République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

Université Abd Elhamid Ben Badis Mostaganem
Faculté des Sciences et de l'Informatique

Département de Mathématiques et Informatique

THESE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de **DOCTORAT** en Mathématiques

Réalisée par: BEZZIOU Mohamed

Thème:

Inégalités au Sens de Riemann-Liouville et de Hadamard et Applications aux Equations Fractionnaires

Soutenue Publiquement le : 21-06-2020

Devant le jury composé de :

Présidente	:	HAMANI Samira	Prof. Université de Mostaganem
Examinateur	:	CHEGGAG Mustapha	Prof. Ecole Nationale Polytechnique d'Oran
Examinateur	:	SENOUCI Abdelkader	Prof. Université Ibn-Khaldoun .Tiaret
Encadreur	:	DAHMANI Zoubir	Prof. Université de Mostaganem

ANNÉE UNIVERSITAIRE: 2019-2020

Remerciement

Louange à **ALLAH** qui m'a donné le courage et la volonté pour la réalisation de ce modeste travail.

En premier lieu, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Monsieur **Zoubir DAHMANI**, Professeur à l'université ABDELHAMID BEN BADIS de Mostaganem, pour la confiance qu'il m'a accordée en me permettant de réaliser cette thèse sous sa direction. J'avoue surtout qu'il n'a pas cesser d'être présent pour une continuité solide de mes travaux de recherches et pour ses suggestions et propositions très utiles pour l'amélioration de ce travail, par son soutien, son suivi et l'intêret apportés à cette thèse.

Je remercie aussi Madame **Samira HAMANI BELARBI**, Professeur à l'université ABDELHAMID BEN BADIS de Mostaganem, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également Monsieur **Mustapha CHEGGAG**, Professeur à l'école NATIONALE POLYTECHNIQUE d'Oran et Monsieur **Abdelkader SENOUCI**, Professeur à l'université IBN-KHALDOUN. Tiaret, pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et leurs remarques judicieuses.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous les membres de ma famille et amis qui m'ont toujours encouragé au cours de la réalisation de cette thèse.

Merci

Résumé

L'objectif de cette thèse est de présenter des résultats sur les inégalités intégrales au sens de Riemann-Liouville et de Hadamard, avec leurs applications aux équations différentielles (EDFs) fractionnaires.

On établit des généralisations vis à vis la théorie de l'intégration pour certaines classes d'opérateurs fractionnaires mixtes d'ordre couplé de type Hadamard et Riemann-Liouville par rapport à une fonction h croissante et positive sur $(a, b]$.. Certianes applications sont aussi données.

On utilise l'opérateur intégral de Riemann-Liouville pour établir des nouveaux résultats sur les inégalités de type Chebyshev avec poids. D'autres inégalités d'ordre fractionnaire sont également prouvées et certains résultats classiques de la litterature se déduisent comme des cas particuliers.

Dans ce travail, on s'intéresse aussi à l'application des inégalités intégrales fractionnaires pour étudier des problèmes aux limites d'équations différentielles de type Hadamard. Ainsi, on répond, d'une part, à la question d'existence de solutions en utilisant le lemme de Schaefer, et d'autre part à la question d'unicité de la solution par le théorème du point fixe de Banach "“associé à l'inégalité de Hölder"”.

Abstract

The objective of this thesis is to present some results on integral inequalities in the sense of Riemann-Liouville and Hadamard, with some applications to fractionnal differential equations (FDEs, for short).

We establish new generalizations of integration for certain classes of mixed fractional operators of coupled order of Hadamard and Riemann-Liouville type with respect to an increasing and positive function h on (a, b] and applications.

We use the Riemann-Liouville integral fractional operator to establish new results on weighted inequalities of Chebyshev type. Other fractional inequalities are also presented, and then, certain classical results can be deduced as special cases.

In this work, we are also interested in the application of fractional integral inequalities to study some boundary value problems of differential equations of Hadamard type. Thus, we answer, on one hand, the question of the existence of solutions using Schaefer lemma, and on the other hand, the question of uniqueness of solution by the Banach fixed point theorem associated with Hölder inequality.

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو تقديم نتائج تتعلق بتطبيق المتراجحات التكاملية الكسرية بالمفهومين الخاصين بريمان- ليوفيل و هدامار على المعادلات التفاضلية الكسرية.

قدمنا تعميمات جديدة فيما يتعلق بنظرية التكامل الخاص بالمؤثرات التكاملية المختلطة ذات الدرجة المزدوجة من نوع هدامار و ريمان ليوفيل و المرتبطة بالدالة h الموجبة و المتزايدة على المجال $[a, b]$ ذات مشتقة مستمرة مع تطبيقاتهما.

ثانياً ، قمنا أيضاً بتعميم بعض المتراجحات التكاملية الكسرية باستخدام دالة شيبايشيف الموزونة.

و عملنا على تقديم تطبيقات باستعمال المتراجحات التكاملية الكسرية لدراسة جملة المعادلات التفاضلية من نوع هدامار في فضاء باناخ و ذلك للاجابة على مسالة وجود و وحدانية الحل المستنبط حسب نظريتي شيفار و النقطة الثابتة لباناخ المرفقة بمتراجحة هولدر.

Table des matières

Introduction

Le domaine du calcul fractionnaire a récemment évolué pour devenir un sujet de recherche intéressant. En fait, les dérivées et les intégrales fractionnaires constituent un outil puissant pour étudier de nombreux domaines de recherche en sciences fondamentales et celles de l'ingénieur, tels que les systèmes dynamiques, la théorie du contrôle, l'aérodynamique, l'économie, la visco-élasticité, etc ... [10, 46, 49, 50, 58].

La théorie des inégalités intégrales est un outil important car elle intervient dans l'étude des équations différentielles fractionnaires. On cite la théorie d'existence de solutions pour les modèles différentiels fractionnaires ; elle a en effet attiré l'attention de nombreux chercheurs. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [1, 4, 5, 9, 23, 60, 75, 78].

Une autre approche de la dérivée fractionnaire de type Hadamard (1892, voir [38]) est aussi présente dans nos travaux car elle est importante en applications. Cette approche diffère des approches de Riemann-Liouville et de Caputo car la définition de la dérivée de Hadamard contient une fonction logarithmique voir [44, 45].

