REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE L'**INFORMATIQUES**

MÉMOIRE

Pour obtenir le diplôme de

Magister **en Mathématiques**

Option : Analyse Spectrale et Micro-localisation

Comparaison entre la solution BKW et l'état résonant cas d'un puits dans une île non analytique

Présenté par

Khadidja BECHAOUI

Soutenu le01/10/2012 **devant le Jury**

Sadek GALA	**Président**	Maître de conférences A	U. MOSTAGANEM
Amina LAHMAR-BENBERNOU	**Encadreur**	Professeur	U. MOSTAGANEM
Zoubir DAHMANI	**Examinateur**	Maître de conférences A	U. MOSTAGANEM

Année Universitaire : 2011 / 2012

Remerciements

Je tiens à remercier

Madame ***Amina LAHMAR-BENBERNOU*** *professeur à l'Université de Mostaganem ,qui a accepté la direction de ce mémoire et a mis à ma disposition tout les moyens nécesséres ainsi que ses conseils et sa présence pendant la réalisation de ce travail.*

Monsieur ***Sadek GALA*** *Maître de conférences A à l'Université de Mostaganem qui me fait l'honneur de présider ce Jury.*

Monsieur ***Zoubir DAHMANI*** *Maître de conférences A à l'Université de Mostaganem,qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et me fait l'honneur d'être Examinateur.*

Khadidja

Dédicaces

Je dédie ce travail à

Mes chères parents qui m'ont beaucoup soutenus et encouragés.

Mes soeurs Chamsa et Khouira.

Mon frère Habib.

Mon époux,et mes enfants.

Mes amies ,en particulier A. HAMMOU et N. LADJAL.

Mes collègues de poste graduation.

Tout qui m'ont aidé de prés ou de loin.

Table des matières

Notations

Dans tout ce qui suit, les notations suivantes seront utilisées. En cas de changement, elles seront redéfinies conformément aux différentes articulations de la partie.

x	:	la position, $x \in \mathbb{R}^n$,
ξ	:	l'impulsion, $\xi \in \mathbb{R}^n$,
z	:	un nombre complexe,
$\mathrm{Re}(z)$	:	partie réelle du nombre complexe z,
$\mathrm{Im}(z)$	:	partie imaginaire du nombre complexe z,
h	:	la constante de Planck,
H^s	:	espace de Sobolev non homogène,
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	:	espace de Schwartz,
$C^m(\mathbb{R}^n)$	:	l'ensemble des fonctions m fois continument différentiables,
$C^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap\limits_{m \in \mathbb{N}} C^m(\mathbb{R}^n)$	:	l'ensemble des fonctions infiniment dérivable,
$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$	:	l'ensemble des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact dans $\mathbb{R}^n$,
$L^p(\mathbb{R}^n)$	:	$\left\{ f \text{ mesurable sur } \mathbb{R}^n \text{ et } \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|^p \, dx < +\infty \right\}, 1 \leq p < \infty,$
$S_d\left(< x >^m\right)$	:	espace des symboles d'ordre m,
$\langle x \rangle^m = (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}}$	:	fonction d'ordre où $m \in \mathbb{R}$,
$B(\alpha, \beta)$	:	boule ouverte de centre α et de rayon β,
$\overline{B(\alpha, \beta)}$	:	boule fermée de centre α et de rayon β,
$d(x_0, x)$	:	la distance d'Agmon,
$\\|f\\|_p$	:	la norme de la fonction f dans L^p,
H_p	:	champ Hamiltonien,
$Supp f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}}$	:	support d'une fonction f,
$\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$	:	opérateur de Laplacien,
$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$	:	vecteur gradient,
$D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x},\ i^2 = -1$	:	la différentielle au point x,
$\langle ., . \rangle$	:	produit scalaire,
	:	
σ_{disc}	:	spectre discret,
σ_{ess}	:	spectre essentiel,
$\rho(A)$	:	ensemble résolvant de l'opérateur A,
$[A, B]$	:	commutateur des opérateurs A et B,
$Hess$	:	la matrice Hessien

INTRODUCTION

On se propose d'étudier l'écart existant entre la solution BKW et l'état résonant u associé à la résonance de forme ρ du problème :

$$Pu = \rho u,$$

où

$$P = -h^2\Delta + V,$$

et V est un potentiel non globalement analytique ayant la forme d'un puit dans une île (voir l'hypothèse $(\mathbf{A}_2)$ page 24).

Le travail de ce mémoire consiste essentiellement a étudié cet écart au voisinage d'un point de type 1(voir ([9])) du bord de l'île .

Ce mémoire est partiellement une continuation de ([3]). L'existence et l'unicité de la solution à l'intérieure de l'île a été étudier par l'article ([3]).

L'extention de la solution BKW a été étudier par l'article ([3]).

A partir de ces travaux, nous nous somme intéressés à l'écart entre les deux solutions. La difficulté essentielle consiste les points de type 1 qui consistent une irrégularité de la solution.

Nous commençons par obtenir une estimation sur la distance de l'ordre $(NK)^{2/3}$ d'un point de type 1 de l'île $\ddot{O}$, ensuite une estimatiuon globale dans un voisinage du bord de l'île $\partial\ddot{O}$.

Ce travail est constitué de quatre chapitres :

Le premier chapitre est un rappel de notions de base necessaires pour ce travail.

Dans le deuxième chapitre la construction BKW est constituée.

Dans le troisième chapitre le problème est posé avec les hypothèses.

Dans le quatrième chapitre nous déterminons la comparaison de la solution BKW avec l'état résonant u dans l'île, en montrant une estimation locale au voisinage du point de type 1,et aprés une estimation globale dans un voisinage du bord de l'île $\partial\ddot{O}$.

Nous terminons ce travail par une conclusion et une bibliographie.

Chapitre 1

Préliminaire

Nous allons tout d'abord pour situer ce travail rappeler quelques notions de base.

1.1 Espaces de symboles

Définition 1.1.1 *([12]) Soit g une fonction réelle sur un ensemble E, on note par $\mathcal{O}(g)$ toute fonction f définie sur E telle que*

$$\exists C > 0, f(x) \leq Cg(x), \ \forall x \in E.$$

On appelle fonction d'ordre toute fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+^*)$ telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$$\partial_x^\alpha g = \mathcal{O}(g)$$

uniformément sur $\mathbb{R}^d$.

Exemple 1.1.1 *La fonction définie par*

$$\begin{array}{rll} \langle x \rangle^m : & \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} & \\ & x \to \langle x \rangle^m & = (1 + |x|^2)^{\frac{m}{2}} \end{array},$$

où $m \in \mathbb{R}$, est une fonction d'ordre.

Définition 1.1.2 *[12]Soit g une fonction d'ordre, on appelle espace de symboles et on note $S_d(g)$ l'espace des fonctions $a = a(x; h)$ définies sur $\mathbb{R}^d \times [0, h_0[$ pour $h_0 > 0$ indéfinement dérivable par rapport à x tel que*

$$\partial_x^\alpha a(x, h) = \mathcal{O}(g(x)).$$

uniformément sur $\mathbb{R}^d \times [0, h_0[$.

Définition 1.1.3 *([12])Un symbole $a \in S_d(g)$ est elliptique s'il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$|a(x,h)| \geq \frac{1}{C} g(x).$$

$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^d \times [0, h_0[$ avec $h_0 > 0$.

Définition 1.1.4 *([12])Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on appelle espace des symboles d'ordre m et on note $S^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty$ sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$ telle que pour tous multi-indice α, β, on ait :*

$$D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x,\xi) \leq (1 + |\xi|^{m-|\beta|})$$

S^m est un espace de Fréchet muni de la topologie découlante des semi-normes suivantes :

$$P_{m,k}(a) = \underset{|\alpha|+|\beta| \leq m}{Sup} \left| D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x,\xi)(1 + |\xi|^{m-|\beta|}) \right| ; \; x \in k_\alpha, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

où k_α est un recouvrement de Ω par des compacts tel que $k_\alpha \subset int(k_{\alpha+1})$.

Exemple 1.1.2 *La fonction $\sigma(x,\xi) = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ définie un symbole.*

Exemple 1.1.3 *S_d (1) : l'ensemble des fonctions qui sont bornées ainsi que toute leurs dérivées est un espace de symboles.*

1.2 Opérateurs pseudo-différentiels

Définition 1.2.1 *([12])Soit $P(x,\xi)$ une fonction des $2n$ variables (x,ξ), on associe à cette fonction un opérateur pseudo-différentiel P_D dont l'action sur une fonction φ est définie par l'intégrale suivante :*

$$(P_D \varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{+ix\xi} P(x,\xi) \widehat{\varphi(\xi)} d\xi.$$

Soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$,en utilisant les propriétés de la transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R}^n)$; on représente l'opérateur P_D de la façon suivante :

$$P_D(x,h)\varphi(x) = Op_h(p)\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi h)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_\Omega e^{i(x-y)\xi/h} \; a(x,\xi;h)\varphi(y) dy d\xi$$

est appelé opérateur pseudo-différentiel semi-classique de symbole p.

