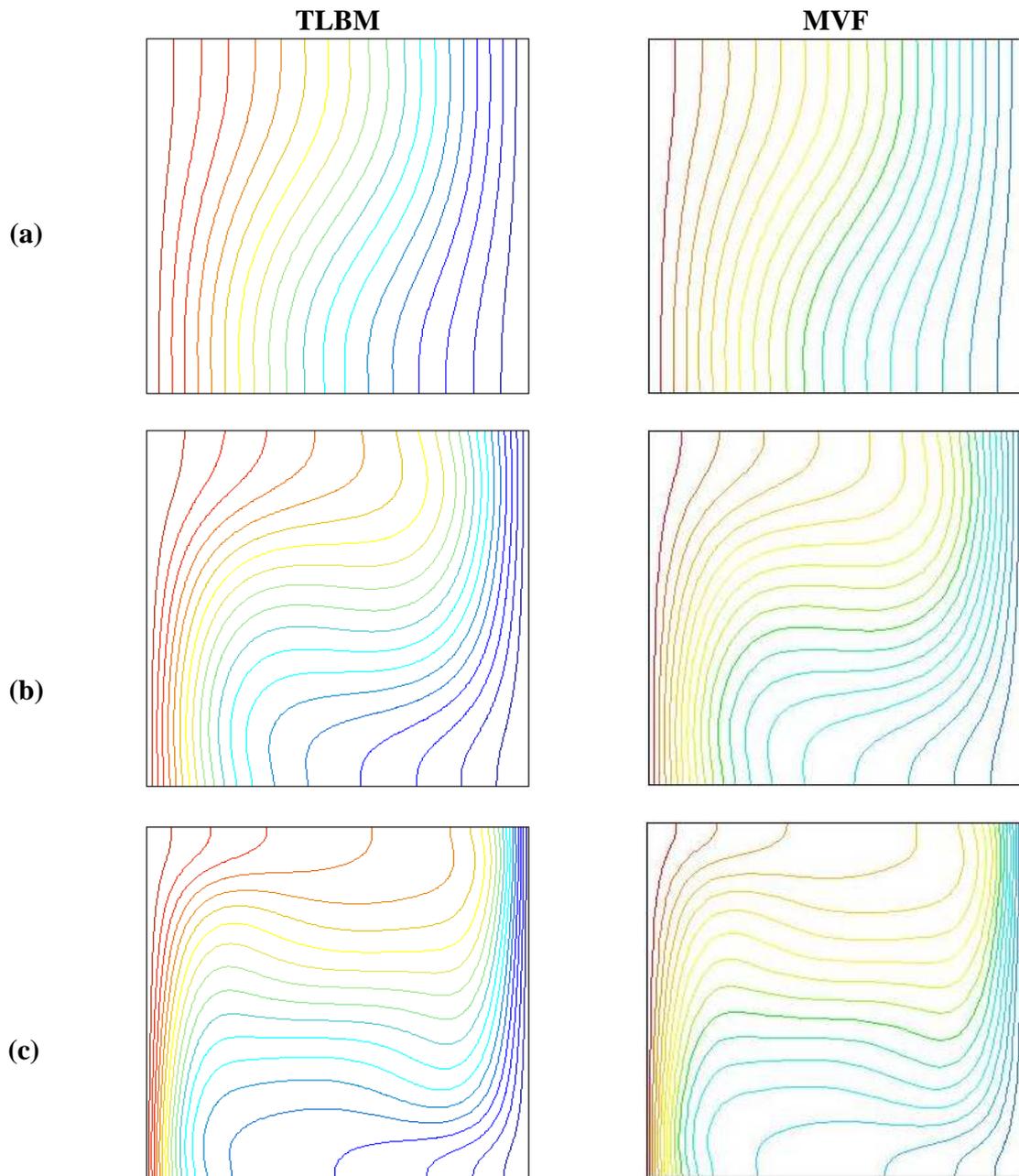
Quand le nombre de Rayleigh s'élève à  $10^5$ , il existe une transformation dans les isothermes : les régions limites sont denses près des parois chauffées alors que les isothermes deviennent presque horizontales au centre de la cavité (**Fig.IV.1.c**). Cela indique que la convection devient dominante comme mécanisme de transport de la chaleur et que le rôle de la conduction est sensiblement affaibli dans le processus du transfert de chaleur.

Pour un nombre de Rayleigh égal à  $10^6$ , les isothermes finissent par devenir plus rétrécies près des murs verticaux avec une uniformité horizontale dans la zone du centre de cavité. Cela veut dire que le processus de transfert de chaleur dans la cavité est pleinement dominé par la convection qui, comme le montre la figure (**Fig.IV.1.d**), semble être de plus en plus amplifiée.

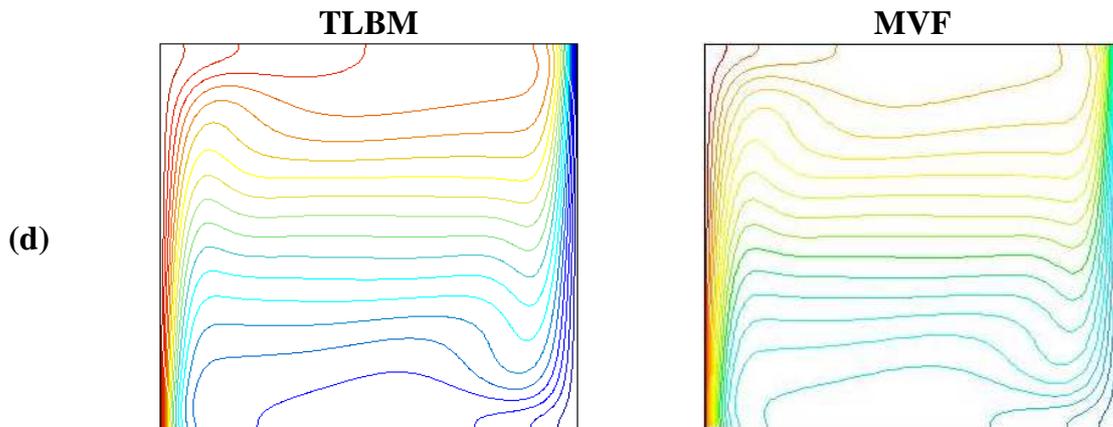
#### **IV.2.3.2 L'écoulement du fluide:**

Les figures (**Fig. IV.2.a, b, c, d**) montrent la topologie de l'écoulement du fluide à l'intérieur de la cavité. En résumé, on peut faire le constat suivant : plus le nombre de

Rayleigh augmente, plus les lignes de courant se resserrent au voisinage des murs verticaux. Elles forment une couche limite hydrodynamique mettant en évidence l'existence d'un fort gradient de vitesse dû aux effets de la convection naturelle :



**Fig. IV.1.** Comparaison des isothermes,  $L = \mathbf{H}$ , (a)  $Ra = 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$ , (c)  $Ra = 10^5$



**Fig. IV.1. (Suite)** Comparaison des isothermes,  $L = H$ , (d)  $Ra = 10^6$

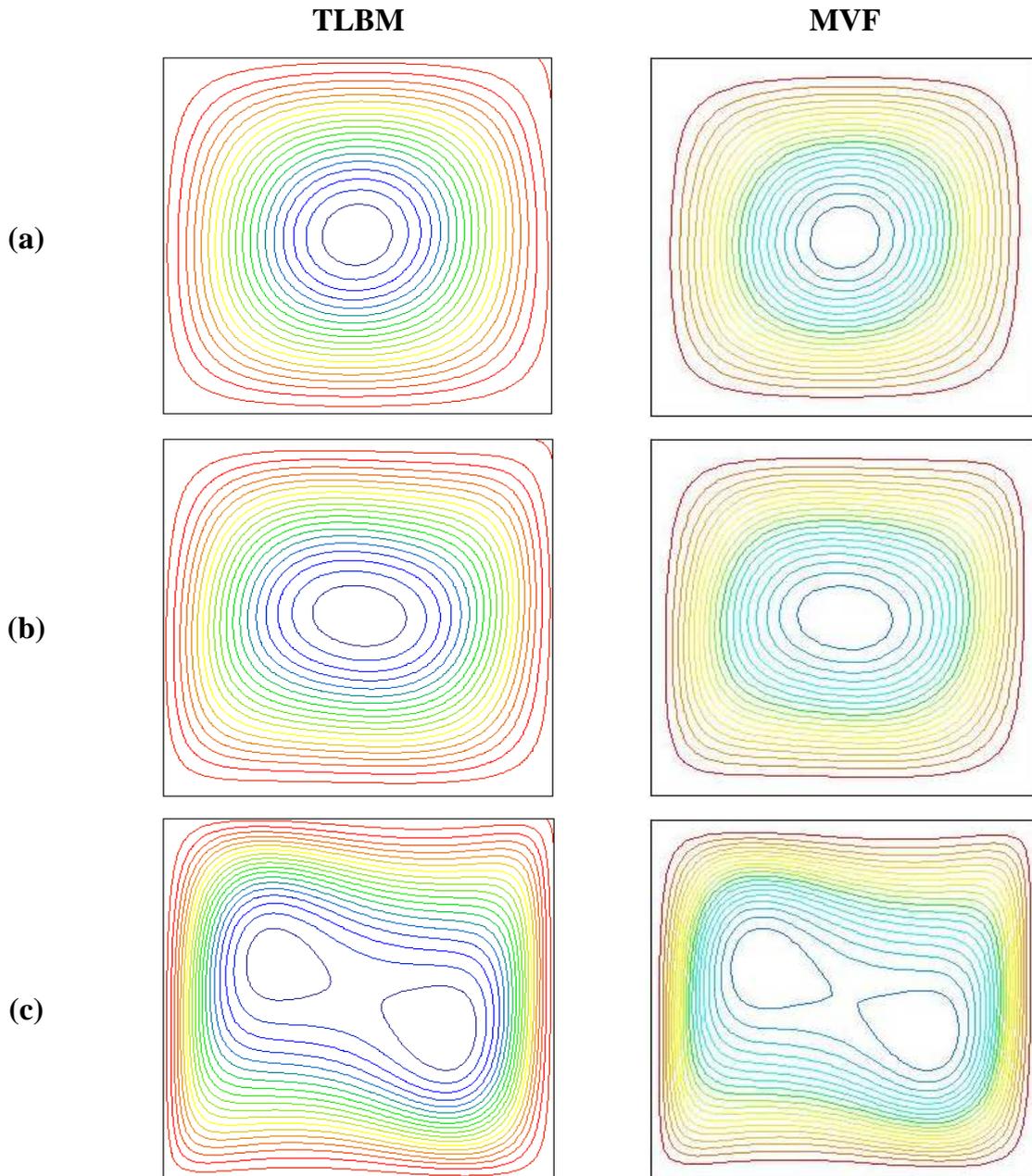
À une faible valeur du nombre de Rayleigh,  $Ra = 10^3$ , les lignes de courant se sont diffusées, dans le sens horaire, autour d'une cellule de circulation sise au centre de la cavité (**Fig.IV.2.a**) ; cela révèle que la convection est faible.

La (**Fig.IV.2.b**) montre que la présence de la cellule persiste pour  $Ra = 10^4$  mais avec une légère déformation : la cellule semble être étirée vers les deux murs verticaux ; cela peut se traduire par le fait que la convection vient d'être initialisée.

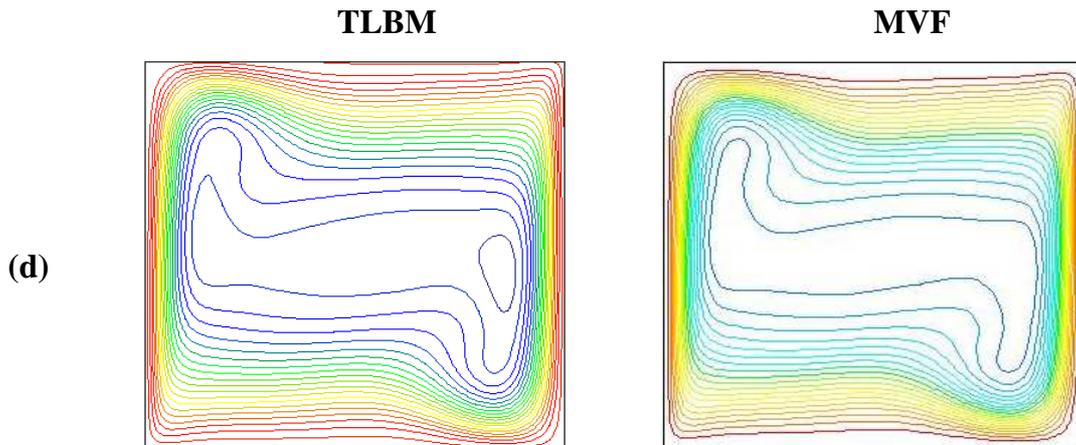
Pour  $Ra = 10^5$  (**Fig.IV.2.c**), la région la plus intérieure de la circulation principale se divise en deux petits tourbillons contrarotatifs, tendus vers le coin supérieur gauche et le coin inférieur droit le long d'une ligne imaginaire reliant les deux tourbillons, donnant ainsi une non-uniformité à la distribution des lignes de courant : l'écoulement est alors d'une structure bicellulaire ; cela s'explique par le fait que la convection devient plus forte dans la région externe mais en revanche commence à s'affaiblir dans la zone du cœur là où le fluide est devenu presque stagnant.

À un nombre de Rayleigh encore augmenté jusqu'à  $Ra = 10^6$ , il existe une évolution dans la distribution, toujours non-uniforme, des lignes de courant qui se sont essentiellement regroupées dans la région externe, donc elles se font rares dans la région du cœur de la cavité (**Fig.IV.2.d**). Par conséquent, le fluide circulant dans la région externe est beaucoup plus influencé par les conditions aux limites thermiques permettant

ainsi un transfert thermique plus important contrairement à la région du centre là où le fluide est pratiquement presque stationnaire ; des lors l'écoulement n'est plus laminaire.



**Fig. IV.2.** Comparaison des lignes de courant,  $L = \mathbf{H}$ , (a)  $Ra = 10^3$ ,  
(b)  $Ra = 10^4$ , (c)  $Ra = 10^5$



**Fig. IV.2. (Suite)** Comparaison des isothermes,  $L = \mathbf{H}$ , (d)  $Ra = 10^6$

#### IV.2.3.3 Variation de la température :

L'examen des profils de la température adimensionnée à la mi-hauteur de la cavité perpendiculairement au mur chaud (**Figs.IV.3**) permet d'observer une variation progressive de  $T_c$  à  $T_f$ , d'abord rapide puis de plus en plus lente à mesure qu'on pénètre dans l'écoulement. En effet, on constate que la température est maximale à la position  $X = \mathbf{0}$  (ce qui correspond à la position du chauffage) ensuite elle ne cesse de décroître, progressivement, dans la direction des  $X > \mathbf{0}$  jusqu'à ce qu'elle soit nulle à la position  $X = \mathbf{H}$  (celle-ci correspond au mur froid). La température varie linéairement en décroissance pour  $Ra = 10^3$ , cela signifie que le transfert de chaleur est dominé par la conduction. Par contre, on constate qu'il y a une stabilité de température ( $\theta = \mathbf{0.5}$  qui correspond à la température moyenne du fluide) dans la zone limitée par les droites  $X = 0.35$  et  $X = 0.65$  pour  $Ra = 10^4$ ; la largeur de cette zone de stabilité de la température s'accroît, au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente, jusqu'à ce qu'elle devienne comprise entre les positions  $X = 0.15$  et  $X = 0.85$  où le fluide se comporte comme un système isolé conséquence de sa stagnation. On en peut conclure que le transfert de chaleur se fait essentiellement dans la région externe et que le rôle de la

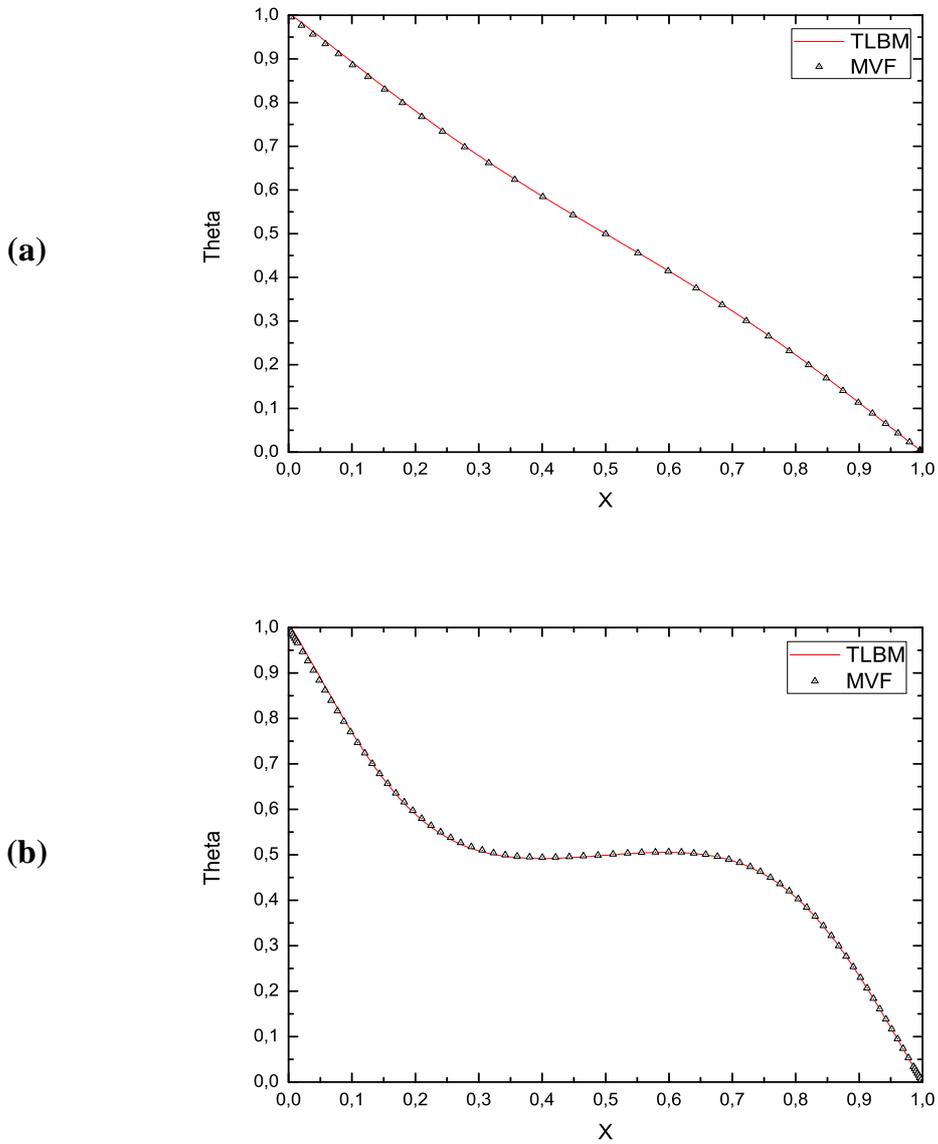
convection, dans le processus du transfert de chaleur dans la cavité, devient de plus en plus dominant contre celui de la conduction.

#### IV.2.3.4 Distribution des vitesses :

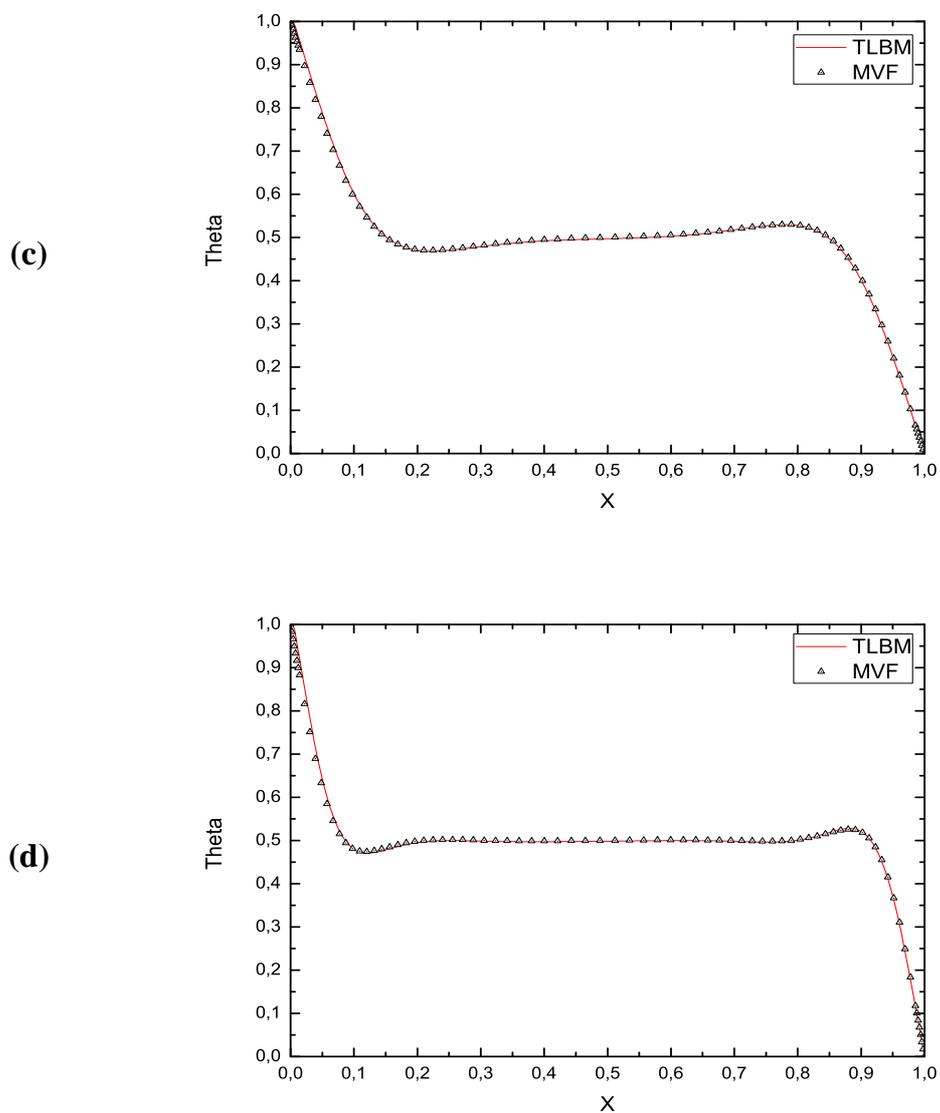
Les figures (**Fig.IV.4-5**) montrent la variation de la composante horizontale (et/ou verticale) de la vitesse par rapport aux ordonnées (et/ou abscisses) en fonction du nombre de Rayleigh. Il est bien évident que la courbe représentant la vitesse présente toujours une telle symétrie par rapport à la ligne imaginaire passant par  $Y = 0.5$  (et/ou  $X=0.5$ ) ; la vitesse varie comme suit : la vitesse est nulle à la paroi ( $Y = 0$ ) ensuite elle se met à s'accroître, peu à peu, jusqu' à atteindre son seuil : compte tenu du développement de la couche limite hydrodynamique, une telle variation est normale ; puis elle se met à se décroître jusqu' à devenir nulle à la position correspondante au centre de la cavité . Ainsi se comporte la vitesse après mais cette fois-ci de signe opposé. D'après cela, on peut conclure que l'écoulement à l'intérieur de la cavité se fait dans le sens horaire. Par ailleurs, ces figures montrent aussi qu'au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente, la vitesse s'intensifie encore et le fluide devient presque immobile dans la zone du centre de cavité mais plus actif dans la zone externe. Il en est de même pour la vitesse verticale (**Fig.IV.5**).

#### IV.2.3.5 Calcul du nombre de Nusselt moyen:

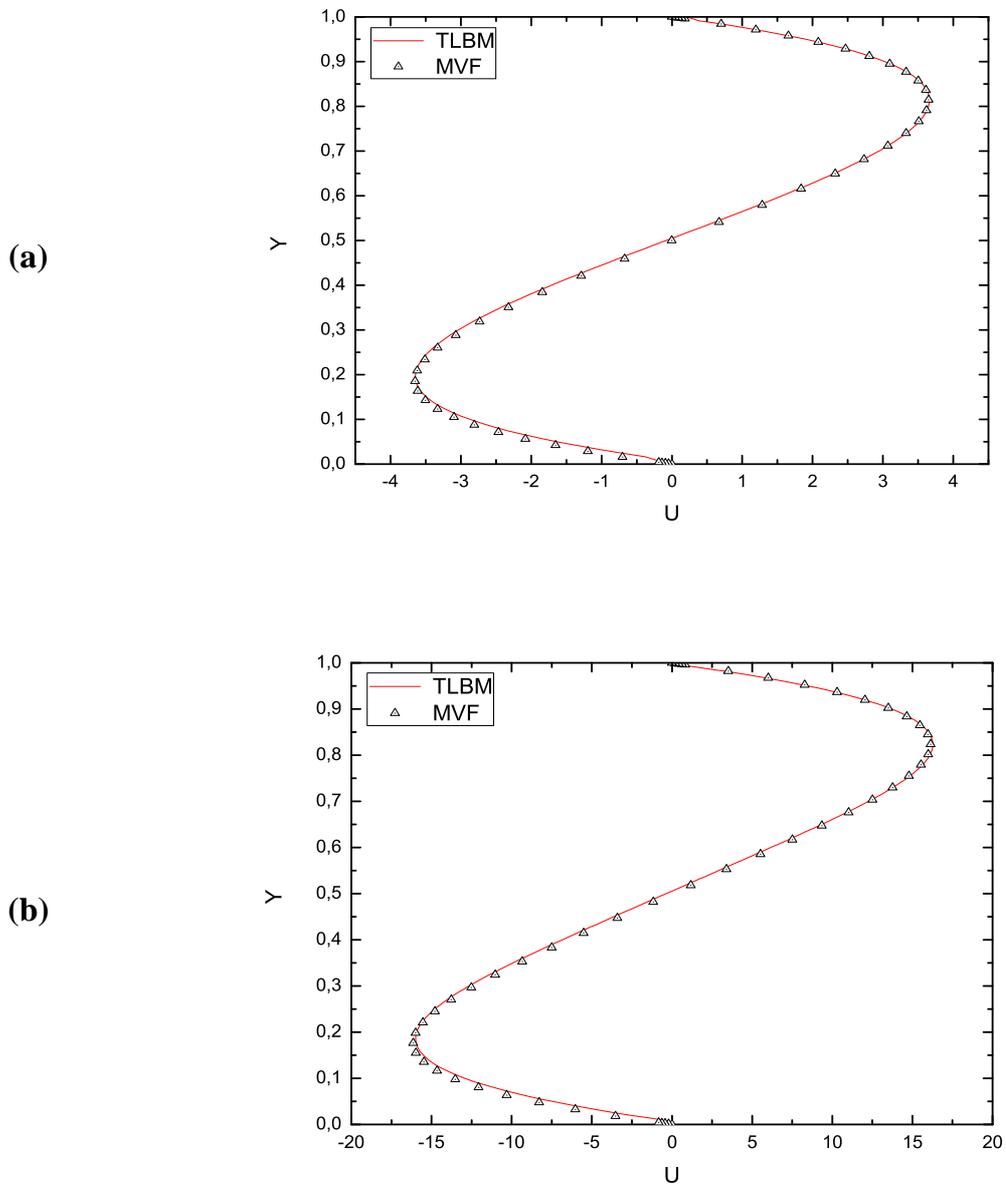
Encore une fois, la domination de la conduction dans le cas de  $Ra = 10^3$  se confirme par la valeur du nombre de Nusselt moyen correspondante ( $Nu_{\text{moy}} = 1.115$ ) ; il est bien clair que le transfert de chaleur à travers la cavité est bel et bien faible, conséquence de la faible convection et de la faible conductivité thermique du fluide considéré (particularité de l'isolant thermique). Pour  $Ra = 10^4 \sim 10^6$ , on constate une croissance de la valeur du nombre  $Nu_{\text{moy}}$  en fonction de l'augmentation du nombre de Rayleigh (**Tableau.3**); cela s'interprète comme une considérable amélioration du transfert de chaleur à travers la cavité assuré essentiellement par le mode convectif.