En 1993 [64] , Samko, Kilbas et Marichev ont introduit l'intégration fractionnaire par rapport à une autre fonction h donnée par :

$$J_{a,h}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x [h(x) - h(t)]^{\alpha-1} h'(t) f(t) dt.$$

Autre classe d'opérateurs fractionnaires mixtes d'ordre couplé de type Riemann-Liouville donnée par :

$$\left(J_{(a,a)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} f \right)(x, y) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{2} \Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \int_a^y (x - t)^{\alpha_1 - 1} (y - r)^{\alpha_2 - 1} f(t, r) dt dr$$

a été introduite dans le travail [64]. (Puis, dans [17] , on verra que Bezziou et al. ont généralisé cet opérateur en remplaçant le noyau de l'intégrale par une autre fonction...)

En 2011, Katugampola [43] a donné la généralisation suivante :

$$\int_a^x t_1^s dt_1 \int_a^{t_1} t_2^s dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} t_n^s f(t_n) dt_n = \frac{(s+1)^{1-n}}{\Gamma(n)} \int_a^x \left[x^{s+1} - t^{s+1} \right]^{n-1} t^s f(t) dt, \; n \in \mathbb{N}^* \; .$$

Pour $\alpha > 0$ et $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, l'intégrale fractionnaire s—Riemann-Liouville, d'après [43] est donnée par :

$${}^s J_a^{\alpha} f(x) = \frac{(s+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left[x^{s+1} - t^{s+1} \right]^{\alpha-1} t^s f(t) dt.$$

Dans [55], Mubeen et Habibullah ont introduit l'intégrale fractionnelle k–Riemann-Liouville suivante :

$$ {}_kJ_a^{\alpha}f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x [x-t]^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t)\,dt,\ \alpha>0, x>a $$

où $k>0$ et $\Gamma_k(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^k}{k}} u^{\alpha-1}du,\ \alpha>0.$

Récemment, Sarikaya et al. [67] ont élaboré une autre approche pour l'intégration fractionnaire de (k,s)–Riemann-Liouville. La définition associée est donnée par :

$$ {}_k^sJ_a^{\alpha}f(x) = \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x \left(x^{s+1}-t^{s+1}\right)^{\frac{\alpha}{k}-1} t^s f(t)\,dt. $$

De nombreux chercheurs se sont intéressés à la théorie des inégalités fractionnaires et à leurs applications. Pour plus de détails, on se réfère à [6, 8, 11, 24, 27, 29, 31, 53, 61, 65, 66]. En se basant sur les résultats mentionnés au dessus, on va présenter quelques généralisations des inégalités fractionnaires.

D'abord, on considère la fonctionnelle de Chebyshev :

$$ T(f,g) := \frac{1}{b-a}\int_a^b (fg)(x)dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx. $$

Dans [59], l'auteur a prouvé que $T(f,g)\geq 0$ pour certaines conditions et que si f est une fonction bornée par des nombres réels m et M et g est une fonction absolument continue bornée avec $g'\in L^{\infty}([a,b])$, alors on a l'inégalité suivante :

$$ |T(f,g)| \leq \frac{b-a}{8}(M-m)\|g'\|_{\infty}\ . $$

Récemment, Cerone et Dragomir [21] ont prouvé que si f et g sont absolument continues sur $[a,b]$ avec $f',g'\in L^{\infty}([a,b])$, alors l'inégalité

$$ |T(f,g)| \leq \frac{1}{12}\|f'\|_{\infty}\|g'\|_{\infty}(b-a)^2 $$

est vérifiée.

K. M. Awan et al. [8] ont prouvé un résultat important : Si ϕ est une fonction absolument continue sur $[a,b]$ et p est une fonction positive et intégrable sur $[a,b]$, avec $(\phi')^2\in L^1([a,b])$, alors on a l'inégalité fractionnaire suivante :

$$ T(\phi,\phi,p) \leq \frac{1}{P^2(b)}\int_a^b \tilde{P}(x)(\phi')^2(x)dx $$

où $P(x) = \int_a^x p(t)dt$ et $\tilde{P}(x) = P(x)\int_a^b tp(t)dt - P(b)\int_a^x tp(t)dt$. Pour plus de détails, on cite les travaux [25, 26, 29, 31, 34, 51, 71].

L'objectif principal de cette thèse est d'établir certiaines inégalités avec poids de type Chebyshev, en utilisant les intégrales de Riemann-Liouville. Ainsi, d'autres classes des inégalités de Chebyshev sont également obtenues.

Donc de nouveaux, on revient à présenter quelques travaux de recherche qui ont motivé la partie de notre travail dans sa dimension différentielle. On commence par [3] où les auteurs ont étudié l'existence et l'unicité de solutions pour le système couplé avec des conditions aux limites :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) = f(t,u(t),v(t)), \quad t \in (1,e), \quad 1 < \alpha \leq 2, \\ \\ D^{\beta}v(t) = g(t,u(t),v(t)), \quad t \in (1,e), \quad 1 < \beta \leq 2, \\ \\ u(1) = 0, u(e) = I^{\gamma}u(\sigma_1), v(1) = 0, v(e) = I^{\gamma}u(\sigma_2) \end{cases}$$

où $\gamma > 0, 1 < \sigma_1 < e, 1 < \sigma_2 < e$, $D^{(\cdot)}$ et I^{γ} désignent la dérivée et l'intégrale fractionnaire de Hadamard, respectivement. Les fonctions $f, g : [1,e]\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont données.

L'auteur W. Yang [76], a étudié les solutions positives pour le système singulier fractionnaire de Hadamard par l'utilisation du théorème de point fixe de Guo-Krasnoselskii suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) + \lambda f(t,u(t),v(t)) = 0, \ t \in (1,e), \lambda > 0 \\ \\ D^{\beta}v(t) + \lambda g(t,u(t),v(t)) = 0, \ t \in (1,e), \lambda > 0 \\ \\ u^{(j)}(1) = v^{(j)}(1) = 0, \quad 0 \leq j \leq n-2, \\ \\ u(e) = av(\xi), \quad v(e) = bu(\eta), \quad \xi, \eta \in (1,e) \end{cases}$$

où λ, a, b sont des paramètres avec $0 < (\log \eta)^{\alpha-1}(\log \xi)^{\beta-1} < 1, \alpha, \beta \in [n-1,n]$ pour $n \geq 3$, D^{α}, D^{β} sont les dérivées fractionnaires de Hadamard et f, g sont des fonctions continues.