Exemple 1.2.1 *L'opérateur différentiel semi-classique $P(x,hD)$ vérifiant :*

$$P(x,hD)=\sum_{|\alpha|\le m} b(x)(hD_x)^\alpha,$$

est un opérateur pseudo-différentiel de symbole $\sum\limits_{|\alpha|\le m} b_\alpha(x)\xi^\alpha$,

avec

$$b_\alpha\in S_{2n}(1)).$$

L'opérateur pseudo-différentiel $Op_h(p)$ est bien défini au sens des intégrales oscillantes,$\forall m\in\mathbb{R}$,et on a le théorème suivant :

Théorème 1.2.1 *([12]) Pour tout $a=a(x,y,\zeta,h)\in S_{3n}(\langle\zeta\rangle^m)$.*

1. *L'opérateur $Op_h(a)$ se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire continu de $S(\mathbb{R}^n)$ dans $S(\mathbb{R}^n)$.*
2. *L'opérateur $Op_h(a)$ se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire de $S^{'}(\mathbb{R}^n)$ dans $S^{'}(\mathbb{R}^n)$ où $S^{'}(\mathbb{R}^n)$ espace des distributions tempérés .*

Théorème 1.2.2 (Caldéron-Vaillancourt) *([12])Soit $a\in S_{3n}(1)$, $Op_h(a)$ est alors continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ de plus on a*

$$\|Op_h(a)\|_{\pounds(L^2(\mathbb{R}^n))}\le C_n\sum_{|\alpha|\le M_n}\|\partial^\alpha a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

où les constantes positives C_n et M_n dépendent uniquement de n.

Définition 1.2.2 *Soient $a\in S_d(g)$ et $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de symboles dans $S_d(g)$. On dit que a est asymptotiquement équivalent à la série formelle*

$$\sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j \ dans\ S_d(g),$$

où d et g représentent respectivement l'ordre de symbole et la fonction d'ordre, si et seulement si pour tout $N\in\mathbb{N}$ et pour $\alpha\in\mathbb{N}^d$, il existe

$$h_{N,\alpha}>0\ et\ C_{N,\alpha}>0\ tel\ que:\ \left|\partial^\alpha\left(a-\sum_{j=0}^{\infty}h^j aj\right)\right|\le C_{N,\alpha}h_g^N$$

uniformément sur $\mathbb{R}^d \times (o, h_{N,\alpha}[$ *. En particulier quand tout les* a_j *sont identiquement nuls on dit que*

$$a = \mathcal{O}(h^\infty) \text{ dans } S_d(g),$$

on note

$$a \backsim \sum_{j=0}^{\infty} h^j aj.$$

Proposition 1.2.1 *([12])Si* $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *une suite de symboles dans* $S_d(\langle x\rangle^m)$ *alors il existe* $a \in S_d(\langle x\rangle^m)$ *tel que*

$$a \backsim \sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j \text{ dans } S_d(\langle x\rangle^m),$$

on appelle une ressomassion de $\sum_{j=0}^{\infty} h^j aj$.

a est unique modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ dans le sens ou la différence entre deux symboles est $\mathcal{O}(h^\infty)$ dans $S_d(\langle x\rangle^m)$ *.*

Preuve. *Soit*

$$C_j = \sup_{|\alpha|\leq j} \left| \partial^\alpha \left(\frac{a_j(x;h)}{g(x)} \right) \right|$$

soit aussi $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante de nombres positifs vérifiants*

$$\forall\ j \in \mathbb{N},\ \varepsilon_j \leq \min(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{C_{j+1}}).$$

Soit la fonction troncature χ *définie par*

$$\begin{aligned} \chi &\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \\ supp\chi &\subset \left]-2,2\right[,\ \chi = 1 \text{ sur } [-1,1] \end{aligned}$$

alors a est défini par :

$$a(x,h) = \sum_{j=0}^{\infty} h^j (1 - \chi(\frac{\varepsilon_j}{h})) a_j(x,h)$$

est une ressomation de la série formelle $\sum_{j=0}^{\infty} h^j aj$. □

Théorème 1.2.3 *(de composition) ([12]) Pour tout* $p \in S_{3n}(\langle\zeta\rangle^m)$ *et* $q \in S_{3n}(\langle\zeta\rangle^{m'})$*, il existe un symbole que nous notons* $p\#q$ *dans* $S_{3n}(\langle\zeta\rangle^{m+m'})$ *tel que*

$$Op_h(p) \circ Op_h(q) = Op_h(p\#q),$$

où

$$p\#q \backsim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{h^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|}\alpha!}\partial_x^\alpha\partial_\eta^\alpha p(x,z,\eta)q(z,y,\zeta)\Big|_{\substack{z=x\\ \eta=\zeta}} \text{ dans } S_{3n}(\langle\zeta\rangle^{m+m'}).$$

Définition 1.2.3 *([17])Soient $p = p(x,\zeta) \in S_{2n}(\langle\zeta\rangle^m)$ et $t \in [0,1]$ on a $p((1-t)x+ty,\zeta) \in S_{3n}(\langle\zeta\rangle^m)$.On note*

$$Op_h^t(p) = Op_h(p((1-t)x+ty,\zeta).$$

Pour $t = \frac{1}{2}$, l'opérateur $Op_h^{\frac{1}{2}}(p)$ est appelé quantification semi-classique de *Weyl* et on le note $Op_h^w(a)$.

Remarque 1.2.1 *([17])Si $a \in S_{2n}(\langle\zeta\rangle^m)$ est réel alors $Op_h^w(a)$ est auto-adjoint.*

Théorème 1.2.4 *([17]) Soit $p \in S_{3n}(\langle\zeta\rangle^m)$ et $t \in [0,1]$. Alors il exist un unique symbole $p_t \in S_{2n}(\langle\zeta\rangle^m)$ tel que*

$$Op_h(p) = Op_h^t(p_t),$$

où le symbole p_t est donné par l'intégrale suivante :

$$p_t(x,\zeta) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\theta/h}p(x+t\theta, x-(1-t)\theta,\zeta)dxd\zeta,$$

et admet le développement asymbtotique suivant :

$$p_t(x,\zeta) \backsim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{(-1)^{|\alpha|}h^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|}\alpha!}\partial_\zeta^\alpha\partial_\theta^\alpha p(x+t\theta, x-(1-t)\theta,\zeta)_{|\theta=0} \text{ dans } S_{2n}(\langle\zeta\rangle^m).$$

Théorème 1.2.5 *(calcule symbolique) ([17]) Soient $p = p(x,\zeta) \in S_{2n}(\langle\zeta\rangle^m)$, $q = q(x,y) \in S_{2n}(\langle\zeta\rangle^{m'})$ alors pour tout $t \in [0,1]$ il existe un unique symbole $p_t \in S_{2n}(\langle\zeta\rangle^{m+m'})$ tel que*

$$Op_h^t(p)\circ Op_h^t(q) = Op_h^t(p_t).$$

Dans le cas particulier où $t = \frac{1}{2}$; on a

$$Op_h^w(p)\circ Op_h^w(q) = Op_h^w(p_t^w),$$

avec

$$p_t^w = \frac{1}{(2\pi h)^{2n}}\int e^{i\left[(\zeta-\eta)(v-x)+(\zeta+\zeta')(x-u)\right]lh} p\left(\frac{1}{2}(x+u),\eta\right) q\left(\frac{1}{2}(x+v),\zeta'\right) dudvd\eta d\zeta',$$

$$p_t^w \backsim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{(-1)^{|\alpha|}h^{|\alpha+\beta|}}{(2i)^{|\alpha+\beta|}\alpha!\beta!}{}_x^\alpha \partial_x^\alpha\partial_\zeta^\beta p(x,\zeta)\partial_\zeta^\alpha\partial_x^\beta q(x,\zeta).$$

1.3 Théorèmes d'analyse spectrale

Nous rappelons dans cette partie des notions et résultats de théorie spectrale des opérateurs. Dans tout ce qui suit D_A et D_B désignant les domaines des opérateurs A et B respectivement.

Définition 1.3.1 *([21])On dit qu'un opérateur symétrique (D_A, A) est essentiellement auto-adjoint l'orsque $(\overline{D}_A, \overline{A})$est auto-adjoint.*

Lemme 1.3.1 *Si l'opérateur symétrique (D_A, A) est essentiellement auto-adjoint, alors il admet une unique extension auto-adjointe.*

Théorème 1.3.1 (Kato-Rellich) *([21]) Soit (D_A, A) un opérateur auto-adjoint (resp. essentiellement auto-adjoint) et (D_B, B) un opérateur $A-$borné de borne relative inférieur à 1.*
Alors $(D_A, A+B)$ est auto-adjoint (resp. essentiellement auto-adjoint).

Lemme 1.3.2 *([21]) Soit (D_A, A) un opérateur auto-adjoint, et (D_B, B) un opérateur tel que $D_A \subset D_B$.*
B est $A-$borné si et seulement si il existe $z \in \rho(A)$ tel que, $BR_A(z)$ est un opérateur borné.
La borne relative a de B pour A est donné par :

$$a = \lim_{\lambda \to \infty} \|BR_A(\pm i\lambda)\|$$

Lemme 1.3.3 *([21]) Soit (D_A, A) un opérateur fermé et (D_B, B) un opérateur tel que $D_A \subset D_B$.*
B est $A-$compact s'il existe $z \in \rho(A)$ tel que $BR_A(z)$ est compact.
Si B est A-compact et B est A-borné de borne relative 0, on a alors,

$$BR_A(i\lambda) = (BR_A(i))((A+i)R_A(i\lambda))$$

où le premier opérateur est compact et le second tend vers 0 quand $\lambda \to \infty$.