**Fig.IV.3.** Profils de Température adimensionnelle  $\theta$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = H$ ,  $Y = 0.5$ , (a)  $Ra = 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$

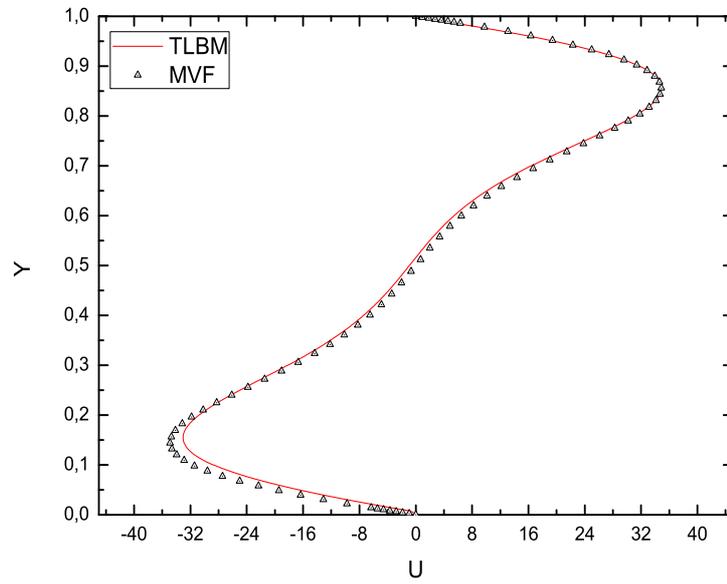


**Fig.IV.3. (Suite)** Profils de Température adimensionnelle  $\theta$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = H$ ,  $Y = 0.5$ , (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$

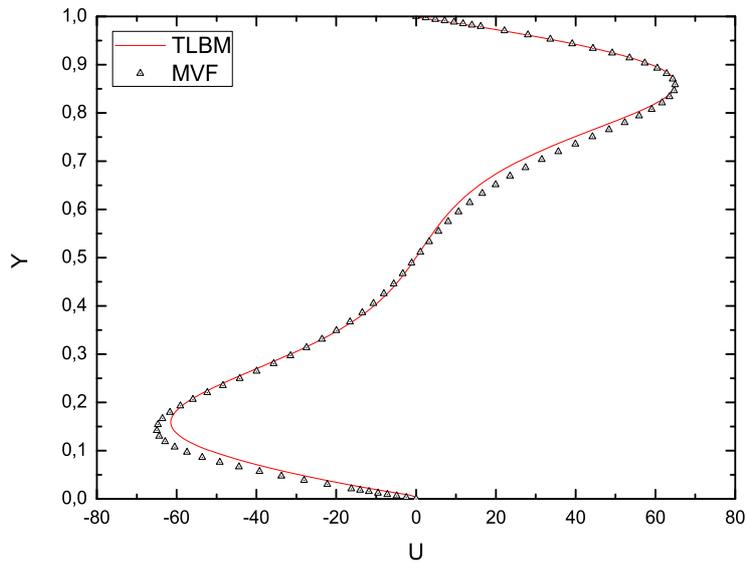


**Fig.IV.4.** Profils de Vitesse adimensionnelle  $U$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = H$ ,  $X = 0.5$ , (a)  $Ra = 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$

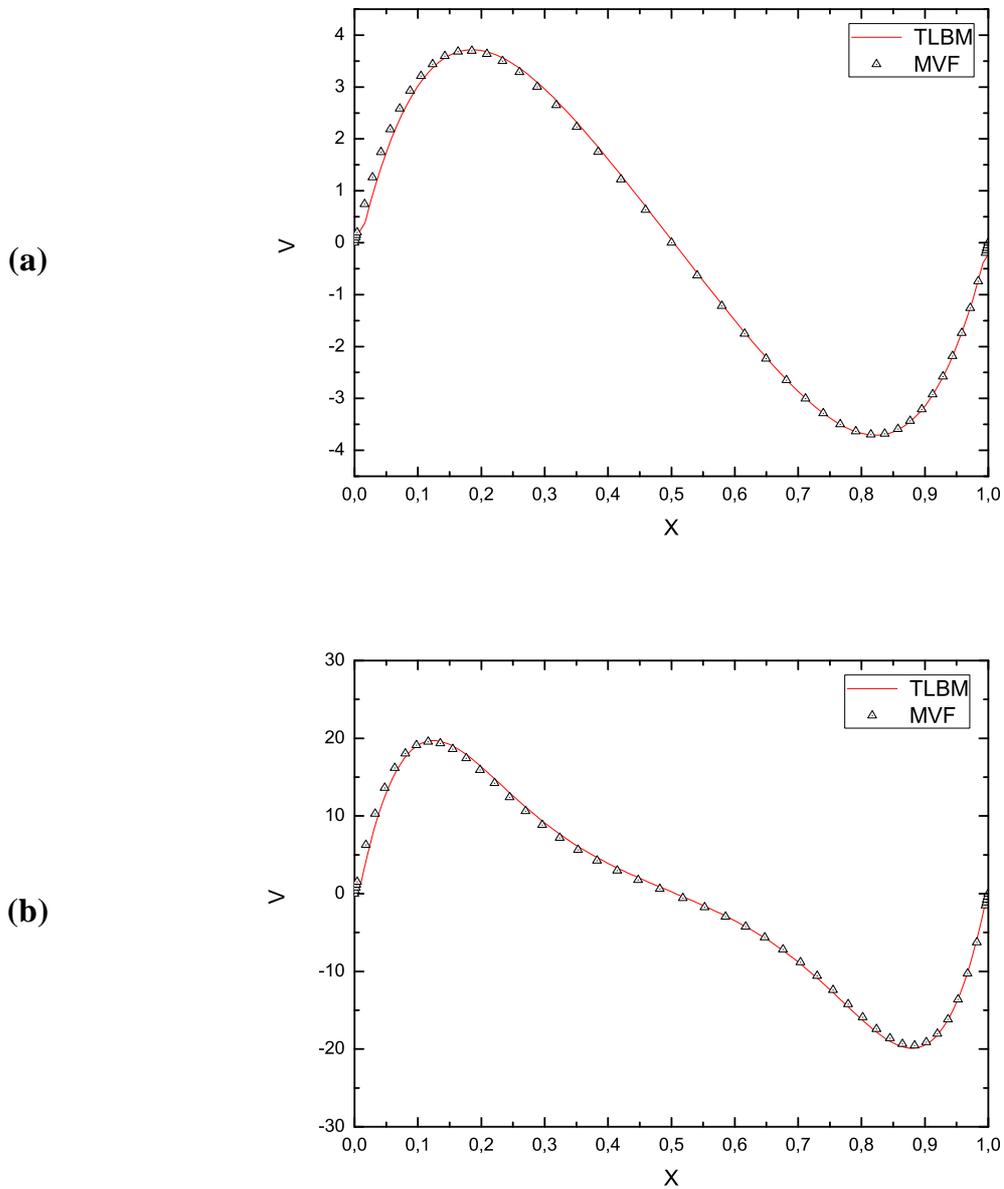
(c)



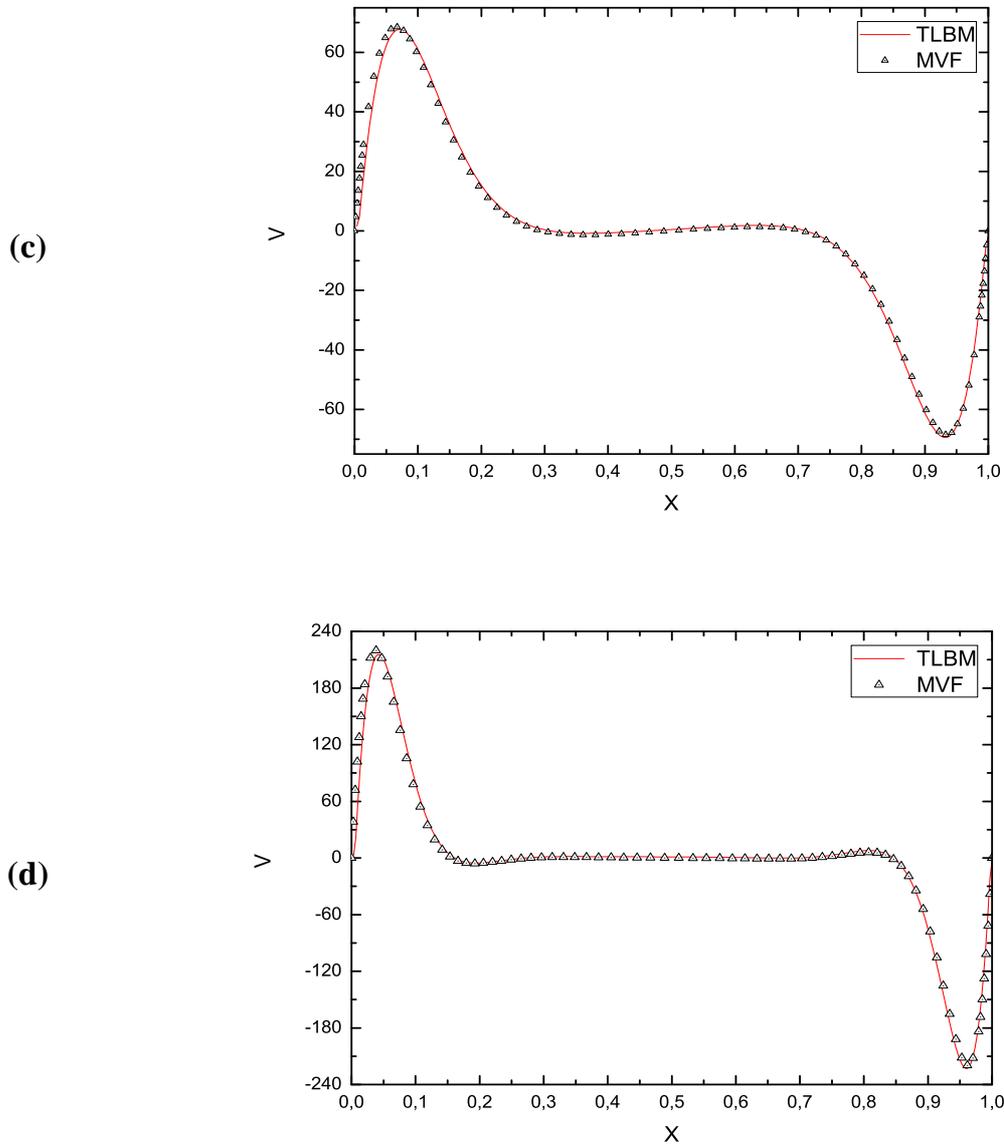
(d)



**Fig.IV.4. (Suite)** Profils de Vitesse adimensionnelle  $U$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = H$ ,  $X = 0.5$ , (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$



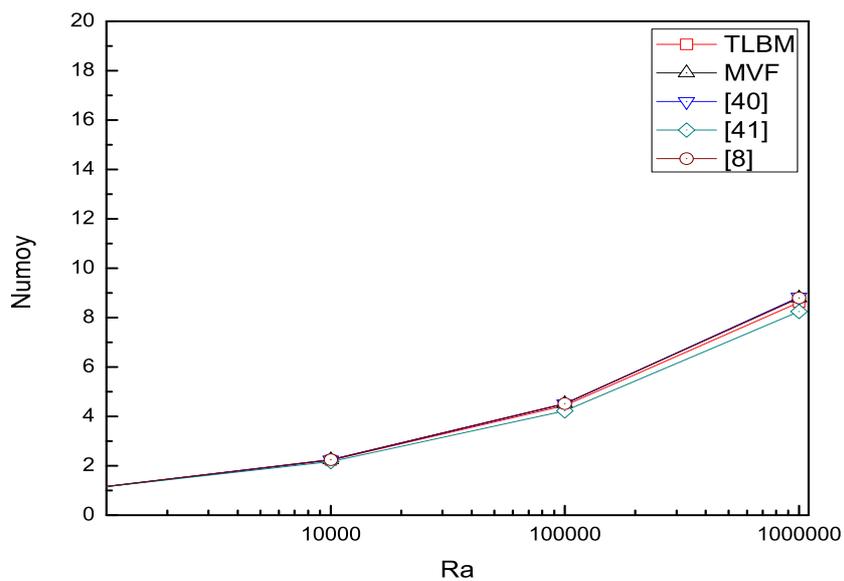
**Fig.IV.5.** Profils de Vitesse adimensionnelle  $V$  à mi-hauteur de l'enceinte, Pour  $L = H$ ,  $X = 0.5$ , (a)  $Ra = 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$



**Fig.IV.5. (Suite)** Profils de Vitesse adimensionnelle  $V$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = \mathbf{H}$ ,  $X = \mathbf{0.5}$ , (c)  $Ra = \mathbf{10^5}$ , (d)  $Ra = \mathbf{10^6}$

**Tableau.3 :** Présentation des résultats obtenus pour le nombre de Nusselt moyen pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh avec les résultats de la littérature

$Ra$	<i>Résultats du présent travail</i>		<i>Résultats des auteurs</i>		
	TLBM	MVF	Mobedi [40]	Bairi [41]	Davis [8]
$10^3$	1.115	1.116	1.113	1.112	1.118
$10^4$	2.221	2.242	2.237	2.168	2.243
$10^5$	4.441	4.515	4.510	4.228	4.519
$10^6$	8.615	8.802	8.833	8.243	8.800



**Fig.IV.6.** Validation du Nombre de Nusselt Moyen ( $Nu_{moy}$ ),  $L = H$

#### IV.2.3.6 Comparaison des valeurs maximales des composantes des vitesses et leurs positions :

Il est clair que les résultats obtenus sont en très bon accord avec les résultats des auteurs ; comme le montre le (**Tableau. 4**) l'erreur est acceptable (4% au maximum) pour la vitesse et (5% au maximum) pour la position.

**Tableau. 4 :** Comparaison des valeurs maximales des composantes de la vitesse à mi-hauteur de l'enceinte carrée ( $X = Y = H/2$ ) et leurs positions.

$Ra$		$U_m$	$Err.$	$Y$	$Err.$	$V_m$	$Err.$	$X$	$Err.$
	<b>TLBM</b>	3.642	-	0.811	-	3.697	-	0.188	-
$10^3$	<b>MVF</b>	3.651	0.24%	0.814	0.36%	3.686	0.29%	0.185	1.59%
	[8]	3.649	0.19%	0.813	0.24%	3.697	0.00%	0.178	5.31%
	[41]	3.613	0.79%	0.803	0.98%	3.539	4.27%	0.185	1.59%
	<b>TLBM</b>	16.189	-	0.823	-	19.614	-	0.124	-
$10^4$	<b>MVF</b>	16.182	0.04%	0.820	0.36%	19.611	0.01%	0.118	4.83%
	[8]	16.178	0.06%	0.823	0.00%	19.617	0.01%	0.117	5.64%
	[41]	15.950	1.47%	0.816	0.85%	19.390	1.14%	0.115	7.25%
	<b>TLBM</b>	34.904	-	0.854	-	68.205	-	0.068	-
$10^5$	<b>MVF</b>	34.866	0.10%	0.856	0.23%	68.530	0.47%	0.067	1.47%
	[8]	34.730	0.49%	0.855	0.11%	68.590	0.56%	0.066	2.94%
	[41]	35.110	0.59%	0.860	0.70%	68.920	1.04%	0.063	7.35%
	<b>TLBM</b>	65.013	-	0.858	-	214.205	-	0.039	-
$10^6$	<b>MVF</b>	65.220	0.31%	0.846	1.39%	219.298	2.32%	0.038	2.56%
	[8]	64.630	0.58%	0.850	0.93%	219.360	2.35%	0.039	0.00%
	[41]	66.410	2.14%	0.858	0.00%	222.700	3.96%	0.038	2.56%

### IV.2.3.7 Bilan de la validation :

Les résultats de comparaison des simulations sous formes d'isothermes, de lignes de courant, de profils de température et valeurs maximales des composantes de vitesse y compris leurs positions ; montrent une très bonne concordance entre les deux méthodes. Les tableaux des résultats comparatifs (**Tableau 3 et 4**), confirment cette concordance ; ils permettent aussi de constater que les valeurs obtenues par les présentes simulations sont très proches de celles trouvées dans la littérature. En conclusion, le code de calcul basé sur la méthode **TLBM** et la procédure de simulation par la méthode **MVF** sous le logiciel *Fluent* ont été validées avec succès en comparaison avec les résultats de la littérature.

## IV.3 Résultats de calcul pour la cavité partiellement chauffée :

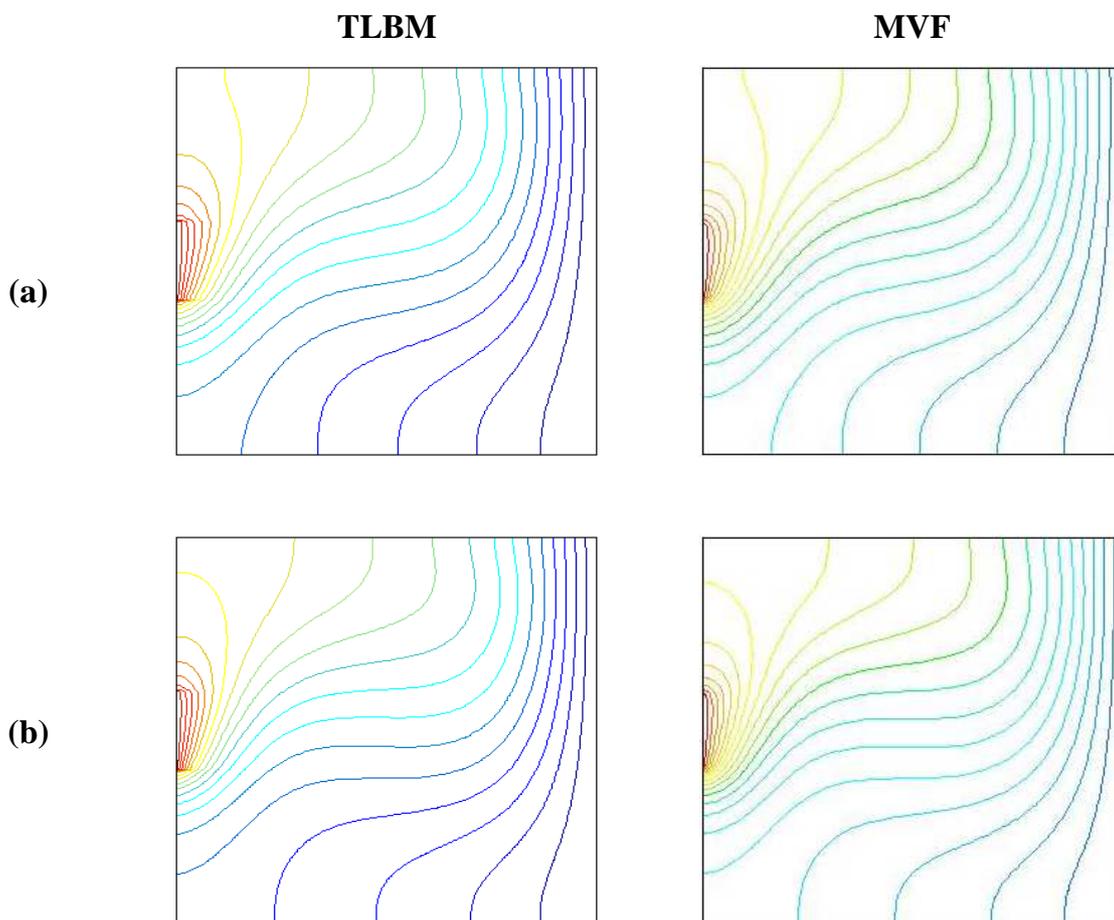
Dans cette partie, l'étude va s'étendre sur l'exploitation de ces deux méthodes (**TLBM** et **MVF**) pour examiner le phénomène du transport thermo-fluide dans la même cavité étudiée dans la partie de la validation, mais cette fois-ci avec un chauffage partiel de son mur gauche avec  $L/H = 20\%, 40\%, 60\%$  et  $80\%$  (**Fig.III.1**).

### IV.3.1 Effet du nombre de Rayleigh :

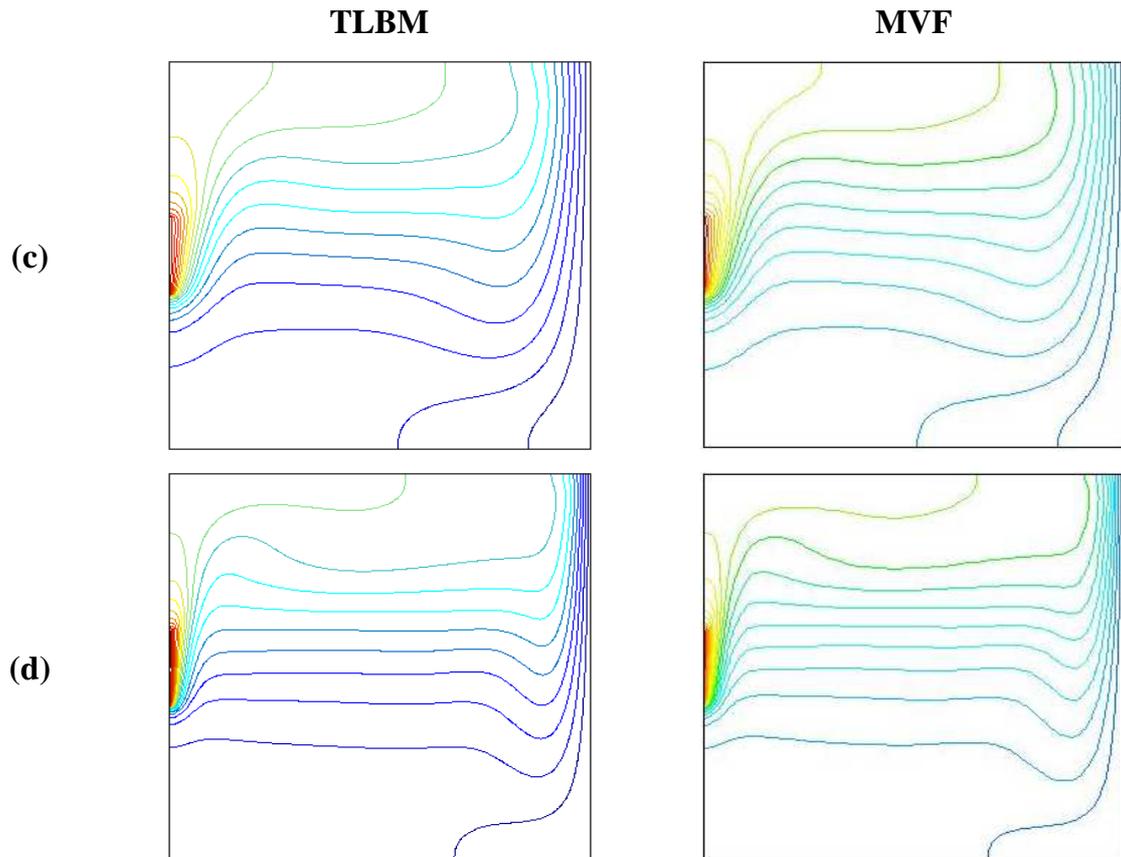
#### IV.3.1.1. Les isothermes :

Les figures (**Fig.IV.7**), (**Fig.IV.12**), (**Fig.IV.17**) et (**Fig.IV.22**) représentent les isothermes calculées avec les deux méthodes pour les cas de chauffage respectivement à  $20\%$ ,  $40\%$ ,  $60\%$  et  $80\%$  du mur gauche. L'examen de ces figures montre que les lignes matérialisant les isothermes deviennent de plus en plus concentrées près des régions chauffées en fonction de l'augmentation du nombre de Rayleigh, de sorte qu'elles soient presque parallèles à ces régions ; contrairement à la zone du cœur, là où elles ont tendance d'être presque horizontales (**a**) et (**b**). Ce qui signifie que la conduction persiste encore comme mode de transfert de chaleur et que la convection vient d'être faiblement

initialisée. À  $Ra = 10^5$ , les isothermes deviennent tout à fait horizontales dans la zone du cœur alors qu'elles se resserrent beaucoup plus au voisinage des régions chauffées (c) pour former une couche limite thermique dense mettant en évidence l'existence d'un fort gradient de température dû aux effets de la convection naturelle. À  $Ra = 10^6$ , cette couche limite devient de plus en plus rétrécie (d); cela reflète bien que la convection est de plus en plus dominante, comme mode de transfert de chaleur, par rapport à la conduction qui ne cesse de s'affaiblir.



**Fig. IV.7.** Isothermes,  $L = 0.2 H$ , (a)  $Ra = 6 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$



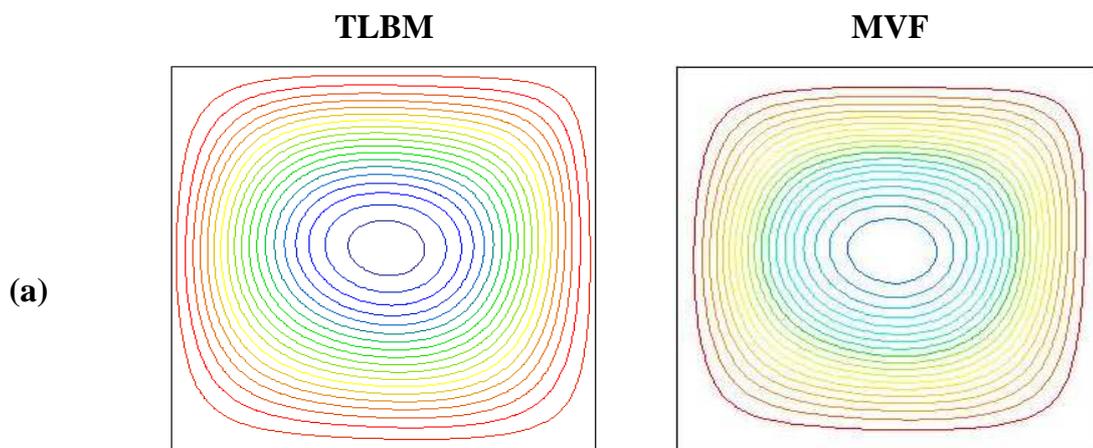
**Fig. IV.7. (Suite)** Isothermes,  $L = 0.2 H$ , (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$

#### IV.3.1.2 Les lignes de courant :

Les figures (**Fig.IV.8**), (**Fig.IV.13**), (**Fig.IV.18**) et (**Fig.IV.23**) représentent les lignes de courant calculées avec les deux méthodes pour les cas de chauffage respectivement à 20%, 40%, 60% et 80% du mur gauche.