Au moyen de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et du théorème de point fixe de Krasnoselskii, W. Yang [77] a étudié l'existence des solutions positives pour les équations différentielles de Hadamard suivantes :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) + \lambda f(t,u(t),v(t)) = 0, \ t \in (1,e), \lambda > 0 \\ \\ D^{\beta}v(t) + \lambda g(t,u(t),v(t)) = 0, \ t \in (1,e), \lambda > 0 \\ \\ u^{(j)}(1) = v^{(j)}(1) = 0, \quad 0 \leq j \leq n-2, \\ \\ u(e) = \mu \int_1^e v(s)\frac{ds}{s}, \ v(e) = \nu \int_1^e u(s)\frac{ds}{s} \end{cases}$$

où λ, μ, ν sont des constantes réelles telles que $0 < \mu < \beta$, $0 < \nu < \alpha$. Les paramètres $\alpha, \beta \in (n-1,n]$ sont deux nombres réels avec $n \geq 3$. Les fonctions f et g sont des fonctions continues changeant de signe. Motivés par les travaux mentionnés ci-dessus, on étudie dans cette thèse un système intégro-differentiel couplé de type Hadamard suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) = f(t,u(t),v(t),D^{p}v(t)),\ \ t\in[1,T], T>1, 1<\alpha\leq 2, \\ \\ D^{\beta}v(t) = g(t,u(t),v(t),D^{q}u(t)),\ \ t\in[1,T], T>1, 1<\beta\leq 2, \\ \\ u(1)=0, D^{\sigma_1}u(T) = I^{\sigma_1}(u(T)-v(\xi)), \sigma_1>0, 1<\xi<T, \\ \\ v(1)=0, D^{\sigma_2}v(T) = I^{\sigma_2}(v(T)-u(\xi)), \sigma_2>0, 1<\xi<T \end{cases}$$

où $f, g \in C([1,T]\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

Ce manuscrit se compose de quatre chapitres

Dans le premier chapitre, on rappele les définitions et les propriétés de certaines fonctions spéciales. On présente aussi des notions correspondentes à l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaires au sens de R-L et Hadamard ainsi que quelques théorèmes de point fixe (qui seront données à la fin de ce chapitre).

Le deuxième chapitre est réservé à nos premiers résultats, qui concernent la généralisation des opérateurs intégraux fractionnaires mixtes d'ordre couplé de type Hadamard et de type Riemann-Liouville, avec aussi des applications.

Le troisième chapitre est consacré à l'application des résultats obtenus dans le papier [15] pour établir quelques inégalités fractionnaires.

Au quatrième chapitre, on exposera un travail d'un système couplé d' équations différentielles fractionnaires au sens de Hadamard. En effet, après avoir donné la solution générale, on utilise le théorème de point fixe de Schaefer et le théorème de point fixe du Banach associé à l'inégalité de Hölder pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution du système fractionnaire.

Cette thèse s'achève par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Préliminaires Sur le Calcul Fractionnaire

Dans ce chapitre, on commence par donner les éléments nécessaires et quelques résultats qui seront utiles dans la suite de notre travail. Les premières sections rassemblent les définitions et les propriétés correspondentes aux deux fonctions Gamma et Bêta d'Euler, aussi aux intégrales et les dérivées d'ordre fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et de Hadamard. Ces rappelles peuvent être retrouvées avec plus de détails dans les références [12, 39, 52, 63, 67]. La dernière section est consacrée à la présentation de quelques théorèmes classiques de point fixe et aux inégalités de type Hölder [30, 33, 70].

1.1 Intégration d'Ordre Arbitraire

1.1.1 Notations

On note

$\mathbb{N}$: Ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{N}^* : \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.

$\|.\|_\infty$: Norme infinie, $\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)|; t \in [a, b]\}$.

$\|.\|_E$: Norme de l'espace de Banach E.

$C([a, b], \mathbb{R})$: Espace des fonctions continues sur $[a, b]$

$AC([a, b], \mathbb{R})$: Espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$.

$AC^n([a, b], \mathbb{R})$: Espace des fonctions dont les dérivées n-èmes sont absolument continues sur

$[a, b]$.

$L^1([a, b], \mathbb{R})$: Espace des fonctions intégrables sur $[a, b]$. i.e $\int_a^b |f(x)|\, dx < \infty$.

$L^{\frac{1}{p}}([1, T], \mathbb{R})$: Espace des fonctions $\frac{1}{p}$ intégrables sur $[1, T]$. i.e $\int_1^T |f(x)|^{\frac{1}{p}} dx < \infty$ $p \in (0, 1)$.

${}_{RL}D_a^\alpha$: La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemenn-Liouville.

${}_{H}D_a^\alpha$: La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Hadamard.

J_a^α : Intégrale fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville.

${}_kJ_a^\alpha$: Intégrale fractionnaire à gauche au sens de $k-$Riemann-Liouville.

${}^sJ_a^\alpha$: Intégrale fractionnaire à gauche au sens de $s-$Riemann-Liouville.

${}_k^sJ_a^\alpha$: Intégrale fractionnaire à gauche au sens de $(k, s)-$Riemann-Liouville.

${}_kJ_{a,h}^\alpha$: Intégrale fractionnaire à gauche au sens de $k-$Riemann-Liouville par rapport à la fonction h.

${}^sJ_{a,h}^\alpha$: Intégrale fractionnaire à gauche au sens de $s-$Riemann-Liouville par rapport à la fonction h.

${}_k^sJ_{a,h}^\alpha$: Intégrale fractionnaire à gauche au sens de $(k, s)-$Riemann-Liouville par rapport à la fonction h.

I_a^α : Intégrale fractionnaire à gauche au sens de Hadamard.

${}_kI_a^\alpha$: Intégrale fractionnaire à gauche au sens de $k-$Hadamard.

${}^sI_a^\alpha$: Intégrale fractionnaire à gauche au sens de $s-$Hadamard.

${}_k^sI_a^\alpha$: Intégrale fractionnaire à gauche au sens de $(k, s)-$Hadamard.

${}_kI_{a,h}^\alpha$: Intégrale fractionnaire à gauche au sens de $k-$Hadamard par rapport à la fonction h.

${}^sI_{a,h}^\alpha$: Intégrale fractionnaire à gauche au sens de $s-$Hadamard par rapport à la fonction h.

