REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'NSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTE DES SCINCES EXACTES, SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de Magister

EXTENSIONS PROPRES DE CERTAINES CLASSES D'OPERATEURS DE STURM – LIOUVILLE

Présenté par
FAIZA BENMEHDI

Devant le Jury composé de :

M. Benharrat Belaidi	**Professeur**	**Univ. Mostaganem Président**
M. Berrabah Bendoukha	**Professeur**	**Univ. Mostaganem Rapporteur**
M. Mekki Terbeche	**Professeur**	**Univ. Es-Senia Examinateur**
M. Sidi Mohamed Bahri	**M. Conférences**	**Univ. Mostaganem Examinateur**

Juillet 2010

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Rappellons tout d'abord qu'un opérateur S défini dans un Hilbert complexe $\mathcal{H}$ est dit symétrique si son domaine $\mathcal{D}(S)$ est dense dans $\mathcal{H}$ et,

$$\forall (x,y) \in \mathcal{H}^2, \quad < Sx, y > = < x, Sy > .$$

La théorie classique de l'extension des opérateurs symétriques remonte à au moins 1929 quand Von Neumann trouva l'extension dite de Kreïn. Cette théorie, a trouvé beaucoup d'applications dans les problèmes générés par les équations différentielles tant ordinaires qu'aux dérivées partielles [8, 10, 12, 15]. Ces trois dernières décennies, la théorie de l'extension des opérateurs symétriques a connu un nouvel essort, grâce aux concepts de triplet limite et fonction de Weyl, associée. Ce concept trouve ses origines dans les travaux de A. N. Kochubeï [9] et a depuis connu plusieurs développements dans [3, 4, 5, 7]. La fonction de Weyl permet en particulier d'étudier les propriétés spectrales des extensions trouvées.

Le but du présent mémoire est l'étude par la méthode des triplets limites des extensions propres (c'est à dire comprises entre S et S^*)de l'opérateur de Sturm-Liouville [2, 11, 16]. Le manuscrit est composé de trois chapitres. Dans le deuxième chapitre, on introduit les notions fondamentales et connues de relation linéaire (qui est une généralisation du concept d'opérateur) et de triplet limite associé à un opérateur symétrique. A chaque triplet limite, on associe une fonction de weyl et ses propriétés fondamentales sont énumérées. Le troisième chapitre, est consacré à l'étude de l'opérateur de Sturm-liouville sur un intervalle fini. A ce titre, un triplet limite est trouvé et la fonction de Weyl associée est calculée. On donne aussi une descrition des extensions recherchées ainsi que la forme générale de leurs résolvantes respectives. Le quatrième et dernier chapitre est consacré à l'étude de l'opérateur de Sturm-Liouville sur la demie-droite positive sous la condition qu'on est en situation du cas point-limite (limit-point case). Contrairement au chapitre précédent, les indices de défaut dans ce cas sont égaux à 1. Cela est du au fait qu'au moins une des solutions fondamentales de l'équation $S^*x = zx$, $Im(z) \neq 0$ n'est pas à carré integrable. Dans ce cas, l'alternative de Weyl permet d'obtenir la solution générale. De meme que dans le chapitre précédent, un triplet limite est trouvé et la fonction de Weyl associée est calculée. Gràce à la fonction de Weyl, on obtient une description des résolvantes des extensions propres. Les résultats des chapitres trois et quatre sont illustrés par l'exemple de l'opérateur de Sturm-Liouville, donné par l'expression différentielle, $S(x) = -x''$.

Chapitre 2

Extensions des opérateurs symétriques

Dans ce chapitre, nous exposons les résultats essentiels concernant la théorie d'extension des opérateurs symétriques fermés à indices de défaut égaux. L'approche que nous adoptons ici est celle basée sur le concept de triplets limites et fonctions de Weyl associées. Les résultats exposés peuvent être trouvées en détail dans [3, 4, 5, 7, 9].

2.1 Relations linéaires dans un espace de Hilbert

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Hilbert séparable. On appelle relation linéaire dans $\mathcal{X}$ tout sous-espace Θ de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Le domaine, l'image, le noyau et la partie multivoque de la relation Θ sont respectivement définis par :

$$\begin{aligned}
&Dom\Theta = \{x \in \mathcal{X} : \exists y \in \mathcal{X},\ (x, y) \in \Theta\},\\
&Ran\Theta = \{y \in \mathcal{X} : \exists x \in \mathcal{X},\ (x, y) \in \Theta\},\\
&\ker\Theta = \{x \in \mathcal{X} :\ (x, 0) \in \Theta\},\\
&mul\Theta = \{y \in \mathcal{X} :\ (0, y) \in \Theta\}
\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

L'identification d'un opérateur borné avec son graphe permet de regarder tout opérateur linéaire borné comme une relation linéaire. L'ensemble des relations fermées de $\mathcal{X}$ est notée $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{X})$.

Proposition 2.1.1 *Une relation linéaire $\Theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{X})$ de domaine $\mathcal{X}$ est le graphe d'un* opérateur linéaire si et seulement si $mul\Theta = \{0\}$.

Preuve: Il suffit d'établir la condition suffisante. Supposons que la relation linéaire $\Theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{X})$ vérifie les conditions : $Dom\Theta = \mathcal{X}$ et $mul\Theta = \{0\}$. Soit $x \in Dom\Theta$ et supposons qu'il existe deux éléments y_1 et y_2 tels que $(x, y_1) \in \Theta$ et $(x, y_2) \in \Theta$. Comme Θ est un sous espace de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, alors,

$$(x, y_1) - (x, y_2) = (0, y_1 - y_2) \in \Theta.$$

Cela signifie que $y_1 - y_2 \in mul\Theta = \{0\}$ et donc $y_1 = y_2$.
Considèrons maintenant la correspondance

$$\begin{aligned} A : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{X} \\ x &\longmapsto y : \ (x, y) \in \Theta \end{aligned}$$

D'après ce qui précéde, A est un opérateur linéaire partout bien défini sur $\mathcal{X}$. De plus, le graphe de A coïncide avec Θ. Pour montrer que A est borné, il suffit en vertu du théorème du graphe fermé de montrer qu'il est fermé. Soit donc $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ une suite d'éléments de $\mathcal{X}$ telle que

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{et} \quad Ax_n \longrightarrow y.$$

Il est clair que $x \in \mathcal{X}$ et que $(x_0, Ax_0), (x_1, Ax_1), ..., (x_n, Ax_n), ...$ est une suite d'éléments de Θ, convergente vers (x, y). Comme Θ est fermée, (x, y) est aussi un élément de Θ. Cela signifie que $y = Ax$ et donc, l'opérateur A est fermé.

Etant données deux relations linéaires Θ_1, Θ_2 dans $\mathcal{X}$ et un nombre complexe λ, on obtient de nouvelles relations linéaires dans $\mathcal{X}$ en posant :

$$\Theta_1^{-1} = \{(y, x) : \ (x, y) \in \Theta_1\} \quad (la\ relation\ inverse\ de\ \Theta_1),$$

$$\Theta_1 \widehat{+} \Theta_2 = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) : \ (x_1, y_1) \in \Theta_1, \ (x_2, y_2) \in \Theta_2\} \quad (somme\ ordinaire),$$

$$\Theta_1 + \Theta_2 = \{(x, y + z) : \ (x, y) \in \Theta_1, \ (x, z) \in \Theta_2\} \quad (somme\ opratorielle),$$

$$\lambda\Theta_1 = \{(x, \lambda y) : \ (x, y) \in \Theta_1\},$$

$$\Theta_1 - \lambda = \{(x, y - \lambda x) : \ (x, y) \in \Theta_1\}.$$

Proposition 2.1.2 *Soit Θ une relation linéaire dans $\mathcal{X}$. Considèrons le sous ensemble Θ^* de $\Theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{X})$, défini comme suit :*

$$(x^*, y^*) \in \Theta^* \Longleftrightarrow \forall (x,y) \in \Theta : < y, x^* > = < x, y^* > .$$

Alors, Θ^* est un élément de $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{X})$. On l'appelle la relation adjointe de la relation linéaire Θ.