La distribution des lignes sur la partie supérieure ressemble à celles obtenues pour le chauffage complet du mur gauche. Par contre celle de la partie inférieure et celle du cœur de l'enceinte sont fortement influencées par l'augmentation du nombre de Rayleigh. En effet, on observe qu'une déformation des lignes fait son apparition et s'accroît avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. À  $Ra = 6.10^3$  et  $10^4$ , les lignes de courant se répartissent uniformément en cernant une cellule repérée au centre de

l'enceinte ; cela veut dire que la convection est faible. Cette uniformité se perturbe à partir de  $Ra = 10^5$ , deux cellules elliptiques contrarotatives font leur apparition : une près du coin supérieur gauche, l'autre près du milieu du mur droit. Par contre, au coin inférieur gauche les lignes commencent peu à peu à se rétrécir au voisinage des régions chauffées et le haut de l'enceinte : une couche limite hydrodynamique dense vient d'être formée. À  $Ra = 10^6$ , les lignes de courant subissent plus de déformation du genre de distorsion dans la partie inférieure, horizontalité au centre, déplacement de la cellule de gauche vers le coin supérieur gauche alors que celle de droite a disparu. Cette déformation est accompagnée par plus de concentration des lignes au niveau des régions citées précédemment; la couche limite est devenue donc plus dense mettant en évidence l'existence d'un fort gradient de vitesse dû aux effets de la convection naturelle. Il convient de souligner que le transfert de chaleur augmente considérablement plus particulièrement au niveau de la partie supérieure de l'enceinte.



**Fig. IV. 8.** Lignes de courant,  $L = 0.2 H$ , (a)  $Ra = 6 \times 10^3$

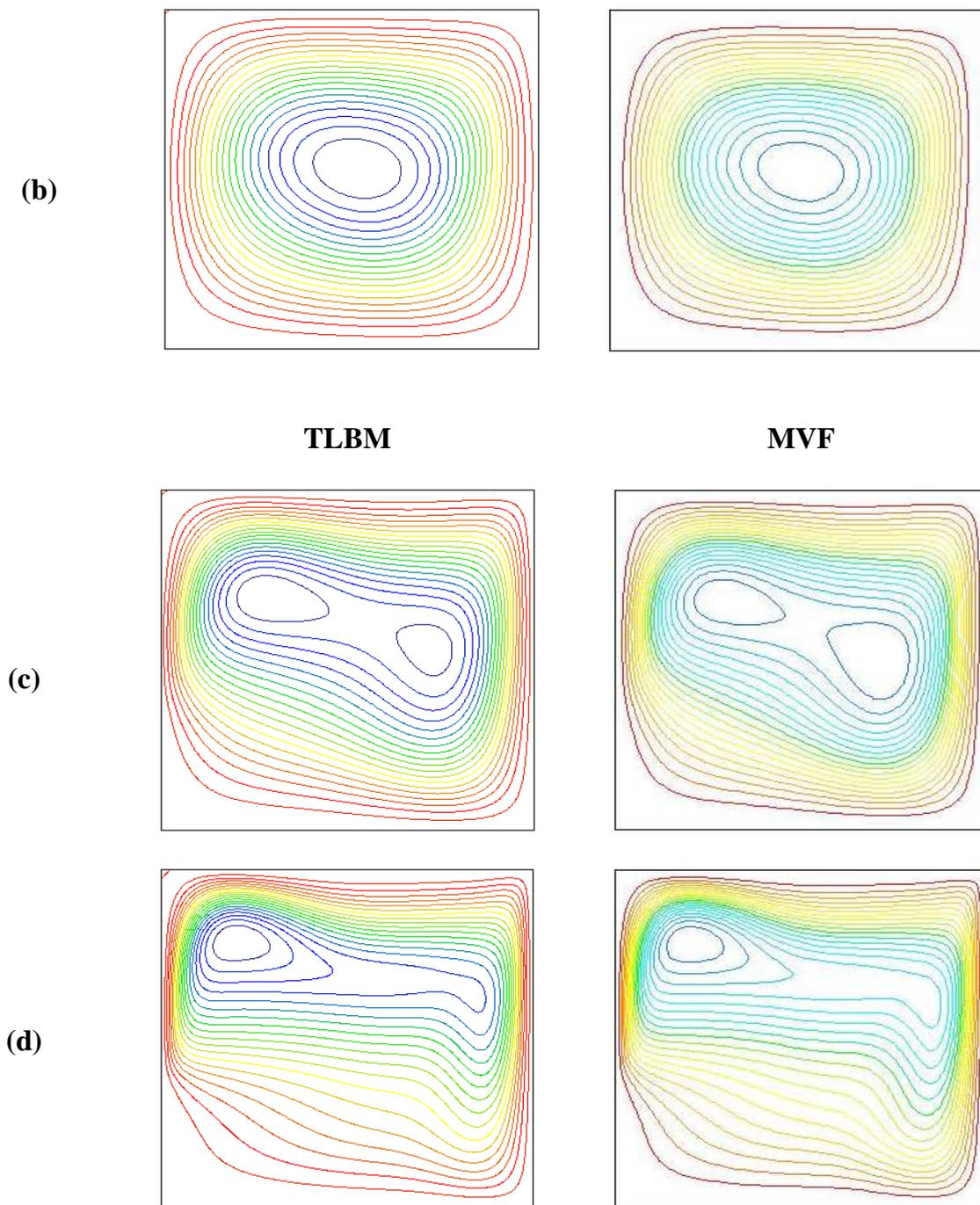


Fig. IV. 8. (Suite) Lignes de courant,  $L = 0.2 H$ , (b)  $Ra = 10^4$  (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$

#### IV.3.1.3. Distribution de la température :

Pour mieux suivre le développement du champ et thermique dans la cavité carrée, les profils de température par rapport à la mi-hauteur de l'enceinte sont tracés et discutés pour tous les cas des longueurs de chauffage.

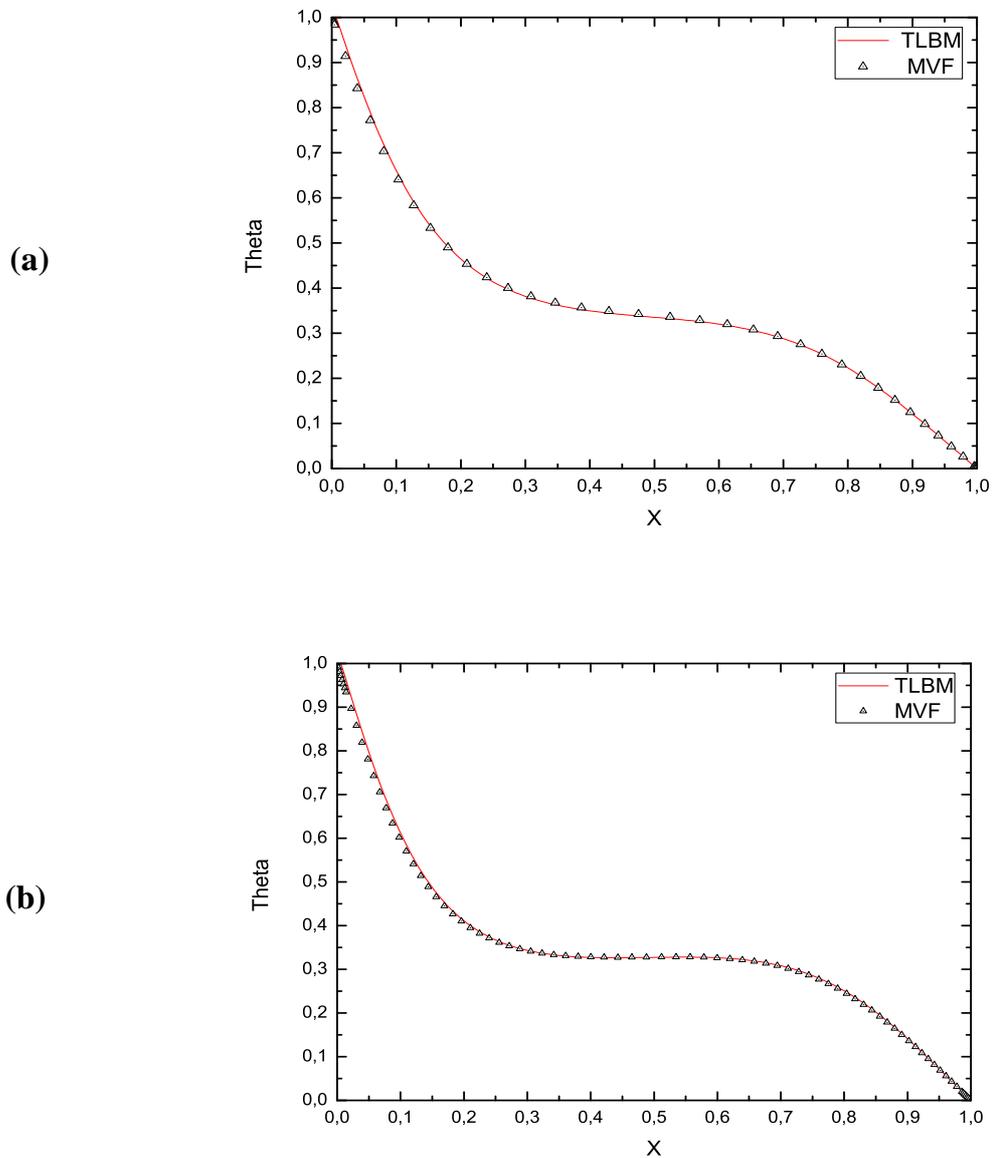
Dans toutes les courbes qui représentent le profil de la température (**Fig.IV.9**, **Fig.IV.14**, **Fig.IV.19** et **Fig.IV.24**) pour respectivement le chauffage à  $L/H=20\%$ ,  $40\%$ ,  $60\%$  et  $80\%$  ; on constate une allure descendante dans une couche qui ne dépasse pas  $X=0,1$  pour la majorité des cas sauf pour le nombre de Rayleigh  $< 10^4$  où la couche de variation peut s'étendre jusqu'à  $X=0,2$ . La température dans cette couche atteint les valeurs dans l'intervalle de  $\theta$  entre  $0,30$  et  $0,40$ . Cette évolution continuera avec une allure presque linéaire et stable entre  $X=0,3$  et  $0,7$ . Près de la couche voisine du mur froid, la température continue à diminuer afin d'atteindre la valeur nulle de  $\theta$ . Cela révèle que l'échange thermique est plus intense dans les zones avoisinant les parois isothermes.

#### IV.3.1.4. Distribution de la vitesse :

Le développement du champ hydrodynamique dans la cavité carrée est suivi, par l'étude des profils de vitesse horizontale (**Fig.IV.10**, **Fig.IV.15**, **Fig.IV.20** et **Fig.IV.25**) et de vitesse verticale (**Fig.IV.11**, **Fig.IV.16**, **Fig.IV.21** et **Fig.IV.26**) par rapport à la mi-hauteur de l'enceinte pour tous les cas des longueurs de chauffage.

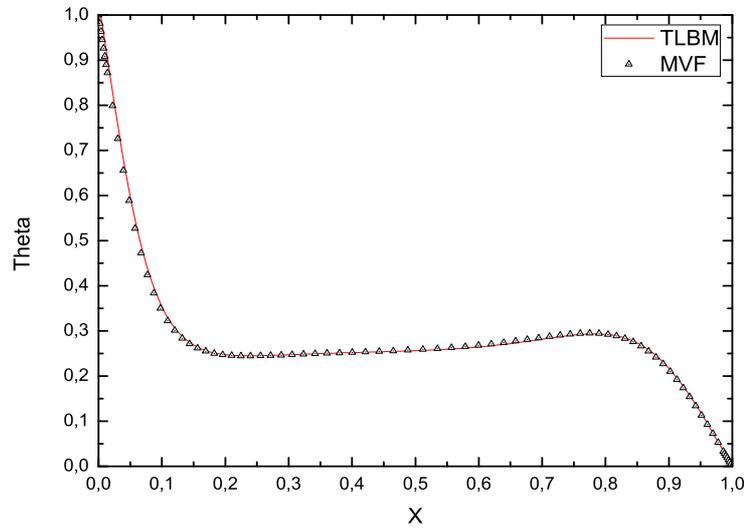
la vitesse horizontale croit en fonction du nombre de Rayleigh : Plus le nombre de Rayleigh augmente, plus la courbe de la vitesse horizontale perd la particularité de la symétrie observée pour le chauffage complet. À  $Ra= 6 \times 10^3$ , on constate qu'il y a une petite différence entre sa valeur maximale près du mur droit et sa valeur maximale près du mur gauche ; cette différence devient de plus en plus considérable (cas du  $Ra = 10^6$ ). Il en est de même pour la vitesse verticale (sauf pour  $Ra=10^6$ ). Par ailleurs et au fur à mesure que le nombre de Rayleigh augmente, la vitesse verticale s'annule dans la zone du centre dont la largeur augmente progressivement jusqu'à atteindre son maximum aux voisinages des parois isothermes. Cela indique que l'augmentation du nombre de

Rayleigh influe sur la vitesse d'écoulement : les particules fluides gagnent plus de vitesse près des parois alors qu'elles sont presque immobiles au centre.

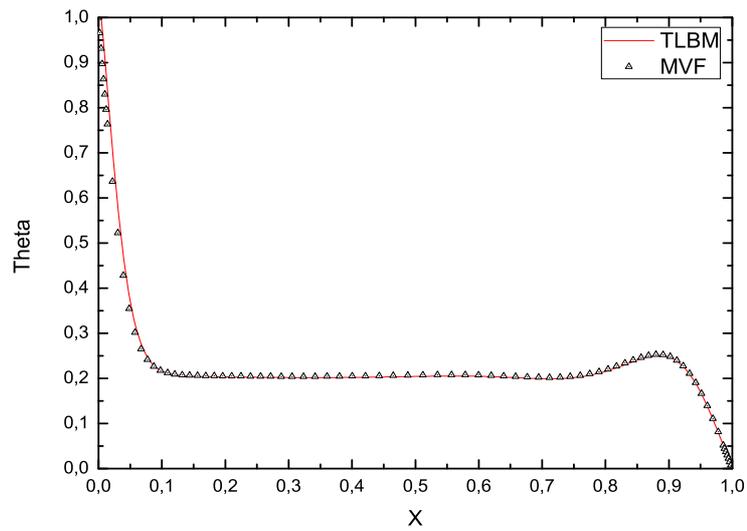


**Fig.IV.9.** Profils de Température adimensionnelle  $\theta$  à mi-hauteur de l'enceinte,  
 $L = 0.2 H$ ,  $Y = 0.5$ , (a)  $Ra = 6 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$

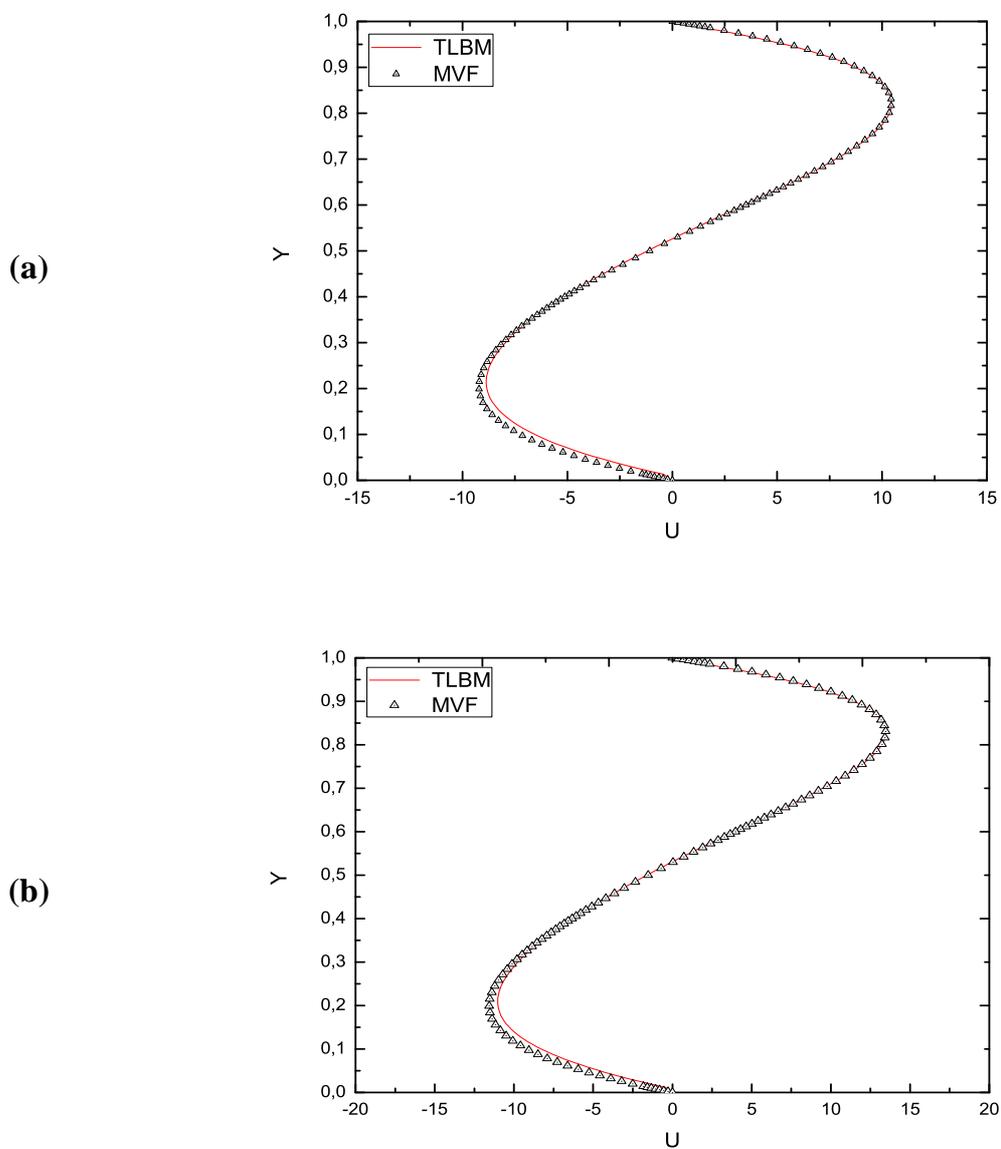
(c)



(d)

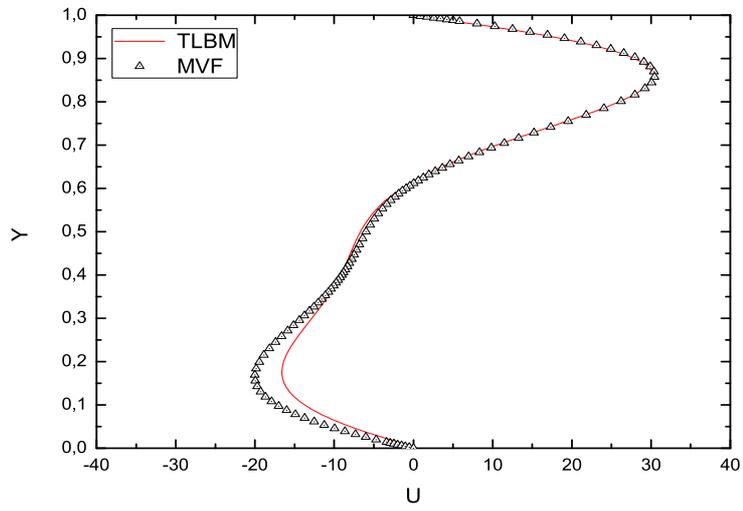


**Fig.IV.9. (Suite)** Profils de Température adimensionnelle  $\theta$  à mi-hauteur de l'enceinte,  
 $L = 0.2 H$ ,  $Y = 0.5$ , (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$

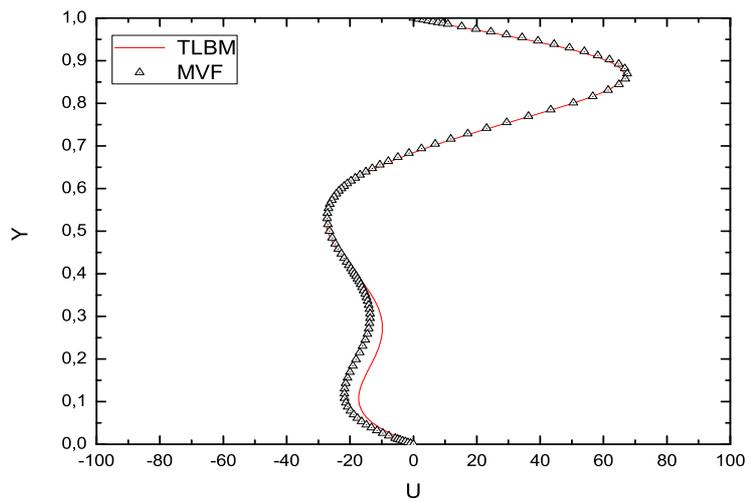


**Fig.IV.10.** Profils de Vitesse adimensionnelle  $U$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.2 H$ ,  $X = 0.5$ , (a)  $Ra = 6 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$

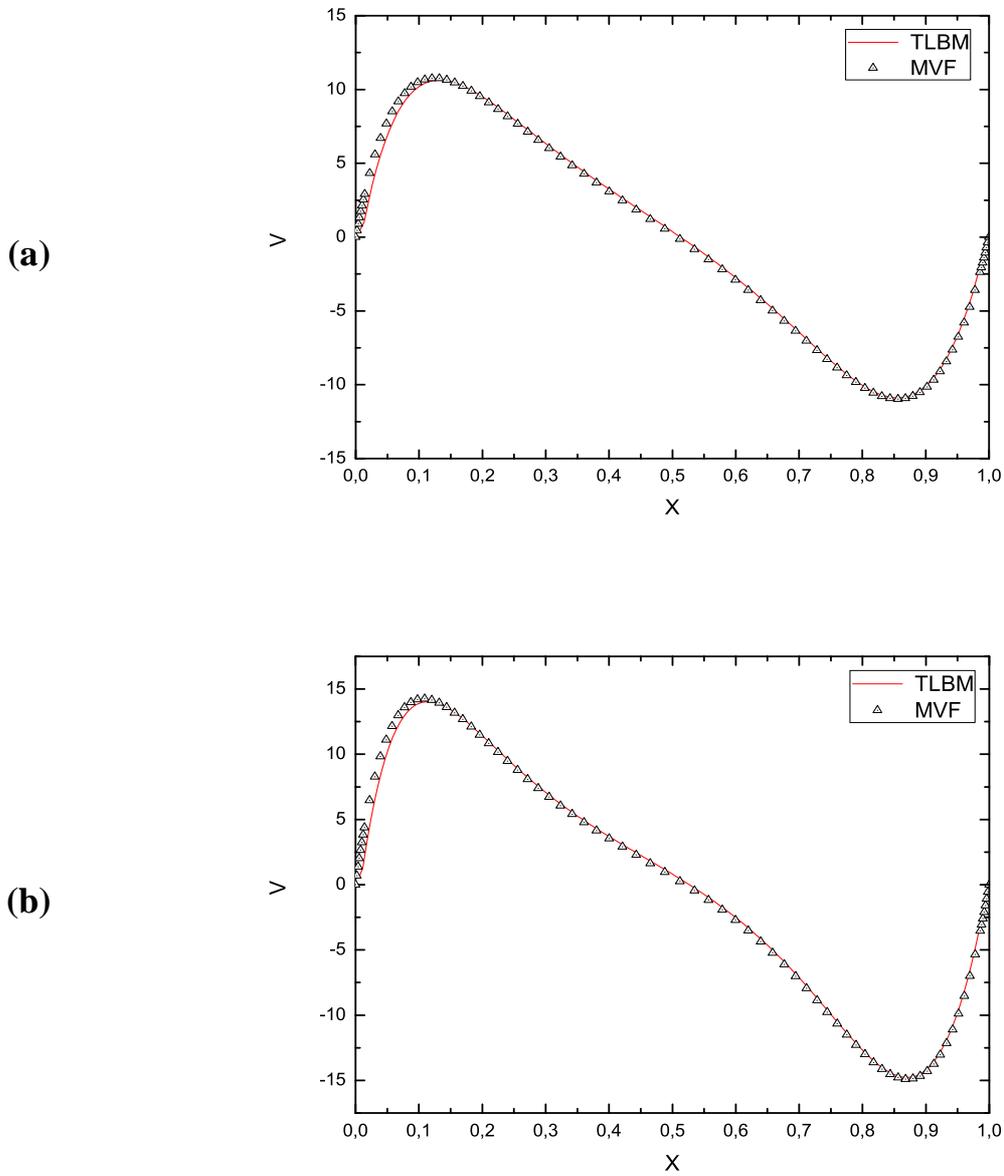
(c)



(d)

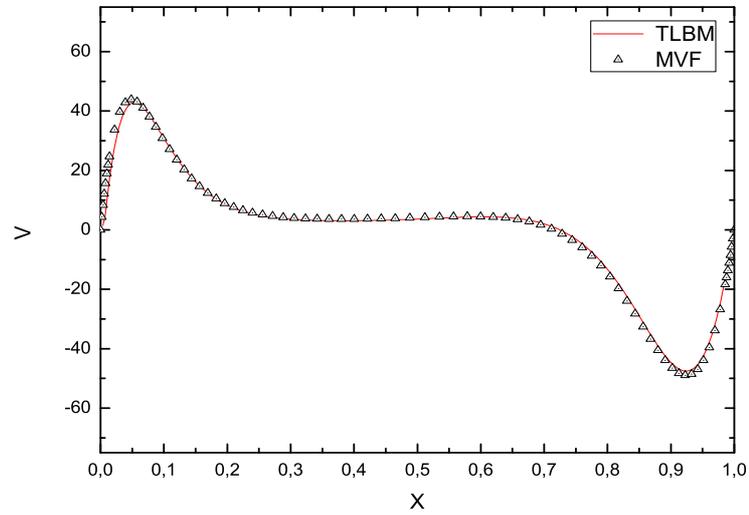


**Fig.IV.10. (Suite)** Profils de Vitesse adimensionnelle  $U$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.2 H$ ,  $X = 0.5$ , (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$

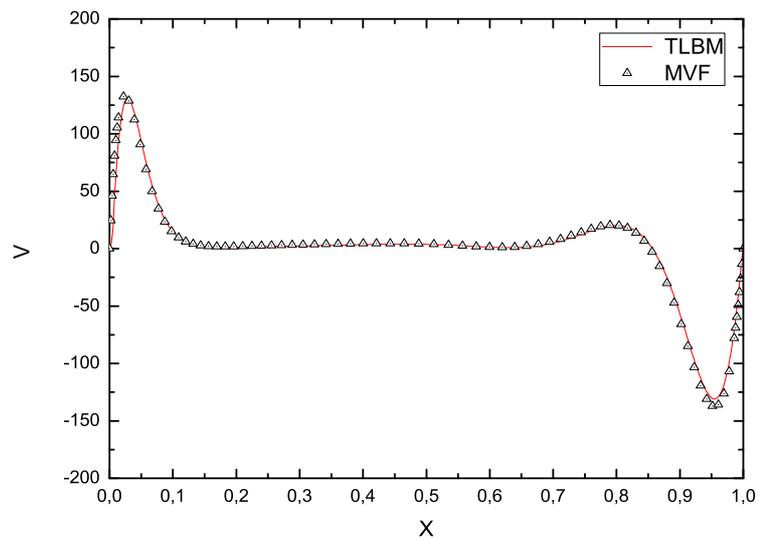


**Fig.IV.11.** Profils de Vitesse adimensionnelle  $V$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.2 H$ ,  $X = 0.5$ , (a)  $Ra = 6 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$

(c)



(d)



**Fig.IV.11. (Suite)** Profils de Vitesse adimensionnelle  $V$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.2 H$ ,  $X = 0.5$ , (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$

### IV.3.2 Effets de la longueur de la partie chauffée :

L'étude de l'effet de la longueur de la partie chauffée sur la structure générale de l'écoulement de convection naturelle dans l'enceinte est discutée pour le cas de  $Ra = 10^5$ .