${}_k^sI_{a,h}^\alpha$: Intégrale fractionnaire à gauche au sens de $(k, s)-$Hadamard par rapport à la fonction h.

$J_{(a,a)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$: Intégrale fractionnaire mixte à gauche de type Riemann-Liouville d'ordre couplé.

${}_kJ_{(a,a)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$: Intégrale fractionnaire mixte à gauche de type $k-$Riemann-Liouville d'ordre couplé.

${}^sJ_{(a,a)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$: Intégrale fractionnaire mixte à gauche de type $s-$Riemann-Liouville d'ordre couplé.

${}_k^sJ_{(a,a)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$: Intégrale fractionnaire mixte à gauche de type $(k, s)-$Riemann-Liouville d'ordre couplé.

${}_kJ_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$: Intégrale fractionnaire mixte à gauche de type $k-$Riemann-Liouville d'ordre couplé par rapport à la fonction h.

${}^sJ_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$: Intégrale fractionnaire mixte à gauche de type $s-$Riemann-Liouville d'ordre couplé par rapport à la fonction h.

${}_k^sJ_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$: Intégrale fractionnaire mixte à gauche de type $(k, s)-$Riemann-Liouville d'ordre couplé par rapport à la fonction h.

$I_{(a,a)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$: Intégrale fractionnaire mixte à gauche de type Hadamard d'ordre couplé.

${}_kI_{(a,a)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$: Intégrale fractionnaire mixte à gauche de type $k-$Hadamard d'ordre couplé.

${}^sI_{(a,a)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$: Intégrale fractionnaire mixte à gauche de type $s-$Hadamard d'ordre couplé.

${}_k^sI_{(a,a)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$: Intégrale fractionnaire mixte à gauche de type $(k, s)-$Hadamard d'ordre couplé.

${}_{k}I^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}$: Intégrale fractionnaire mixte à gauche de type k—Hadamard d'ordre couplé par rapport à la fonction h.

${}^{s}I^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}$: Intégrale fractionnaire mixte à gauche de type s—Hadamard d'ordre couplé par rapport à la fonction h.

${}^{s}_{k}I^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}$: Intégrale fractionnaire mixte à gauche de type (k,s)—Hadamard d'ordre couplé par rapport à la fonction h.

1.2 Fonctions Spéciales

Dans ce paragraphe, on présente deux fonctions qui sont très utilisées dans l'intégration fractionnaire. Il s'agit de la fonction Gamma et de la fonction Bêta.

1.2.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma est une fonction du calcul fractionnaire qui généralise "'la fonction"' factorielle. Elle est donneé par la définition suivante :

Définition 1.2.1: [63]

La fonction Gamma notée Γ est définie par l'intégale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du, \ \alpha > 0 \tag{1.1}$$

Propriétés Pour tout $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

(i)

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \ , \tag{1.2}$$

(ii)

$$\Gamma(\alpha+n) = \alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)\Gamma(\alpha) \ , \tag{1.3}$$

(iii)

$$\Gamma(n) = (n-1)! \ . \tag{1.4}$$

1.2.2 Fonction Bêta

Définition 1.2.2: [45]

La fonction Bêta est définie par :

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du, \ \alpha > 0, \ \beta > 0 \ . \tag{1.5}$$

Proposition 1.2.1

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\ \forall\alpha,\ \beta;\ \alpha > 0,\ \beta > 0\ . \tag{1.6}$$

1.3 Intégration Fractionnaire

1.3.1 Intégration Fractionnaire au Sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3.1: [11, 45]

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \geq 0$, pour une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\begin{cases} J_a^\alpha [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau;\ t > a,\ \alpha > 0, \\ \\ J_a^0 [f(t)] = f(t). \end{cases} \tag{1.7}$$

Remarque

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction intégrable f sur $[a,b]$ est une généralisation de l'intégrale suivante :

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau,\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.8}$$

Exemple

Considérons la fonction

$$f(t) = (t-a)^\beta,\ t > a,\ \beta > -1. \tag{1.9}$$

En utilisant le changement de variable $x = \frac{\tau - a}{t-a}$ et la définition de la fonction Bêta, on a

$$\begin{aligned} & J_a^\alpha\left[(t-a)^\beta\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a-x(t-a))^{\alpha-1} (x(t-a))^\beta (t-a)\, dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^\beta dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Alors

$$J_a^\alpha\left[(t-a)^\beta\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^\beta\, d\tau. \tag{1.11}$$

Pour $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, l'égalité (1.10) implique

$$J_a^1\left[(t-a)\right] = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3)} (t-a)^2 = \frac{1}{2} (t-a)^2 \tag{1.12}$$

et pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a

$$J_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^\beta\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}+1\right)} (t-a)^{\beta+\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)} (t-a)^{\beta+\frac{1}{2}}. \tag{1.13}$$

1.3.2 Semi-Groupe et Propriété de J_a^α

Théorème 1.3.1: [45, 64]

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $\alpha, \beta > 0$ on a

$$J_a^\alpha\left[J_a^\beta\left[f(t)\right]\right] = J_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right] \tag{1.14}$$

et

$$J_a^\alpha\left[J_a^\beta\left[f(t)\right]\right] = J_a^\beta\left[J_a^\alpha\left[f(t)\right]\right]. \tag{1.15}$$

Preuve.

Par définition, on a

$$\begin{aligned} & J_a^\alpha\left[J_a^\beta\left[f(t)\right]\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} J_a^\beta\left[f(\tau)\right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[(x-\tau)^{\alpha-1} \int_a^\tau (\tau-t)^{\beta-1} f(t)\, dt\right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[f(t) \int_t^x (x-\tau)^{\alpha-1} (\tau-t)^{\beta-1} d\tau\right] dt. \end{aligned} \tag{1.16}$$

On utilise le changement de variable $\rho = \frac{\tau - t}{x-t}$ et par la fonction Bêta, on obtient

$$
\begin{aligned}
&J_a^\alpha\left[J_a^\beta\left[f(t)\right]\right]\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\left[\int_0^1 (x-t-(x-t)\rho)^{\alpha-1}((x-t)\rho)^{\beta-1}(x-t)\,d\rho\right]dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\left[(x-t)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-\rho)^{\alpha-1}\rho^{\beta-1}d\rho\right]dt \qquad (1.17)\\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}f(t)\,dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}f(t)\,dt = J_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right].
\end{aligned}
$$