Preuve: Soient $(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*)$ deux éléments de Θ^*. On a donc pour tous (x,y) dans Θ,

$$< y, x_1^* > = < x, y_1^* > \quad \text{et} \quad < y, x_2^* > = < x, y_2^* > .$$

Par conséquent, pour tous nombres complexes α et β,

$$\begin{aligned}
< y, \alpha x_1^* + \beta x_2^* > &= < y, \alpha x_1^* > + < y, \beta x_2^* > \\
&= \overline{\alpha} < y, x_1^* > + \overline{\beta} < y, x_2^* > \\
&= \overline{\alpha} < x, y_1^* > + \overline{\beta} < x, y_2^* > \\
&= < x, \alpha y_1^* > + < x, \beta y_2^* > \\
&= < x, \alpha y_1^* + \beta y_2^* > .
\end{aligned}$$

Cela signifie que pour tous nombres complexes α et β,

$$(\alpha x_1^* + \beta x_2^*, \alpha y_1^* + \beta y_2^*) \in \Theta^*.$$

Donc, Θ^* est aussi une relation linéaire dans $\mathcal{X}$.
Montrons maintenant que Θ^* est fermée. Soit $\{(x_n^*, y_n^*)_{n \geq 0}\}$ une suite d'éléments Θ^*, convergent vers (x^*, y^*). On a alors $\forall (x,y) \in \Theta$:

$$\begin{aligned}
< y, x^* > &= < y, \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n^* > = \lim_{n \longrightarrow +\infty} < y, x_n^* > \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} < x, y_n^* > = < x, \lim_{n \longrightarrow +\infty} y_n^* > \\
&= < x, y^* > .
\end{aligned}$$

Par conséquent, $(x^*, y^*) \in \Theta^*$.

Remarque 2.1.1 *Notons que dans le cas où Θ est le graphe d'un opérateur linéaire borné partout défini, on retrouve la définition usuelle de l'opérateur adjoint.*

Proposition 2.1.3 *Soit Θ une relation linéaire dans $\mathcal{X}$. Alors,*

$$\Theta^* = (J\Theta)^{\perp}, \tag{2.1.2}$$

où, $\Theta^{\perp}$ désigne l'orthogonal dans $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ de Θ, J- l'opérateur défini de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$ par la formule : $J(x, y) = (y, -x)$. De plus,

$$mul\Theta^* = (Dom\Theta)^{\perp} \quad , \quad \ker \Theta^* = (Ran\Theta)^{\perp} \tag{2.1.3}$$

Preuve: On a

$$\begin{aligned}
(x^*, y^*) \in \Theta^* &\iff \; < y, x^* >=< x, y^* > \; \forall (x, y) \in \Theta \\
&\iff \; < y, x^* > + < -x, y^* >= 0 \, \forall (x, y) \in \Theta \\
&\iff \; (x^*, y^*) \perp (y, -x) \; \forall (x, y) \in \Theta \\
&\iff \; (x^*, y^*) \perp J\Theta.
\end{aligned}$$

Ainsi donc, $\Theta^* = (J\Theta)^{\perp}$.
D'autre part,

$$\begin{aligned}
y^* \in mul\Theta^* &\iff \; (0, y^*) \in \Theta^* \\
&\iff \; (0, y^*) \perp (y, -x) \; \forall (x, y) \in \Theta \\
&\iff \; < -x, y^* >= 0 \; \forall x \in Dom\Theta \\
&\iff \; y^* \perp Dom\Theta.
\end{aligned}$$

La dernière relation s'obtient de manière tout à fait analogue.

Définition 2.1.4 *Une relation linéaire Θ dans $\mathcal{X}$ est dite :*

1. *Symétrique si $\Theta \subseteq \Theta^*$,*
2. *Auto-adjointe si $\Theta = \Theta^*$,*
3. *Dissipative si : $Im(< y, x >) \geq 0 \; \forall (x, y) \in \Theta$.*

Proposition 2.1.5 *Supposons que $\dim \mathcal{X} = n < +\infty$. Alors, toute relation symétrique de dimension n est autoadjointe.*

Preuve: On a en vertu de l'inversibilité de l'opérateur J,

$\dim \Theta^* = \dim(J\Theta)^\perp = \dim(\mathcal{X}\times\mathcal{X}) - \dim(J\Theta) = \dim(\mathcal{X}\times\mathcal{X}) - \dim(\Theta) = 2n - n = n.$

Ainsi, $\Theta \subseteq \Theta^*$ et $\dim \Theta = \dim \Theta^* < +\infty$. Par conséquent, $\Theta = \Theta^*$.

Définition 2.1.6 *Soient Θ une relation linéaire dans $\mathcal{X}$.*

a) On dira que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de Θ s'il existe un vecteur non nul $x \in \mathcal{X}$ tel que $(x, \lambda x) \in \Theta$. L'ensemble des valeurs propres de Θ sera noté $\sigma_p(\Theta)$,

b) On dira que $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient au spectre continu de Θ si la relation $(\Theta - \lambda)^{-1}$ est le graphe d'un opérateur linéaire densément défini mais non borné. Le spectre continu de Θ sera noté $\sigma_c(\Theta)$,

c) On dira que $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient au spectre résiduel de Θ si $\overline{Ran\Theta} \neq \mathcal{X}$. Le spectre residuel de Θ *sera noté $\sigma_r(\Theta)$,*

d) On dira que $\lambda = +\infty$ est une valeur propre de Θ si $mul\Theta \neq \{0\}$,

e) On appelle spectre de Θ l'ensemble $\sigma(\Theta) = \sigma_p(\Theta) \cup \sigma_c(\Theta) \cup \sigma_r(\Theta) \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Le complémentaire dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ du spectre est appelé ensemble résolvant de Θ et est noté $\rho(\Theta)$.

Exemple 2.1.7 *Supposons que $\mathcal{X} = \mathbb{C}$. Dans ce cas, toute relation linéaire Θ, vérifie l'une des trois possibilités suivantes :*

1. $\dim \Theta = 0$,
2. $\dim \Theta = 2$,
3. $\dim \Theta = 1$.

Dans le premier cas, $\Theta = \{0\}$ et $\Theta^* = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Donc c'est une relation symétrique mais non autoadjointe. Par contre elle est dissipative. Dans le second cas, $\Theta = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et $\Theta^* = \{0\}$. Donc cette relation n'est ni symetrique, ni dissipative. Dans le troisième et dernier cas,

$$\Theta = \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : ax + by = 0\}, \quad (a, b) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C})^*,$$

$$\Theta^* = \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : \overline{a}x + \overline{b}y = 0\}.$$

Par conséquent,

1. *Si* $a = 0 \wedge b \neq 0$ *alors,* $\Theta = \Theta^*$ *et* $\sigma(\Theta) = \sigma_p(\Theta) = \{0\}$,

2. *Si* $a \neq 0 \wedge b = 0$ *alors* $\Theta = \Theta^*$ *et* $\sigma(\Theta) = \sigma_p(\Theta) = \{\infty\}$,

3. *Si* $ab \neq 0$ *alors,* $\Theta = \Theta^* \Longleftrightarrow Im(\frac{a}{b}) = 0$. *De plus* $\sigma(\Theta) = \sigma_p(\Theta) = \{-\frac{a}{b}\}$,

4. *Si* $ab \neq 0$ *alors,* Θ *est dissipative* $\Longleftrightarrow Im(\frac{-a}{b}) \geq 0$. *De plus* $\sigma(\Theta) = \sigma_p(\Theta) = \{-\frac{a}{b}\}$.

2.2 Triplets limites

Soit A un opérateur symétrique de domaine $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H}$ et d'indices de défaut finis et égaux (i.e $n_\pm(A) = \dim\ker(A^\star \pm iI_\mathcal{H}) < +\infty$).

Définition 2.2.1 *Un triplet* $\Pi = (\mathcal{X}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ *constitué d'un espace de Hilbert* $\mathcal{X}$ *et d'opérateurs linéaires* $\Gamma_0, \Gamma_1 : \mathcal{D}(A^\star) \longrightarrow \mathcal{X}$ *est dit triplet limite pour* $A^\star$ *si*

a) La formule $\Gamma(x) = (\Gamma_0(x), \Gamma_1(x))$ *définit une surjection de* $\mathcal{D}(A^\star)$ *dans* $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ *;*

b) La deuxième formule abstraite de Green

$$< A^\star(x), y > - < x, A^\star(y) >=< \Gamma_1(x), \Gamma_0(y) > - < \Gamma_0(x), \Gamma_1(y) >,$$

est vérifiée pour tous $x, y \in \mathcal{D}(A^\star)$.