Théorème 1.3.2 (Théorème de Weyl) *([21])Si (D_A, A) est un opérateur auto-adjoint et (D_B, B) un opérateur symétrique A-compact, alors $(D_A, A+B)$ est auto-adjoint et on a*

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A+B).$$

1.4 Théorèmes d'analyse complexe

Définition 1.4.1 *([17])L'espace $\mathfrak{F}$ des fonctions entières est l'espace des fonctions f qui ont la propriété suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall z \in C_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n, |\operatorname{Im} z| \leq (1-\varepsilon)|\operatorname{Re} z|\}, \forall k \in \mathbb{N} \text{ on ait : } \lim_{\substack{|z| \to \infty \\ z \in C_\varepsilon}} |z|^k |f(z)| = 0$$

Définition 1.4.2 *([17])L'espace $\mathcal{A}$ des fonctions analytiques dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifiant :*

$$\exists f \in \mathfrak{F} \text{ tel que } \psi(x) = f(x).$$

Théorème 1.4.1 (Extension presque analytique) *([17])Soit $V = V(x)$ une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^n$ uniformément bornée ainsi que toutes ses dérivées. Une fonction $\widetilde{V}(x,y)$ sur $\mathbb{R}^{2n}$ est dite extension presque analytique de V si,*

$$\widetilde{V}(x,0) = V(x),$$

et

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\widetilde{V}(x,y) = \mathcal{O}(|y|^\infty),$$

quand $|y| \to 0_+$, uniformément par rapport à x.

Remarque 1.4.1 *On peut construire une extension presque analytique en posant,*

$$\widetilde{V}(x,y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(iy)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha V(x) \left(1 - \chi\left(\frac{\epsilon_\alpha}{|y|}\right)\right), \tag{1.4.1}$$

où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction de troncature égale à 1 près de 0, et $(\epsilon_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ une suite positive décroissante de nombres positifs convergeant vers 0 assez rapidement. Plus précisément, on choisit ε_α telle que, pour tout $\beta \leq \alpha$, on a :

$$|y| \sup |(1 - \chi(\varepsilon_\alpha/|y|))\partial^{\alpha+\beta} V| \leq \alpha!. \tag{1.4.2}$$

1.5 Espace de Sobolev

Définition 1.5.1 *([15])Pour tout Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour tout $m \in \mathbb{N}$,et pour tout $1 \leq p < \infty$,on définit l'éspace de* Sobolev $H^{m,p}(\Omega)$ *comme étant le complété de l'espace* $C^{\infty,m,p}(\Omega)$ *pour la norme* $\|.\|_{m,P}$,
où

$$C^{\infty,m,p}(\Omega) = \left\{u \in C^{\infty}(\Omega); D^{\beta}u \in L^{p}(\Omega) \text{ pour tout } |\beta| \leq m\right\};$$

et

$$\|u\|_{H^{m,p}} = \left(\sum_{|\beta|\leq m} \left\|D^{\beta}u\right\|_{L^p}^{p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

où la dérivée partielle $D^{\beta}u$ est entendue au sens des distributions.
Dans le cas de $p = 2$, les espaces de Sobolev *sont des espaces de* Hilbert, *leur norme est induite par*

$$< u, v >_m = \sum_{0\leq|\beta|\leq m} (D^{\beta}u, D^{\beta}v),$$

où

$$< u, v >= \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}dx \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Définition 1.5.2 *([15])L'espace de* Sobolev H^1 *est donné par :*

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \text{ telles que } \forall i \in [1, d] \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Théorème 1.5.1 *([15])$H^1(\Omega)$ est un espace vectoriel. Muni du produit scalaire*

$$< f, g >_{H^1} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx + \sum_{i=1}^{d} \int_{\Omega} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}dx.$$

C'est un espace de Hilbert. *Sa norme est notée* $\|.\|_{H^1}$.

1.6 Le problème de Dirichlet pour le Laplacien

Parmi les problèmes rencontrés par les chercheurs, les problèmes d'équations aux dérivées partielles, occupent à notre époque une place de choix, en particulier le problème de *Dirichlet,* qui consiste à trouver une fonction harmonique u dans D, continue sur $\overline{D}$, valant u_0 sur le bord ∂D où u_0 est une fonction continue sur le bord du disque unité ouvert D de $\mathbb{C}$. Donc il s'agit de trouver u telle que :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ sur } D \\ u\,|_{\partial D} = u_0 \end{cases},$$

où Δ est le Laplacien.([23])

1.7 Estimation d'Agmon

Les estimations géométriques précisent la décroissance des fonctions propres en dehors des puits, décroissance qui s'explique en terme de la distance à U_{E_0}(la réunion des puits) au sens d'une métrique *Riemannienne* dégénérée.

Définition 1.7.1 *([18])Soient V une fonction à valeurs réelles bornée sur $\mathbb{R}^n$, $E \in \mathbb{R}$, et $\zeta, \eta \in T_x(\mathbb{R}^n)\tilde{}\mathbb{R}^n$, l'espace tangent de $\mathbb{R}^n$ à x,on définit un produit non dégénéré sur $T_x(\mathbb{R}^n)$ pour*

$$\langle \xi, \eta \rangle = (V(x) - E) + \langle \xi, \eta \rangle_E ,$$

où $\langle ., . \rangle$ est le produit Euclidien *usuel.*
*La pseudo-métrique correspendante est appellée la métrique d'*Agmon *liée par le potentiel V à l'énergie E .*
On utilise la structure donnée dans la définition pour construire une fonction distance (ou métrique) sur $\mathbb{R}^n$.
Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ une courbe différentielle sur $\mathbb{R}^n$. La dérivée $\gamma'(t)$ apartient à l'espace tangent au point $\gamma(t)$ .Pour toute métrique Riemanienne *g sur une variété de $\mathbb{R}^n$, la longueur de γ est donnée par :*

$$L(\gamma) = \int_0^1 \left\| \gamma'(t) \right\|_{\gamma(t)} dt, \tag{1.7.1}$$

*où $\|\xi\|_x = \langle \xi, \xi \rangle_x^{1/2}$, pour $\xi \in T_x(\mathbb{R}^n)$.Dans la structure d'*Agmon *la longueur de la courbe γ est*

$$L_A(\gamma) = \int_0^1 (V(\gamma(t)) - E)^{1/2} + \left\| \gamma'(t) \right\|_E dt, \tag{1.7.2}$$

où $\|.\|_E$ est la norme Euclidienne *usuelle . Une courbe γ est une géodésique si elle minimise la fonctionelle d'énergie*

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\| \gamma'(t) \right\|_{\gamma(t)}^2 . \tag{1.7.3}$$

Définition 1.7.2 *([18])Soit V un potentiel réel borné et soit E l'énergie, la distance entre $x, y \in \mathbb{R}^n$ dans la métrique d'*Agmon *est*

$$\rho_E(x, y) = \inf_{\gamma \in P_{x,y}} L(\gamma),$$

où

$$P_{x,y} = \{\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n \ / \ \gamma(0) = x, \gamma(1) = y, \gamma \in Ac\,[0, 1]\}.$$

L'ensemble $Ac\,[0, 1]$ est l'éspace des fonctions absolument continues sur $[0, 1]$ .La distance entre $x, y \in \mathbb{R}^n$ parla métrique d'*Agmon* est la longueur du plus chemain entre x et y.

Théorème 1.7.1 *([18])Soit un niveau dénergie $E \in \mathbb{R}$ et soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|u\|_2 = 1$ et vérifiant*

$$P_V E = Eu,$$

où

$$P_V = -h^2 \Delta + V.$$

Alors $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall \varphi$ vérifiant

$$|\nabla_x \varphi|^2 \leq V(x) - E - \varepsilon,$$

sur le Suppφ, on obtient

$$\|u\|_2^2 = O(e^{-\varphi(x)/h}),$$

uniformément quand $h \to 0^+$.
*La phase $\varphi(x)$ désigne la métrique d'*Agmon *et*

$$\varphi(x) \sim (V(x))^{1/2} \ pour \ \|x\| \to \infty.$$

Lemme 1.7.1 *([18])Sous les conditions du théorème (1.7.1) et soit χ une fonction continue, bornée telle que Supp$\,|\nabla \chi|$ soit compact.*
Soit $v = \chi e^{\varphi/h} u$ où $Pu = Eu$.Alors

$$\operatorname{Re} \left\langle \left(\chi e^{\varphi/h}(P_V - E)\chi u, \chi e^{\varphi/h} u\right)\right\rangle \geq \left\langle \xi e^{\varphi/h} u, e^{\varphi/h} u\right\rangle;$$

où

$$\xi = |\nabla \chi|^2 + 2(\nabla \chi . \nabla \varphi)\chi.$$

1.7.1 Inégalité d'Agmon

Proposition 1.7.1 *([18])Soit l'opérateur de* Shrödinger

$$P_V = -h^2\Delta + V(x),$$

où $V \in S_{2n}(1)$.

Soit φ une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles, bornée ainssi que toutes ses dérivées et satisfaisant

$$|\Delta\varphi| \leq C_0 \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap D(V) \ ,$$

où $D(V)$ est le domaine de définition de V, on a

$$\operatorname{Re}\left\langle e^{\varphi/h} P_V u, e^{\varphi/h} u\right\rangle \geq \left\langle (V(x) - |\Delta\varphi(x)|^2) e^{\varphi/h} u, e^{\varphi/h}\right\rangle,$$

uniformément pour tout h assez petit .