#### IV.3.2.1. Les isothermes :

Pour  $Ra = 10^5$ , on constate qu'il y a moins d'isothermes en bas de l'enceinte avec deux couches limites thermiques : l'une d'elles, qui est plus dense, se forme au voisinage immédiat de la partie chauffée ; l'autre se forme au voisinage immédiat de la partie supérieure du mur droit ; cela signifie que le transfert de chaleur se limite au coin supérieur gauche de l'enceinte seulement, donc faible. Au fur et à mesure que la longueur de la partie chauffée augmente, les isothermes semblent être déplacées vers, à la fois, le mur droit et le bas ; par conséquent, la partie inférieure de l'enceinte devient comblée d'isothermes et la couche limite thermique n'est plus dense qu'au voisinage de la portion inférieure de la partie chauffée tandis que celle du haut du mur droit devient de plus en plus dense. Cela reflète bien la conséquence de l'augmentation de la longueur de la partie chauffée qui se caractérise par une importante élévation du transfert de chaleur à travers toute l'enceinte.

#### IV.3.2.2 Les lignes de courant :

Pour  $Ra = 10^5$  et comme déjà observé dans le cas à 100% du chauffage du mur gauche, la distribution des lignes est la même sauf que la cellule de gauche semble être comprimée par les lignes ce qui rend apparaître les deux cellules de tailles différentes. Cela indique que l'intensité d'écoulement a été réduite notamment au niveau du coin inférieur gauche du domaine donc un transfert de chaleur peu important dans ce cas (20% de chauffage) ; à chaque fois que la longueur de la partie chauffée augmente, les lignes de courant se déplacent peu à peu vers le coin inférieur gauche, de ce fait, la cellule de gauche gagne du volume jusqu'à devenir similaire à celle de droite et la zone où les particules fluides sont assez lentes s'élargit. Ce qui conduit à une amélioration du transfert thermique à l'intérieur de l'enceinte.

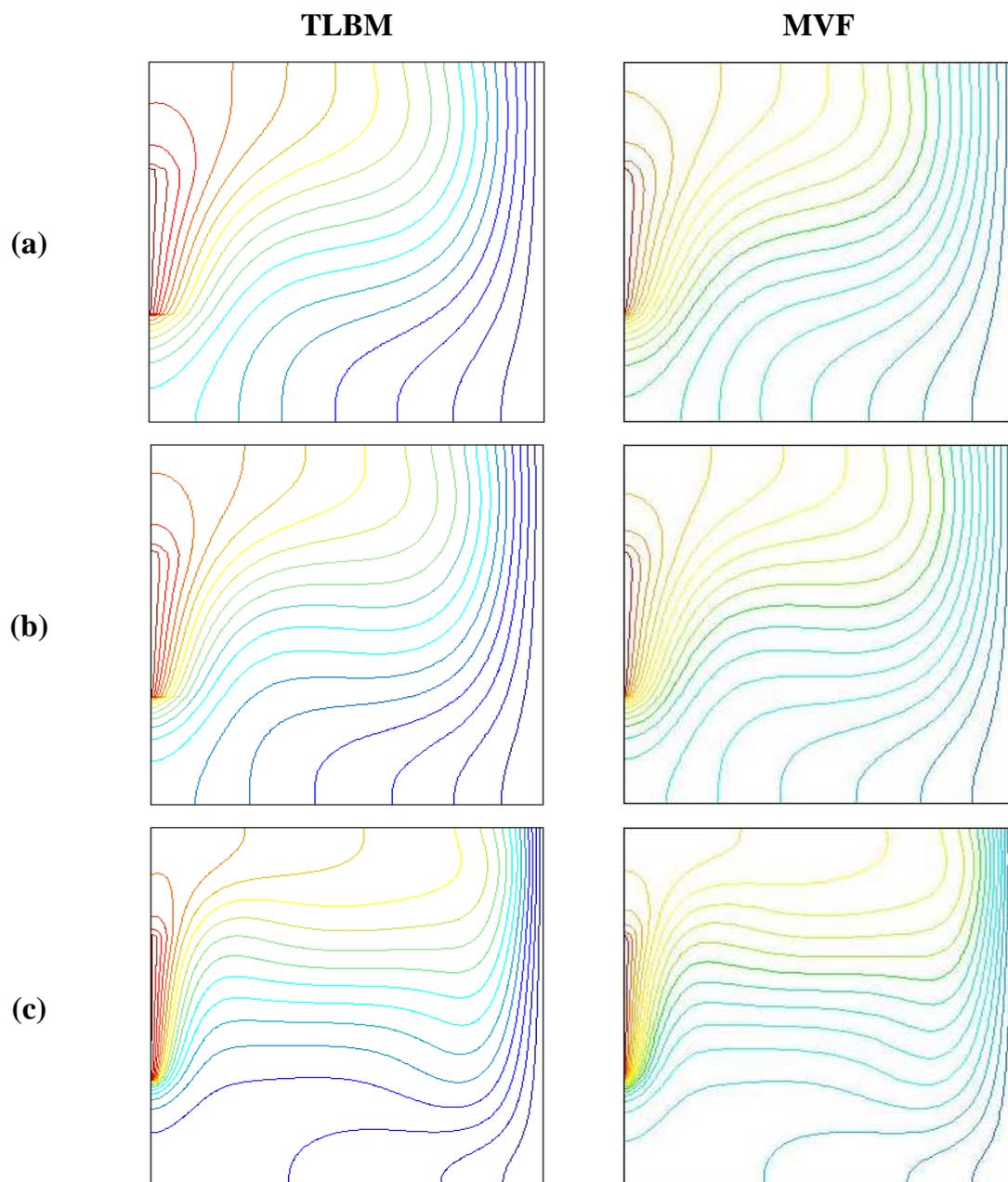
### IV.3.2.3. Profils de température :

Pour  $Ra = 10^5$ , il est bien clair que la température du fluide tend à se stabiliser autour d'une valeur moyenne qui varie en fonction de la longueur de la partie chauffée du mur gauche: la température a pour valeur  $\theta = 0.25$  pour  $L = 0.2 H$  et  $\theta = 0.47$  pour  $L=0.8H$ . cela indique que plus la longueur de la partie chauffée augmente, plus le fluide occupant la zone du cœur, absorbe de la chaleur : autrement dit le transfert de chaleur est de plus en plus meilleur.

### IV.3.2.4. Profils de vitesse :

Pour  $Ra = 10^5$ , la vitesse horizontale ne cesse de s'accroître remarquablement dans la zone comprise entre  $Y = 0$  et  $Y = 0.45$  en fonction de l'augmentation de la longueur de la partie chauffée du mur gauche jusqu'à devenir égale à sa valeur dans la partie supérieure de l'enceinte. Généralement, il est intéressant de noter que la vitesse horizontale augmente légèrement. La vitesse verticale s'accroît au voisinage de la partie chauffée en fonction de l'augmentation de sa longueur jusqu'à atteindre l'égalité avec sa valeur auprès du mur droit. En général, cette vitesse augmente avec l'augmentation de la longueur de la partie chauffée.

Tout cela indique que l'augmentation de la longueur de la partie chauffée du mur gauche cause un écoulement de fluide beaucoup plus rapide dans toute l'enceinte, ce qui contribue à une amélioration du transfert de chaleur.



**Fig. IV.12.** Isothermes,  $L = 0.4 H$ , (a)  $Ra = 5 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$ , (c)  $Ra = 10^5$

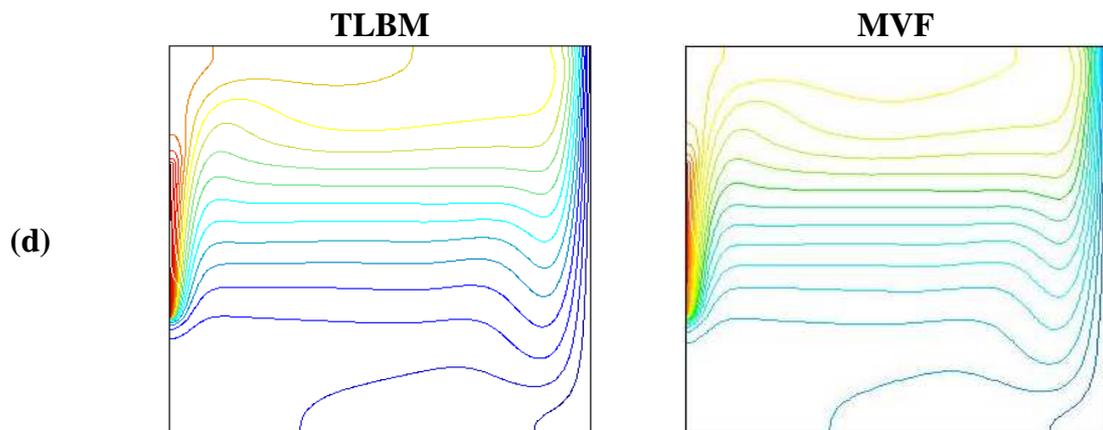


Fig. IV.12. (Suite) Isothermes,  $L = 0.4 \text{ H}$ , (d)  $Ra = 10^6$

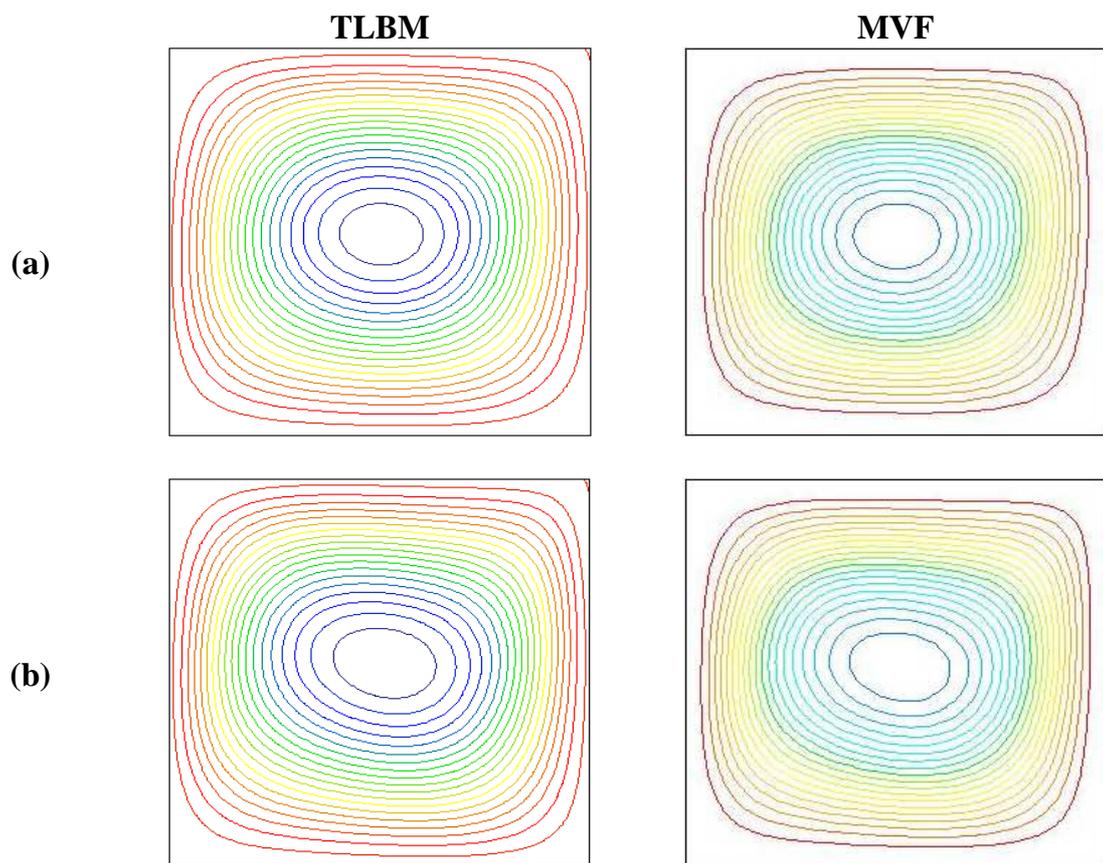
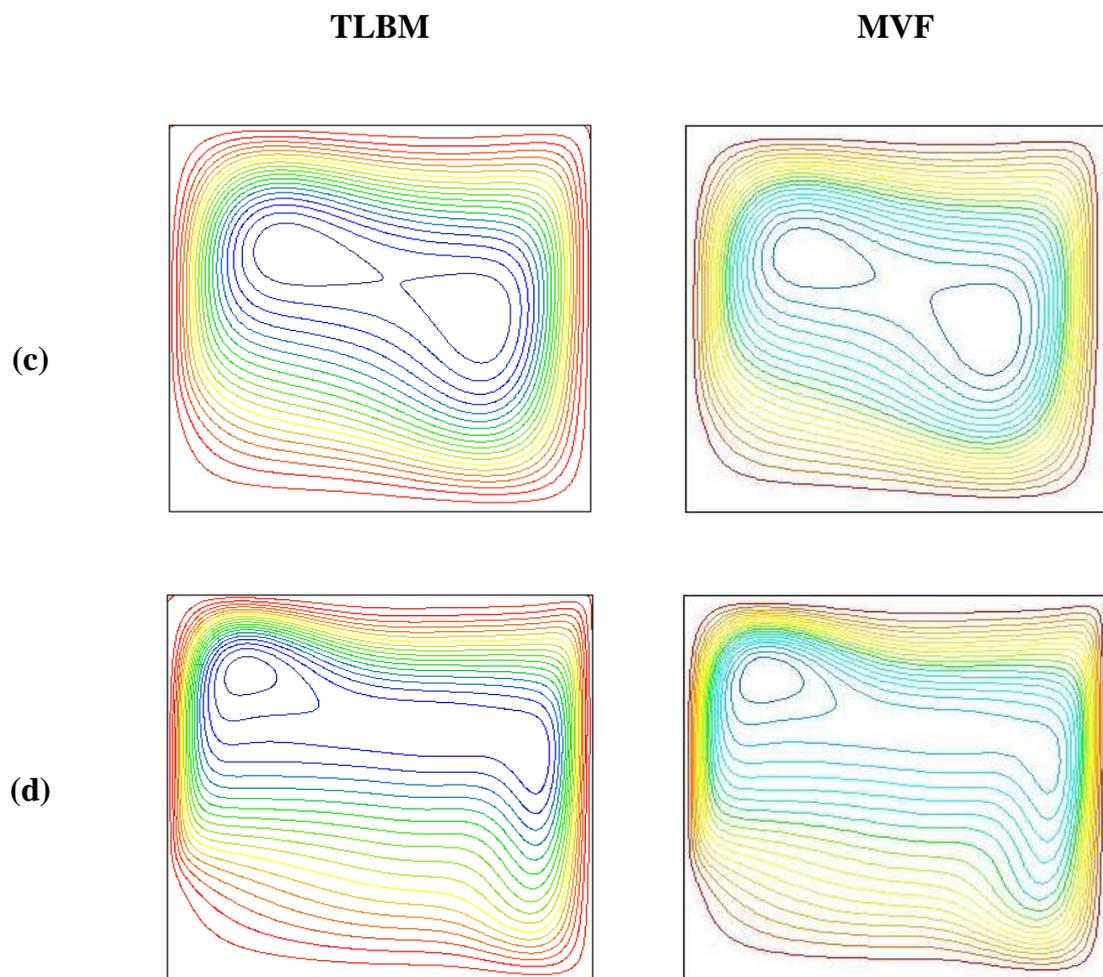
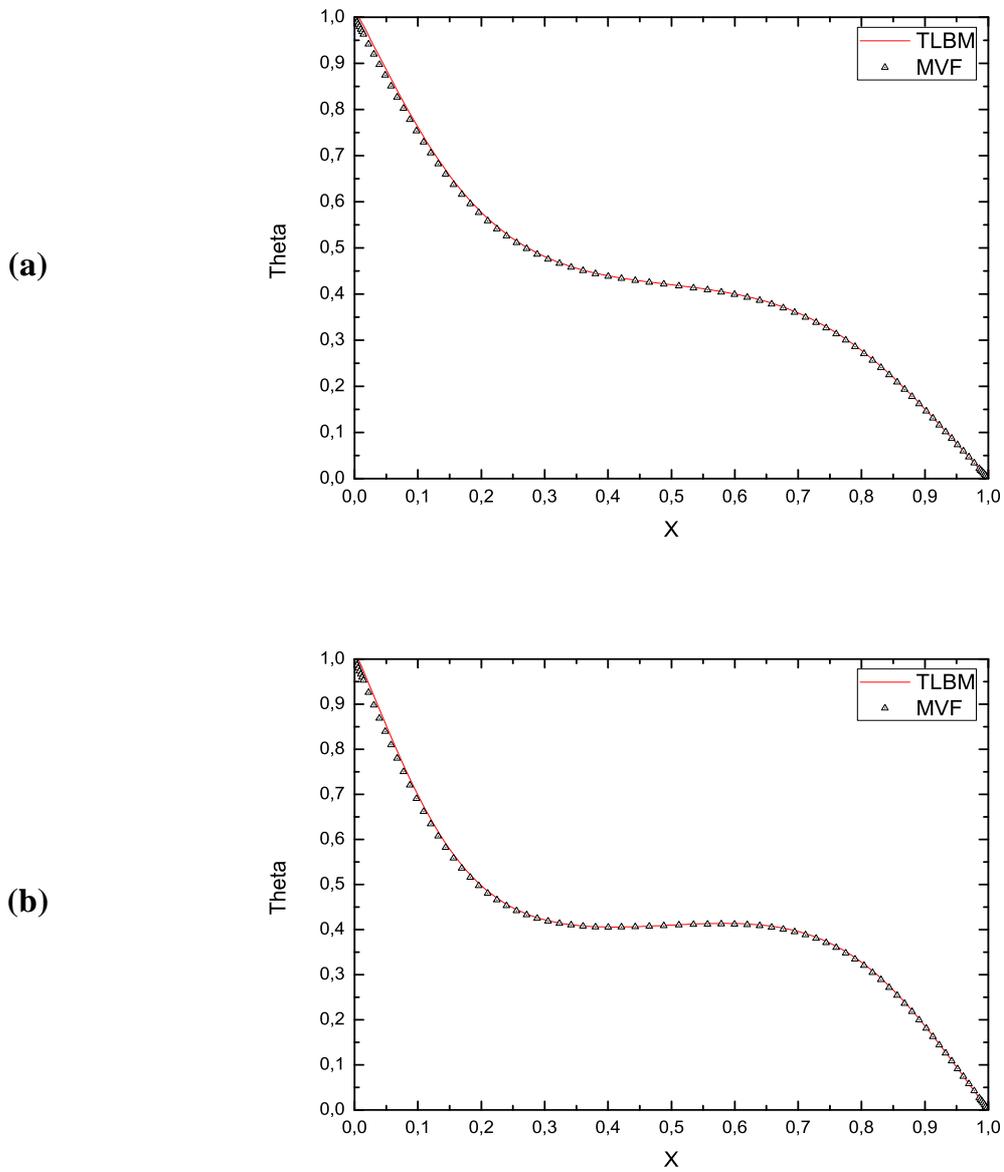


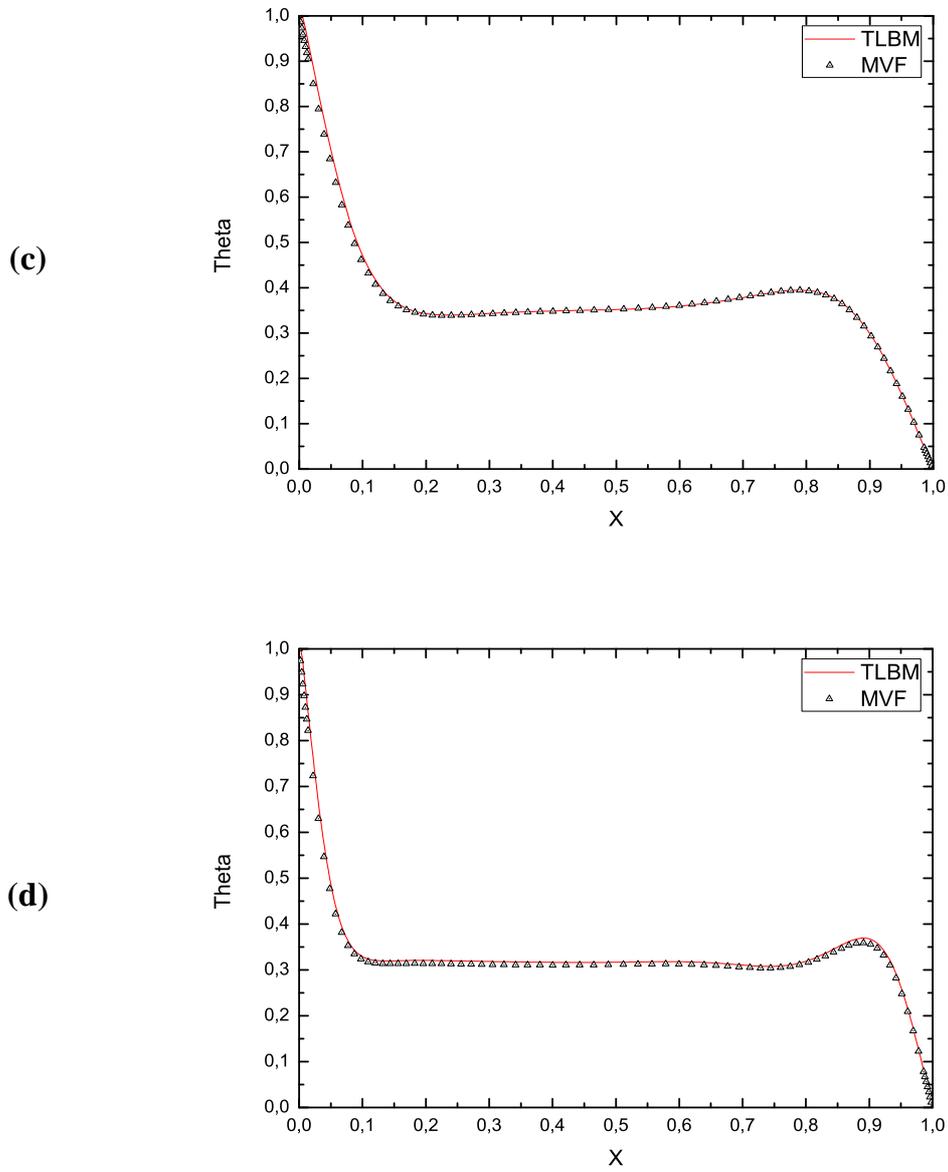
Fig. IV.13. Lignes de courant,  $L = 0.4 \text{ H}$ , (a)  $Ra = 5 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$



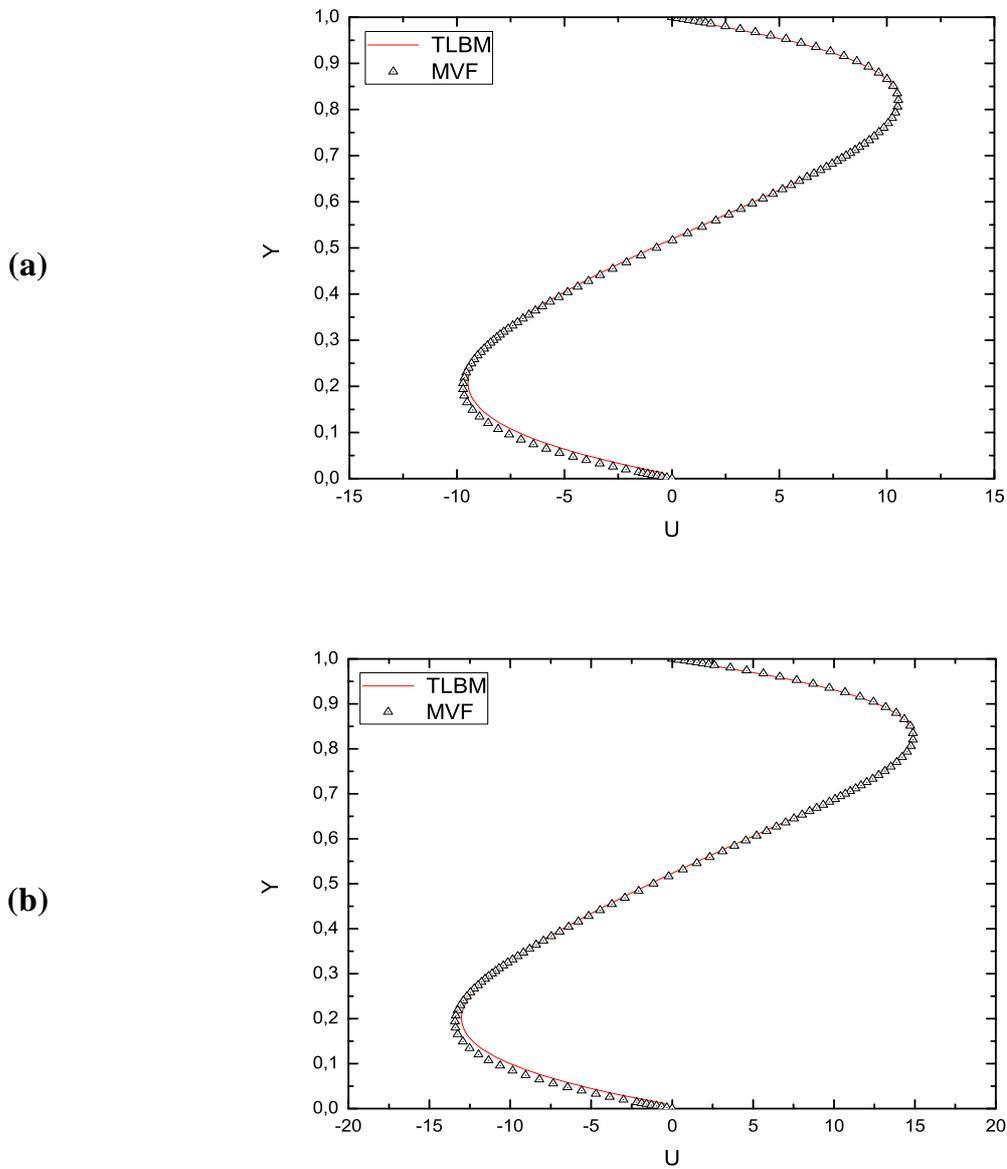
**Fig. IV.13. (Suite)** Lignes de courant,  $L = 0.4 H$ , (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$