Notons que dans le cas d'indices de défaut égaux, les triplets limites existent toujours. De plus, si $\Pi = (\mathcal{X}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ et $\Pi' = (\mathcal{X}', \Gamma'_0, \Gamma'_1)$ sont deux triplets limites pour $A^\star$ alors, il existe un opérateur borné et d'inverse aussi borné $W = (W)^2_{ij=1} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}' \times \mathcal{X}'$ tel que :

$$W^\star \begin{pmatrix} 0 & -iI_{\mathcal{X}'} \\ iI_{\mathcal{X}'} & 0 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} 0 & -iI_\mathcal{X} \\ iI_\mathcal{X} & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$\begin{pmatrix} \Gamma'_0 \\ \Gamma'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix}$$

Lemme 2.2.2:

Soient A un opérateur symétrique fermé d'indices de défaut égaux et $\Pi = (X, \Gamma_0, \Gamma_1)$ un triplet limite pour A^* ,Alors

$$\forall f \in D(A), \Gamma_0(f) = \Gamma_1(f) = 0.$$

Preuve:

D'aprés ce qui précède, il suffit d'établir le résultat pour au moins un triplet quelconque Supposons que A est d'indices de défaut (n,n) et désignons par $\{e_1(i), e_2(i), ..., e_n(i)\}$ une base de $\ker(A^* - i)$ et par $\{e_1'(i), e_2'(i), ..., e_n'(i)\}$ une base de $\ker(A^* + i)$. D'aprés Von Neumann, tout élément f_* de $D(A^*)$ s'écrit sous la forme

$$f_* = f + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(i) e_k(i) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k(i) e_k'(i), \qquad f \in D(A), \qquad \alpha_k(i), \beta_k(i) \in \mathrm{C}.$$

Définissons les opérateurs Γ_0, Γ_1 de $D(A^*)$ dans C^n par

$$\Gamma_0(f_*) = \frac{1}{2}(\alpha_1(i) + \beta_1(i), \alpha_2(i) + \beta_2(i), ..., \alpha_n(i) + \beta_n(i))$$
$$\Gamma_1(f_*) = \frac{i}{2}(\alpha_1(i) - \beta_1(i), \alpha_2(i) - \beta_2(i), ..., \alpha_n(i) - \beta_n(i))$$

Un calcul direct ,montre que $\Pi_0 = (\mathrm{C}^n, \Gamma_0, \Gamma_1)$ est un triplet limite pour A^* et que de plus , $\Gamma_0(f) = \Gamma_1(f) = 0$.

Définition 2.2.3 :

Soient A et $\widetilde{A}$ deux opérateurs linéaires définis dans H . Supposons que A est symétrique et fermé. On dit que $\widetilde{A}$ est une extension propre de A si,

$$A \subset \widetilde{A} \subset A^*.$$

On a le résultat fondamental suivant ,

Théorème 2.2.4 :

Soient A un opérateur symétrique fermé d'indices de défaut égaux et $\Pi = (X, \Gamma_0, \Gamma_1)$ un triplet limite pour A^* . Alors, $\widetilde{A}$ est une extension propre de A si et seulement si, il existe une relation linéaire $\theta \in C(X)$ telle que

$$D(\widetilde{A}) = \Gamma^{-1}(\theta) = \{x \in D(A^*) : (\Gamma_0(x), \Gamma_1(x)) \in \theta\}$$

De plus,

a) $\widetilde{A}$ est auto-adjoint (resp. symértrique) $\Leftrightarrow \theta$ est auto-adjoint (resp. symértrique);

b) $\widetilde{A}$ est dissipatif (resp. dissipatif maximal) $\Leftrightarrow \theta$ est dissipatif (resp. dissipatif maximal).

Preuve :

Supposons que $\widetilde{A}$ est une extension propre de A . On a donc ,

$$D(A) \subseteq D(\widetilde{A}) \subseteq D(A^*), \forall f \in D(A) : A(f) = \widetilde{A}(f) = A^*(f).$$

Posons

$$\theta = \{(\Gamma_0(f), \Gamma_1(f)) : f \in D(A^*)\}.$$

il est clair que θ est une relation linéaire dans X,vérifiant $\theta = \Gamma(D(\widetilde{A}))$ ou ce qui est équivalent $D(\widetilde{A}) = \Gamma^{-1}(\theta)$.

Inversement ,soit θ une relation linéaire dans X.En vertue de surjectivité de Γ,

$$\theta \subseteq X \times X \Rightarrow \Gamma^{-1}(\theta) \subseteq \Gamma^{-1}(X \times X) = D(A^*).$$

Définissons dans H l'opérateur $\widetilde{A}$ comme suit :

$$D(\widetilde{A}) = \Gamma^{-1}(\theta), \widetilde{A}(f) = A^*(f), f \in D(\widetilde{A}).$$

On a dans ce cas,

$$f \in D(A) \Rightarrow \Gamma(f) = (\Gamma_0(f), \Gamma_1(f)) = (0,0) \in \theta$$

$$\Rightarrow f \in \Gamma^{-1}(\theta) = D(\widetilde{A}).$$

D'où

$$D(A) \subseteq D(\widetilde{A}) \subseteq D(A^*).$$

De plus,

$$\forall f \in D(A) : A(f) = \widetilde{A}(f).$$

Soit maintenant θ une relation linéaire dans X. Alors ,

a)

$$\begin{aligned} f \in D\left((A_\theta)^*\right) &\Leftrightarrow \forall g \in D(A_\theta) : \left\langle (A_\theta)^*(f), g\right\rangle = \left\langle f, (A_\theta)^*(g)\right\rangle \\ &\Leftrightarrow \forall g \in D(A_\theta) : \left\langle A^*(f), g\right\rangle = \left\langle f, A^*(g)\right\rangle \\ &\Leftrightarrow \forall g \in D(A_\theta) : \left\langle \Gamma_0(f), \Gamma_1(g)\right\rangle = \left\langle \Gamma_1(f), \Gamma_0(g)\right\rangle \\ &\Leftrightarrow (\Gamma_0(f), \Gamma_1(f)) \in \theta^* \\ &\Leftrightarrow f \in D(A_{\theta^*}). \end{aligned}$$

Donc , $A_{\theta^*} = (A_\theta)^*$. Par conséquent , A_θ est auto-adjointe si et seulement si , θ est auto-adjointe .

b)Pour tout $f \in D(A_\theta)$, on a :

$$\operatorname{Im}\left(\left\langle A_\theta(f), f\right\rangle\right) = \frac{1}{2i}\left[\left\langle A_\theta(f), f\right\rangle - \left\langle f, A_\theta(f)\right\rangle\right]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2i}\left[\left\langle A^*(f), f\right\rangle - \left\langle f, A^*(f)\right\rangle\right] \\ &= \frac{1}{2i}\left[\left\langle \Gamma_1(f), \Gamma_0(f)\right\rangle - \left\langle \Gamma_0(f), \Gamma_1(f)\right\rangle\right] \\ &= \operatorname{Im}\left(\left\langle \Gamma_1(f), \Gamma_0(f)\right\rangle\right). \end{aligned}$$

Par conséquent , A_θ est dissipative si et seulement si , θ est dissipative.

Remarque 2.2.1:

a) Une Extension générée par la relation linéaire $\theta \in C(X)$ au sens du théorème précédent sera notée A_θ;

b) Si θ est un élément de $B(X)$ alors , $D(A_\theta) = \ker(\Gamma_1 - \theta\Gamma_0)$;

c) Les opérateurs A_0 et A_∞ de domaines respectifs $D(A_0) = \{x \in D(A^*) : \Gamma_1(x) = 0\}$ et $D(A_\infty) = \{x \in D(A^*) : \Gamma_0(x) = 0\}$ sont deux extensions auto-adjointes de A .

De plus ,il est facile de vérifier que si $n_\pm(A) = 1$ alors, $A_\infty = A_{\theta_{(a,0)}}$ et $A_0 = A_{\theta_{(0,b)}}$.

Soient A un opérateur symétrique fermé d'indices de défaut égaux à n et $\Pi = (X, \Gamma_0, \Gamma_1)$ un triplet limite pour A^* .D'aprés $[9]$, l'application Γ_0 définit une bijection de $\ker(A^* - zI_H)$ dans $X\ (n = n_\pm(A))$ pour tout nombre complexe $z \in \rho(A_\infty)$.
Les fonctions

$$\gamma(z) = \left[\Gamma_0 \mid_{Ker\left(A^* - zI_H\right)}\right]^{-1} \quad ; \quad M(z) = \Gamma_1 \gamma(z) \qquad z \in \rho(A_\infty)$$
(2.2.2)

sont respectivement appelées γ -domaine et fonction de Weyl associés au triplet limite $\Pi = (X, \Gamma_0, \Gamma_1)$. Il n'est pas difficile de voir que:

$$M(z)\Gamma_0(x_z) = \Gamma_1(x_z) \qquad \forall x_z \in \ker(A^* - zI_H)$$

Les propriétés fondamentales de la fonction de weyl sont résumées dans le résultat suivant $[3, 4, 7, 9]$

Théorème 2.2.4:

Soient A un opérateur symétrique fermé d'indices de défaut égaux à n et $\Pi = (X, \Gamma_0, \Gamma_1)$ un triplet limite pour A^*. Alors,
$a) M(z)$ est analytique dans le domaine $z \in \rho(A_\infty)$;
$b) \operatorname{Im}(M(z))\operatorname{Im}(z) \succ 0, \quad z \in \rho(A_\infty)$;
$c) [M(z)]^* = M(\bar{z}), \quad z \in \rho(A_\infty)$;
$d) M(z) - M(\zeta) = (z - \zeta)\gamma^*(\bar{\zeta})\gamma(z), \quad z, \zeta \in \rho(A_\infty)$;
$e) z \in \rho(A_\theta) \Leftrightarrow (\theta - M(z))^{-1} \in B(X), z \in \rho(A_\infty)$;
$f)$ Si $\dim X = 1 alors, z$ appartient au spectre ponctuel (resp.continu ou ésiduel)de A_θ si et seulement si, $M(z)$ appartient au spectre ponctuel (resp.continu ou résiduel)de θ.
$g) (A_\theta - zI_H)^{-1} - (A_\infty - zI_H)^{-1} = \gamma(z)(\theta - M(z))^{-1}\gamma^*(\bar{z}); z \in \rho(A_\theta) \cap z \in \rho(A_\infty)$
Cette dernière formule est appelée formule de Krein –Naimark .