□

Si $f(x) = x - a$ et $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, alors

$$J_a^\alpha\left[J_a^\beta\left[f(x)\right]\right] = J_a^\alpha\left[J_a^\beta\left[(x-a)\right]\right] = J_a^\alpha\left[\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\beta+2)}(x-a)^{\beta+1}\right] = \frac{1}{2}(x-a)^2 \ . \qquad (1.18)$$

On a aussi

$$J_a^{\alpha+\beta}\left[f(x)\right] = J_a^1\left[(x-a)\right] = \int_a^x (t-a)\,dt = \frac{1}{2}(x-a)^2 \ . \qquad (1.19)$$

1.3.3 Intégration Fractionnaire au Sens de Hadamard

Définition 1.3.2: [45, 64]

L'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha \geq 0$, pour une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ avec $a > 0$ est définie par :

$$\begin{cases} I_a^\alpha\left[f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \log^{\alpha-1}\left(\frac{t}{\tau}\right) f(\tau)\frac{d\tau}{\tau};\ t > a,\ \alpha > 0, \\ I_a^0\left[f(t)\right] = f(t). \end{cases} \qquad (1.20)$$

Exemple

Soit f la fonction définie par :

$$f(t) = \log^\beta\left(\frac{t}{a}\right),\ \beta > -1 \ . \qquad (1.21)$$

Pour calculer $I_a^\alpha f(t)$, on utilise la définition 1.3.2, on obtient

$$I_a^\alpha \log^\beta\left(\frac{t}{a}\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \log^{\alpha-1}\left(\frac{t}{\tau}\right)\log^\beta\left(\frac{\tau}{a}\right)\frac{d\tau}{\tau}\ . \tag{1.22}$$

Par le changement de variable $x=\frac{\log\tau-\log a}{\log t-\log a}$ et la fonction Bêta il résulte que

$$\begin{aligned}
&I_a^\alpha \log^\beta\left(\frac{t}{a}\right)\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left[\log\left(\frac{t}{a}\right)-x\log\left(\frac{t}{a}\right)\right]^{\alpha-1}x\log^\beta\left(\frac{t}{a}\right)\log\left(\frac{t}{a}\right)dx\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\log^{\alpha+\beta}\left(\frac{t}{a}\right)\int_0^1(1-x)^{\alpha-1}x^\beta dx\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\log^{\alpha+\beta}\left(\frac{t}{a}\right)B(\alpha,\beta+1)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\log^{\alpha+\beta}\left(\frac{t}{a}\right)\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\\
&=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\log^{\alpha+\beta}\left(\frac{t}{a}\right).
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Pour $\alpha=1$ et $\beta=1$, d'après la formule (1.23), on obtient

$$I_a^1\log\left(\frac{t}{a}\right)=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3)}\log^2\left(\frac{t}{a}\right)=\frac{1}{2}\log^2\left(\frac{t}{a}\right)\ . \tag{1.24}$$

Si $\alpha=\frac{1}{2}$, on a

$$I_a^{\frac{1}{2}}\log^\beta\left(\frac{t}{a}\right)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}\log^{\beta+\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{a}\right)\ . \tag{1.25}$$

1.3.4 Semi-Groupe et Propriété de I_a^α

Théorème 1.3.2: [45, 64]

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $\alpha,\beta>0$ on a

$$I_a^\alpha\left[I_a^\beta\left[f(t)\right]\right]=I_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right] \tag{1.26}$$

et

$$I_a^\alpha\left[I_a^\beta\left[f(t)\right]\right]=I_a^\beta\left[I_a^\alpha\left[f(t)\right]\right]\ . \tag{1.27}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
&I_a^\alpha\left(I_a^\beta\left[f(x)\right]\right)\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left[\log\left(\frac{x}{\tau}\right)\right]^{\alpha-1}I_a^\beta\left[f(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau}\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\log^{\alpha-1}\left(\frac{x}{\tau}\right)\left(\int_a^\tau\log^{\beta-1}\left(\frac{\tau}{t}\right)f(t)\frac{dt}{t}\right)\frac{d\tau}{\tau}\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\left(\int_t^x\log^{\alpha-1}\left(\frac{x}{\tau}\right)\log^{\beta-1}\left(\frac{\tau}{t}\right)\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{dt}{t}.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Par le changement de variable $\rho = \frac{\log\left(\frac{\tau}{t}\right)}{\log\left(\frac{x}{t}\right)}$ et la définition de la fonction Bêta, on trouve

$$
\begin{aligned}
& I_a^{\alpha}\left(I_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right) \\
& = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f\left(t\right)\left(\int_0^1 \left[\log\left(\frac{x}{t}\right) - \left(\log\left(\frac{x}{t}\right)\right)\rho\right]^{\alpha-1} \left[\log\left(\frac{x}{t}\right)\rho\right]^{\beta-1} \log\left(\frac{x}{t}\right) d\rho\right) \frac{dt}{t} \\
& = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f\left(t\right)\left(\log^{\alpha+\beta-1}\left(\frac{x}{t}\right) \int_0^1 \left(1-\rho\right)^{\alpha-1} \rho^{\beta-1} d\rho\right) \frac{dt}{t} \\
& = \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \log^{\alpha+\beta-1}\left(\frac{x}{t}\right) f\left(t\right) \frac{dt}{t} \\
& = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \log^{\alpha+\beta-1}\left(\frac{x}{t}\right) f\left(t\right) \frac{dt}{t} \\
& = I_a^{\alpha+\beta}\left[f\left(t\right)\right].
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

□

Exemple

Si $f\left(x\right) = \log\left(\frac{x}{a}\right)$ et $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, alors on a

$$I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}\left[f\left(x\right)\right]\right] = I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}\left[\log\left(\frac{x}{a}\right)\right]\right] = I_a^{\alpha}\left[\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\beta+2)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta+1}\right] = \frac{1}{2}\left(\log\frac{x}{a}\right)^2 \tag{1.30}$$

et

$$I_a^{\alpha+\beta}\left[f\left(x\right)\right] = I_a^{1}\left[\log\frac{x}{a}\right] = \int_a^x \left[\log\frac{x}{t}\right]\frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\left(\log\frac{x}{a}\right)^2 . \tag{1.31}$$

Définition 1.3.3: [55]