**Fig.IV.14.** Profils de Température adimensionnelle  $\theta$  à mi-hauteur de l'enceinte,  
 $L = 0.4 H$ ,  $Y = 0.5$ , (a)  $Ra = 5 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$

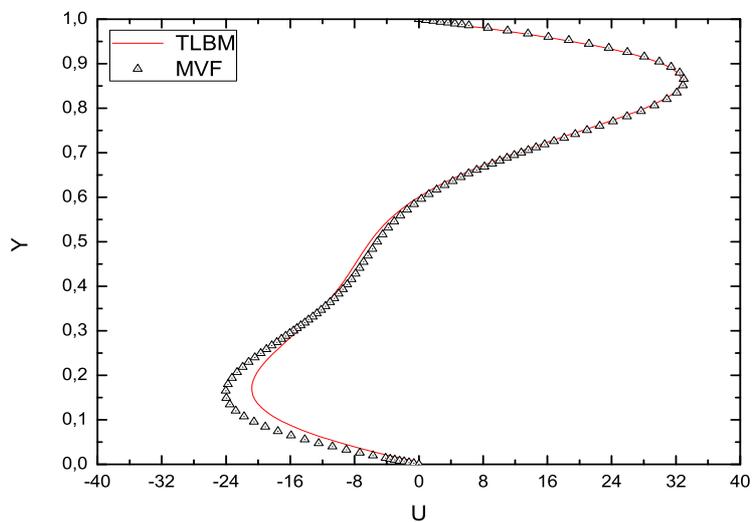


**Fig.IV.14. (Suite)** Profils de Température adimensionnelle  $\theta$  à mi-hauteur de l'enceinte,  $L = 0.4 H$ ,  $Y = 0.5$ , (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$

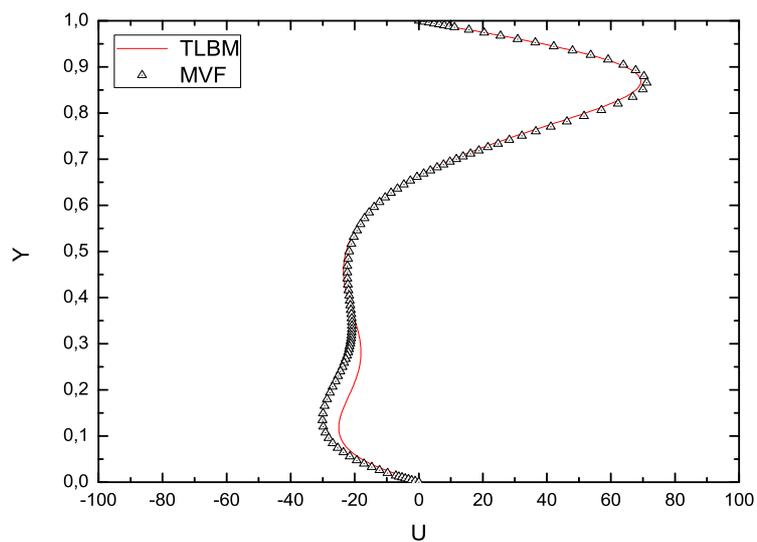


**Fig.IV.15.** Profils de Vitesse adimensionnelle  $U$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.4 H$ ,  $Y = 0.5$ , (a)  $Ra = 5 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$

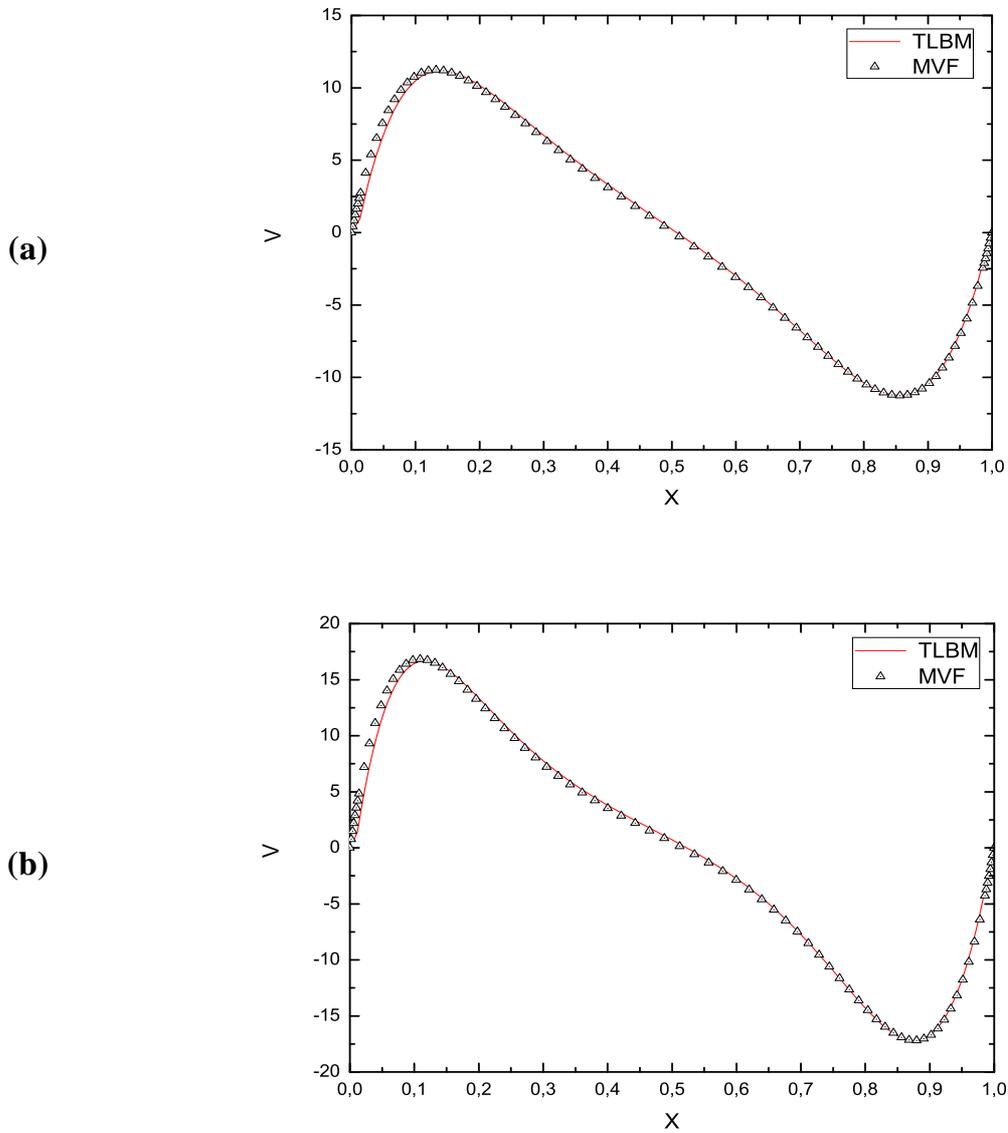
(c)



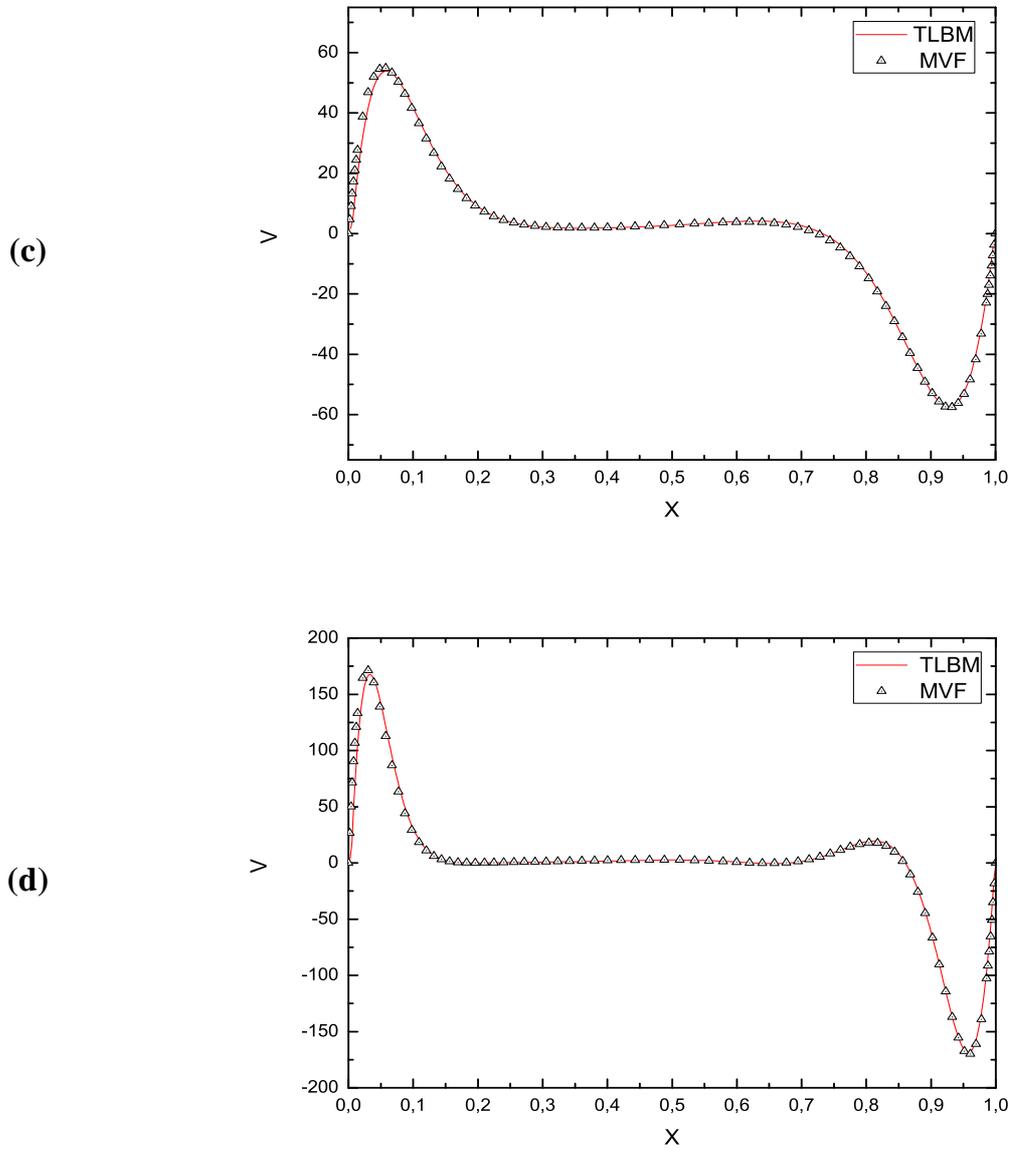
(d)



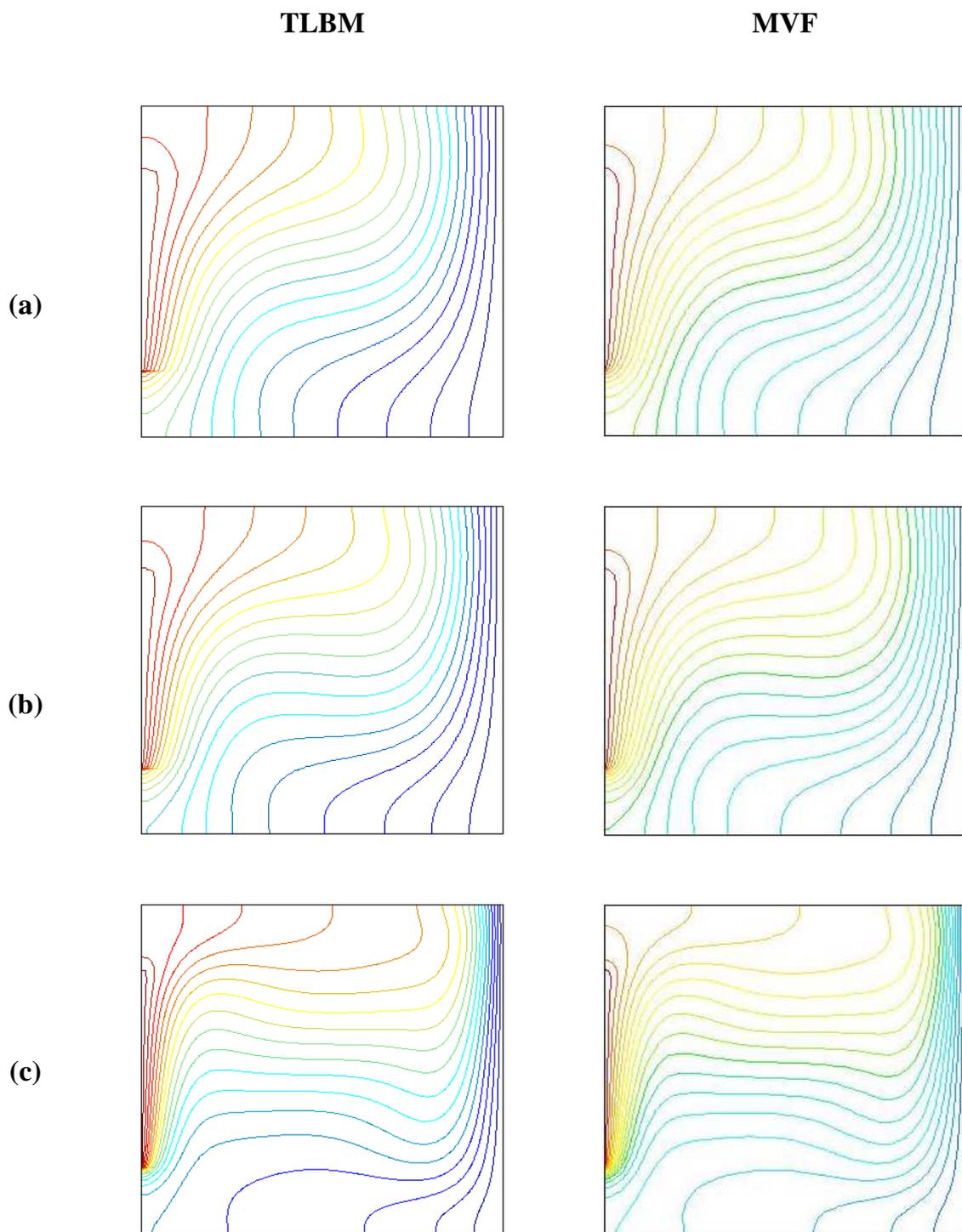
**Fig.IV.15. (Suite)** Profils de Vitesse adimensionnelle  $U$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.4 H$ ,  $Y = 0.5$ , (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$



**Fig.IV.16.** Profils de Vitesse adimensionnelle  $V$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.4 H$ ,  $Y = 0.5$ , (a)  $Ra = 5 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$



**Fig.IV.16. (Suite)** Profils de Vitesse adimensionnelle  $V$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.4 H$ ,  $Y = 0.5$ , (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$



**Fig. IV.17.** Isothermes,  $L = 0.6 H$ , (a)  $Ra = 5 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$ , (c)  $Ra = 10^5$

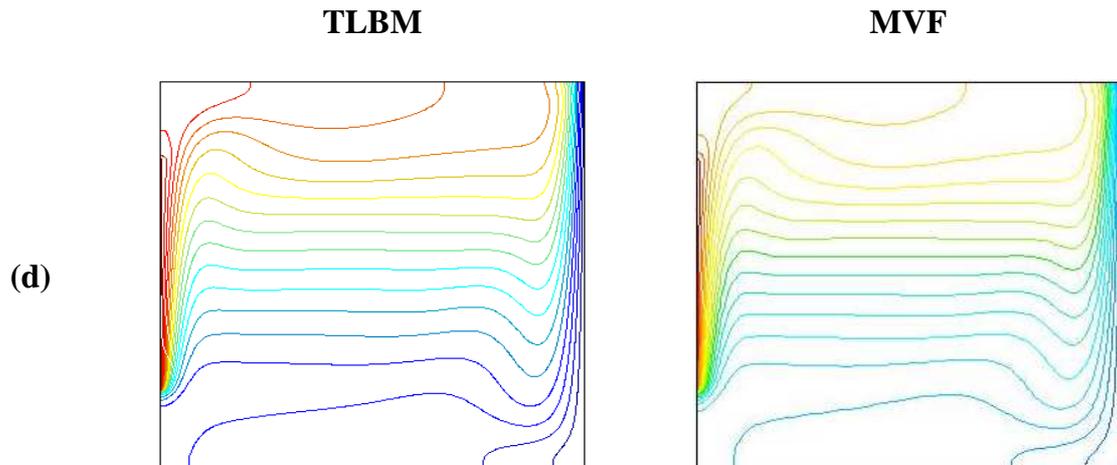


Fig. IV.17. (Suite) Isothermes,  $L = 0.6 H$ , (d)  $Ra = 10^6$

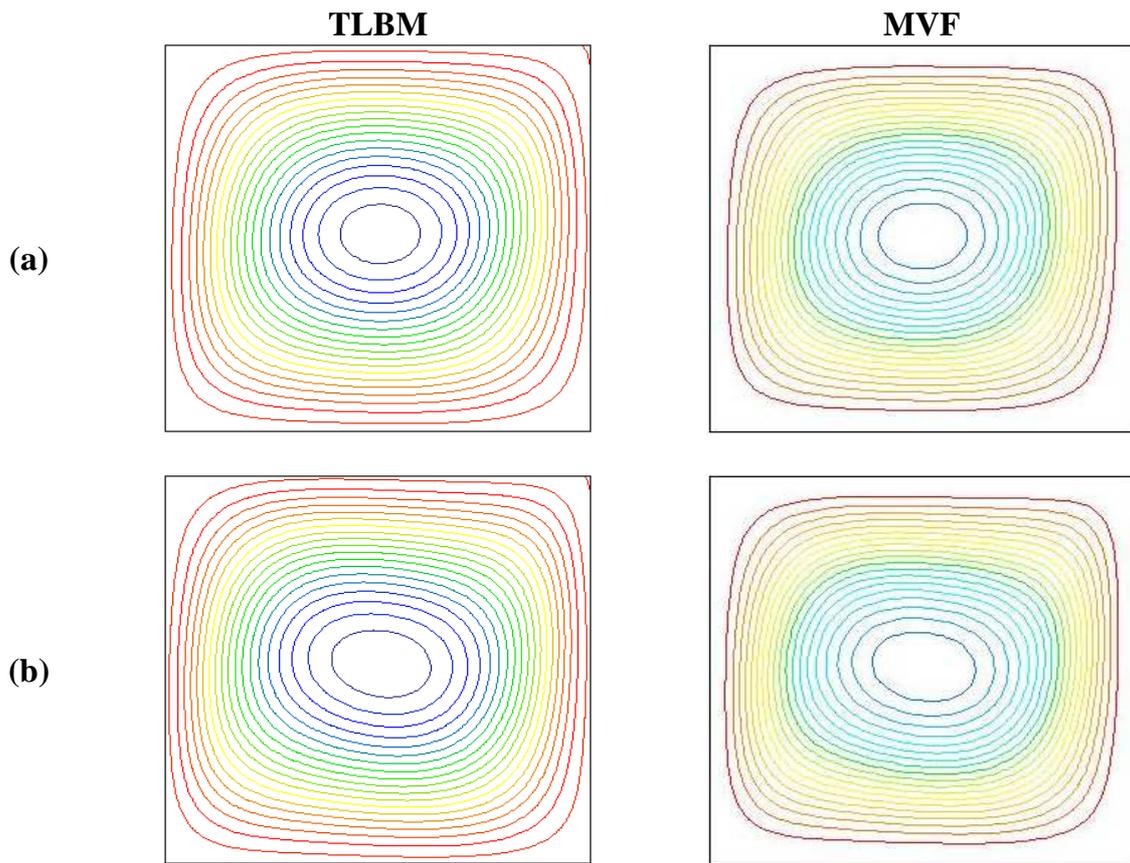
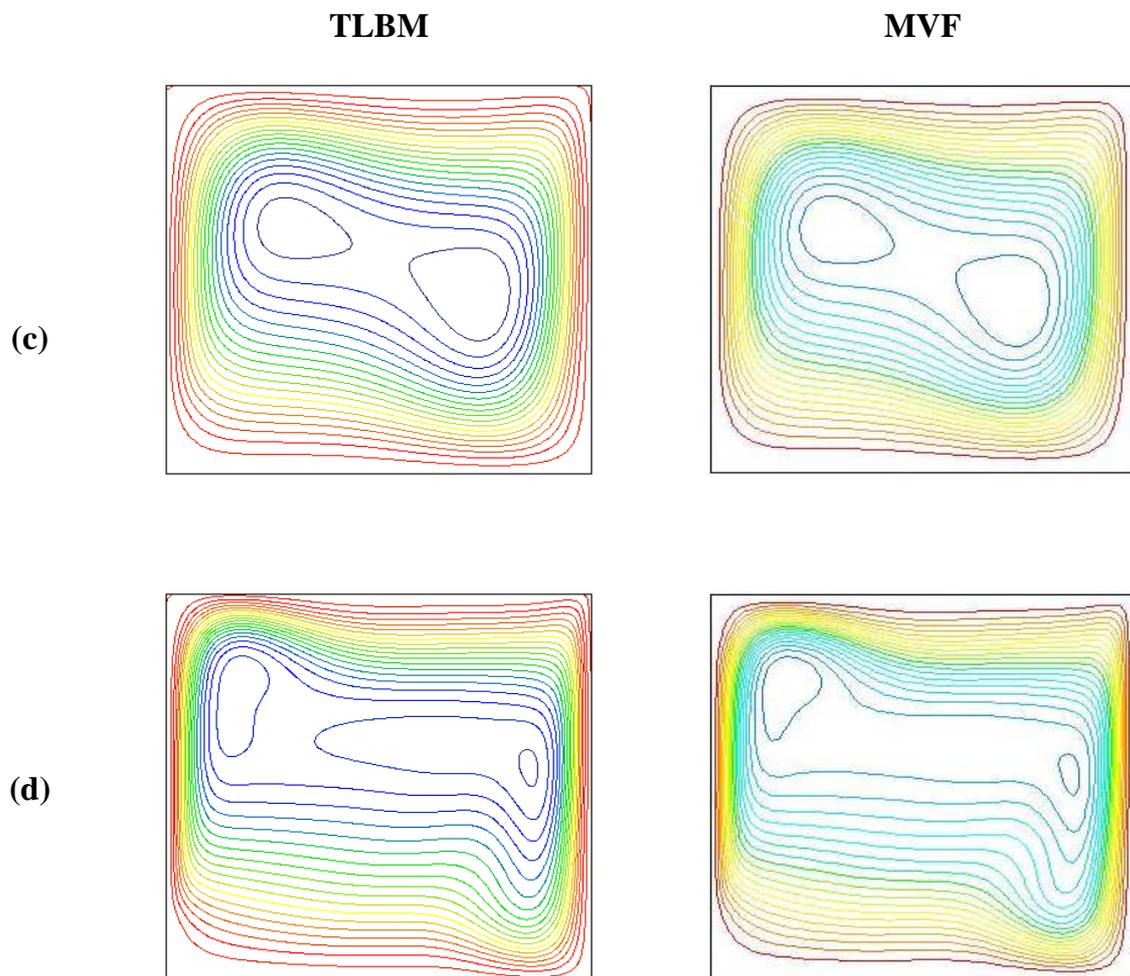
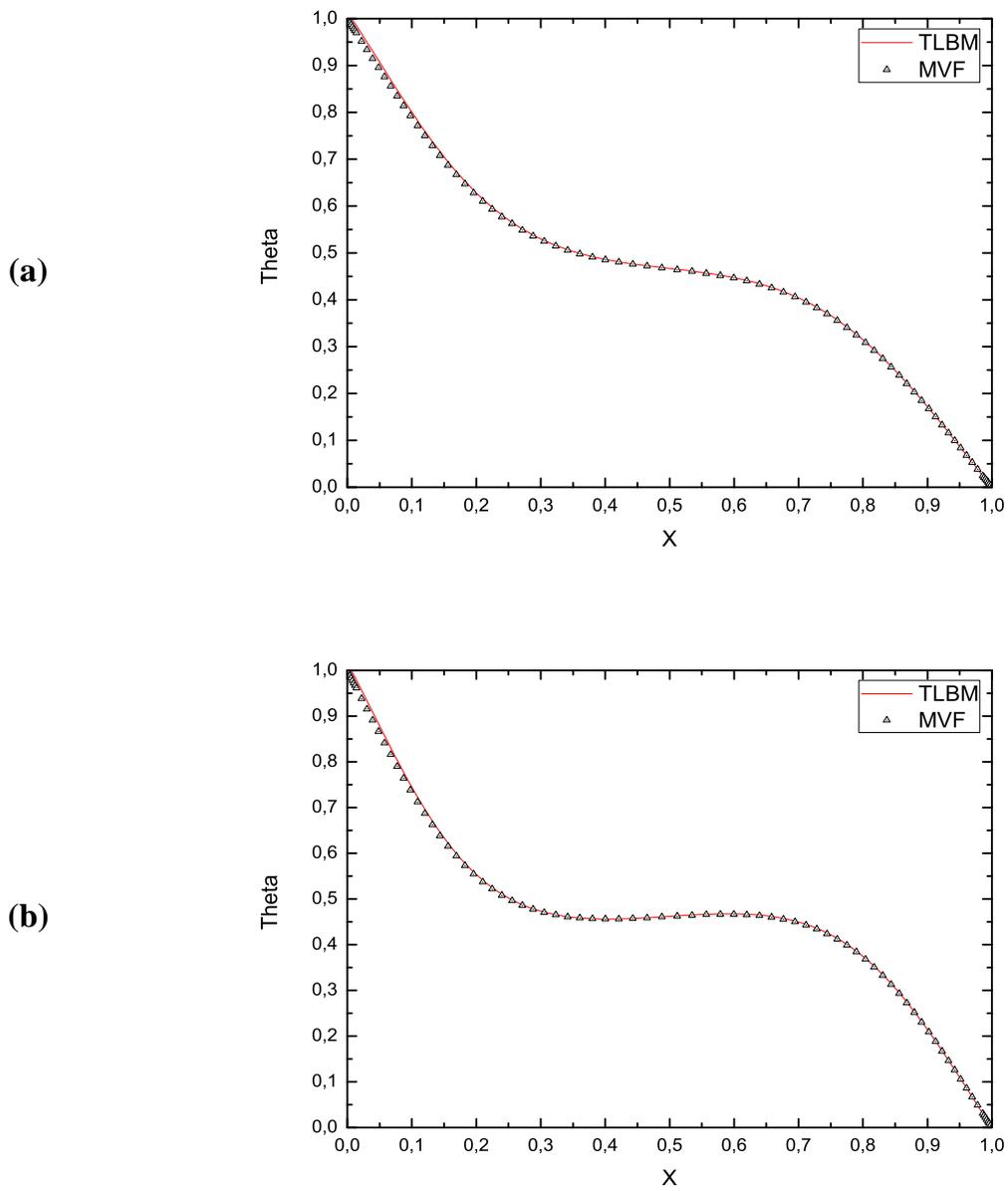