Chapitre 3

Opérateur de Sturm-Liouville sur un intervalle fini

3.1 Généralités

Soient $[0, a]$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$, p et q deux fonctions réelles définies sur $[0, a]$ et vérifiant les propriétés suivantes :

1. La fonction p est strictement positive et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a]$.
2. La fonction q est continue sur $[0, a]$.

Considérons dans l'espace $L^2[0, a]$ l'opérateur S défini par :

$$S(x)(t) = -[p(t)x'(t)]' + q(t)x(t) \tag{3.1.1}$$

$$\mathcal{D}(S) = \left\{ \begin{array}{c} x \in L^2[0, a] : x(t), p(t)x'(t) \in AC_{loc}([0, a]), S(x) \in L^2[0, a] \\ x(0) = x(a) = x'(0) = x'(a) = 0 \end{array} \right\},$$

$AC_{loc}([0, a])$ désigne l'ensemble des fonctions absolument continues et localement intégrables sur $[0, a]$.

Proposition 3.1.1 *L'opérateur S est symétrique*

Preuve: Remarquons tout d'abord que S est à domaine dense. Soient maintenant x et y deux élément de $\mathcal{D}(S)$. Alors, en utilisant une double intégration par parties, on obtient que

$$\begin{aligned}
< S(x), y > &= \int_0^a S(x)(t)\overline{y(t)}dt = -\int_0^a [p(t)x'(t)]'\overline{y(t)}dt + \int_0^a q(t)x(t)\overline{y(t)}dt \\
&= -\Big[\ p(t)x'(t)\overline{y(t)}\ \Big]_0^a + \int_0^a p(t)x'(t)\overline{y'(t)}dt + \int_0^a x(t)\overline{q(t)y(t)}dt \\
&= \int_0^a x'(t)\overline{p(t)y'(t)}dt + \int_0^a x(t)\overline{q(t)y(t)}dt \\
&= \Big[\ x(t)[\overline{p(t)y'(t)}]\ \Big]_0^a - \int_0^a x(t)[\overline{p(t)y'(t)}]'dt + \int_0^a x(t)\overline{q(t)y(t)}dt \\
&= -\int_0^a x(t)[\overline{p(t)y'(t)}]'dt + \int_0^a x(t)\overline{q(t)y(t)}dt \\
&= < x, S(y) > .
\end{aligned}$$

Cherchons maintenant l'opérateur adjoint S^*. On remarque que $S = S_1 + S_2$ où, S_1 et S_2 sont de même domaine que S et définis par :

$$S_1(x)(t) = -[p(t)x'(t)]',$$

$$S_2(x)(t) = q(t)x(t).$$

Comme l'opérateur S_2 est autoadjoint, il suffit donc de calculer l'adjoint de S_1.

Soit donc $x \in \mathcal{D}(S)$, $y \in \mathcal{D}(S^*)$ et posons $y^* = S_1^*(y)$. Des relations

$$< S_1(x), y >=< x, S_1^*(y) >=< x, y^* >,$$

$$x(0) = x(a) = x'(0) = x'(a) = 0$$

découle après intégrations par parties que :

$$
\begin{aligned}
-\int_0^a [p(t)x'(t)]'\overline{y(t)}dt &= \int_0^a x(t)\overline{y^*(t)}dt = \int_0^a x(t)\overline{\frac{d}{dt}\left\{ \ \int_0^t y^*(s)ds + C_1 \ \right\}}dt \\
&= -\int_0^a x'(t)\overline{\left\{ \ \int_0^t y^*(s)ds + C_1 \ \right\}}dt \\
&= -\int_0^a p(t)x'(t)\overline{\left\{ \ \tfrac{1}{p(t)} \int_0^t y^*(s)ds + C_1 \ \right\}}dt \\
&= -\int_0^a p(t)x'(t)\overline{\frac{d}{dt}\left\{ \ \int_0^t \left\{ \ \tfrac{1}{p(s)} \int_0^s y^*(z)dz + C_1 \ \right\} ds + C_2 \ \right\}}dt \\
&= \int_0^a \left[\ p(t)x'(t) \ \right]'\overline{\left\{ \ \int_0^t \left\{ \ \tfrac{1}{p(s)} \int_0^s y^*(z)dz + C_1 \ \right\} ds + C_2 \ \right\}}dt
\end{aligned}
$$

D'où la relation

$$
\int_0^a [p(t)x'(t)]'\overline{\left\{ \ y + \left\{ \ \int_0^t \left\{ \ \tfrac{1}{p(s)} \int_0^s y^*(z)dz + C_1 \ \right\} ds + C_2 \ \right\} \ \right\}}dt = 0. \quad (3.1.2)
$$

Choisissons la fonction $x \in \mathcal{D}(S)$ telle que

$$
[p(t)x'(t)]' = y + \int_0^t \left\{ \ \tfrac{1}{p(s)} \int_0^s y^*(z)dz + C_1 \ \right\} ds + C_2. \quad (3.1.3)
$$

On a donc d'après 3.1.2

$$
\int_0^a \left| \left\{ \ y + \left\{ \ \int_0^t \left\{ \ \tfrac{1}{p(s)} \int_0^s y^*(z)dz + C_1 \ \right\} ds + C_2 \ \right\} \ \right\} \right|^2 dt = 0. \quad (3.1.4)
$$

Cela signifie que presque partout,

$$
y + \int_0^t \left\{ \ \tfrac{1}{p(s)} \int_0^s y^*(z)dz + C_1 \ \right\} ds + C_2 = 0. \quad (3.1.5)
$$

Après deux dérivations successives, on obtient que

$$
y^*(t) = S_1^*(y)(t) = -[p(t)y'(t)]'.
$$

Proposition 3.1.2 *L'opérateur S^* adjoint de S est défini par :*

$$S^*(x)(t) = -[p(t)x'(t)]' + q(t)x(t) \tag{3.1.6}$$

$$\mathcal{D}(S^*) = \left\{x \in L^2[0,a] : x(t), p(t)x'(t) \in AC_{loc}([0,a]), S(x) \in L^2[0,a]\right\} \tag{3.1.7}$$

On se propose maintenant de trouver un triplet limite pour l'opérateur S^*. Pour tous $x, y \in \mathcal{D}(S^*)$, on a :

$$\begin{aligned}
< S^*(x), y > - < x, S^*(y) > &= -\int_0^a [p(t)x'(t)]'\overline{y(t)}dt + \int_0^a q(t)x(t)\overline{y(t)}dt \\
&+ \int_0^a x(t)\overline{[p(t)y'(t)]'}dt - \int_0^a x(t)\overline{q(t)y(t)}dt \\
&= -\int_0^a [p(t)x'(t)]'\overline{y(t)}dt + \int_0^a x(t)\overline{[p(t)y'(t)]'}dt \\
&= -[p(t)x'(t)\,\overline{y(t)}]_0^a + \int_0^a x'(t)\overline{p(t)y'(t)}dt + \int_0^a x(t)\overline{[p(t)y'(t)]'}dt \\
&= -[p(t)x'(t)\overline{y(t)}]_0^a + [x(t)\overline{p(t)y'(t)}]_0^a \\
&= p(0)x'(0)\overline{y(0)} - p(a)x'(a)\overline{y(a)} \\
&+ x(a)\overline{p(a)y'(a)} - x(0)\overline{p(0)y'(0)}.
\end{aligned}$$

Définissons les deux opérateurs $\Gamma_0,\ \Gamma_1\ : \mathcal{D}(S^*) \longrightarrow \mathbb{C}^2$ comme suit :

$$\Gamma_0(x) = \Big(\ x(0)\ ,\ x'(a)\ \Big) \quad , \quad \Gamma_1(x) = \Big(\ p(0)x'(0)\ ,\ p(a)x(a)\ \Big). \tag{3.1.8}$$

Il est clair que pour tous $x, y \in \mathcal{D}(S^*)$,

$$< S^*(x), y > - < x, S^*(y) >=< \Gamma_1(x), \Gamma_0(y) > - < \Gamma_0(x), \Gamma_1(y) > .$$

Proposition 3.1.3 *Le triplet $(\mathbb{C}^2, \Gamma_0, \Gamma_1)$ est un triplet limite pour S^*.*