1.7.2 Distance d'Agmon

Définition 1.7.3 *([18])Soit X est la métrique* Riemanienne *donnée par*

$$\alpha_{E_0} = (V(x) - E_0)_+ g,$$

où E_0 est fixée.

Cette métrique est nulle dans la réunion des puits $U_{E_0} = \{V(x) \leq E_0\}$.

*La distance d'*Agmon *d_{E_0} est définie par*

$$d_{E_0}(x,y) = \inf_{\gamma} \int_0^1 \sqrt{V(\gamma(t) - E_0)_+} \, \|\gamma(t)\| \, dt,$$

où le inf porte sur les arcs

$$\gamma : [0,1] \to X \text{ de classe } C^1 \text{tels que } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y.$$

Cas des puits non dégénérés

On va décrire la distance d'*Agmon* lorsque $E_0 = \inf V$, (On supposera que $E_0 = 0$) , et que les puits $U_0 = \{U_1, ..., U_N\}$ sont non dégénérés, ce qui signifie que $\forall j, V"(U_j)$ est une forme quadratique.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.7.2 *([18])Au voisinage de U_j,$d_0(x) = d_0(x, U_j)$ est une fonction C^∞ ayant en U_j un minimum non dégénéré.*

La métrique d'Agmon a plusieurs propriétés, elle satisfait l'inégalité triangulaire, et elle est Lipschitz continue.

$$|d(\acute{x}, y) - d(x, y)| \leq d(\acute{x}, x), \ \forall x, \acute{x}, y \in \mathbb{R}^n.$$

$$|\nabla_x d(x, y)|^2 \leq (V - E_0)_+ (x).$$

Nous observons que la deuxième inégalité est satisfaite pour d'autres distances comme

$$d(x, U) = \inf_{y \in U} d(x, y).$$

Chapitre 2

La construction BKW pour l'opérateur de Shrödinger : approche formelle

2.1 Introduction

La méthode BKW nomée *Brillouri, Kramers et Wertzel* est une téchnique de l'expansion asymptotique pour trouver des solutions approximatives pour certains types de problèmes.

La plus connue des appliquations de cette méthode est l'obtention des solutions de l'équation de *Shrödinger,* indépendante du temps en mécanique quantique.

2.2 La construction BKW

([7])Soit $V(x) = V_0(x) + hV_1(x)$ un potentiel. On veut trouver une solution BKW de la forme

$$w(x,h) = h^{n/4}a(x,h)e^{-\phi_0(x)/h},$$

pour l'opérateur de *Shrödinger*

$$P = -h^2\Delta + V(x,h),$$

dans le voisinage d'un potentiel V_0 non dégénéré défini sur $\mathbb{R}^n$. Les potentiels V_0 et V_1 sont C^∞, la phase ϕ_0 est réelle positive et on veut écrire a tel que :

$$a(x,h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j(x).$$

La recherche d'une solution BKW correspond à la recherche de $a(x,h)$ et de $E(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} E_j h^j$ tel que

$$(-h^2\Delta + V(x;h) - E_j(h))(a(.,h)e^{-\phi(.)/h}) \sim 0,$$

qui est équivalente à

$$(V_0 - |\nabla\phi_0|^2)a + 2h\nabla\phi_0.\nabla - h\Delta a + h\Delta\phi_0 a + hV_1 a + E(h)a \sim 0. \qquad (2.2.1)$$

Cela donne en premier l'équation eiconale :

$$V_0(x) - |\nabla\phi_0(x)|^2 - E_0 = 0. \qquad (2.2.2)$$

Supposons qu'une solution de cette équation a été trouvé, nous obtenons aprés un système d'équations appellées équations de transport :

$$(T_1) \quad 2\nabla\phi_0(x).\nabla a_0 + (V_1 + \Delta\phi_0 - E_1)a_0 = 0, \qquad (2.2.3)$$

$$(T_2) \quad 2\nabla\phi_0(x).\nabla a_1 + (V_1 + \Delta\phi_0 - E_1)a_1 = \Delta a_0 + E_2 a_0,$$

...

...

$$(T_{k+1}) \quad 2\nabla\phi_0(x).\nabla a_{k1} + (V_1 + \Delta\phi_0 - E_1)a_k = \sum_{j=0}^{k} E_j a_{k+1-j} + \Delta a_{k-1} + E_{k+1}a_0.$$

Ces équations ont la même structure. Il existe un vécteur réel X défini par

$$X = 2\nabla\phi_0.\nabla.$$

qui tendera vers 0 (et déterminera $E_0 = 0 = \min V_0$), et une fonction g telle que

$$g = (V_1 + \Delta\phi_0 - E_1),$$

qui doit tendre vers 0 (et qui détermine E_1, en assumant que $a_0(0) = 1$) et une fonction f qui va être identiquement 0 (dans le cas (T_1)) et elle est définie par

$$f = \sum_{j=2}^{k} E_j a_{a+1-j} + \Delta a_{k-1} + E_{k+1}a_0,$$

et tendera vers 0 et déterminera E_{k+1}.

Nous devons aprés résourdre

$$Xu + gu = f$$

avec $u(0) = 1$ dans le cas de (T_1) et avec $u(0) = 0$ dans les autres cas.

2.2.1 le cas de la dimension $n = 1$

Soit en premier l'écriture de l'équatoin eiconale dans la dimension 1

$$\phi_0'(t)^2 = V(t).$$

On écrit $V(t)$ sous la forme

$$V(t) = t^2 b(t),$$

avec $b(t) \neq 0$ dans un assez petit voisinage de 0.

Ce qui justifier le choix

$$\phi_0'(t) = t\sqrt{|b(t)|}, \phi_0(0) = 0,$$

qui est la seul compatible avec la construction sur ϕ_0.Ce qui donne :

$$\phi_0(t) = \int_0^t s\sqrt{|b(t)|}ds,$$

qui est bien définie et C^∞ dans un voisinage de 0.

Maintenant on écrit l'équation de transport

$$2\phi_0'(t)a_0'(t) + \phi_0''(t)a_0(t) = 0,$$

avec la condition initiale

$$a_0(0) = 1.$$

E_1 est déterminée par :

$$E_1 = \phi_0''(0).$$

On peut résourdre explicitement ces équations differentielles ordinaires en observant que

$$(\ln a_0) = -\frac{1}{2}\frac{(E_1 - \phi_0''(t))}{\phi_0'(t)}.$$

Tout les autres équations ont la même structure et peuvent être resolu en utilisant la variation de la constante.

2.2.2 Le cas général

Nous expliquons la situation dans le cas quadratique

$$V_0(x) = \frac{1}{2}(\sum_j \lambda_j x_j^2),$$

et $V_1(x)$ générale et λ_j sont les valeurs propres de l'opérateur P de *Shrdinger.*

Détermination de la phase

La phase doit satisfaire
$$|\nabla \phi_0|^2 = V_0,$$
si ϕ_0 a une forme quadratique
$$\phi_0(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle\,,$$
on trouve l'équation
$$A^2 = \frac{1}{2} HessV_{0,}$$
et on peut prendre A a une racine positive de $\frac{1}{2}HessV_0$, qui était supposée d'être strictement positive.

On trouve pour un point critique x_c de V_0 la relation necessaire pour la solution ϕ_0 suivante :
$$(Hess\phi_0(x_c))^2 = \frac{1}{2}HessV_0(x_c).$$

2.2.3 Résolution formelle(dans la puissance de x^α) de l'équation de transport

Pour chaque équation de transport, on observe que :
$$\sum \mu_j x_j \partial_{x_j} x^\alpha = (\sum_j \mu_j \alpha_j) x^\alpha,$$
et on peut résourdre l'équation transport par récurrence, en observant que $(\sum_j \mu_j\alpha_j)x^\alpha$ est une série formelle qui tend vers 0 à l'ordre $|\alpha| + 1$.

La situation générale dans le cas général est expliquée dans(([2])) (et les cours dans ([9])).

Chapitre 3

Position du problème et hypothèses

Dans ce travail nous voulons étudier l'opérateur de *Schrödinger* P dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ défini par :

$$P = -h^2\Delta + V.$$

On introduit les hypothèses suivantes sur le potentiel V.

Hypothèse ($\mathbf{A}_1$) ([3])

($\mathbf{A}_{11}$) $V \in C^\infty$ à valeurs réels.

($\mathbf{A}_{12}$) Il existe un compact $K_0 \subset \mathbb{R}^n$, tels que V est analytique sur $K_0^C = \mathbb{R}^n \diagdown K_0$, et se prolonge holomorphiquement dans

$$D_0 = \left\{x \in \mathbb{C}^m;\ |\operatorname{Im} x| < \sigma_0 \,|\operatorname{Re} x|\,,\ \operatorname{Re} x \in K_0^C\right\},$$

pour la constante $\sigma_0 > 0$.

($\mathbf{A}_{13}$) $V(x) \to 0$ quand $|\operatorname{Re} x| \to \infty,\ x \in D_0$.

L'objéctif de cette hypothèse est de définir les résonances prés de l'axe réel comme les valeurs propres complexes de l'opérateur distordu P_θ de P avec $P_\theta = \widetilde{P}_{i\theta}$ où θ suffissement petit.