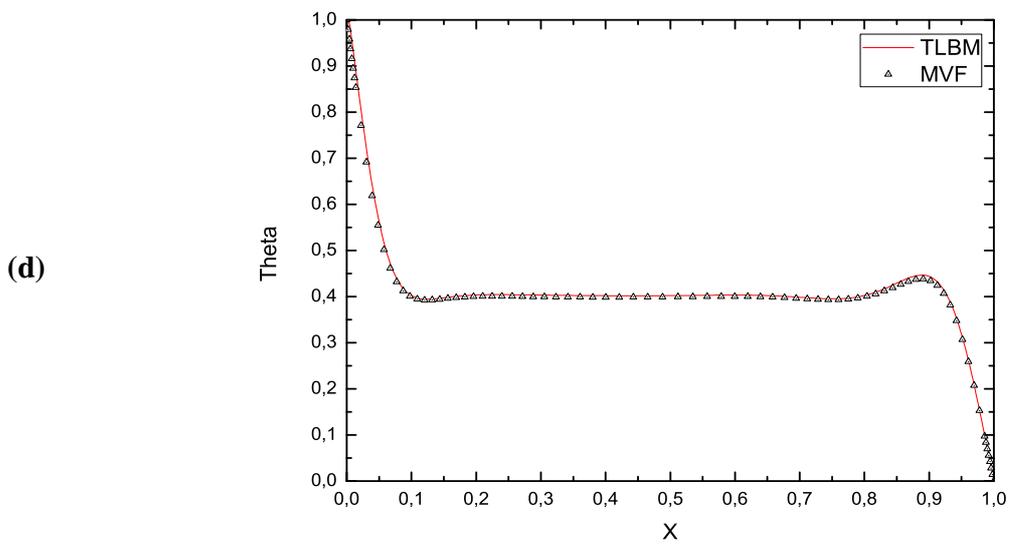
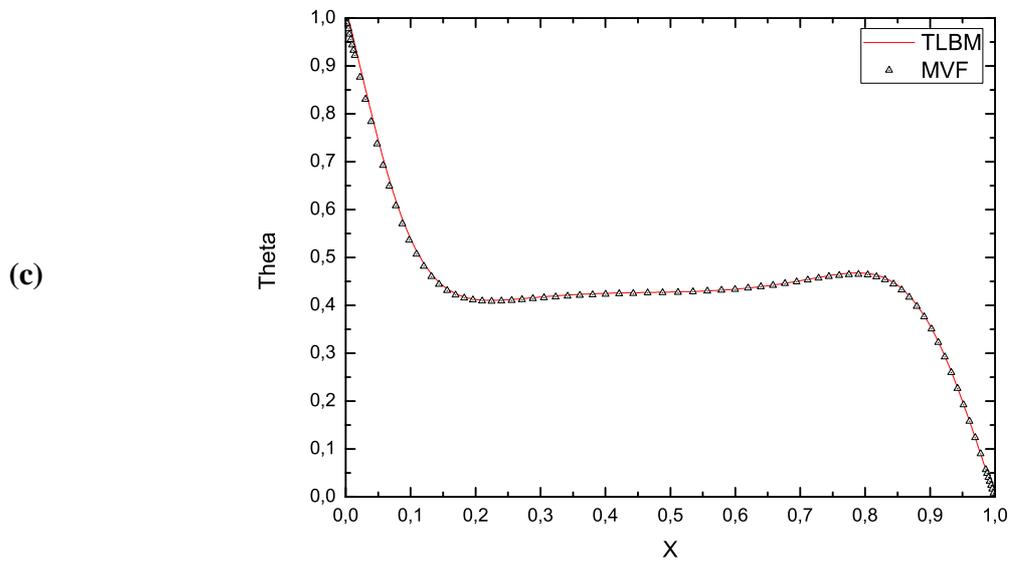
Fig. IV.18. Lignes de courant,  $L = 0.6 H$ , (a)  $Ra = 5 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$



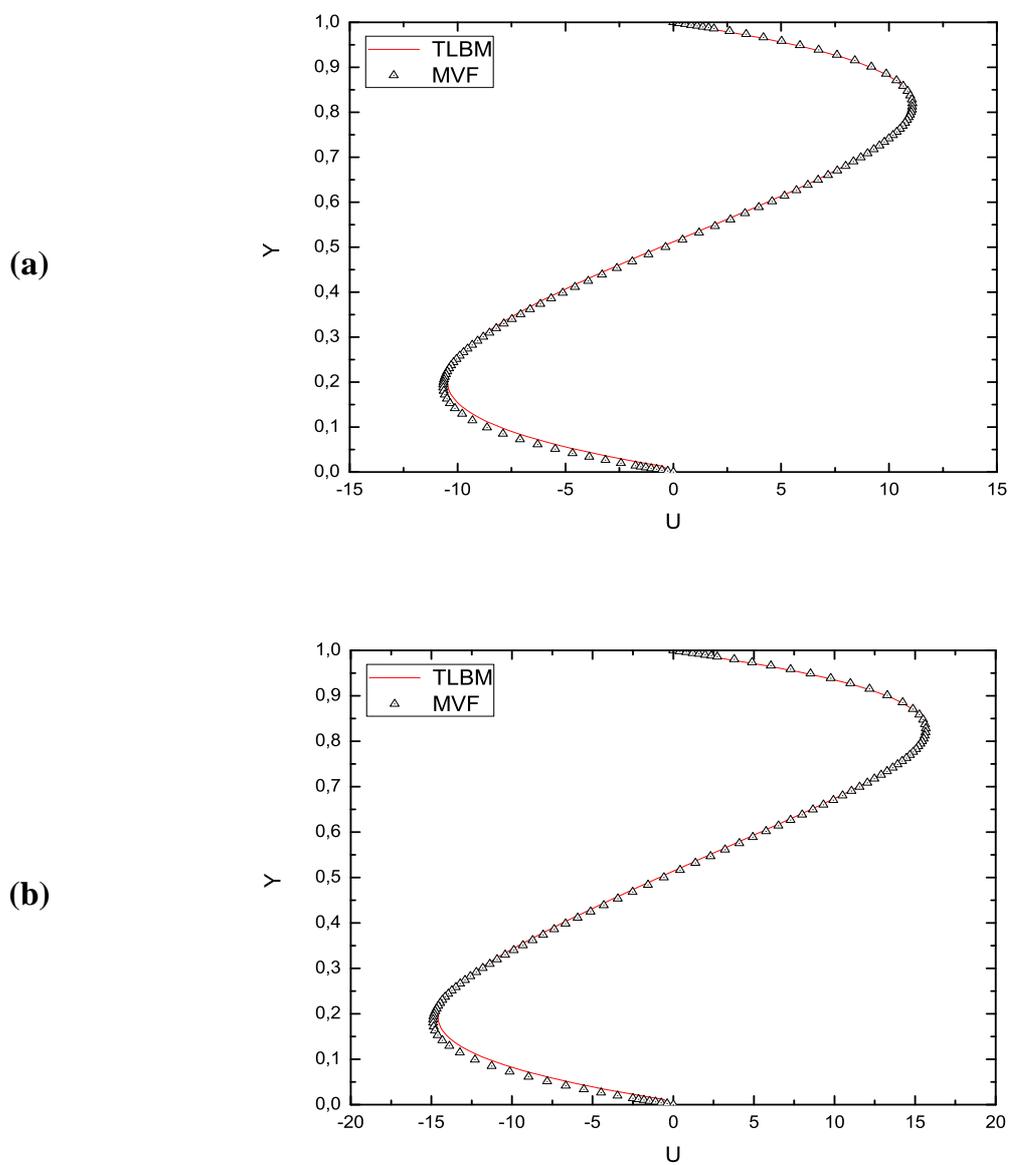
**Fig. IV.18.** (Suite) Lignes de courant,  $L = 0.6 H$ , (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$



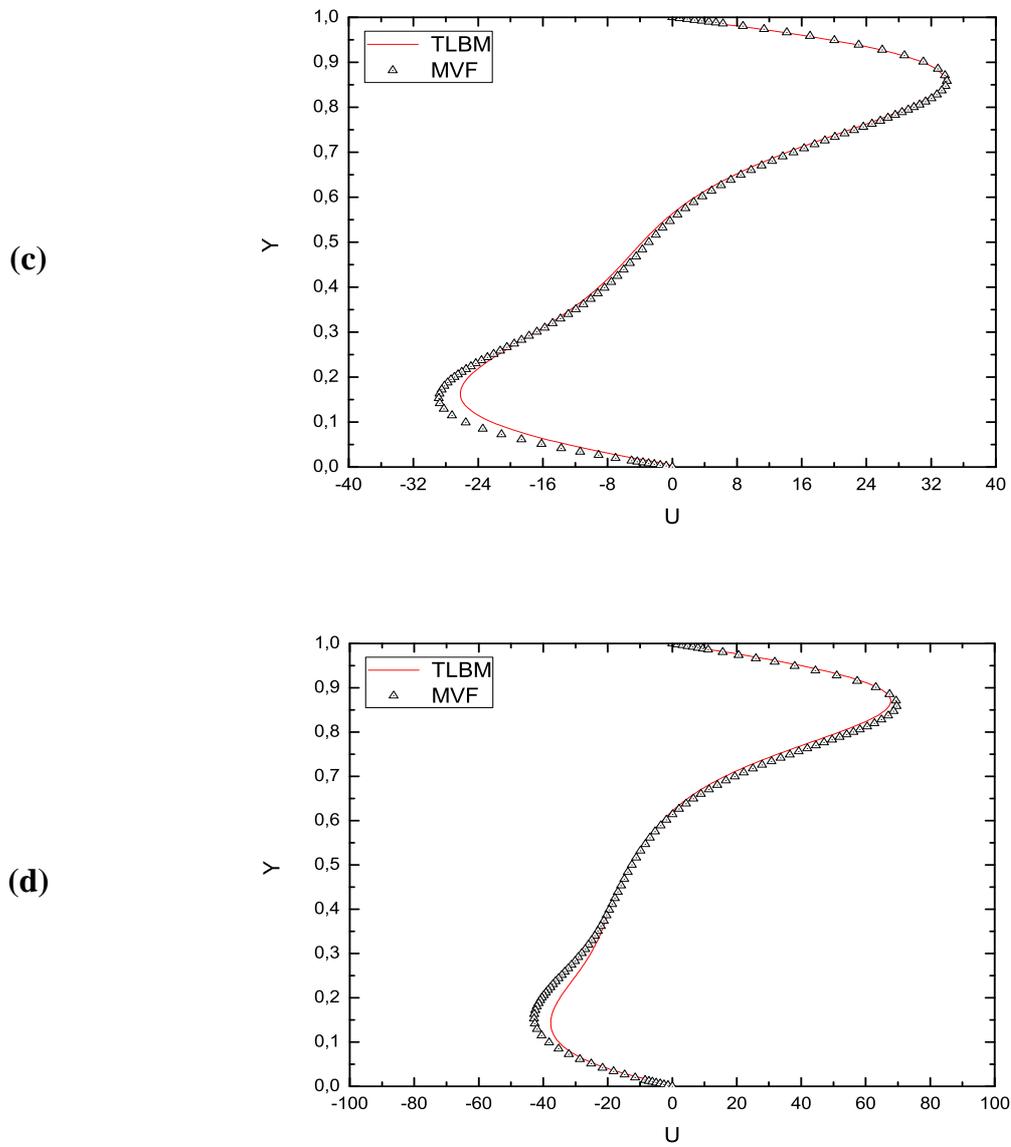
**Fig.IV.19.** Profils de Température adimensionnelle  $\theta$  à mi-hauteur de l'enceinte,  
 $L = 0.6 H$ ,  $Y = 0.5$ , (a)  $Ra = 5 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$



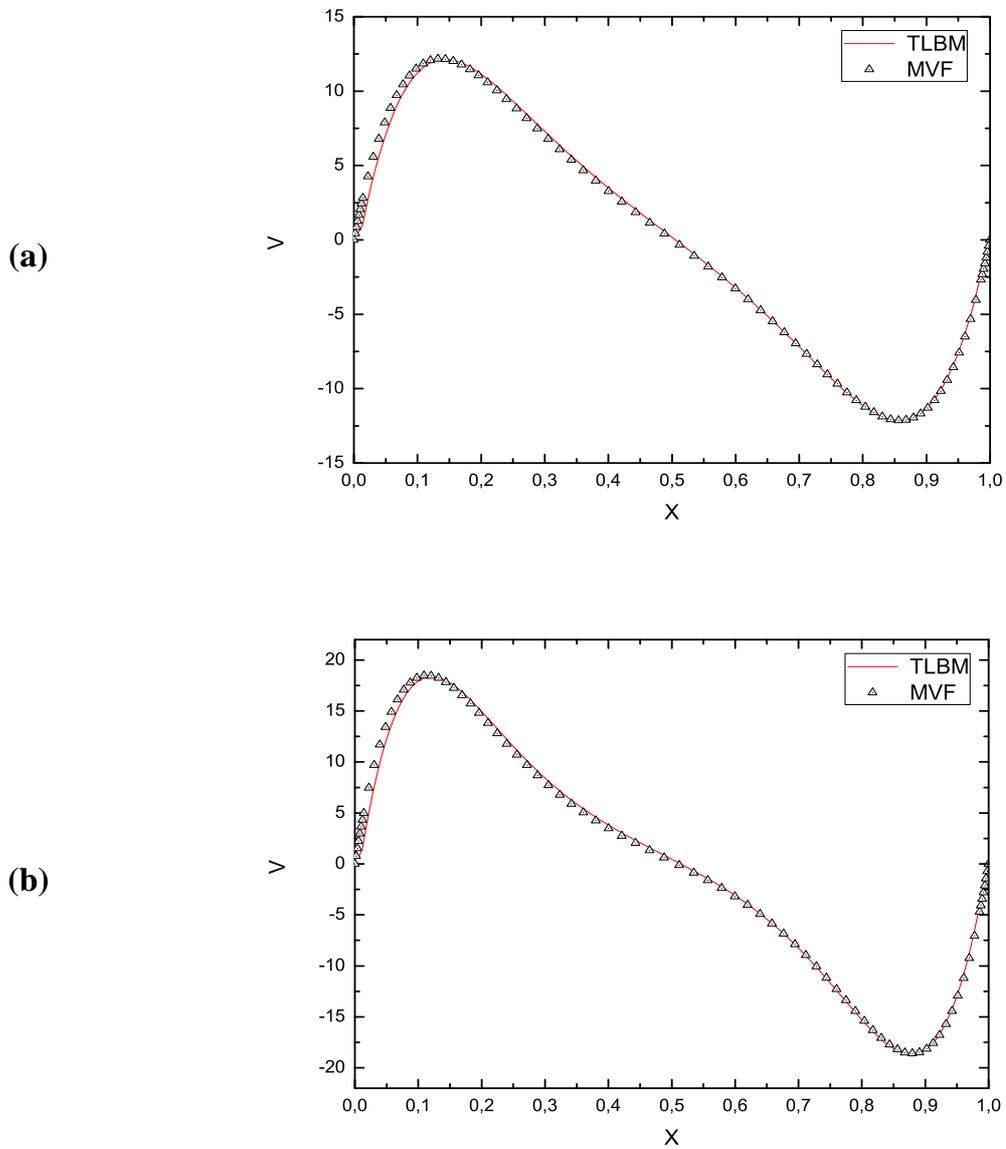
**Fig.IV.19. (Suite)** Profils de Température adimensionnelle  $\theta$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.6 H$ ,  $Y = 0.5$ , (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$



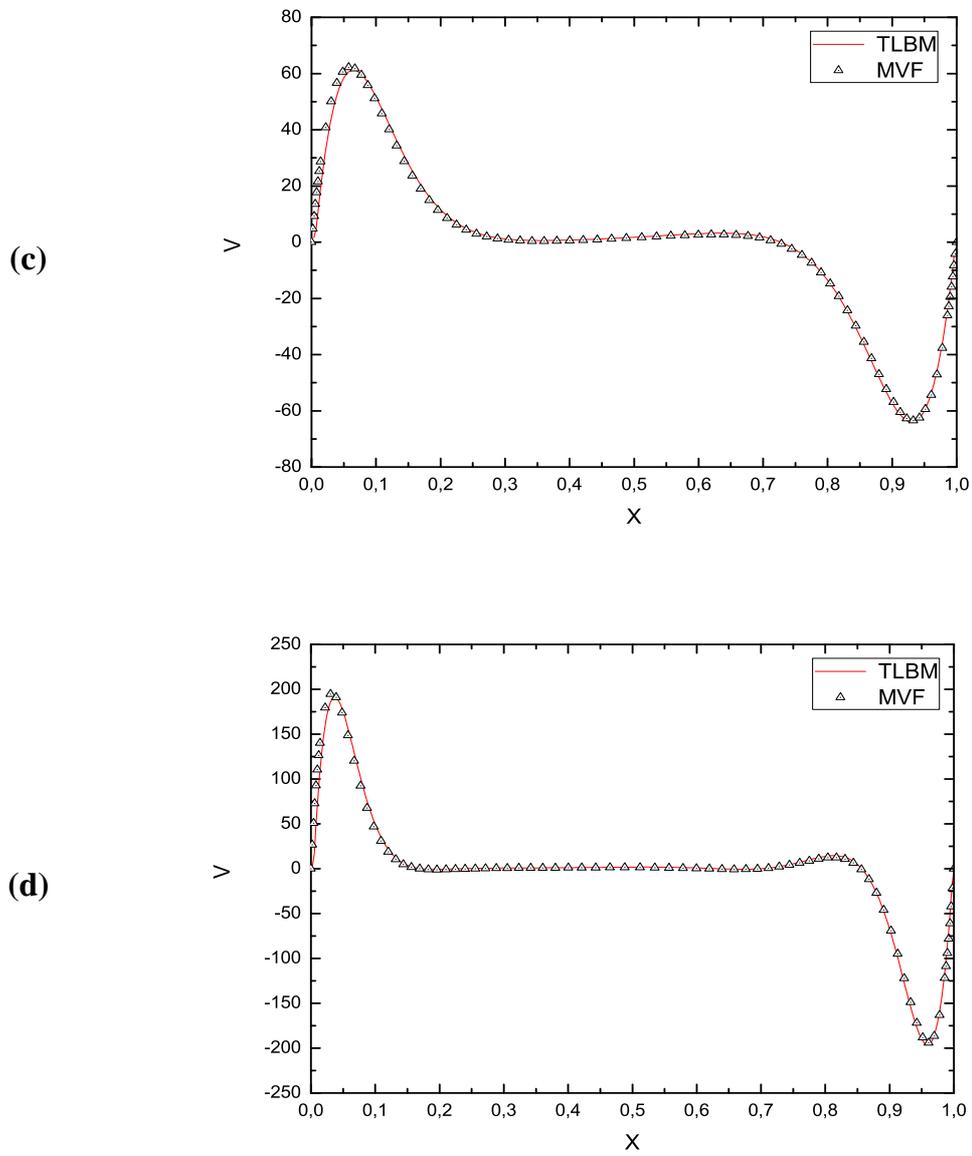
**Fig.IV.20.** Profils de Vitesse adimensionnelle  $U$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.6 H$ ,  $Y = 0.5$ , (a)  $Ra = 5 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$



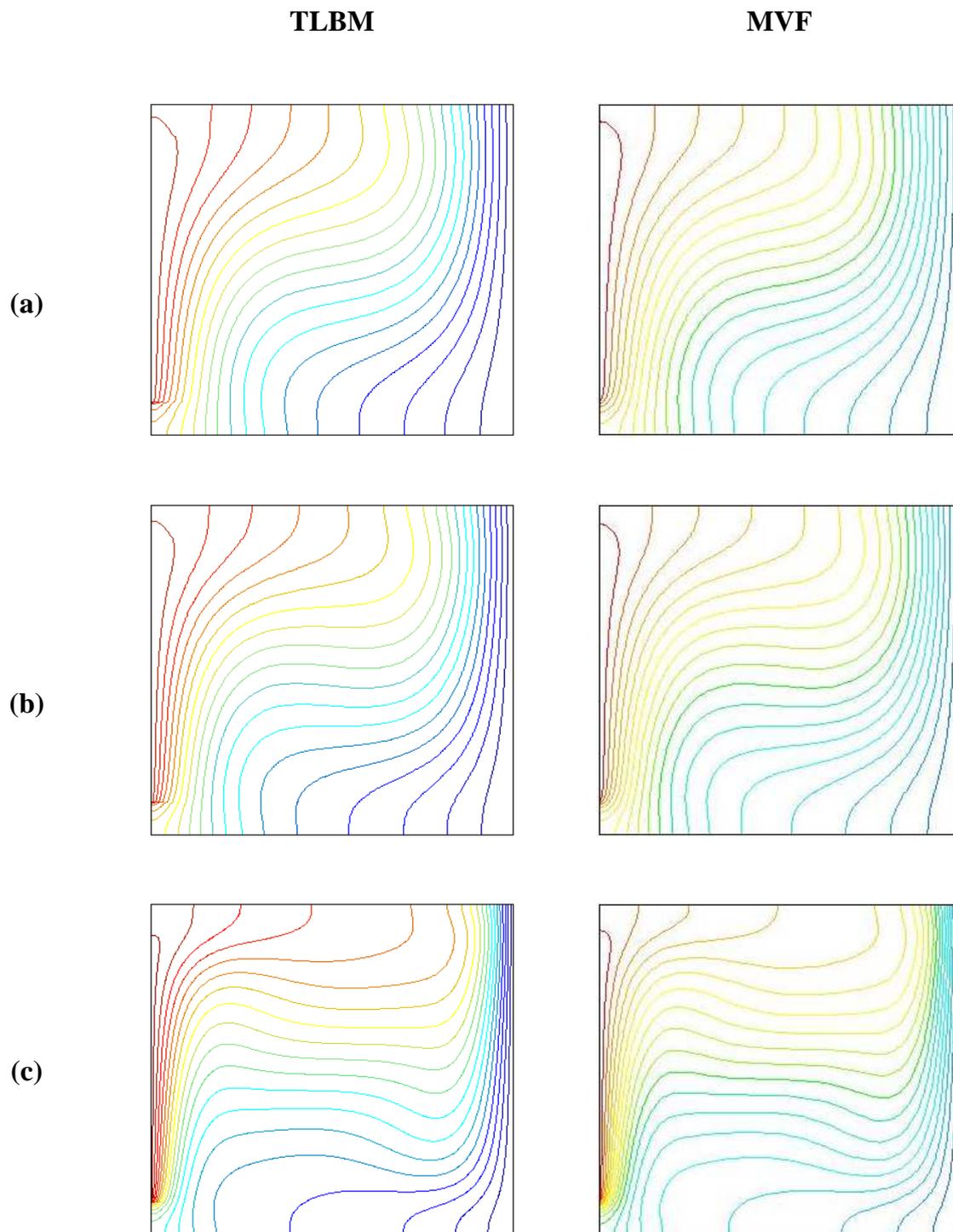
**Fig.IV.20. (Suite)** Profils de Vitesse adimensionnelle  $U$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.6 H$ , (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$



**Fig.IV.21.** Profils de Vitesse adimensionnelle  $V$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.6 H$ ,  $X = 0.5$ , (a)  $Ra = 5 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$



**Fig.IV.21. (Suite)** Profils de Vitesse adimensionnelle  $V$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.6 H$ ,  $X = 0.5$ , (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$



**Fig. IV.22.** Isothermes,  $L = 0.8 H$ , (a)  $Ra = 5 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$ , (c)  $Ra = 10^5$