Preuve: D'après ce qui précéde, il reste à montrer que l'application

$$\Gamma\ :\ \mathcal{D}(S^*) \longrightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2, \quad \Gamma(x) = \Big(\ \Gamma_0(x)\ ,\ \Gamma_1(x)\ \Big)$$

est une surjection. Soient $((a,b),(c,d)) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ et $x(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D$ une fonction polynôme appartenant à $\mathcal{D}(S^*)$. On a alors

$$\Gamma(x) = ((z_1,z_2),(w_1,w_2)) \iff \begin{cases} z_1 = D \\ z_2 = 3a^2A + 2aB + C \\ w_1 = p(0)C \\ w_2 = p(a)(a^3A + a^2B + aC + D) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} D = z_1 \\ C = \frac{w_1}{p(0)} \\ 3a^2A + 2aB + \frac{w_1}{p(0)} = z_2 \\ p(a)(a^3A + a^2B + a\frac{w_1}{p(0)} + z_1) = w_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} D = z_1 \\ C = \frac{w_1}{p(0)} \\ 3a^2A + 2aB = z_2 - \frac{w_1}{p(0)} \\ p(a)(a^3A + a^2B) = w_2 - p(a)(a\frac{w_1}{p(0)} + z_1) \end{cases}$$

On remarque que le système constitué par les deux dernières équations est solvable pour $a \neq 0$. Par conséquent, l'application Γ est surjective.

Proposition 3.1.4 *Les restrictions de l'opérateurs S^* aux sous-domaines* $\ker \Gamma_0$ *et* $\ker \Gamma_1$ *sont deux extensions autoadjointes de S notées respectivement S_∞ et S_0.*

Cherchons maintenant la fonction de Weyl associée au triplet $(\mathbb{C}^2, \Gamma_0, \Gamma_1)$. Soient donc $z \in \mathbb{C}$ et $u_1(t,z)$, $u_2(t,z)$ deux solutions de l'équation $S^*(x) = zx$, vérifiant les conditions initiales :

$$\begin{cases} u_1(0,z) = 1 \ , \ u_1'(0,z) = 0 \\ \\ u_2(0,z) = 0 \ , \ u_2'(0,z) = 1 \end{cases} \tag{3.1.9}$$

Proposition 3.1.5 *Les solutions $u_1(t,z)$ et $u_2(t,z)$ sont linéairement indépendantes.*

Preuve: Il suffit de démontrer que le Wronskien $W(u_1,u_2)$ des fonctions $u_1(t,z)$ et $u_2(t,z)$ ne s'annule jamais. En effet, on a :

$$W(u_1,u_2)|_{t=0} = u_1(0)u_2'(0) - u_1'(0)u_2(0) = 1.$$

D'autre part, pour tout $t \in [0, a]$,

$$
\begin{aligned}
\Big[\ p(t)W(u_1, u_2)(t)\ \Big]' &= \Big[\ u_1(t)p(t)u_2'(t) - p(t)u_1'(t)u_2(t)\ \Big]' \\
&= u_1(t)\Big[\ p(t)u_2'(t)\ \Big]' - \Big[\ p(t)u_1'(t)\ \Big]' u_2(t) \\
&= u_1(t)(q(t) - z)u_2(t) - (q(t) - z)u_1(t)u_2(t) = 0.
\end{aligned}
$$

Donc le Wronskien est la constante 1. Par conséquent, les solutions $u_1(t, z)$ et $u_2(t, z)$ sont linéairement indépendantes.

Proposition 3.1.6 *La fonction γ-domaine et la fonction de Weyl sont données par les formules :*

$$
\gamma(z)(\alpha, \beta) = \alpha u_1(., z) + \frac{\beta - \alpha u_1'(a, z)}{u_2'(a, z)} u_2(., z) \tag{3.1.10}
$$

$$
M(z) = \begin{pmatrix} -p(0)\frac{u_1'(a,z)}{u_2'(a,z)} & \frac{p(0)}{u_2'(a,z)} \\ \\ \frac{p(a)}{u_2'(a,z)} & p(a)\frac{u_2(a,z)}{u_2'(a,z)} \end{pmatrix} \quad (z \in \rho(S_\infty)). \tag{3.1.11}
$$

Preuve: Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Puisque les solutions $u_1(t, z)$ et $u_2(t, z)$ sont linéairement indépendantes, toute solution x de l'équation $S^*(x) = zx$ admet la représentation $x = c_1 u_1(., z) + c_2 u_2(., z)$ où c_1, c_2 sont deux constantes complexes. Par conséquent, pour tout $z \in \rho(S_\infty)$,

$$
\begin{aligned}
\gamma(z)(\alpha, \beta) = x &\iff \gamma(z)(\alpha, \beta) = c_1 u_1(., z) + c_2 u_2(., z) \\
&\iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \\ \beta \end{pmatrix} = \Gamma_0(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \\ c_1 u_1'(a, z) + c_2 u_2'(a, z) \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} c_1 \\ \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \\ \frac{\beta - \alpha u_1'(a,z)}{u_2'(a,z)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

.

D'où le résultat recherché.

D'autre part,

$$M(z)(\alpha,\beta) = \Gamma_1\gamma(z)(\alpha,\beta) = \Gamma_1\left[\ \alpha u_1(.,z) + \tfrac{\beta-\alpha u_1'(a,z)}{u_2'(a,z)}u_2(.,z)\ \right]$$

$$= \begin{pmatrix} p(0)\frac{\beta-\alpha u_1'(a,z)}{u_2'(a,z)} \\ \\ p(a)\alpha u_1(a,z) + p(a)\frac{\beta-\alpha u_1'(a,z)}{u_2'(a,z)}u_2(a,z) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p(0)\frac{\beta-\alpha u_1'(a,z)}{u_2'(a,z)} \\ \\ p(a)\alpha\frac{W(u_1,u_2)|_{t=a}}{u_2'(a,z)} + \beta\, p(a)\frac{u_2(a,z}{u_2'(a,z)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p(0)\frac{\beta-\alpha u_1'(a,z)}{u_2'(a,z)} \\ \\ \frac{p(a)\alpha}{u_2'(a,z)} + \beta\, p(a)\frac{u_2(a,z)}{u_2'(a,z)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -p(0)\frac{u_1'(a,z)}{u_2'(a,z)} & \frac{p(0)}{u_2'(a,z)} \\ \\ \frac{p(a)}{u_2'(a,z)} & p(a)\frac{u_2(a,z)}{u_2'(a,z)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \\ \beta \end{pmatrix}.$$

3.2 Extensions propres

Le but du présent paragraphe est de déterminer les résolvantes extensions propres de l'opérateur grâce à la relation de Kreïn-Naïmark ;

Proposition 3.2.1 *Pour tout* $z \in \rho(S_\infty)$,

$$\gamma^*(z)(u_1(.,z)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overset{*}{\gamma}(z)(u_2(.,z)) = \begin{pmatrix} -\overline{\frac{u_1'(a,z)}{u_2'(a,z)}} \\ \overline{\frac{1}{u_2'(a,z)}} \end{pmatrix}$$

Preuve: Soient B la base canonique de $\mathbb{C}^2$ et B' la base de $Ker(S^* - z)$, formée des fonctions $u_1(.,z)$ et $u_2(.,z)$. D'après ce qui précéde, la matrice de $\gamma(z)$ par rapport à ces deux bases est

$$M(B,B')(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{u_1'(a,z)}{u_2'(a,z)} & \frac{1}{u_2'(a,z)} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, la matrice associée à $\gamma^*(z)$ par rapport aux bases B' et B est

$$M^*(B',B)(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{u_1'(a,z)}{u_2'(a,z)} & \frac{1}{u_2'(a,z)} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{\frac{u_1'(a,z)}{u_2'(a,z)}} \\ 0 & \overline{\frac{1}{u_2'(a,z)}} \end{pmatrix}.$$

D'où le résultat recherché.

Le résultat suivant qui est une application directe de la relation de Kreïn Naïmark, donne la forme générale de la résolvante d'une extension propre quelconque de S.

Proposition 3.2.2 *Pour toute relation linéaire dans* $\mathbb{C}^2$*, toute fonction* $f \in L^2_{[0,a]}$ *et tout* $z \in \rho(S_\infty) \cap \rho(S_\Theta)$,

$$(S_\Theta - z)^{-1}(f) = (S_\infty - z)^{-1}(f) - \alpha' u_1(.,z) + \frac{\beta' - \alpha' u_1'(a,z)}{u_2'(a,z)} u_2(.,z), \tag{3.2.1}$$

où

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = (\Theta - M(z))^{-1} \begin{pmatrix} \alpha - \beta\overline{\frac{u_1'(a,\overline{z})}{u_2'(a,\overline{z})}} \\ \overline{\frac{\beta}{u_2'(a,\overline{z})}} \end{pmatrix} \tag{3.2.2}$$

$$P_{\overline{z}}(f) = \alpha u_1(.,z) + \beta u_2(.,z). \tag{3.2.3}$$

$P_{\overline{z}}$ *désigne la projection orthogonale sur* $\ker(S^* - \overline{z})$.