L'intégrale fractionnaire k–Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$, de la fonction continue f sur $[a, b]$ est définie par :

$$_kJ_a^{\alpha}\left(f\left(t\right)\right) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^t \left(t-\tau\right)^{\frac{\alpha}{k}-1} f\left(\tau\right) d\tau. \tag{1.32}$$

Définition 1.3.4: [45]

Soient $f \in C([a, b])$ et $h \in C^1(a, b)$ croissante et positive sur $(a, b]$. L'intégrale fractionnaire k–Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$, de f sur $[a, b]$ par rapport à h est définie par :

$$_kJ_{a,h}^{\alpha}\left(f\left(t\right)\right) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^t \left(h(t)-h(\tau)\right)^{\frac{\alpha}{k}-1} h'(\tau) f\left(\tau\right) d\tau \ . \tag{1.33}$$

Définition 1.3.5: [67]

Soit $f \in C([a,b])$. L'intégrale fractionnaire $(k,s)-$Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$, de f est définie par :

$$ {}_{k}^{s}J_{a}^{\alpha}(f(t)) = \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^t \left(t^{s+1} - \tau^{s+1}\right)^{\frac{\alpha}{k}-1} \tau^s f(\tau)\, d\tau \tag{1.34}$$

où $k > 0,\ s \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$.

1.4 Dérivation Non Entière

Il ya plusieurs appproches de la dérivée fractionnaire, parmis celles-ci, on a les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Hadamard.

1.4.1 Dérivée Fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.4.1: [45, 64]

Soit $f \in C([a,b])$. La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$, de f sur $[a,b]$ est définie par :

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] = \frac{d^n}{dt^n}\left(J_a^{n-\alpha}[f(t)]\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, & n-1 < \alpha < n,\ n \in \mathbb{N}^*, \\ \frac{d^n f}{dt^n}(t), & \alpha = n. \end{cases} \tag{1.35}$$

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(t) = (t-a)^{\beta}$ avec $\beta > -1$, la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de R-L de f est donnée par :

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{d}{dt}\left(I_a^{1-\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right]\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} (\tau-a)^{\beta}\, d\tau\right) \tag{1.36}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+2)} (t-a)^{1-\alpha+\beta}\right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, alors la formule (1.35) implique que

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^{\beta}\right] &= \frac{d}{dt}\left(I_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^{\beta}\right]\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-a)^{\beta}\,d\tau\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}(t-a)^{\beta+\frac{1}{2}}\right) = \frac{\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}(t-a)^{\beta-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, et $\beta = 1$, on trouve

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_a^{\frac{1}{2}}[(t-a)] &= \frac{d}{dt}\left(I_a^{\frac{1}{2}}[(t-a)]\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-a)\,d\tau\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}(t-a)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}(t-a)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Remarque

La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de R-L n'est pas nulle. On a

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_a^{\alpha}[c] &= \frac{d}{dt}\left(I_a^{1-\alpha}[c]\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha}\,d\tau\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{c}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{1-\alpha}\right) = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}, 0<\alpha<1. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Si $c = 1$, alors

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha}[1] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}, 0<\alpha<1. \tag{1.40}$$

Proposition 1.4.1

[45, 64] Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires au sens de R-L existent. Alors pour n'importe quels λ, $\mu \in \mathbb{R}$, on a

(1) ${}_{RL}D_a^{\alpha}[\lambda f + \mu g]$ existe et

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda\, {}_{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] + \mu\, {}_{RL}D_a^{\alpha}[g(t)]\ . \tag{1.41}$$

(2)

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}[f(t)]\right] \neq {}_{RL}D_a^{\alpha+\beta}[f(t)]\ . \tag{1.42}$$

(3)

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}[f(t)]\right] \neq {}_{RL}D_a^{\beta}\left[{}_{RL}D_a^{\alpha}[f(t)]\right]. \tag{1.43}$$

Lemme 1.4.1:

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ vérifiant ${}_{RL}D_a^\alpha[f(t)]=0$. Alors

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n-1} b_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(\alpha-n+i+1)}(t-a)^{\alpha-n+i}, n=[\alpha]+1 \tag{1.44}$$

où $\alpha\in]n-1,n[$, $n\in\mathbb{N}^*$ et b_i, $i=0,\dots,n-1$ sont des constantes arbitraires.

1.4.2 Dérivée Fractionnaire de Hadamard

Définition 1.4.2: [44]

Soit $f\in C([a,b])$. La dérivée fractionnaire au sens de Hadamard d'ordre $\alpha>0$ de f sur $[a,b]$ est définie par :

$$\begin{aligned} {}_HD_a^\alpha[f(t)] &= \left(t\frac{d}{dt}\right)^n\left(I_a^{n-\alpha}[f(t)]\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \left(\log\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)^{n-\alpha-1} f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}, \ n-1<\alpha<n, \ n\in\mathbb{N}^*, \\ \left(t\frac{d}{dt}\right)^n f(t), \ \alpha=n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.45}$$

Exemple

Soit $f(t)=\log^\beta\left(\frac{t}{a}\right)$ avec $\beta>-1$, on a

$$\begin{aligned} {}_HD_a^\alpha\left[\log^\beta\left(\frac{t}{a}\right)\right] &= t\frac{d}{dt}\left(I_a^{1-\alpha}\left[\log^\beta\left(\frac{t}{a}\right)\right]\right) \\ &= t\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t \log^{-\alpha}\left(\frac{t}{\tau}\right)\log^\beta\left(\frac{\tau}{a}\right)\frac{d\tau}{\tau}\right) \\ &= t\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+2)}\log^{1-\alpha+\beta}\left(\frac{t}{a}\right)\right) \\ &= \frac{t\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\log^{\beta-\alpha}\left(\frac{t}{a}\right). \end{aligned} \tag{1.46}$$

Pour $\alpha=\frac{1}{2}$ et d'après (1.45), on obtient

$$
\begin{aligned}
{}_{H}D_{a}^{\frac{1}{2}}\left[\log^{\beta}\left(\tfrac{t}{a}\right)\right] &= t\tfrac{d}{dt}\left(I_{a}^{\frac{1}{2}}\left[\log^{\beta}\left(\tfrac{t}{a}\right)\right]\right)\\
&= t\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\int_{a}^{t}\log^{-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{t}{\tau}\right)\log^{\beta}\left(\tfrac{\tau}{a}\right)\tfrac{d\tau}{\tau}\right) \qquad (1.47)\\
&= t\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}\log^{\beta+\frac{1}{2}}\left(\tfrac{t}{a}\right)\right)=\tfrac{t\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}\log^{\beta-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{t}{a}\right).
\end{aligned}
$$