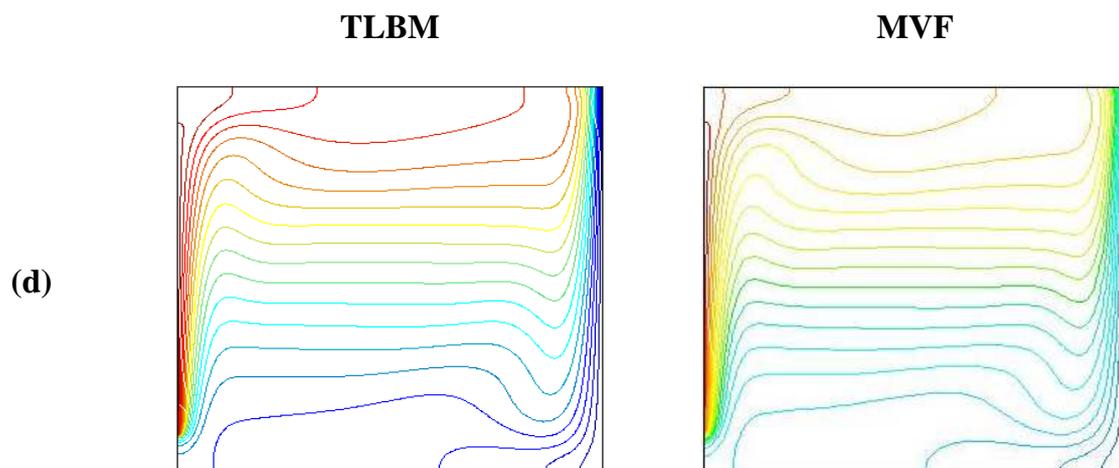


Fig. IV.22. (Suite) Isothermes,  $L = 0.8 H$ , (d)  $Ra = 10^6$

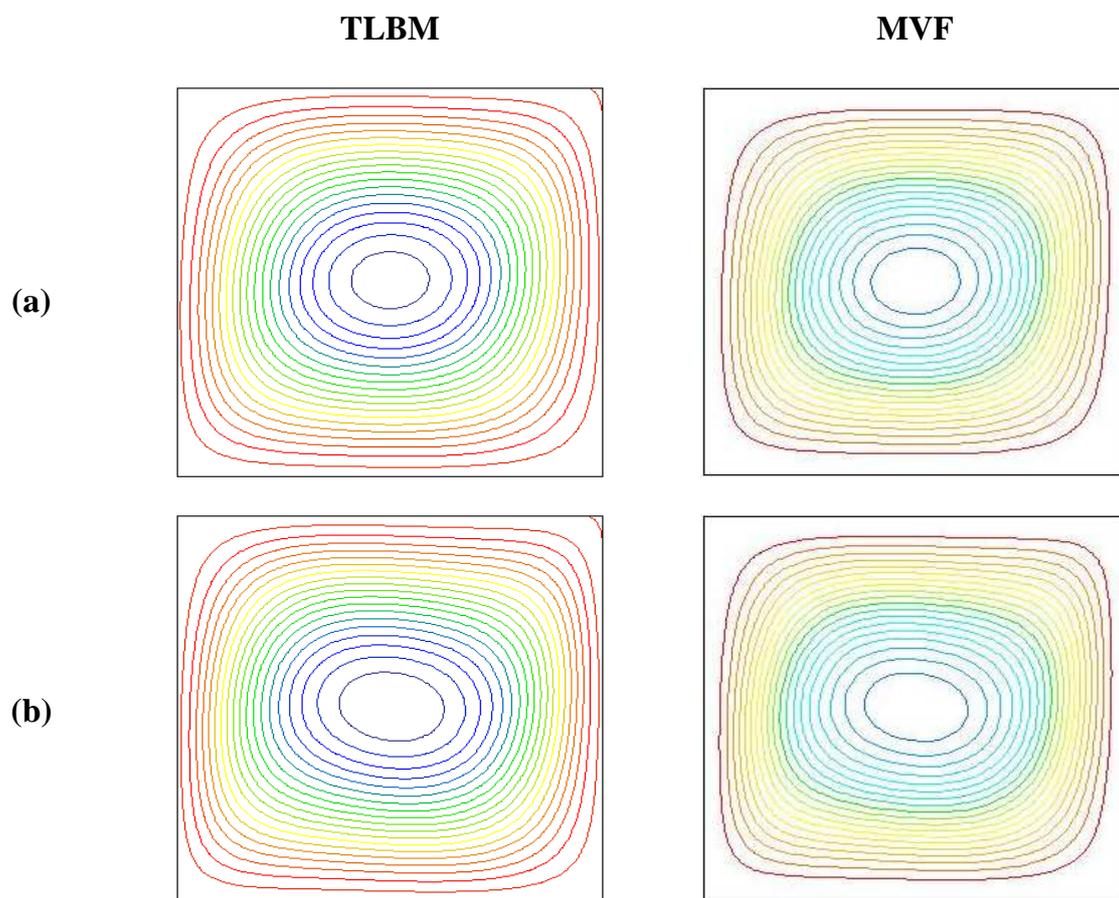
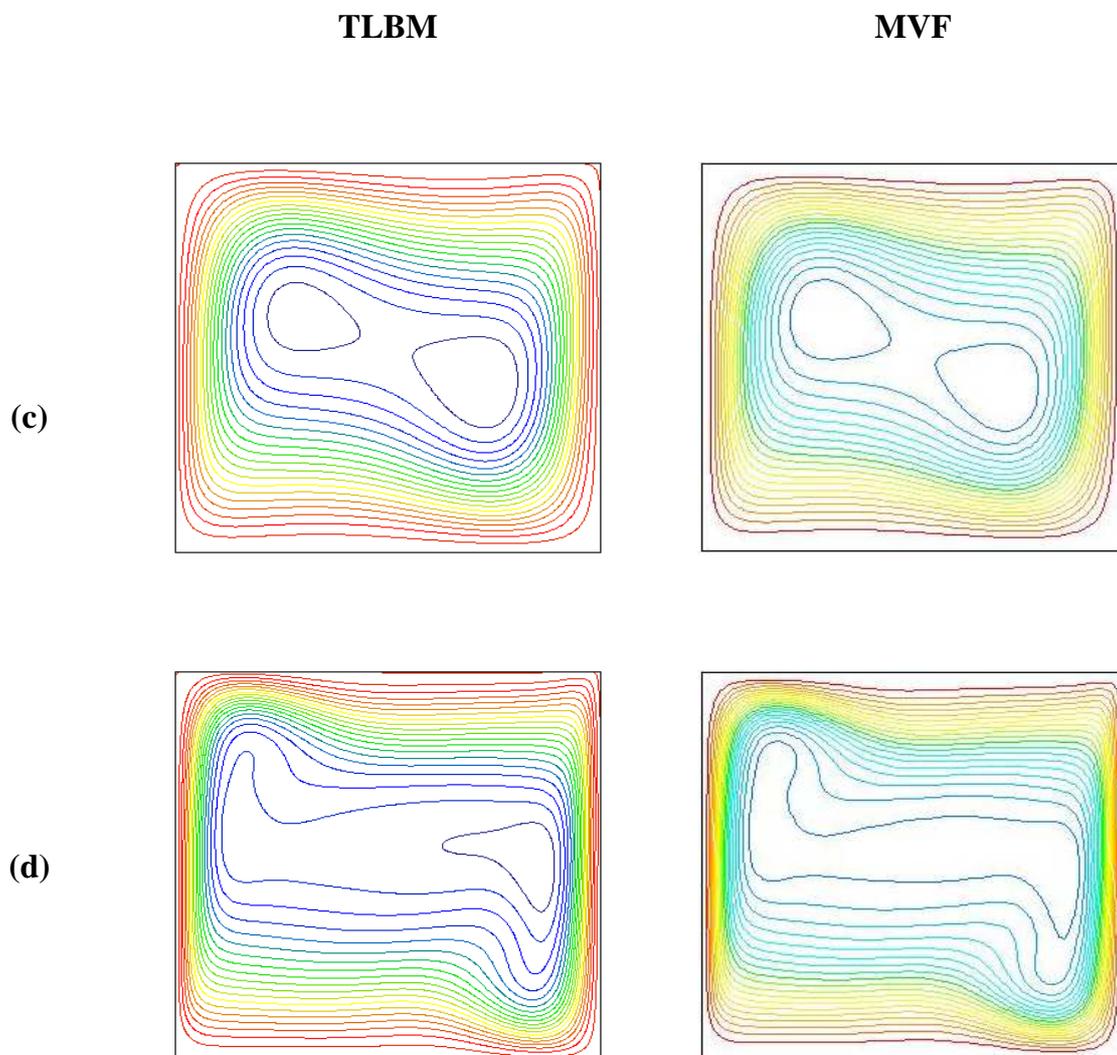
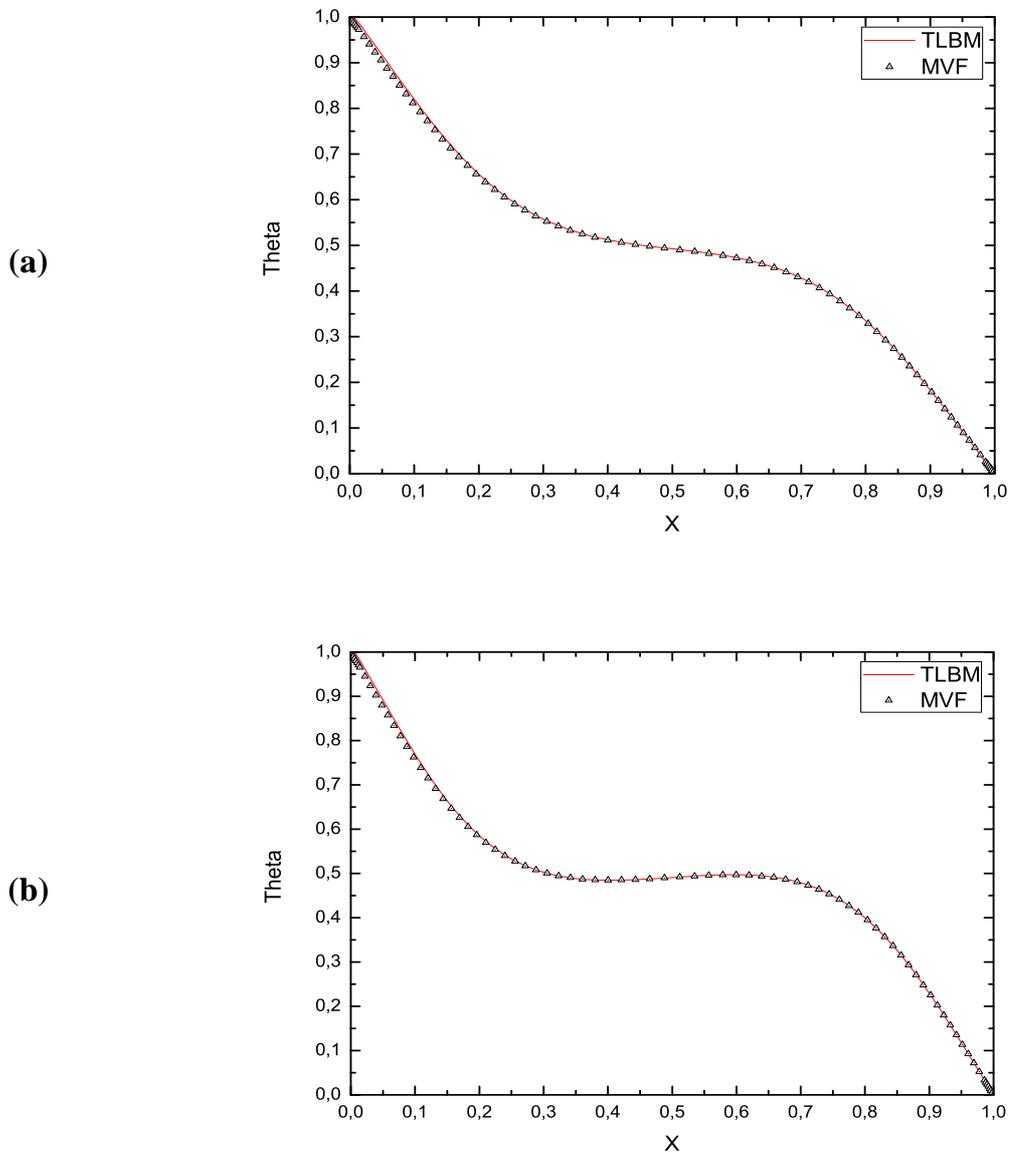


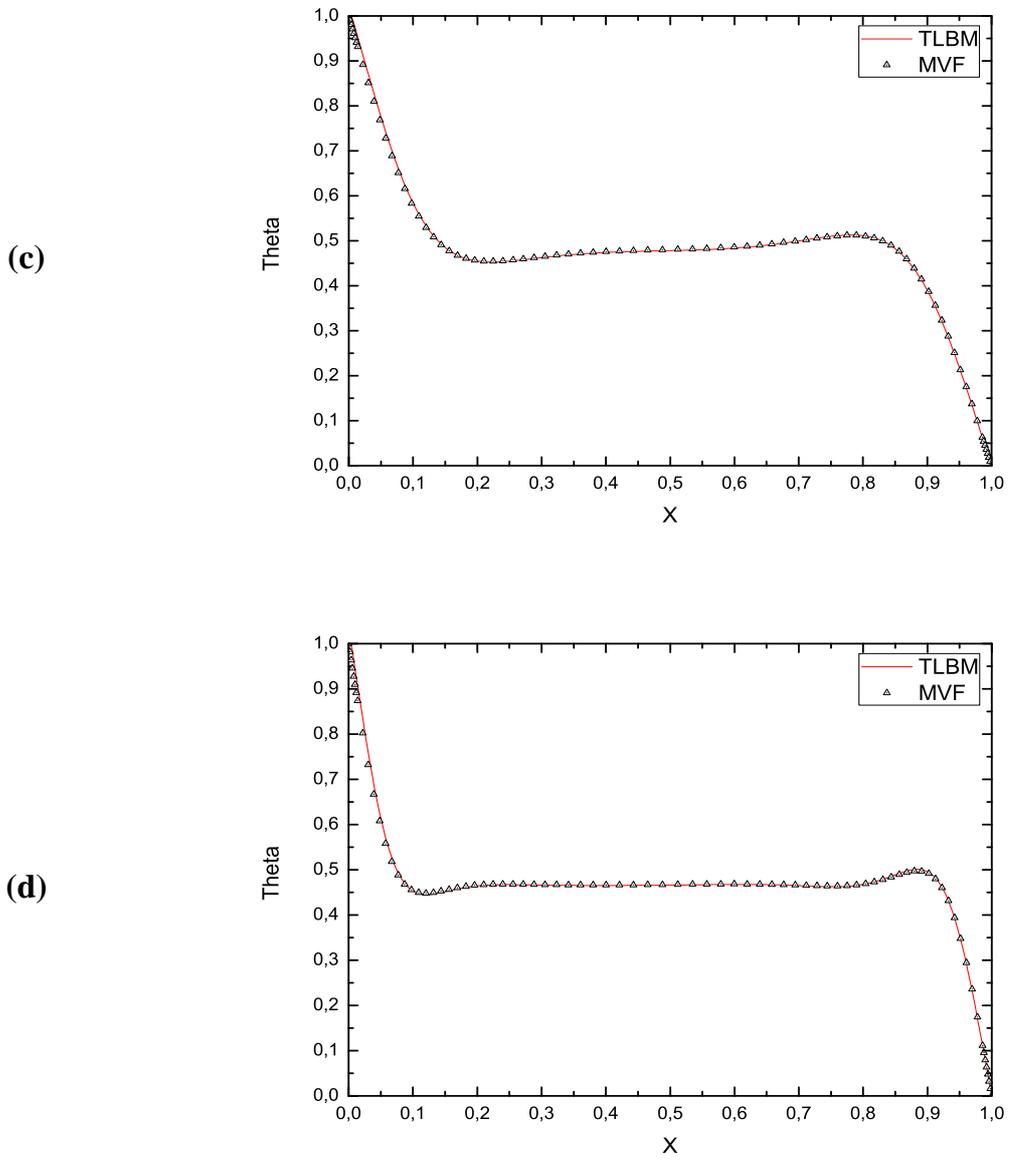
Fig. IV.23. Lignes de courant,  $L = 0.8 H$ , (a)  $Ra = 5 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$



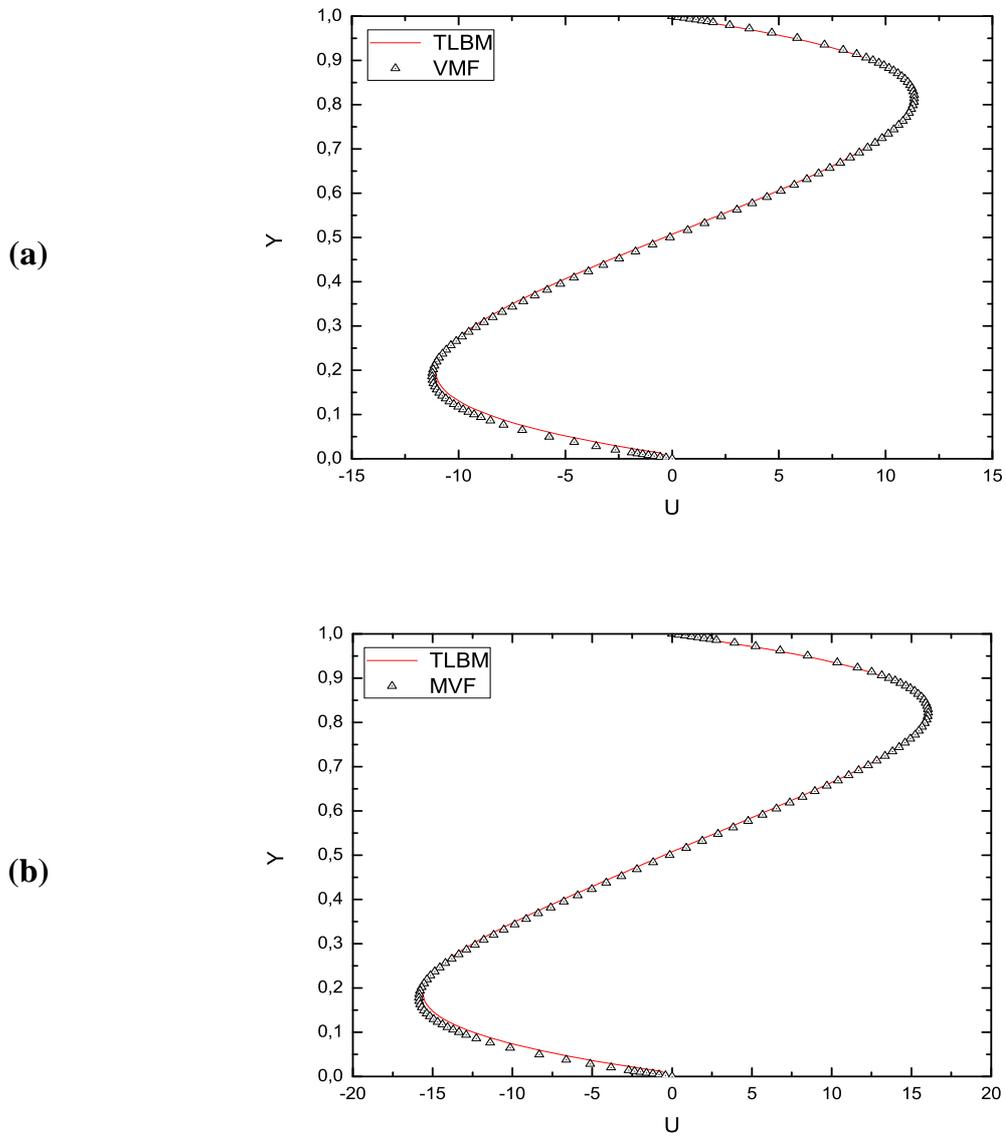
**Fig. IV.23.** (Suite) Lignes de courant,  $L = 0.8 H$ , (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$



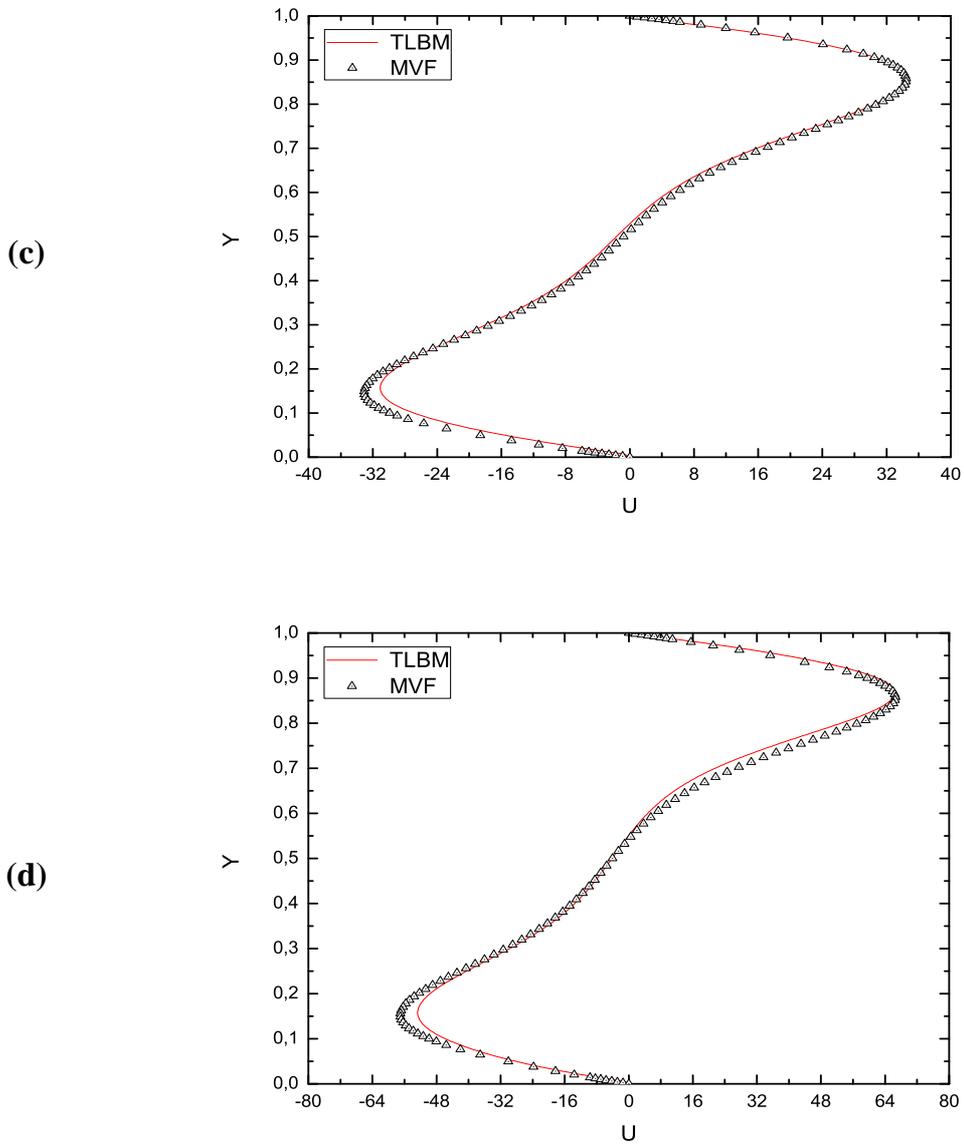
**Fig.IV.24.** Profils de Température adimensionnelle  $\theta$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.8 H$ ,  $Y = 0.5$ , (a)  $Ra = 5 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$



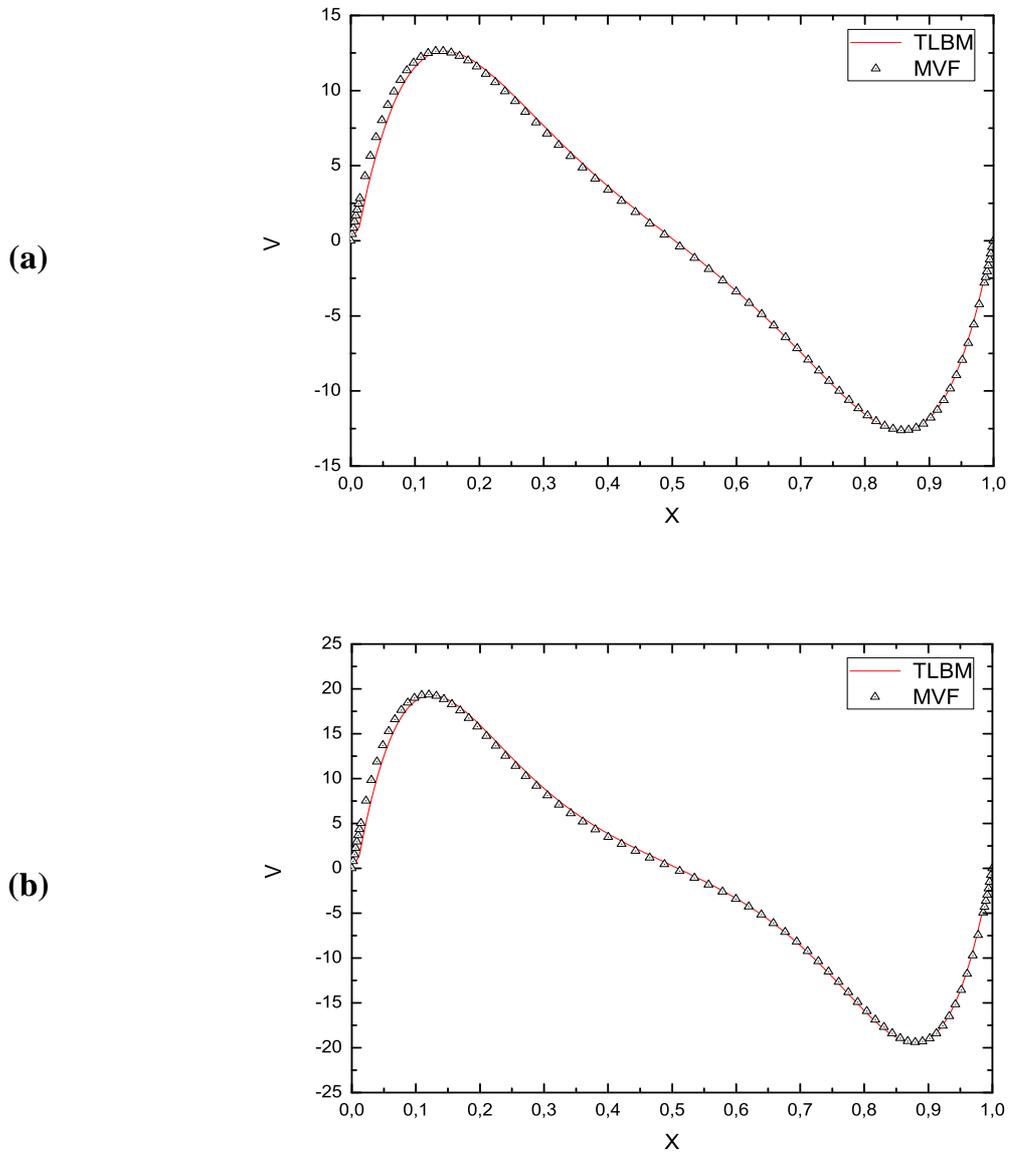
**Fig.IV.24. (Suite)** Profils de Température adimensionnelle  $\theta$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.8 H$ ,  $Y = 0.5$ , (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$