3.3 Exemple

Dans ce Chapitre, on considère le cas particulier $p(t) = 1$, $q(t) = 0$ pour tout $0 \leq t \leq a$. On désignera aussi l'opérateur correspondant par le symbole S.

Proposition 3.3.1 *Le spectre ponctuel de l'extension auto-adjoint S_∞ est l'ensemble :*

$$\sigma_p(S_\infty) = \left\{ \; z_k = \tfrac{(2k+1)^2\pi^2}{4a^2}, \; k = 0, 1, 2, ... \; \right\}$$

Preuve: Remarquons tout d'abord que,

$$\mathcal{D}(S_\infty) = \left\{ \; x \in \mathcal{D}(S^*) : x(0) = x'(a) = 0 \; \right\}.$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathcal{D}(S_\infty)$, $< S_\infty(x), x > \geq 0$. Cela signifie que S_∞ est un opérateur auto-adjoint positif. Par conséquent, son spectre est dans la demie droite réelle positive. De plus,

$$S_\infty(x) = 0 \Longrightarrow -x'' = 0 \Longrightarrow x(t) = \alpha t + \beta.$$

Comme x est un élément de $\mathcal{D}(S_\infty)$,on a obligatoirement $\alpha = \beta = 0$. Donc, 0 n'est pas une valeur propre de S_∞.

Soit maintenant z un réel strictement positif. Il est facile de montrer que les fonctions $x_1(t, z) = \cos(t\sqrt{z})$ et $x_2(t, z) = \frac{\sin(t\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$ sont deux solutions de l'équation $-x'' - zx = 0$, vérifiant les conditions

$$x_1(0, z) = 1, \; x_1'(0, z) = 0, \quad x_2(0, z) = 0, \; x_2'(0, z) = 1, \quad W(x_1, x_2) = 1.$$

D'après ce qui précéde, toute solution de l'équation $-x'' - zx = 0$ est de la forme

$$x(t, z) = C_1 x_1(t, z) + C_2 x_2(t, z), \tag{3.3.1}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes complexes. D'autre part,

$$\begin{aligned} x(0, z) = x'(a, z) = 0 \quad &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} C_1 = 0 \\ C_2 \cos(a\sqrt{z}) = 0 \end{array} \right. \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} C_1 = 0 \\ a\sqrt{z} = \frac{2k+1}{2}\pi, \quad k = 0, 1, 2, ... \end{array} \right. \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} C_1 = 0 \\ z = \frac{(2k+1)^2}{4a^2}\pi^2, \quad k = 0, 1, 2, ... \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi donc, pour tout naturel k, le nombre positif $z_k = \frac{(2k+1)^2}{4a^2}\pi^2$ est une valeur propre de S_∞, associée à la fonction propre $y_k(t,z) = \frac{2a}{(2k+1)\pi}\sin\left(\frac{t}{2a}(2k+1)\pi \right)$.

Proposition 3.3.2 *Le spectre continu $\sigma_c(S_\infty)$ est vide.*

Preuve: Il faut montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}^+ \backslash \sigma_p(S_\infty)$, l'opérateur est inversible et son inverse est borné. On distingue deux cas.

<u>Premier cas : $z = 0$</u>. Pour tout $f \in L^2_{[0,a]}$, la solution dans $\mathcal{D}(S_\infty)$ de l'équation $-x'' = f$ est de la forme

$$x(t) = -\int_0^t \int_0^s f(\tau)d\tau ds + t\int_0^a f(s)ds. \tag{3.3.2}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\| -\int_0^t \int_0^s f(\tau)d\tau ds\|^2 &= \int_0^a |-\int_0^t \int_0^s f(\tau)d\tau ds|^2 dt \\
&\leq \int_0^a \left\{ \int_0^t \int_0^s |f(\tau)|d\tau ds \right\}^2 dt \\
&\leq \int_0^a \left\{ \int_0^a \int_0^a |f(\tau)|d\tau ds \right\}^2 dt \\
&\leq a^2\|f\|^2 \int_0^a \left\{ \int_0^a ds \right\}^2 dt = a^5\|f\|^2.
\end{aligned}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned}
\|t\int_0^a f(s)ds\|^2 &= \int_0^a |t\int_0^a f(s)ds|^2 dt \\
&\leq \int_0^a t^2 \left\{ \int_0^a |f(s)|ds \right\}^2 dt = \int_0^a t^2 dt. \left\{ \int_0^a |f(s)|ds \right\}^2 \\
&\leq \frac{a^3}{3}\|f\|^2.
\end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\|x\| \leq \| -\int_0^t \int_0^s f(\tau)d\tau ds\| + \|t\int_0^a f(s)ds\| \leq \left(\sqrt{\frac{a^3}{3}} + \sqrt{a^5} \right)\|f\|.$$

Par conséquent l'opérateur S_∞ admet inverse est borné. D'où, $0 \notin \sigma_c(S_\infty)$.

<u>Deuxième cas : $z \neq 0$</u>. Pour tout $f \in L^2_{[0,a]}$, la solution dans $\mathcal{D}(S_\infty)$ de l'équation $-x'' - zx = f$ est de la forme

$$x(t,z) = C_1 x_1(t,z) + C_2 x_2(t,z). \tag{3.3.3}$$

La méthode de variation des constantes pour les équations linéaires du second ordre [13], combinée aux conditions $x(0,z) = x'(a,z) = 0$ nous donne

$$x(t,z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \int_0^t \sin((t+s)\sqrt{z}) f(s) ds + K.\frac{\sin(t\sqrt{z})}{\sqrt{z}} f(t). \tag{3.3.4}$$

La constante K est déterminée de la relation $x'(a,z) = 0$.

D'autre part, un raisonnement analogue au cas $z = 0$ montre que

$$\|x(t,z)\| \leq \frac{a}{\sqrt{z}}(a + |K|)\|f\|.$$

Par conséquent, l'opérateur $(S_\infty - z)^{-1}$ est borné.

Chapitre 4

Opérateur de Sturm-Liouville sur la demi-droite

4.1 Généralités

Considérons les deux ensembles

$$\mathcal{D}_* = \left\{ x \in L^2([0,+\infty[) : x(t), p(t)x'(t) \in AC_{loc}([0,+\infty[), S(x) \in L^2([0,+\infty[) \right\} \tag{4.1.1}$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \; x \in \mathcal{D}_* : x(0) = x'(0) = 0, \;\; \exists A_x > 0 : x(t) = 0, \;\; \forall t > A_x \; \right\}, \tag{4.1.2}$$

où S est l'opérateur de domaine $\mathcal{D}$ et défini par,

$$S(x)(t) = -[p(t)x'(t)]' + q(t)x(t) \tag{4.1.3}$$

Les fonctions p et q vérifient les mêmes conditions que celles du chapitre précédent. On supposera de plus qu'à l'infini, on est en situation du cas point-limite (limit point case [6]). Cela signifie pour tout complexe non réel z, l'espace des solutions de l'équation $S^*(x) - z.x = 0$ est de dimension 1. Soient z un complexe non réel, $u_1(t,z)$, $u_2(t,z)$ deux solutions de l'équation $S^*(x) = zx$, vérifiant les conditions initiales :

$$\begin{cases} u_1(0,z) = 1 \;, \; u_1'(0,z) = 0 \\ \\ u_2(0,z) = 0 \;, \; u_2'(0,z) = 1 \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Puisqu'on est en situation du cas point-limite, au moins l'une de ces deux solutions n'est pas à carré intégrable. On a cependant l'alternative de Weyl suivante [14].

Proposition 4.1.1 *(Alternative de Weyl) Il existe une fonction $m(z)$, analytique* sur chacun des demi-plans ouverts du plan complexe, appelée coefficient de Weyl-*Titschmarch et telle que, la fonction*

$$u(.,z) = u_1(.,z)m(z) - u_2(.,z), \quad (z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}). \tag{4.1.5}$$

est une solution à carré intégrable de l'équation $S^*(x) - z.x = 0$. Toute autre solution est colinéaire avec $u(.,z)$.