Soit l'opérateur $\widetilde{P}_\nu = U_\nu P U_{-\nu}$ est l'opérateur conjugué. U_ν est défini par

$$U_\nu \Phi(x) = \det(1 + vdF(x))^{\frac{1}{2}}\Phi(x + vF(x))$$

tel que

$$\begin{cases} F(x) = 0 & si \quad x \in K_0 \\ F(x) = x & si \quad x \in K_0^c \end{cases} .$$

Proposition 3.0.1 *l'opérateut U_ν est unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. a)Montrons que U_ν est unitaire □

U_ν est unitaire $\Longleftrightarrow U_v^* U_v = U_v U_v^* = I_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

On calcule d'abord U_ν^*.

Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \langle U_v f, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} U_v(f\ (x).\overline{g(x)}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \det(1 + vdF(x))^{\frac{1}{2}} f(1 + vF(x))\overline{g(x)}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \det(d\phi_v(x))^{\frac{1}{2}} f\ (\phi_v(x))\overline{g(x)}dx, \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} \phi_v(x) = x, & x \in K_0 \\ \phi_v(x) = x(1+v), & x \in K_0^c \end{cases}$$

Comme $\phi_v(x)$ est difféomorphisme sur $\mathbb{R}^n$ alors

$$\begin{aligned} \langle U_v f, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \det(dy)^{\frac{1}{2}} f(y)\overline{g(\phi_v^{-1}(y))} \det(d\phi_v^{-1}(y))dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\overline{g(\phi_v^{-1}(y) \det d\phi_v^{-1}(y))^{\frac{1}{2}}} dy \\ &= \langle f, U_\nu^* g \rangle , \end{aligned}$$

avec

$$U_\nu^* g(x) = g((x + vF(x))^{-1} \det(d(x + vF(x))^{-1})^{\frac{1}{2}}.$$

Maintenant on montre que U_v est un opérateur unitaire.

Soit f$\in L^2(\mathbb{R}^n)$,alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\begin{aligned} U_v U_\nu^*(f)(x) &= U_v \left[U_\nu^*(f)(x) \right] \\ &= \det(1 + vdF(x))^{\frac{1}{2}} \left[U_\nu^*(f)(x + vF(x)) \right] \\ &= \det(d\phi_v(x))^{\frac{1}{2}} \left[U_\nu^*(f) \right] (\phi_v(x)) \\ &= \det(d\phi_v(x))^{\frac{1}{2}} f(\phi_v^{-1}(\phi_v(x)) \det(d\phi_v^{-1}(\phi_v(x))^{\frac{1}{2}} \\ &= f(x); \end{aligned}$$

car $\det(d\phi_v(x))^{\frac{1}{2}} \ \det d(\phi_v^{-1}(\phi_v(x))^{\frac{1}{2}} = \det(d\phi_v^{-1}(\phi_v(x))^{\frac{1}{2}} = 1.$

D'autre part,pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\begin{aligned}
U_v U_\nu^*(g)(y) &= U_\nu^*\left[U_v(g)(y)\right] \\
&= \det(d\phi_v^{-1}(y))^{\frac{1}{2}} \left[U_v(g)\right](\phi_v^{-1}(y)) \\
&= \det(d\phi_v^{-1}(y)^{\frac{1}{2}}) \det(d\phi_v(\phi_v^{-1}(y)) g(\phi_v(\phi_v^{-1}(y)) \\
&= g(y);
\end{aligned}$$

car $\det(d\phi_v^{-1}(y))^{\frac{1}{2}} \ \det d\phi_v(\phi_v^{-1}(y))^{\frac{1}{2}} = \det(d\phi_v(\phi_v^{-1}(y))^{\frac{1}{2}} = 1.$

De tout ce qui précede on en déduit que

$$U_v^* U_v = U_v U_v^* = I_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

On déduit donc que U_v est unitaire.

b)montrons que U_ν est de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$;

On a

$$\begin{aligned}
U_v \quad \in \quad L^2(\mathbb{R}^n) &\iff \int_{\mathbb{R}^n} |U_\nu u(x)|^2\, dx < +\infty \\
&\iff \|U_\nu u(x)\|^2 < +\infty.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\|U_\nu u(x)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |U_\nu u(x)|^2\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\det(1+\nu dF(x))|\, |u(x+\nu F(x))|^2\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{-A} |\det(1+\nu dF(x))|\, |u(x+\nu F(x))|^2\, dx + \int_{-A}^{A} |\det(1+\nu dF(x))|\, |u(x+\nu F(x))|^2\, dx \\
&\quad + \int_{A}^{+\infty} |\det(1+\nu dF(x))|\, |u(x+\nu F(x))|^2\, dx \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

On pose

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-A} |\det(1+\nu dF(x))|\, |u(x+\nu F(x))|^2\, dx, \ I_2 = \int_{-A}^{A} |\det(1+\nu dF(x))|\, |u(x+\nu F(x))|^2\, dx$$

et

$$I_3 = \int_A^{+\infty} |\det(1+\nu dF(x))| \, |u(x+\nu F(x))|^2 \, dx.$$

On obtient :

1.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{-A} |\det(1+\nu dF(x))| \, |u(x+\nu F(x))|^2 \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{-A} |\det(1+\nu)| \, |u(x+\nu\,|x|)|^2 \, dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{-A} |u(x+\nu\,|x|)|^2 \, dx \\ &< +\infty \ \text{ car } u \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-A}^{A} |\det(1+\nu dF(x))| \, |u(x+\nu F(x))|^2 \, dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{A}^{+\infty} |\det(1+\nu dF(x))| \, |u(x+\nu F(x))|^2 \, dx \\ &= \int_{A}^{+\infty} |\det(1+\nu)| \, |u(x+\nu x)|^2 \, dx \\ &= \int_{A}^{+\infty} |u(x+\nu x)|^2 \, dx < +\infty \text{ car } u \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

d'où on a $U_\nu : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 3.0.2 *L'opérateur $P(h) = -h^2\Delta + V$ est essentiellement auto-adjoint de domaine*

$$H^2(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n), \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Preuve. $P_0(h) = -\Delta h^2$ est auto-adjoint de domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$ avec $\sigma_{ac}(-\Delta) = [0, +\infty[$ donc $(-i) \in \rho(\Delta)$; ainsi

$$V(\Delta+i)^{-1} = V_\Delta R(-i)$$

est compact ce qui entraine que V est Δ borné de borne relative < 1.

D'aprés le théorème de Kato-Rellich P est essentiellement auto-adjoint . $\square$

Et l'opérateur $U_\nu P U_{-\nu}$se prolonge à un opérateur analytique dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Nous supposons toujours que le potentiel V vérifier l'hypothèse $(\mathbf{A}_1)$, et l'on peut donc définir sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur P_θ avec $\mu = i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}^+$ assez petit de domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} P_\theta &= U_\theta P U_{-\theta} \\ &= e^{-2i\theta} h^2 D^2 + V(xe^{i\theta}), \end{aligned}$$

où

$$U_\theta f(x) = f(xe^{i\theta}), \text{ avec } 0 < \theta < \theta_0 < \frac{\pi}{2} \text{ et } \Delta = D^2.$$

Le théorème de *Weyl* permet d'affirmer que le spectre essentiel de cet opérateur est la demi droite $e^{-2i\theta}\mathbb{R}^+$.

Soit un domaine Π_θ définie par :

$$\Pi_\theta = \{E \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, -2\theta < \arg E < 0\}.$$

C'est-à-dire :

$$\sigma_{ess}(P_\theta) = \sigma_{ess}(e^{-2i\theta}(hD)^2) = e^{-2i\theta}\mathbb{R}^+.$$

De plus le spectre $\sigma(P_\theta)$ dans le secteur $S_\theta = \{E \in \mathbb{C}; -2\theta < \arg E < 0\}$ est discret.

Les éléments de $\sigma(P_\theta) \cap S_\theta$ sont appellés les résonances. Cette définition est indépendante de θ dans le sens que $\sigma(P_{\theta'}) \cap S_\theta = \sigma(P_\theta) \cap S_\theta$ si $\theta' \rangle \theta$; et aussi de la fonction $F(x)$.

On outre si U_θ est une fonction propre de P_θ, il existe alors $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, holomorphique dans D_0 ; tel que $u_\theta = U_{i\theta} u$. Les fonctions u sont appelées les états résonants de P.

Hypothèse $(\mathbf{A}_2)$ ([3])

Il existe un domaine ouvert borné $\ddot{O} \subset \mathbb{R}^n$, un point x_0 dans $\ddot{O}$ et un nombre positif E_0 tels que :

$$V(x_0) = E_0, \ \frac{\partial V}{\partial x}(x_0) = 0, \ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_0) > 0,$$

et

$$V(x) > E_0 \text{ dans } \ddot{O} \diagdown \{x_0\}, \ \ V(x) = E_0 \text{ sur } \partial\ddot{O}.$$

Cette hypothèse décrit la forme de $V(x)$ dans l'île.

On peut introduire le problème de *Dirichlet* et on utilise la distance d'*Agmon* avec le pseudo-métrique

$$\begin{aligned} ds^2 &= \max(V(x), 0)dx^2, \\ S &= d(x_0, \partial \ddot{O}), \end{aligned}$$

la distance minimale de x_0 au bord de $\ddot{O}$ et $B_d(x_0, S) = \{x; d(x, x_0) < S\}$ la boule ouverte de centre x_0 et rayon S par rapport à la distance d.