Si $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=1$, on trouve

$$
\begin{aligned}
{}_{H}D_{a}^{\frac{1}{2}}\left[\left(\log\left(\tfrac{t}{a}\right)\right)\right] &= t\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\int_{a}^{t}\log^{-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{t}{\tau}\right)\left(\log\left(\tfrac{\tau}{a}\right)\right)\tfrac{d\tau}{\tau}\right)\\
&= t\tfrac{d}{dt}\left(I_{a}^{\frac{1}{2}}\left[\log\left(\tfrac{t}{a}\right)\right]\right)=t\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\log^{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{t}{a}\right)\right) \qquad (1.48)\\
&= \tfrac{3t}{2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\log^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{t}{a}\right).
\end{aligned}
$$

Remarque

La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Hadamard n'est pas nulle.

On a

$$
\begin{aligned}
{}_{H}D_{a}^{\alpha}[c] &= t\tfrac{d}{dt}\left(I_{a}^{1-\alpha}[c]\right)=t\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{c}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{a}^{t}\log^{-\alpha}\left(\tfrac{t}{\tau}\right)\tfrac{d\tau}{\tau}\right)\\
&= t\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{c}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\log^{1-\alpha}\left(\tfrac{t}{a}\right)\right)=\tfrac{c}{\Gamma(1-\alpha)}\log^{-\alpha}\left(\tfrac{t}{a}\right).
\end{aligned} \qquad (1.49)
$$

Remarque

Si on prend $c=1$, on obtient

$$
{}_{H}D_{a}^{\alpha}[1]=\tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\log^{-\alpha}\left(\tfrac{t}{a}\right)\ . \qquad (1.50)
$$

Proposition 1.4.2

Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires au sens de Hadamard existent.
Alors : (1). Pour tout $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, ${}_{H}D_{a}^{\alpha}[\lambda f(t)+\mu g(t)]$ existe et

$$
{}_{H}D_{a}^{\alpha}[\lambda f(t)+\mu g(t)]=\lambda\,{}_{H}D_{a}^{\alpha}[f(t)]+\mu\,{}_{H}D_{a}^{\alpha}[g(t)]\ . \qquad (1.51)
$$

(2)

$$
{}_{H}D_{a}^{\alpha}\left[{}_{H}D_{a}^{\beta}[f(t)]\right]\neq{}_{H}D_{a}^{\alpha+\beta}[f(t)]\ . \qquad (1.52)
$$

(3)

$$ {}_{H}D_{a}^{\alpha}\left[{}_{H}D_{a}^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right]\neq {}_{H}D_{a}^{\beta}\left[{}_{H}D_{a}^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right]. \tag{1.53}$$

Lemme 1.4.2:

Soient f une fonction définie sur $[a,b]$ vérifiant ${}_{H}D_{a}^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]=0$, $\alpha\in\left]n-1,n\right[$ et $n\in\mathbb{N}^{*}$. Alors

$$f\left(t\right)=\sum_{i=0}^{n-1}b_{i}\frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(\alpha-n+i+1)}\log^{\alpha-n+i}\left(\frac{t}{a}\right),n=[\alpha]+1 \tag{1.54}$$

où b_i, $i=0,...,n-1$ sont des constantes arbitraires.

Dans la section qui va suivre, on présente quelques théorèmes de point fixe qui seront à utiliser dans le quatrième chapitre.

1.5 Quelques Théorèmes de Point Fixe

Les théorèmes de point fixe nous permettent de transformer un problème différentiel fractionnaire en un problème de la forme suivante $Tx=x$. Ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pourque notre problème fractionnaire admette une solution.

Définition 1.5.1

Soient $(X,\|.\|_{X})$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_{\varepsilon}\geq0,\ \forall n>N_{\varepsilon},\ \forall m\geq N_{\varepsilon},\ \|x_{n+m}-x_{n}\|_{X}\leq\varepsilon. \tag{1.55}$$

Définition 1.5.2

On dit que X est un espace complet pour la norme $\|.\|_{X}$ si toute suite de Cauchy dans X est convergente dans X. Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.

Définition 1.5.3

Soit X un espace normé. Un sous-ensemble $\Omega\subset X$ est dit borné s'il existe $M>0$ tel que pour tout $x\in\Omega$ on a

$$||x||_{X}\leq M. \tag{1.56}$$

Définition 1.5.4

On dit que Ω est une partie compacte de X si toute suite de points de Ω, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de Ω.

Définition 1.5.5

Une partie Ω de X est dite relativement compacte si son adhérence est compacte.

Définition 1.5.6

Soit Ω un sous ensemble de $X = C([a,b],E)$, Ω est équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow |T(t_1) - T(t_1)| \leq \varepsilon, \text{ pour tout } t_1, t_2 \in [a,b] \text{ et } T \in \Omega. \tag{1.57}$$

Définition 1.5.7

Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace vectoriel normé. Une application T de X dans X est dite contractante s'il existe un nombre positive $\kappa \in]0,1[$, telle que pour tout $x, y \in X$, on a

$$\|T(x) - T(y)\|_X \leq \kappa \|x - y\|_X \ . \tag{1.58}$$

Définition 1.5.8

Soient X un espace vectoriel normé de norme $\|.\|$ et T une application d'un ensemble X dans lui même. On appelle point fixe de T tout point $x \in X$ tel que

$$Tx = x \ . \tag{1.59}$$

Définition 1.5.9

Soient X et Y deux espaces de Banach. L'opérateur continu $T : X \to Y$ est complètement continu s'il transforme tout borné de X en une partie relativement compacte dans Y.

Théorème 1.5.1

(Théorème du Point Fixe de Banach [37])
Soient X un espace de Banach et $T : X \to X$ est un opérateur contractant. Alors il existe un point fixe unique $x \in X$ tel que $Tx = x$.

Théorème 1.5.2

(Théorème d'Arzelà-Ascoli [77])
Soit Ω un ensemble de X. Alors Ω est relativement compact dans X si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées

1. Ω est uniformément borné.

2. Ω est équicontinu.