Proposition 4.1.2 *L'opérateur S est symétrique*

Preuve: Remarquons tout d'abord que S est à domaine dense car il contient $C_0^\infty([0,+\infty[)$. Soient maintenant x et y deux élément de $\mathcal{D}(S)$. Alors, en utilisant une double intégration par parties, on obtient que

$$\begin{aligned}
< S(x), y > = & \int_0^{+\infty} S(x)(t)\overline{y(t)}dt = -\int_0^{+\infty} [p(t)x'(t)]'\overline{y(t)}dt + \int_0^{+\infty} q(t)x(t)\overline{y(t)}dt \\
= & -\Big[\ p(t)x'(t)\overline{y(t)}\ \Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} p(t)x'(t)\overline{y'(t)}dt + \int_0^{+\infty} x(t)\overline{q(t)y(t)}dt \\
= & \int_0^{+\infty} x'(t)\overline{p(t)y'(t)}dt + \int_0^{+\infty} x(t)\overline{q(t)y(t)}dt \\
= & \Big[\ x(t)[\overline{p(t)y'(t)}]\ \Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x(t)[\overline{p(t)y'(t)}]'dt + \int_0^{+\infty} x(t)\overline{q(t)y(t)}dt \\
= & -\int_0^{+\infty} x(t)[\overline{p(t)y'(t)}]'dt + \int_0^{+\infty} x(t)\overline{q(t)y(t)}dt \\
= & < x, S(y) > .
\end{aligned}$$

Un raisonnement analogue à celui du cas de l'intervalle fini, montre que l'opérateur adjoint S^* est défini par :

$$S^*(x)(t) = -[p(t)x'(t)]' + q(t)x(t) \tag{4.1.6}$$

et que son domaine $\mathcal{D}(S^*)$, coïncide avec $\mathcal{D}_*$. On a le résultat intéressant suivant [14] :

Proposition 4.1.3 *Pour tous x, y dans $\mathcal{D}_*$,*

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \left(\ x(t)p(t)\overline{y'(t)} - x'(t)p(t)\overline{y(t)} \ \right) = 0.$$

Soient maintenant $x, y \in \mathcal{D}(S^*)$, on a alors,

$$\begin{aligned}
< S^*(x), y > - < x, S^*(y) > &= -\int_0^{+\infty} [p(t)x'(t)]'\overline{y(t)}dt + \int_0^{+\infty} q(t)x(t)\overline{y(t)}dt \\
&+ \int_0^{+\infty} x(t)\overline{[p(t)y'(t)]'}dt - \int_0^{+\infty} x(t)\overline{q(t)y(t)}dt \\
&= -\int_0^{+\infty} [p(t)x'(t)]'\overline{y(t)}dt + \int_0^{+\infty} x(t)\overline{[p(t)y'(t)]'}dt \\
&= -[p(t)x'(t)\overline{y(t)}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x'(t)\overline{p(t)y'(t)}dt + \int_0^{+\infty} x(t)\overline{[p(t)y'(t)]'}d \\
&= -[p(t)x'(t)\overline{y(t)}]_0^{+\infty} + [x(t)\overline{p(t)y'(t)}]_0^{+\infty} \\
&= p(0)x'(0)\overline{y(0)} - x(0)\overline{p(0)y'(0)}.
\end{aligned}$$

Définissons les deux opérateurs $\Gamma_0,\ \Gamma_1\ : \mathcal{D}(S^*) \longrightarrow \mathbb{C}$ comme suit :

$$\Gamma_0(x) = x'(0) \quad , \quad \Gamma_1(x) = -p(0)x(0). \tag{4.1.7}$$

Il est clair que pour tous $x, y \in \mathcal{D}(S^*)$,

$$< S^*(x), y > - < x, S^*(y) > = < \Gamma_1(x), \Gamma_0(y) > - < \Gamma_0(x), \Gamma_1(y) > .$$

Proposition 4.1.4 *Le triplet $(\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ est un triplet limite pour S^*.*

Proposition 4.1.5 *La fonction γ-domaine et la fonction de Weyl sont données par les formules :*

$$\gamma(z) : \mathbb{C} \longrightarrow \ker(S^* - z);\ \gamma(z)(a) = -au(., z), \quad (z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}) \tag{4.1.8}$$

$$M(z) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C};\ M(z)(a) = ap(0)m(z) \quad (z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}), \tag{4.1.9}$$

où la fonction $u(., z)$ est donnée par 4.1.5.

Preuve: Soient ($z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$) et a un nombre complexe quelconque. On a alors

$$\gamma(z)(a) = x(.,z) \in \ker(S^* - z) \iff \begin{cases} S^* = zx(.,z) \\ x'(0,z) = a \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x(.,z) = Cu(.,z) \\ x'(0,z) = a \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x(.,z) = Cu(.,z) \\ C = -a \end{cases}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} M(z)(a) &= \Gamma_1\gamma(z)(a) = \Gamma_1(-au(.,z)) = -a\Gamma_1(u(.,z)) \\ &= ap(0)u(0,z) = ap(0)m(z). \end{aligned}$$

Notons pour terminer ce paragraphe que l'opérateur S_∞ est la restriction de S^* au domaine

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}_\infty) = \{x \in \mathcal{D}(S^*) :\ \Gamma_0(x) = x'(0) = 0\}. \tag{4.1.10}$$

De plus d'après [14], la résolvante de S_∞ est donnée par le résultat suivant.

Proposition 4.1.6 *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et tout $f \in L^2_{[0,+\infty[}$,*

$$(S_\infty - \lambda)^{-1}f(t) = u_1(t,\lambda)\int_t^{+\infty} u(s,\lambda)f(s)ds + u(t,\lambda)\int_0^t u_1(s,\lambda)f(s)ds,$$

où les fonctions $u_1(t,\lambda)$ et $u(t,\lambda)$, sont définies par la relation 4.1.5.

4.2 Etude des extensions propres de S

Comme les indices de défaut de S sont égaux à 1, alors toute extension propre de $S \neq S_\infty$ est définie par une relation linéaire de dimension 1 dans $\mathbb{C}$ .D'après le premier chapitre, ces relations linéaires sont de la forme :

$$\Theta = \Theta_{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C} : ax + by = 0\}, \quad (a,b) \in (\mathbb{C}\times\mathbb{C})^*.$$

Par conséquent, toute extension propre de S est définie par un couple $(a,b) \in (\mathbb{C}\times\mathbb{C})^*$. On désignera par $S_{(a,b)}$ cette extension. On a donc,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(S_{(a,b)}) &= \{x \in \mathcal{D}(S^*) :\ a\Gamma_0(x) + b\Gamma_1(x) = 0\} \\ &= \{x \in \mathcal{D}(S^*) :\ ax'(0) - bp(0)x(0) = 0\} \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Théorème 4.2.1 *Pour tout* $(a,b) \in (\mathbb{C}\times\mathbb{C})^*$,

1. $S_{(a,b)}$ *extension auto-adjointe de* S *si et seulement si* $Im(\frac{a}{b}) = 0$,
2. $S_{(a,b)}$ *extension dissipative de* S *si et seulement si* $Im(\frac{-a}{b}) \geq 0$,
3. *Si* $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ *alors,* $z \in \sigma(S_{(a,b)}) \Longleftrightarrow m(z) = \frac{a}{bp(0)}$. *Dans ce cas,* z *est une valeur propre de* $S_{(a,b)}$.

Preuve: Les deux premières assertions sont une conséquence directe de l'exemple 2.1.7 du chapitre 1. Soit maintenant $(z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R})$. D'après 2.2.4, on a

$$\begin{aligned} z \in \sigma(S_{(a,b)}) &\Longleftrightarrow M(z) \in \sigma(\Theta_{(a,b)}) = \left\{ \tfrac{-a}{b} \right\} \\ &\Longleftrightarrow M(z) = -p(0)m(z) = \left\{ \tfrac{-a}{b} \right\} \\ &\Longleftrightarrow m(z) = \frac{a}{bp(0)}. \end{aligned}$$

D'autre part, comme $\frac{-a}{b}$ est une valeur propre de $\Theta_{(a,b)}$ alors, z est une valeur propre de $S_{(a,b)}$.