On considère la réalisation de *Dirichlet* P_D de l'opérateur P sur le domaine $\overline{B_d(x_0, S-\eta)}$ pour η suffisamment petit .

En dehors de l'île dans $\ddot{O}^c$, on suppose la condition de non-trapping sur

$$p^{-1}(E) = \{(x, \xi); p(x, \xi) = E\},$$

par l'hypothèse :

Hypothèse ($\mathbf{A_3}$) ([3])

Pour tout $(x, \xi) \in p^{-1}(E_0)$ avec $x \in \ddot{O}^C$, la quantité $|\exp(tH_p)(x, \xi)|$ tend vers l'infinie quand $|t|$ tend vers l'infinie où H_p est le champ *Hamiltonien*

$$\begin{aligned} H_p &= \frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \\ &= 2\xi \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Si $x \in \partial \ddot{O}$, en particulier, $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $p(x, \xi) = E_0$ est 0, et $H_p = -\nabla V(x) . \frac{\partial}{\partial \xi}$.

L'hypothèse ($\mathbf{A_3}$) implique aussi que $\nabla V(x) \neq 0$ sur $\partial \ddot{O}$.

Hypothèse ($\mathbf{A_4}$) ([3])

Dans la dernière hypothèse on suppose quelques conditions sur l'ensemble $\partial \ddot{O} \cap \overline{B(x_{0,} S)}$ et l'ensemble caustique

$$\dot{C} = \overline{\left\{ x \in \ddot{O}, d(x, \partial \ddot{O}) + S \right\}}.$$

Les points de l'ensemble $\partial \ddot{O} \cap \overline{B_d(x, S)}$ sont appelés points de type 1.

$\partial \ddot{O} \cap \overline{B(x, S)}$ est la sous variéetté Γ de l'ensemble $\partial \ddot{O}$. On note par $\eta_\Gamma (\leq \eta - 1)$ la dimention de Γ.

Chapitre 4

Comparaison dans l'île

Dans ce chapitre, Nous allons comparer la solution BKW noté par w_N avec l'état résonant u dans $\ddot{O}$ au point de type 1 x^1. On obtient une estimation de la distance de l'ordre $(Nk)^{2/3}$ de x^1.

On va utiliser les mêmes notations de la section 4 dans l'article ([3]). Soit $\widetilde{\Omega}$ un petit voisinage de $\gamma([-\infty, 0])$ et

$$\widetilde{\Omega}_+ = \left\{x \in \widetilde{\Omega}; x_n + b(x^{'}) > 0\right\}, \quad \widetilde{\Omega}_- = \widetilde{\Omega} \backslash (\widetilde{\Omega}_+ \cup \left\{x; x_n + b(x^{'}) = 0\right\}.$$

Soit $x \in \widetilde{\Omega}_-$, un point prés de x^1.

On va utiliser la formule (4.12) de l'artilce ([3]) pour ϕ (voir aussi $[([9]), \text{formule } (10.22)]$) on a,

$$\phi(x) \geq \phi(x^{'}, -b(x^{'})) + (x_n + b(x^{'}))\xi_n^c(x^{'}) - (C_1 \left|x_n + b(x^{'})\right|^{2/3}, \tag{4.0.1}$$

pour $C_1 > 0$.

D'aprés l'hypothèse $(\mathbf{A_4})$ on a,

$$\phi(x^{'}, -b(x^{'})) = \phi \left|\dot{C}(x^{'}, -b(x^{'}))\right| \geq \delta \left|x^{'}\right|^2,$$

avec $\delta > 0$

$$\phi(x^{'}, -b(x^{'})) + (x_n, -b(x^{'}))\xi_n^c(x^{'}) \geq 0,$$

au voisinage de x^1.

Par concéquence, on a

$$d(x_0, x) \geq S - C_1 \left| x_n + b(x^{'}) \right|^{2/3}. \tag{4.0.2}$$

En particulier, si $x \in \Omega(-(Nk)^{2/3}, 0)$, $k = h\log(1/h)$, on a

$$e^{-s(x)/h} = \mathcal{O}(h^{-C_1 N} e^{-S/h}).$$

L'objectif de ce travail est de montrer une estimation locale au voisinage du point x^1 (théorème(4.1.1) voir ci-dessous) et par concéquence une estimation globale dans $\partial\ddot{O}$ (théorème (4.2.1) voir ci-dessous).

C'est pour cela, nous avons besoin de la proposition et le théorème suivants :

Proposition 4.0.3 ([*3*]) *Pour tout* N *large, il existe une fonction lyce* $w_{CN}(x,h) \in C^\infty(\ddot{O}_N)$, *avec*

$$\ddot{O}_N = \{dist(x, \ddot{O}) < 2(Nk)^{2/3}\},$$

vérifiant les propriétées suivantes :

1. $\exists\delta > 0$ *indépendant de* N, *tel que uniformément dans* $\ddot{O}_N$, *et* $\forall\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, *on a*

$$-S + \partial^\alpha w_{CN}(x,h) = \mathcal{O}(h^{-m_\alpha} e^{-(S+\mathrm{Re}\,\widetilde{\phi}(x))/h}),$$

$$(P - \rho(h)) = \mathcal{O}(h^{\delta N} e^{-(S+\mathrm{Re}\,\widetilde{\phi}(x))/h}),$$

pour $m_\alpha \geq 0$, *et* $\widetilde{\phi}(x) = d(x_0, x) - S$ *pour* $x \in \Omega \cup M_\eta$, *et pour* $x \in \omega^+(2Nk, (Nk)^{2/3})$

2. *Dans tout compact de* Ω , *pour* $M \in \mathbb{N}$, *on a*

$$w_N(x,h) = h^{n/4} e^{-(S+\widetilde{\phi}(x))/h} \left(\sum_{j=0}^{M} a_j(x) h^j + O(h^{M+1}) \right),$$

quand $h \to 0$, *où* $a_j(x)$ *sont des extentions du symbole* $a(x,h)$, *et* a_0 *est elleptique .*

3. *Dans* $\left\{(Nk)^{2/3} < dist(x, \ddot{O}) < 2(Nk)^{2/3}\right\} \cap \omega^+(Nk, (1/2)(Nk)^{2/3})$, *pour tout* L *assez large, il éxiste* $C_L^{'} > 0$ *et* $\delta_L > 0$ *indépendant de* N *tel que*

$$w_N(x,h) = h^{-n/4} e^{(S+\widetilde{\phi}(x))/h} \left(\sum_{j=0}^{L+\left[Nk/C_L^{'}h\right]} \tilde{a}_j(x) h^j + O(h^{\delta_L N} + h^L) \right),$$

quand $h \to 0$, *avec* $\tilde{a}_j$ *(indépendant de* h *) de terme,*

$$\tilde{a}_j(x) = (dist(x, \dot{C}))^{-3j/2-1/4}\widetilde{\beta}_j(x, dist(x, \dot{C})),$$

où $\widetilde{\beta}_j$ *est lyce prés de* $\Gamma \times \{0\}$ *pour tout* j, *et en particulier* $\widetilde{\beta}_0$ *est elleptique prés de* $\Gamma \times \{0\}$.

Théorème 4.0.1 ([3]) *Sous les hypothèses* $(A_1)-(A_3)$. *Alors il existe une unique résonance* $\rho(h)$ *de* P *tel que*

$$h^{-1}\left|\rho(h) - \lambda_D(h)\right| \to 0 \text{ quand } h \to 0_+,$$

elle vérifie

$$|\lambda_D(h) - \rho(h)| = \mathcal{O}(e^{-(2S-\epsilon(\eta)/h}).$$

Notons par $u(x,h)$ *l'état résonant ; on a :*

$$|u_D(x,h) - u(x,h)| = \mathcal{O}(e^{-(2S-d(x,x)-\epsilon(\eta))/h}),$$

uniformément dans $\overline{B_d(x_0, S-\eta)}$, *où* $\epsilon(\eta) \to 0$ *quand* $\eta \to 0$, *et pour tout compact* $K \subset \mathbb{R}^n$, *il existe* $N_K \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\left\|e^{s(x)/h}u(x,h)\right\|_{H^1(K)} = \mathcal{O}(h^{-N_K}),$$

uniformément quand $h \to 0$,*où*

$$s(x) = \begin{cases} d(x_0,x) & si \quad x \in B_d(x_0,S) \\ S & \quad\quad ailleur \end{cases} .$$

4.1 Comparaison dans l'île

Dans cette partie on cherche une estimation de $u - w_{CN}$ dans l'île.

Théorème 4.1.1 *Il existe* $N_2 \in \mathbb{Z}$ *et* $C > 0$, *tel que pour tout* $N > 0$, *on a,*

$$\|u(x,h) - w_{CN}(x,h)\|_{H^1(\Omega(-(N\ k)^{2/3},0))} = \mathcal{O}(h^{-N_2}e^{-S/h}),$$

uniformément quand $h \to 0$.