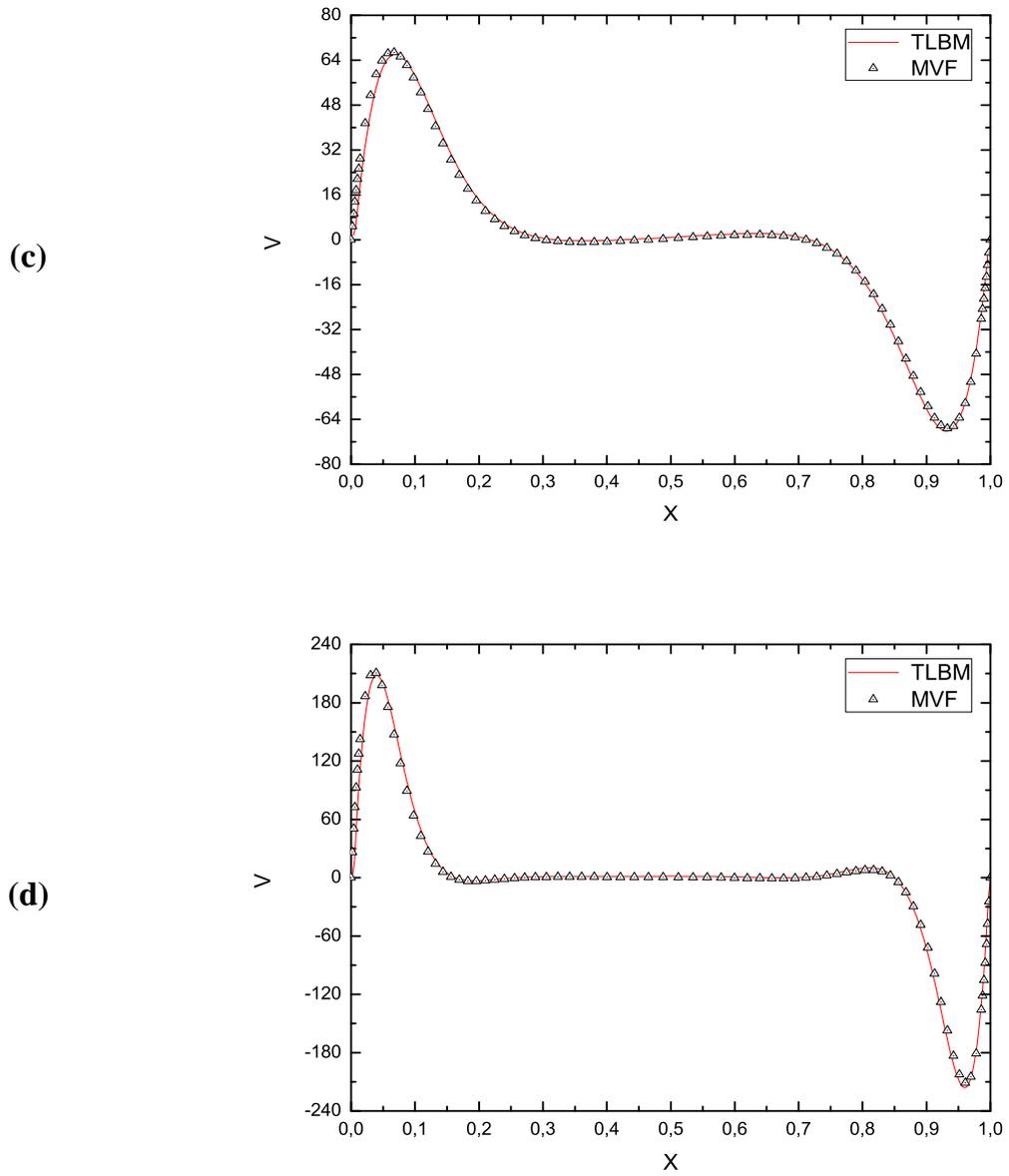
**Fig.IV.25.** Profils de Vitesse adimensionnelle  $U$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.8 H$ ,  $Y = 0.5$ , (a)  $Ra = 5 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$



**Fig.IV.25. (Suite)** Profils de Vitesse adimensionnelle  $U$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.8 H$ ,  $Y = 0.5$ , (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$



**Fig.IV.26.** Profils de Vitesse adimensionnelle  $V$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.8 H$ ,  $X = 0.5$ , (a)  $Ra = 5 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 10^4$



**Fig.IV.26. (Suite)** Profils de Vitesse adimensionnelle  $V$  à mi-hauteur de l'enceinte, pour  $L = 0.8 H$ ,  $X = 0.5$ , (c)  $Ra = 10^5$ , (d)  $Ra = 10^6$

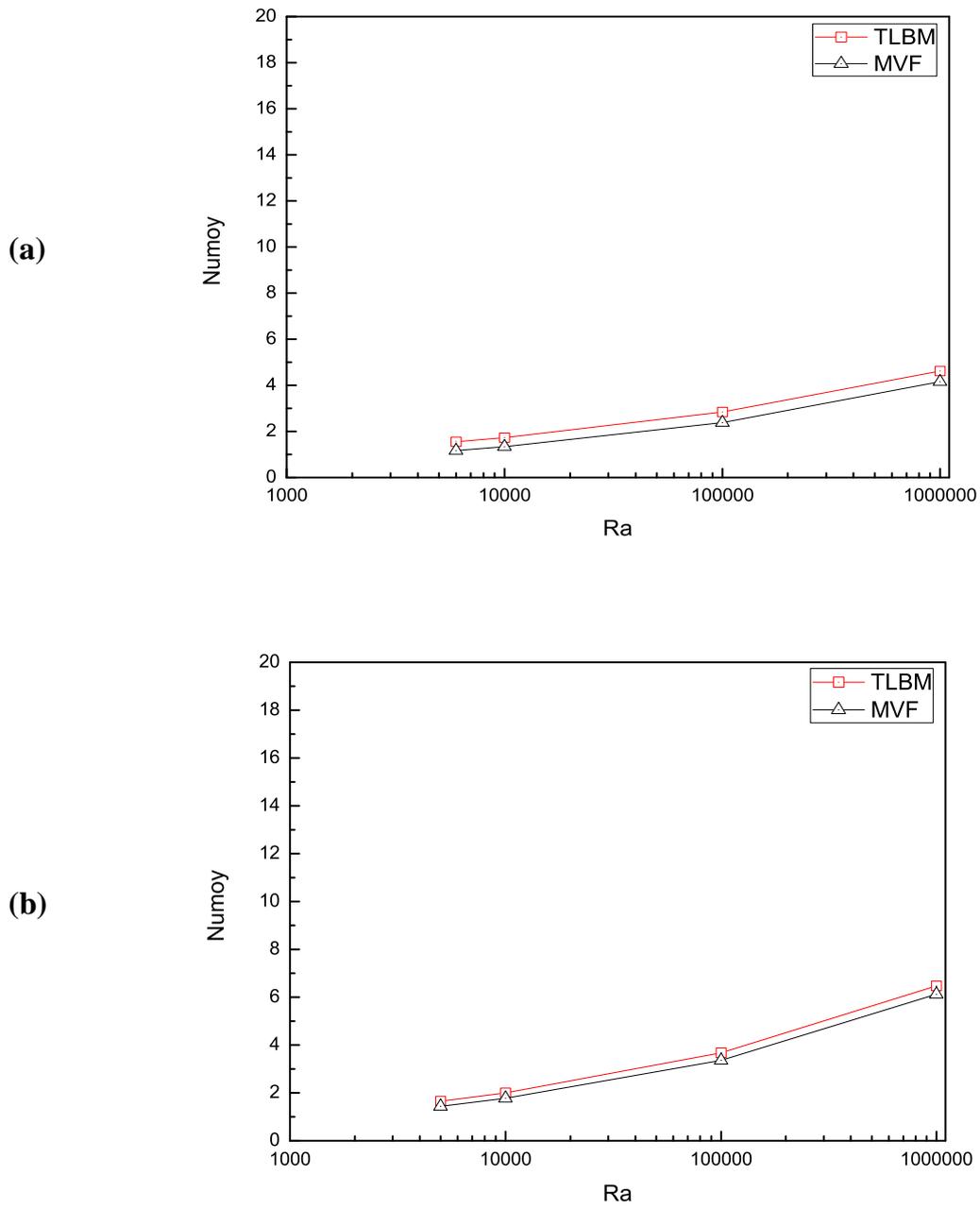
### IV.3.3 Effets sur le calcul du nombre de Nusselt moyen ( $Nu_{moy}$ ) :

#### IV.3.3.1 Effet du nombre du nombre de Rayleigh :

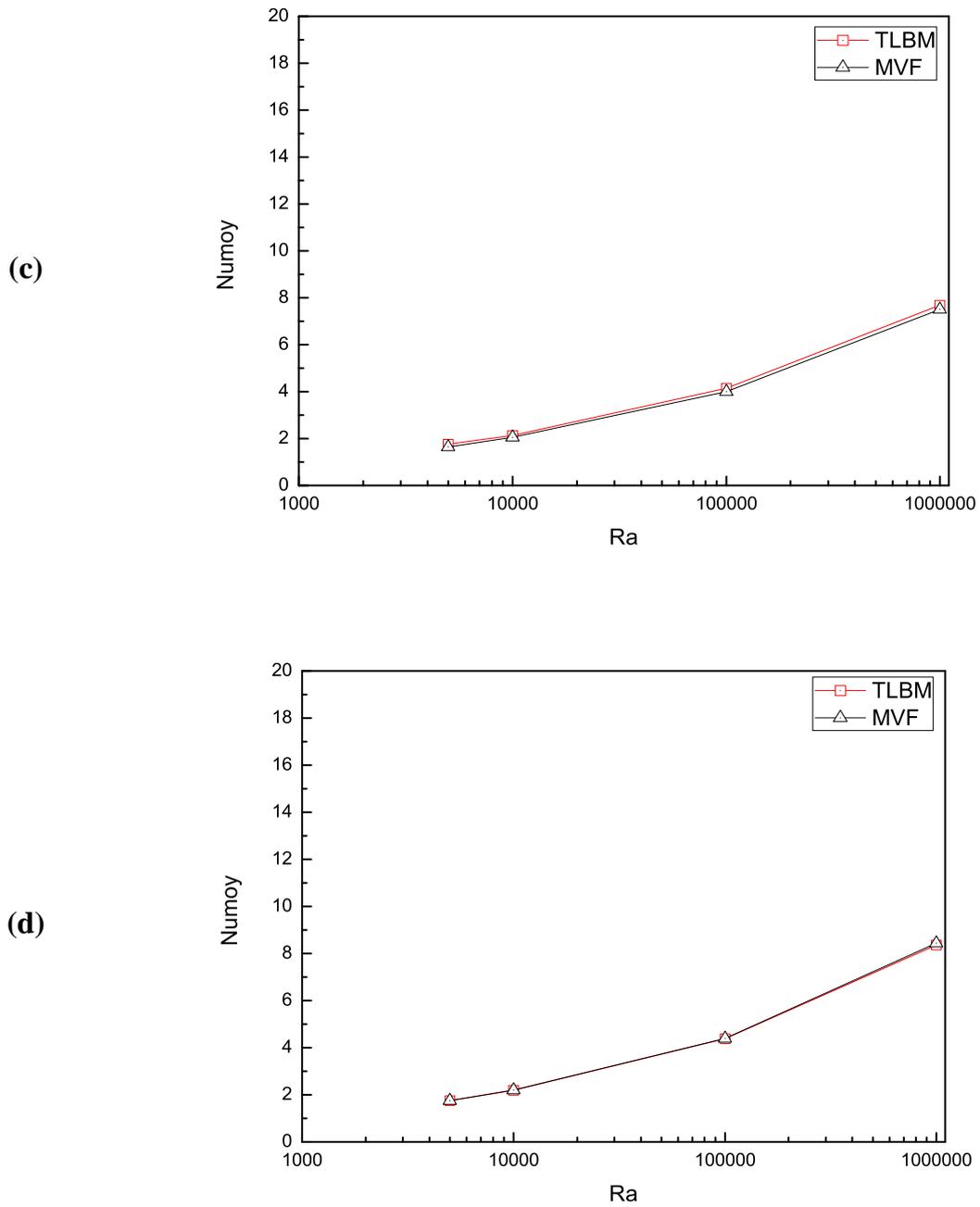
Le tableau comparatif (**tableau.5**) récapitule l'ensemble des résultats des valeurs du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh et de la longueur de la partie chauffée du mur gauche, obtenus par les méthodes TLBM et MVF et dont la représentation graphique (**Fig.IV.27**) montre bien que, quel que soit la longueur de la partie chauffée, la valeur nombre de Nusselt moyen varie linéairement en fonction du nombre de Rayleigh : l'augmentation du nombre de Rayleigh implique une croissance de la valeur du nombre de Nusselt moyen ; cela s'interprète comme une amélioration du transfert de chaleur par convection par rapport au transfert par conduction.

**Tableau. 5 :** Valeurs du nombre de Nusselt Moyen pour le chauffage partiel

$Ra$	20%		40%		60%		80%	
	TLBM	MVF	TLBM	MVF	TLBM	MVF	TLBM	MVF
$5 \times 10^3$	-	-	1.654	1.438	1.768	1.640	1.757	1.748
$6 \times 10^3$	1.552	1.168	-	-	-	-	-	-
$10^4$	1.735	1.340	1.997	1.780	2.136	2.051	2.192	2.198
$10^5$	2.843	2.379	3.669	3.358	4.146	4.003	4.382	4.393
$10^6$	4.622	4.153	6.477	6.125	7.689	7.501	8.359	8.435



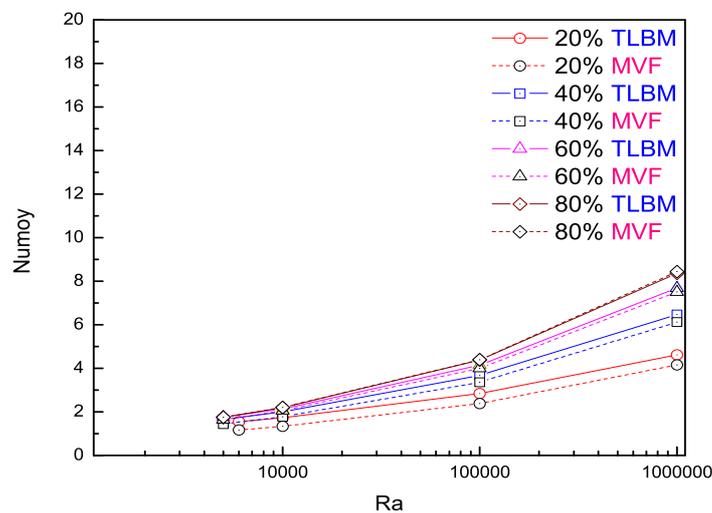
**Fig.IV.27.** Variations du nombre de Nusselt moyen ( $Nu_{moy}$ ) en fonction du nombre de Rayleigh, (a)  $L = 0.2H$ , (b)  $L = 0.4H$



**Fig.IV.27. (Suite)** Variations du nombre de Nusselt moyen ( $Numoy$ ) en fonction du nombre de Rayleigh, (c)  $L = 0.6H$ , (d)  $L = 0.8H$

### IV.3.3.2. Effets de la longueur de la partie chauffée du mur gauche :

Par souci de comparaison, la représentation graphique (**Fig.IV.28**) regroupe tous les résultats du nombre de Nusselt moyen pour le chauffage partiel du mur gauche. L'examen de la figure montre qu'une augmentation de la valeur du nombre de Nusselt moyen se voit liée à une augmentation de la longueur de la partie chauffée ainsi que du nombre de Rayleigh. Le transfert de chaleur à l'intérieur de l'enceinte est très influencé par ces deux paramètres avec également l'amélioration incessante du rôle de la convection par rapport à celui de la conduction.



**Fig.IV.28.** Variations du nombre de Nusselt moyen ( $Nu_{moy}$ ) en fonction du nombre de Rayleigh ( $Ra$ ) et de la longueur ( $L$ ) de la partie chauffée du mur gauche.

---

## **V. Conclusion générale**

## **V. Conclusion générale:**

Le problème de la convection naturelle laminaire dans une enceinte de type cavité fermée partiellement chauffée a été numériquement simulé par deux méthodes différentes : la première est une méthode conventionnelle. Il s'agit de la méthode des volumes finis (**MVF**), largement utilisée en mécanique des fluides et en thermique surtout lorsqu'il y a un couplage fort entre les champs de température et de vitesse tel est le cas de la convection naturelle. La deuxième est celle de Boltzmann sur réseau thermique à double population (**TLBM**).

Après une étude de validation de la procédure de simulation pour les deux méthodes, en utilisant la configuration de la cavité carrée différentiellement chauffée ; Le travail a été poursuivi par la simulation du problème de la cavité carrée partiellement chauffée. La structure générale d'écoulement (présentée sous forme des Isothermes, lignes de courant) reproduite par la méthode LBM a été présentée en même temps avec celle obtenue par la méthode des volumes finis. Ce qui a permis de faire une comparaison directe et constater une bonne concordance des résultats.

Pour mieux suivre le développement des champs hydrodynamique et thermique, la comparaison est allée jusqu'au traçage : des profils de température, des profils de vitesse à la demi hauteur de l'enceinte ainsi que la variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh et la longueur de chauffage de la paroi gauche. Ceux-ci ont permis de confirmer la bonne concordance entre les résultats obtenus par la méthode de Boltzmann sur réseau et ceux obtenus par la méthode des volumes finis.

Une comparaison qualitative et quantitative des résultats obtenus dans le présent travail, confirme que la méthode (**TLBM**) a fait la preuve de son efficacité. Cette méthode relativement récente, s'avère utile comme une alternative fructueuse et prometteuse pour reproduire les phénomènes thermo-fluide.

De point de vu physique, la résolution du problème à simuler révèle que l'écoulement de la convection naturelle à l'intérieur de l'enceinte est pertinemment lié, à la fois, au nombre de Rayleigh et à la longueur de la partie chauffée du mur gauche :

- *Nombre de Rayleigh* : plus le nombre de Rayleigh augmente, plus l'écoulement du fluide est plus rapide favorisant ainsi un transfert de chaleur meilleur.
- *Longueur de la partie chauffée du mur gauche* : plus la partie chauffée est longue, plus l'écoulement du fluide s'amplifie encore, permettant ainsi une amélioration du transfert de chaleur à l'intérieur de la cavité.

On en peut conclure que la combinaison de ces deux paramètres permet d'améliorer l'efficacité de l'écoulement et par conséquent le rendement du transfert thermique.

Vu que les problèmes rencontrés dans la vie pratique sont généralement tridimensionnels, cette étude peut désormais s'étendre sur la simulation de la convection naturelle dans une enceinte tridimensionnelle tout en appliquant les améliorations apportées à la **TLBM** récemment en utilisant le modèle réseau D3Q19. Ce travail peut aussi s'étendre à la simulation en régime turbulent.

---

## **Références bibliographiques**

**Références:**

- [1] F.P. Incropera, D.P. Dewitt, T.L. Bergman et A.S. Lavine, Fundamentals of heat and mass transfer sixième édition (2006).
- [2] D. Wolf-Gladrow, Lattice-gas cellular automata and Lattice Boltzmann models, Springer Berlin (2000),
- [3] A. Bejan et A. Krauss, Heat transfer handbook, chapter 7 natural convection, (2003)525-556
- [4] H. Bénard, les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent, ann. chim. Phys. 7(1901) 62-79
- [5] L. Rayleigh, On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the underside, Phill. Mag. 32(1916) 529-538
- [6] M. November et M.W Nansteel, Natural convection in rectangular enclosures heated from below and cooled along one side, international journal of heat and mass transfer 11(1987) 2433-2440
- [7] M. M. Ganzarolli et L. F. Milanez, Natural convection in rectangular enclosures heated from below and symmetrically cooled from the sides, international journal of heat and mass transfer, 38(1995) 1063-1073
- [8] G. De vahl Davis, Natural convection of air in a square cavity, a benchmark solution, international journal of numerical methods for fluids, 3(1983) 249-264
- [9] E. K. Lakhali et M. Hasnaoui, Convection naturelle dans une cavité carrée chauffée périodiquement par le bas, Revue générale de thermique 27(1995) 480-485
- [10] M. Hasnaoui, E. Bilgen, P. Vasseur. Natural convection heat transfer in rectangular cavities partially heated from below, journal of thermo physical heat transfer 6(1992) 255-264
- [11] M. Bourich, M. Hasnaoui, A. Amahnid, Double-diffusive natural convection in a porous enclosure partially heated from below and differentially salted, international journal of heat fluid flow, 25(2004) 1034-1046

- [12] C. J. Ho et J. Y. Chang, A study of natural convection heat transfer in a vertical rectangular enclosure with two dimensional discrete heating: effect of aspect ratio, international journal of heat and mass transfer 37(1994) 917-925
- [13] R. L. Frederick, On the aspect ratio for which the heat transfer in differentially heated cavities is maximum, international communication of heat and mass transfer 26(1999) 549-558
- [14] W. Tong, Aspect ratio effect on natural convection in water near its density maximum temperature, international journal of heat and fluid flow 20(1999) 624-633
- [15] P. Alam, A. Kumar, S. Kapoor et S. R. Ansari. Numerical investigation of natural convection in a rectangular enclosure due to partial heating and cooling at vertical walls, Commun nonlinear science and numerical simulation 17(2012) 2403-2414
- [16] N. Nithyadevi, Ruey-jen Yang, Double diffusive natural convection in a partially heated enclosure with Soret and Duffour effects, International journal of heat and fluid flow 30(2009)902-910
- [17] M. Bhuvaneswari, S.Sivasankaran, Y.J. Kim, Effect of aspect ratio on convection in a porous enclosure with partially active thermal walls, Computers and Mathematics with Applications 62(2011)3844-3856
- [18] M. Paroncini, F. Corvaro, A. Montucchiari, G. Nardini, A numerical and experimental analysis on natural convective heat transfer in a square enclosure with partially heated active side walls, Experimental Thermal and Fluid Science 36(2012)118-125
- [19] H. Bararnia, Souheil Souleimani, D.D. Ganji, Lattice Boltzmann simulation of natural convection around a horizontal elliptic cylinder inside a square cavity, international communications in heat and mass transfer 38(2011)1436-1442
- [20] Anil Kumar Sharma, K.Velusamy, C.Balaji, Turbulent natural convection in an enclosure with localized heating from below, International Journal of Thermal Sciences 46(2007)1232-1241

- [21] Tzong Huei-chen, Li-Yeuh Chen, Study of buoyancy –induced flow subjected to partially heated sources on the left and bottom walls in a square cavity, international Journal of Thermal Sciences, 46(2007)1219-1231
- [22] M. Paroncini, F. Corvaro, Natural convection in a square enclosure with a hot source, International Journal of Thermal Sciences 48(2009)1683-1695
- [23] B. Calcagni, F. Marsili, M. Paroncini, Natural convective heat transfer in square enclosures heated from below, Applied Thermal Engineering 25(2005)2522-2531
- [24] Ridha Jmai, Brahim Ben-Beya, Taieb Lili, heat transfer and fluid flow of nanofluid-filled enclosure with two partially heated side walls and different nanoparticles, Superlattices and Microstructures 53(2013)130-154
- [25] J.H. Ferziger et al. Computational methods for fluid dynamics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg chap.4 (1996) 67-84
- [26] S.V. Patankar, Calculation of the flow field, Numerical heat transfer and fluid flow, chapter 6, hemisphere publishing corporation (1980) 126-130.
- [27] F. Cadavid, Simulation numérique de la réduction des émissions de NOx dans un four pilote de 4MW, thèse de Doctorat, université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis (2004) 9-15
- [28] J. Ph. Rennard, Automates cellulaires, [rennard.org/life](http://rennard.org/life) (2000) 1-2
- [29] J. Hardy, Y. Pomeau & O. de Pazzis, Time evolution of two-dimensional model system, J. math. Phys. 14(1973) 1746-1759
- [30] U. Frish, B. Hasslacher & Y. Pomeau, Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation, Physical review letters, 56(1986) 1505- 1508
- [31] G. R. McNamara & G. Zanetti, Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata. Physical review letters, 61(1988) 2332-2335
- [32] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross & M. Krook, A model for collision processes in gases, Physical review, 94(1954) 511-525
- [33] Luo, L. S and He X., Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier-Stokes equation, Journal of Statistical Physics, 88(1997)927-944

- [34] P. A. Skordos, Initial and boundary conditions for lattice Boltzmann method. *Phys. Review* 48(1993) 4824-4842
- [35] T. Inamuro, M. Yoshina & F. Ogino, A non-slip boundary condition for lattice Boltzmann simulations. *Phys. Fluids* 7(1995) 2928-2930
- [36] Q. Zou et X. He, On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK mode, *physics fluids*, 9(1997) 1592-1598
- [37] [sharcnet.ca/Software/Fluent6/html/ug/node572.htm](http://sharcnet.ca/Software/Fluent6/html/ug/node572.htm), Natural convection and buoyancy-driven flows, *Fluent 6.3 user's guide*, Fluent Inc. chap.13 (2006)
- [38] S. Succi, *Lattice Boltzmann method for fluid dynamics and beyond*, Oxford, London (2001)
- [39] H-B Huang, X-Y Lu & M C Sukop, Numerical study of lattice Boltzmann methods for a convection-diffusion equation coupled with Navier-Stokes equations. *Journal of physics A: mathematical and theoretical* 44(2011) 1-8
- [40] M. Mobedi, U. Uzkol & B. Sunden, Visualization of diffusion and convection heat transport in a square cavity with natural convection, *International journal of heat and mass transfer* 53(2010) 99-109
- [41] A. Bairi, Nusselt-Rayleigh correlations for design of industrial elements: experimental and numerical investigation of natural convection in titled square cavity filled air enclosures, *Energy conversion and management*, 49(2008)771-782

---

# **Annexe**

## Annexe

### Expansion de Chapman-Enskog :

Pour que la simulation de la dynamique des fluides se serve de l'équation de Boltzmann sur réseau LBE, il faut que celle-ci satisfasse les équations gouvernantes de Navier-Stokes. Autrement dit, il paraît donc nécessaire de trouver une relation entre le mesoscopique du problème et son macroscopique de sorte qu'il soit possible de dériver les équations de Navier-Stokes à partir de l'équation de Boltzmann sur réseau. Cela se fait en utilisant l'expansion de Chapman-Enskog et celle de Taylor comme suit :

D'après Chapman-Enskog, la fonction de distribution peut avoir la forme suivante :

$$f_i = f_i^{(0)} + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)} + \dots$$

Où :

$\varepsilon$  est choisi comme le nombre de Knudsen qui est défini comme :

$$Kn = \frac{\lambda}{l}$$

$f_i^{(0)}$  est la fonction de distribution d'équilibre.

$f_i^{(1)}$  et  $f_i^{(2)}$  sont des petites perturbations.

Notons que pour que le gaz se considère comme un fluide, il faut que le nombre de Knudsen satisfasse la condition suivante :

$$|\varepsilon| \ll 1$$

De même  $\vec{x}$  et  $t$  peuvent être expansés comme :

$$\vec{x} = \frac{\vec{x}_1}{\varepsilon} + \dots \quad \text{et} \quad t = \frac{t_1}{\varepsilon} + \frac{t_2}{\varepsilon^2} + \dots$$

$\vec{x} = o(\varepsilon)$ ,  $t_1 = o(\varepsilon)$  et  $t_2 = o(\varepsilon^2)$ . Dans ce cas, on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_{1\alpha}} + \dots \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots$$

L'application d'une expansion de Taylor au terme de gauche de l'équation (2.19) permet d'obtenir:

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right] f_i(\vec{x}, t) = \Omega_i \quad \text{Pour rappel, la sommation}$$

d'Einstein donne:

$$c_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \sum_{\alpha=1,2} c_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

L'introduction des expansions de :  $f$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$  et  $\frac{\partial}{\partial t}$  dans l'équation (2.19) donne :

$$\left[ \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + c_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{1\alpha}} \right) + \frac{1}{2} \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + c_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{1\alpha}} \right)^2 \right] \\ \times (f_i^{(0)} + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)}) = -\frac{1}{\tau} (f_i^{(0)} + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)} - f_i^{(eq)})$$

Ce qui permet, après développement, d'aboutir aux équations suivantes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \rho u_\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \Pi = 0 \quad [33]$$

qui ne sont autres que les équations de continuité et de quantité de mouvement respectivement.