Lemme 4.2.2 *Pour tout* $(a,b) \in (\mathbb{C}\times\mathbb{C})^*$ *et tout* $z \in (\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}) \cap \rho(S_{(a,b)})$,

$$(\Theta_{(a,b)} - M(z))^{-1} = \frac{-b}{a - bp(0)m(z)}.I_{\mathbb{C}} \tag{4.2.2}$$

Preuve:

$$z \in \rho(S_\infty) \cap \rho(S_{(a,b)}) \Longrightarrow M(z) = -p(0)m(z) \neq \frac{-a}{b}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (\Theta_{(a,b)} - M(z))^{-1} &= \left\{ (x, y - M(z)x) :\ (x,y) \in \Theta_{(a,b)} \right\}^{-1} \\ &= \left\{ (x, y - M(z)x) :\ ax + by = 0, x, y \in \mathbb{C} \right\}^{-1} \\ &= \left\{ (y - M(z)x, x) :\ ax + by = 0, x, y \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ (-\tfrac{a+bM(z)}{b}x, x) :\ x, \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ (x, \tfrac{-b}{a+bM(z)}x) :\ x, \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \frac{-b}{a + bM(z)}.I_{\mathbb{C}} \\ &= \frac{-b}{a - bp(0)m(z)}.I_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Théorème 4.2.3 *Pour tout* $(a,b) \in (\mathbb{C}\times\mathbb{C})^*$ *et tout* $z \in (\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}) \cap \rho(S_{(a,b)})$,

$$(S_{(a,b)} - z)^{-1} - (S_\infty - z)^{-1} = \frac{-b}{a - bp(0)m(z)} < ., u(.,\overline{z}) > u(.,z) \qquad (4.2.3)$$

Preuve: Pour tout $f \in L^2_{[0,+\infty[}$, on a

$$f = \frac{1}{\|u(.,\overline{z})\|^2} < ., u(f,\overline{z}) > u(.,\overline{z}) + g, \quad g \perp u(.,\overline{z}).$$

Par conséquent, d'après 2.2.4,

$$\begin{aligned}
(S_{(a,b)} - z)^{-1}(f) - (S_\infty - z)^{-1}(f) &= \gamma(z)(\Theta_{(a,b)} - M(z))^{-1}\gamma^*(\overline{z})\left(\tfrac{<.,u(f,\overline{z})>}{\|u(.,\overline{z})\|^2} u(.,\overline{z}) \right) \\
&= \frac{< ., u(f,\overline{z}) >}{\|u(.,\overline{z})\|^2}\gamma(z)(\Theta_{(a,b)} - M(z))^{-1}\gamma^*(\overline{z})\left(\; u(.,\overline{z}) \; \right) \\
&= \frac{< ., u(f,\overline{z}) >}{\|u(.,\overline{z})\|^2}\gamma(z)(\Theta_{(a,b)} - M(z))^{-1} < u(.,\overline{z}), \gamma(\overline{z})(1) > \\
&= \frac{< ., u(f,\overline{z}) >}{\|u(.,\overline{z})\|^2}\gamma(z)(\Theta_{(a,b)} - M(z))^{-1} < u(.,\overline{z}), u(.,\overline{z}) > \\
&= < ., u(f,\overline{z}) > \gamma(z)(\Theta_{(a,b)} - M(z))^{-1}(1) \\
&= < ., u(f,\overline{z}) > \frac{-b}{a - bp(0)m(z)}\gamma(z)(1) \\
&= \frac{-b}{a - bp(0)m(z)} < ., u(.,\overline{z}) > u(.,z).
\end{aligned}$$

4.3 Exemple

Comme dans le chapitre précédent, on considère le cas particulier où pour tout $t \in [0,+\infty[$, $p(t) = 1, q(t) = 0$. D'après [14], on est en situation d'un cas point-limite à l'infini. Il n'est pas difficile de voir que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, les fonctions

$u_1(t,z) = cos(t\sqrt{z})$ et $u_2(t,z) = \frac{sin(t\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$ vérifient l'équation $S^*x = zx$ et de plus,

$$\begin{cases} u_1(0,z) = 1 \ , \ u_1'(0,z) = 0 \\ \\ u_2(0,z) = 0 \ , \ u_2'(0,z) = 1 \\ \\ W[u_1, u_2] = 1 \end{cases}$$

Par conséquent, toute solution de $S^*x = zx$, $z \neq 0$ est un multiple scalaire de la fonction $u_(.,z) = u_1(.,z)m(z) - u_2(.,z)$, où $m(z)$ est le coéfficient de Weyl-Titshmarch correspondant.

Proposition 4.3.1 *La fonction $m(z)$ est donnée par la formule :*

$$m(z) = \begin{cases} \frac{-i}{\sqrt{z}}, & Imz > 0 \\ \frac{i}{\sqrt{z}}, & Imz < 0 \end{cases} \tag{4.3.1}$$

Preuve: Remarquons tout d'abord que dans ce cas, on peut poser dans l'alternative de Weyl,

$$u_1(t,z) = cos(t\sqrt{z}), u_2(t,z) = \frac{sin(t\sqrt{z})}{\sqrt{z}} \quad Imz \neq 0.$$

Par conséquent, la solution générale vérifie :

$$\begin{aligned} u(t,z) &= \cos(t\sqrt{z})m(z) - \frac{\sin(t\sqrt{z})}{\sqrt{z}} \\ &= \frac{e^{it\sqrt{z}} + e^{-it\sqrt{z}}}{2}m(z) - \frac{e^{it\sqrt{z}} - e^{-it\sqrt{z}}}{2i\sqrt{z}} \\ &= e^{it\sqrt{z}}(\frac{m(z)}{2} - \frac{1}{2i\sqrt{z}}) + e^{-it\sqrt{z}}(\frac{m(z)}{2} + \frac{1}{2i\sqrt{z}}) \end{aligned}$$

Pour cette fonction soit dans $L^2_{([0,+\infty)}$, il suffit que :

$$\begin{cases} \frac{m(z)}{2} - \frac{1}{2i\sqrt{z}} = 0, & Imz > 0 \\ \frac{m(z)}{2} + \frac{1}{2i\sqrt{z}} = 0, & Imz < 0 \end{cases}$$

D'où le résultat recherché.

Le résultat suivant, résume les propriétés des extensions propres de l'opérateur S.

Théorème 4.3.2 *Pour tout $(a,b) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C})^*$ et tout $z \in (\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}) \cap \rho(S_{(a,b)})$,*

$$(S_{(a,b)} - z)^{-1} - (S_\infty - z)^{-1} = \frac{-b}{a - bm(z)} < ., u(., \overline{z}) > u(., z) \tag{4.3.2}$$

De plus, si $z \in (\mathbb{C} \backslash \mathbb{R})$ *alors,*

$$z \in \sigma(S_{(a,b)}) \Longleftrightarrow m(z) = \frac{a}{b}$$

. Dans ce cas, z *est une valeur propre de* $S_{(a,b)}$.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Les triplets limites et leurs fonctions de Weyl associées constituent un outil très efficace dans la théorie spectrale des équations différentielles. L'étude présentée dans ce mémoire constitue en premier lieu une illustration de cette efficacité dans le cas du plus simple opérateur de Sturm-Liouville (coefficients continue). Comme perspectives, il est envisageable de considérer l'operateur de Sturm-Liouville dans les situations suivant :

1. Le cas où la fonction q présent une ou plusieurs singularités,
2. Le cas où on n'est pas en situation point limite sur la demi-droite,
3. Le cas où les indices de défaut de l'opérateur initial ne sont pas égaux.

Bibliographie

[1] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, Theory of linear operators in Hilbert space, vol. 1 and 2, Dover New York 1993.

[2] E. A. Codington and N. Levinson, Theory of ordinary equations, Mc. Graw Hill, New York, 1955.

[3] V. A. Derkach, M. M. Malamud, Generalized resolvants and the boundary value problem for hermitian operator with gaps, J. Funct. Anal. 95 (1991), 1-95.

[4] V. A. Derkach, M. M. Malamud, The extension theory of hermitian operators and the moment problems, J. Math. Sci. (New-York) 73, (1995), 141-242.

[5] A. Dijksma, H. Snoo, Symmetric and selfadjoint relations in Krein spaces 1, Operator theory : Advances and Applications 24, Birkhaüser, Basel (1987), 145-166.

[6] W. N. Everitt, A catalogue of Sturm-Liouville differential equations, Preprint, 2004.

[7] V. I. Gorbachuk, M. I. Gorbachuk, Boundary value problems for operator differential equations, Translated and revised from the 1984 Russian original, Mathematics and its Applications (Soviet series), 48, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[8] G Grubb, A characterization of the non-local boundary value problems associated with an elliptic operator, Ann. Scuola Norm. Sup.¨Pisa (3)22, 425-513 (1968).

[9] A. N. Kochubeï, Sur l'extension des opérateurs symétriques et les relations binaires, Math. Zametki, 17 (1975), N°1, 41-48 (en Russe).

[10] J.-L. Lions and E. Magenes, Problèmes aux limites non homogénes et applications, 1. Edition Dunod, Paris,1968.

[11] V. A. Marchenko, Sturm-Liouville operators and their applications, Kiev, Izdatel'stvo Naukova Dumka 1977, 332 p (en russe).

[12] M. A. Naïmark, Linear differential operators. Part II : Linear operator in Hilbert spaces. Frederick Ungar Publishing Co New York 1968.

[13] N. C. Piskounov, Calcul différentiel et intégral, Tome 2, edition Moskva Nauka, 1985.

[14] A. E. Sterk, Non-standard boundary conditions for Sturm-Liouville operators in the limit point case, University of Groningen, Netherlands, August 2006.

[15] V. I. Vishik On general boundary value problems for elliptic differential operators, Trudy Mosc. Mat. Obsv 1, 187-246 (1952), Amer. Math. Soc. Transl. (2) 24, 107-172 (1963).

[16] A. Zettl, Sturm-Liouville theory, Amer. Mat. Soc., Mathematical Surveys and Monographs, vol 121, 2005.