Preuve. Celon le théorème (4.0.1), on a $\forall K \subset \mathbb{R}^n$, $\exists N_K \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\|e^{s(x)/h} u(x,h)\right\|_{H^1(K)} = \mathcal{O}(h^{-N_K}),$$

Donc pour $N_K = N_0$ et $K = \widetilde{\Omega}_-$

$$\left\|e^{s(x)/h} u(x,h)\right\|_{H^1(\widetilde{\Omega}_-)} = \mathcal{O}(h^{-N_0})$$

D'aprés la proposition (4.0.3), la solution BKW, satisfait la même estimation :
$\exists N_0$ tel que

$$\left\|e^{s(x)/h} w_{CN}(x,h)\right\|_{H^1(\widetilde{\Omega}_-)} = \mathcal{O}(h^{-N_0}),$$

En passant par la différence on a

$$\left\|e^{s(x)/h}(u(x,h) - e^{s(x)/h} w_{CN}(x,h))\right\|_{H^1(\widetilde{\Omega}_-)} = \mathcal{O}(h^{-N_0}),$$

donc

$$\left\|e^{s(x)}(u(x,h) - w_{CN}(x,h))\right\|_{H^1(\widetilde{\Omega}_-)} = \mathcal{O}(h^{-N_0}),$$

alors

$$\|u(x,h) - w_{CN}(x,h)\|_{H^1(\widetilde{\Omega}_-)} = \mathcal{O}(h^{-N_0} e^{-s(x)/h}),$$

puisque $\widetilde{\Omega}_- \cap \{d(x_0,x) \geq S - 2k\} \subset \widetilde{\Omega}_-$; alors

$$\|u(x,h) - w_{CN}(x,h)\|_{H^1(\widetilde{\Omega}_- \cap \{d(x_0,x) \geq S-2k)} = \mathcal{O}(h^{-N_0'} e^{-S/h}),$$

pour une autre constante N_0'. Maintenant, on pose ;

$$\Omega_1 = \Omega_1(h) = B_d(x_0, S-k) \cap \widetilde{\Omega}_-.$$

Tout point de Ω_1 peut être connu à x_0 par une géodésique lyce minimale (distance d'*Agmon*). Les arguments du section 4([3]) montre que la solution BKW $w_{CN}(x,h)$ est bien définie sur Ω_1.

On construit $\chi_h \in C_0^\infty(\Omega_1)$, tel que

$$\begin{cases} \chi_h = 1 & sur\{d(x_0,x) \leq S-2k\} \\ 0 \leq \chi_h \leq 1 & ailleur \end{cases}$$

et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha \chi_h = O(h^{-N_0})$, pour une constante $N_\alpha \geq 0$.

On pose,

$$\widehat{w} := \chi_h(x) w_{CN}(x, h),$$

et, $\forall N \geq 1$ assez large ,

$$\phi_N(x) = \min\ (d(x_0, x) + C_1 N k + k(S - d(x_0, x))^{1/3},\ S + (1 - k^{1/3})(S - d(x_0, x))).$$

sur $\Omega(-(Nk)^{2/3}, 0)$, par (**??**) on a $d(x_0, x) \geq S - C_1 N k$. Alors $\phi_N(x) \geq S$. □

Lemme 4.1.1 *Il existe $N_0 \geq 0$ tel que, pour tout $N \geq 1$,*

$$\left\| e^{\phi_N/h}(\chi_h u - \widehat{w}) \right\|_{H^1(\Omega_1)} = \mathcal{O}(h^{-N_0}),$$

Preuve. En utilisant l'estimation d'*Agmon (voir lemme 8.2 dans Aprendix),et en remarquant que $\phi_N \leq d(x_0, x) + (C_1 N + S^{1/3})k$*, on a uniformément dans Ω_1

$$\begin{aligned} (P - (h))\widehat{w} &= (P - \rho(h))\chi_h w_{CN}, \\ &= (P\chi_h - \rho(h)\chi_h w_{CN}, \\ &= (P\chi_h - \chi_h P + \chi_h P - \rho(h)\chi_h) w_{CN}. \end{aligned}$$

Et comme

$$[P, \chi_h] = P\chi_h - \chi_h P.$$

□

Alors

$$\begin{aligned} P - (\rho(h))\widehat{w} &= [P, \chi_h]\, w_{CN} + \chi_h (P - \rho(h)) w_{CN} \\ &= [P, \chi_h]\, w_{CN} + \mathcal{O}(h^{-\delta CN} e^{-d(x_0,x)/h}) \\ &= -2h^2 (\nabla \chi_h)(\nabla w_{CN}) - h^2 (\Delta \chi_h) w_{CN} + \mathcal{O}(h^{\delta CN} e^{-d(x_0,x)/h}) \\ &= O(1_{Supp \nabla \chi_h} h^{-M_1} e^{-S/h}) + \mathcal{O}(h^{\delta CN - C_1 N - S^{1:3}} e^{-\phi_N/h}), \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

pour une autre constante $M_1 \geq 0$. On sait que

$$\phi_N \leq d(x, x) + (C_1 N + S^{1/3})k),$$

uniformément dans Ω_1,et en utilisant l'estimation d'*Agmon*, ainsi que ((2.7)([3]) ;

$$\left\| e^{\phi_N/h}(P - \rho(x)\chi_h \right\|_{L^2} = \left\| e^{\phi_N/h}\, [P, \chi_h]\, u \right\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^{-M_1'} e^{(F_N - S)/h}) \tag{4.1.2}$$

pour une constante $M_1' \geq 0$, et avec : $F_N := \sup\limits_{Supp \nabla\chi_h} \phi_N$.

Puisque $S - d(x_0, x) \leq 2k$ sur $Supp\ \nabla\chi_h$, on a $F_N \leq S + 2(1 - k^{1/3})k \leq S + 2k$, et d'aprés (4.1.2),on déduit

$$\left\| e^{\phi_N/h}(P - \rho(h))\chi_h u \right\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^{-M_1'-2}) \tag{4.1.3}$$

Posons,

$$u_h' = \chi_h u - \widehat{w},$$

et choisissons C tel que $\delta C \geq C_1$, on obtient de (4.1.1)-(4.1.3)

$$\left\| e^{\phi_N/h}(P - \rho(h))u_h' \right\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^{-M_2}), \tag{4.1.4}$$

pour une constante $M_2 \geq 0$, indépendante de N.

Soient

$$\Omega_1^- = \Omega_1 \cap \{d(x_0, x) + C_1 k + k(S - d(x_0, x))^{1/3} < S + (1 - k^{1/3})(S - d(x_0, x))\},$$

et

$$\Omega_1^+ = \Omega_1 \cap \{d(x_0, x) + C_1 k + k(S - d(x_0, x))^{1/3} > S + (1 - k^{1/3})(S - d(x_0, x))\}.$$

On a d'aprés la définition de $\phi_N(x)$:

$$\begin{cases} \phi_N(x) = d(x_0, x) + C_1 N k + k(S - d(x_0, x))^{1/3} & \text{sur } \Omega_1^- \\ \phi_N(x) = S + (1 - k^{1/3})(S - d(x_0, x)) & \text{sur } \Omega_1^+ \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \nabla\phi_N(x) = \left(1 - \frac{k}{3(S - d(x,x))^{2/3}}\right) \nabla d(x_0, x) & \text{sur } \Omega_1^- \\ \nabla\phi_N(x) = -(1 - k^{1/3})\nabla d(x_0, x) & \text{sur } \Omega_1^+ \end{cases}$$

Puisque on a $k(S - d(x_0, x))^{-2/3} \leq k \ll 1$, pour tout h suffisamment petit et en utilisant l'estimation d'*Agmon* alors : sur Ω_1^- on a

$$\begin{aligned} V - \operatorname{Re}\rho - |\nabla\phi_N|^2 &= V - \operatorname{Re}\rho - \left(1 - \frac{k}{3(S - d(x_0, x))^{2/3}}\right)^2 |\nabla d(x_0, x)|^2 \\ &\geq V - \operatorname{Re}\rho - \frac{k}{3(S\_d(x_0, x))^{2/3}}(V - E_0), \\ &\geq V - \operatorname{Re}\rho - \frac{k}{3(S\_d(x_0, x))^{2/3}}(V - E_0) + E_0 + E_0, \\ &\geq \frac{k}{3(S\_d(x_0, x))^{2/3}}(V - E_0) - (\operatorname{Re}\rho - E_0), \end{aligned}$$

et sur Ω_1^+ on a

$$\begin{aligned}
V - \operatorname{Re}\rho - |\nabla\phi_N|^2 &= V - \operatorname{Re}\rho - \left(1 - k^{1/3}\right)^2 |\nabla d(x_0, x)|^2 \\
&\geq V - \operatorname{Re}\rho - (1 - k^{1/3})(V - E_0) \\
&\geq V - \operatorname{Re}\rho - (1 - k^{1/3})(V - E_0) + E_0 - E_0 \\
&\geq k^{1/3}(V - E_0) - (\operatorname{Re}\rho - E_0)
\end{aligned}$$

$\nabla V \neq 0$ sur $\partial\ddot{O}$, la courbe *Hamiltonienne* de $q = \xi^2 - V(x)$ commençant par $\partial\ddot{O} \times \{0\}$, montre que :

$$\forall x \in \ddot{O} \cap \partial\ddot{O} \quad d(x, \partial\ddot{O}) = \mathcal{O}((V(x) - E_0)^{3/2}),$$

et par l'énigalitée triangulaire on déduit,

$$d(x_0, x) \geq S - C_2(V(x) - E_0)^{2/3}, \tag{4.1.5}$$

où $C_2 > 0$ et l'inégalitée est valide sur tout $\ddot{O}$ a l'exception de certains petits voisinages U_0 de x_0 (puisque $V - E_0 > 0$ sur $\ddot{O}\diagdown\{x_0\}$).

En particulier, $U_0 \subset \Omega_1^+$, et (4.1.5) montre que $V(x) - E_0 \geq (k/C_2)^{2/3}$ sur Ω_1^+

On a aussi,

$$|\rho - E_0| \leq C_3 h \; C_3 > 0.$$

Donc sur Ω_1^+ on obtient ;

$$V - \operatorname{Re}\rho - |\nabla\phi_N|^2 \geq \frac{k^{1/3}}{(kC_2)^{2/3}} - C_3 h \geq \frac{k}{C_2^{2/3}} - C_3 h \geq \frac{k}{2C_2^{2/3}}, \tag{4.1.6}$$

pour $h > 0$ assez petit.

De plus par (4.1.5), sur $\ddot{O}\backslash U_0$, on a aussi ;

$$\begin{aligned}
\frac{(V - E_0)^{3/2}}{S - d(x_0, xS)} &\geq \frac{1}{C_2} \\
\frac{V - E_0}{3(S - d(x_0, xS)^{2/3}} &\geq \frac{1}{3C_2^{2/3}},
\end{aligned}$$

et si $x \in \Omega_1^- \backslash U_0$,

$$V - \operatorname{Re}\rho - |\nabla\phi_N|^2 \geq \frac{k}{3C_2^{2/3}} - C_3 h \geq \frac{k}{4C_2^{2/3}}, \tag{4.1.7}$$

pour $h > 0$ assez petit .

D'autre part ,par ((2.5) ([3]) et le résultat de ([8]) on sait que $w_{CN}(x,h)$ est une bonne approximation de $u(x,h)$ sur U_0, alors,

$$\left\| e^{d(x_0,x)/h} u_h^{'} \right\|_{L^2(U_0)} = \mathcal{O}(h^\infty),$$

puisque $e^{\phi_N/h} = O(h^{-C_1N\ -S^{1/3}}\ e^{d(x_0,x)/h})$, on déduit,

$$\left\| e^{\phi_N/h} u_h^{'} \right\|_{L^2(U_0)} = \mathcal{O}(h^\infty). \tag{4.1.8}$$

Maintenant ,en appliquant (3.14)([3]) avec $u_h^{'}, \phi_N, \operatorname{Re}\rho$ à la place de v_h, ϕ, λ_h.En utilisant (4.1.4), (4.1.6), (4.1.7) et(**??**) ; on obtient :

$$h^2 \left\| \nabla (e^{\phi_N/h} u_h^{'}) \right\|^2 + k \left\| e^{\phi_N/h} u_h^{'} \right\|^2 = \mathcal{O}(h^\infty + h^{-M_2} \left\| e^{\phi_N/h} u_h^{'} \right\|).$$

En particulier,

$$\left\| e^{\phi_N/h} u_h^{'} \right\| = \mathcal{O}(h^{-(M_2+1)}),$$

et aussi,

$$\left\| \nabla (e^{\phi_N/h} u_h^{'}) \right\| = \mathcal{O}(h^{-(M_2+3/2)}).$$

4.2 Comparaison dans le bord de l'île

Maintenant on cherche l'estimation globale de $u - w_{CN}$ dans

$$U_N = \left\{ x; dist\left(x, \partial \ddot{O}\right) < 2\,(Nk)^{2/3} \right\}$$

un petit voisinage du bord de l'île, où N est indépendant de h.

Théorème 4.2.1 *Il existe $N_2 \in \mathbb{Z}$ et $C > 0$ tel que, pour tout N,on a*

$$\|u - w_{CN}\|_{H^1(U_N)} = \mathcal{O}\left(h^{-N_2} e^{-S/h}\right).$$

Preuve. Soit

$$U_{N,1} = U_N \cap \Omega\,(Nk, t_0)\,,$$

avec $t_0 > 0$ assez petit .

Donc on a

$$U_{N,1} \subset \bigcup_{x^1 \in \Gamma} \Omega^1_{x^1}\left((-Nk)^{2/3}, (Nk)^{2/3}\right),$$

où $\Omega^1_{x^1}\left((-Nk)^{2/3}, (Nk)^{2/3}\right)$ est le voisinage de chaque $x^1 \in \Gamma$ définie par $((4.24)([3]))$.
D'aprés le théorème $(4.1.1), ((2,7)([3]))$, il existe N_2 tel que

$$\|u - w_{CN}\|_{H^1(U_N)} = \mathcal{O}(h^{-N_2} e^{-S/h}).$$

Et puisque $(U_N \backslash U_{N,1}) \cap B_d(x_0, S) = \emptyset$, et d'aprés $((2.7)([3]))$ alors

$$\|u\|_{H^1\left(U_N \backslash U_{N,1}\right)} = \mathcal{O}(h^{-N_2} e^{-S/h}),$$

et comme $w_{CN} = 0$ dans $U_N \backslash U_{N,1}$,on obtient

$$\|u - w_{CN}\|_{H^1(U_n)} = \mathcal{O}(h^{-N_2} e^{-S/h}).$$

$\square$

CONCLUSION

Dans ce travail nous avons trouvé une estimation de la différence entre la solution BKW et l'état résonant u dans une île non analytique pour l'opérateur de *Schrödinger*

$$P = -h^2\Delta + V$$

définit dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, s'aidant d'un article de([3]).Cette estimation a été étudiée dans un voisinage du point de type 1 dans l'île, et ainsi dans un voisinage dans le bord de l'île.

Bibliographie

[1] Y. Colen de Verdière. *Méthodes semi-classiques et Théorie Spectrale.* Institut Fourier, UMR 5582(Université Grenoble 1−CNRS), BP 74,F-38402-St Martin d'Hères Cedex.

[2] M. Dimassi, J. Sjöstrand, *Spectral Asymptotics in the Semi-classical limit*, London Math. Soc. Lecteur Note Series 268, Cambridge, University Press (1999).

[3] S. Fujiié, A. Lahmar-Benbernou and A. Martinez,*Width of shape resonances for non globally analytic potentiels.* J. Math. Soc. Japan. Vol. 63, No. 1(2011) pp.$1-78$.

[4] C. Gérard and J.Sjöstrand. *Semiclassical resonances generated by a closed trajectory of hyperbolic type*, Comm. Math. Phys.,$108(1987), 391-421$.

[5] V. Guillemin and S. Sternberg, *Geometric Asymptotics.* Amer. Math. Sos. Survey, 14(1977).

[6] E. Harrel, *General lower bounds for resonances in one dimension*, Comm. Math. Phys., $86(1982), 221-225$.

[7] B. Helffer and A. Martinez, *Comparaison entre les diverses notions de resonances*, Helv. Phys. Acta, $60(1987), 992-1003$.

[8] B. Helffer and J.Sjöstrand, *Effet tunnel pour l'équation de Shrödinger avec champ magnétique,*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa.(1987).p.625-657.

[9] B. Helffer and J.Sjöstrand, *Résonances en limite semiclassique*, Bull. Soc. Math. France. Mémoire,$24/25$(1986).

[10] W. Hunziker, *Distortion analyticity and molecular resonance curves*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Theor., $45(1986)339-358$.

[11] A. Martinez, *Estimations de l'effet tunnel pour le double puits II-Etats hautement excités*, Bull. Soc. Math. France, 116(1988), $199-229$.

[12] A. Martinez, *Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*, Springer, New-York, (2002).

[13] A. Martinez, *Resonance Free Domains for Non Globally Analytic Potentials*, Ann. Henri Poincaré, 4(2002), $739-756$.

[14] A. Melin and J. Sjöstrand, *Fourier integral operators with complex valued phse functions*, Lecture Notes in Math., 459, Springer, 1974, pp. $120-223$.

[15] A.Mumier[1],*Espaces de Sobolev et Introduction aux Equations aux Dérivées Partielles,*Institut Elie Cartan, $2007-2008$.

[16] A. Lahmar-Benbernou and A. Martinez, *On Helffer-Sjöstrand's theory of resonances*, Int.Math. Res. Notices, 13(2001), $697-717$.

[17] A. Lahmar-Benbernou, C. Guendouz, *Etude Microlocale des resonances.* Mémoire de Magistère en Mathématiques. Université Mostaganem, (2008).

[18] A. Lahmar-Benbernou,J.Ben Sikkadour,*Etude de la méthode BKW* .Mémoire de Magistère en Mathématiques. Université de Mostaganem, (2003).

[19] J- Sjöstrand, *Semiclassical resonances generated by nondegenerate critical points, Pseudodifferential operators*(Oberwolfach, 1986), Lecture Notes in Math., 1256. Springer, Berlin, 1987, pp. $402-429$.

[20] J- Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque, 95(1982).

[21] T. Ramond, *Analyse semiclassique, Résonances et controle de l'équation de Schrödinger* . Prépublication (2005).

[22] G. Vodev, *Exponential bounds of the resolvent for a class of noncompactly supported perturbations of the Laplacian*, Math. Res. Letters, 7(2000), $287-298$.

[23] C Zuily. *Eléments de Distributions et D'équations aux Dérivées Partielles.* Dunod, Paris, 2002.