Théorème 1.5.3

(Théorème du Point Fixe de Schaefer [37,41])
Soient X un espace de Banach et $T : X \to X$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble

$$\Omega := \{x \in X : x = \mu T x,\ 0 < \mu < 1\} \tag{1.60}$$

est borné, alors T possède au moins un point fixe.

Théorème 1.5.4

(Inégalité de Hölder [20])
Soient $p \in (0,1)$, p' l'exposant conjugué de p i.e. $p + p' = 1$. Si $f \in L^{\frac{1}{p}}([a,b],\mathbb{R})$ et $g \in L^{\frac{1}{p'}}([a,b],\mathbb{R})$ alors $fg \in L^{1}([a,b],\mathbb{R})$ et on a

$$\int_a^b |fg(t)|\,dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^{\frac{1}{p}}\,dt\right)^{p} \left(\int_a^b |g(t)|^{\frac{1}{p'}}\,dt\right)^{p'} . \tag{1.61}$$

Chapitre 2

Intégrales Fractionnaires Mixtes d'Ordre Couplé

Ce chapitre est consacré à l'étude de quelques classes d'opérateurs intégraux mixtes de type Hadamard d'ordre couplé. Pour plus de détails, on cite [13, 17, 45, 48].

2.1 Approche Fractionnaire Mixte de Type Hadamard

Définition 2.1.1: [13]

Soient $f \in L^1(([a,b])^2, \mathbb{R})$ et h une fonction croissante et positive sur $(a,b]$ avec $h \in C^1((a,b),\mathbb{R})$. L'intégrale fractionnaire mixte de type Hadamard d'ordre couplé $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in (0,\infty)^2$ par rapport à h, est définie par :

$$\begin{aligned}&\left(I^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h} f\right)(x,y)\\ &= \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \int_a^y \left(\log\frac{h(x)}{h(t)}\right)^{\alpha_1-1} \left(\log\frac{h(y)}{h(r)}\right)^{\alpha_2-1} \frac{h'(t)h'(r)}{h(t)h(r)} f(t,r)\,dt\,dr.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Dans tout ce qui suit, on considère la fonction h positive et croissante sur $(a,b]$ avec $h \in$

$C^1((a,b),\mathbb{R})$.

On démontre que l'opérateur intégral mixte de type Hadamard d'ordre couplé $I^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}$ a un sens.

Théorème 2.1.1: [13]

L'opérateur intégral mixte de type Hadamard d'ordre couplé $(\alpha_1,\alpha_2)\in(0,\infty)^2$ de la fonction $f\in L^1(([a,b])^2,\mathbb{R})$ par rapport à la fonction h, $\left(I^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2)$ existe pour tout $(t_1,t_2)\in([a,b])^2$ et $\left(I^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2)\in L^1\left(([a,b])^2,\mathbb{R}\right)$.

Preuve.

On considère l'application suivante : $T_1:([a,b])^4\to\mathbb{R}$, définie par :

$$\begin{aligned}
&T_1(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)\\
&=\left[\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log\frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\alpha_i-1}\frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right)\right]_+\\
&=\begin{cases}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log\frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\alpha_i-1}\frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right), a\le\tau_1<t_1\le b, a\le\tau_2<t_2\le b\\ \text{et}\\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad , a\le t_1<\tau_1\le b, a\le t_2<\tau_2\le b.\end{cases}
\end{aligned}\tag{2.2}$$

On voit que T_1 est mesurable sur $([a,b])^4$, alors on a

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b\int_a^b\left[\int_a^b\int_a^b\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log\frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\alpha_i-1}\frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right)f(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2\right]dt_1dt_2\right|\\
&\le\int_a^b\int_a^b|f(t_1,t_2)|\left[\left|\int_a^{t_2}\int_a^{t_1}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log\frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\alpha_i-1}\frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right)d\tau_1d\tau_2\right|\right]dt_1dt_2\\
&\le\frac{1}{\prod_{i=1}^{2}\alpha_i}\int_a^b\int_a^b\left(\log\frac{h(t_1)}{h(a)}\right)^{\alpha_1}\left(\log\frac{h(t_2)}{h(a)}\right)^{\alpha_2}|f(t_1,t_2)|\,dt_1dt_2
\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\leq \frac{1}{\prod_{i=1}^{2}\alpha_i}\left(\log\frac{h(b)}{h(a)}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}\int_a^b\int_a^b |f(t_1,t_2)|\,dt_1dt_2$$

$$\leq \frac{1}{\prod_{i=1}^{2}\alpha_i}\left(\log\frac{h(b)}{h(a)}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}\|f\|_{L^1\left(([a,b])^2,\mathbb{R}\right)}<\infty.$$

D'où, l'application $T_1 f$ est intégrable sur $([a,b])^4$, par les théorèmes de Tonelli et Fubini, on déduit que

$$\int_a^b\int_a^b T_1(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)f(t_1,t_2)\,dt_1dt_2, \tag{2.4}$$

est dans l'espace $L^1\left(([a,b])^2,\mathbb{R}\right)$. Donc, $\left(I_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)}f\right)(t_1,t_2)$ existe pour tout $(t_1,t_2)\in([a,b])^2$.

□

Remarque

Si $\alpha=(0,0)$ et $a>0$, alors, on a

$$\left(I_{(a,a),h}^{\alpha}f\right)(x,y)=f(x,y). \tag{2.5}$$

On donne quelques propriétés de l'intégrale mixte de type Hadamard d'ordre couplé par rapport à la fonction h.

2.1.1 Semi-Groupe et Commutativité

Théorème 2.1.2: [13]

Soit f une fonction continue sur $([a,b])^2$, on a

$$\begin{aligned} I_{(a,a),h}^{\alpha}\left(I_{(a,a),h}^{\beta}f\right)(t_1,t_2) &= \left(I_{(a,a),h}^{\alpha+\beta}f\right)(t_1,t_2) \\ &= I_{(a,a),h}^{\beta}\left(I_{(a,a),h}^{\alpha}f\right)(t_1,t_2) \end{aligned} \tag{2.6}$$

pour tout $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2),\beta=(\beta_1,\beta_2)$, $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2>0$ et $0<a\leq t_1,t_2\leq b$.

Preuve.

On a

$$I^{\alpha}_{(a,a),h}\left(I^{\beta}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2)$$

$$=\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left[\left(\log\frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\alpha_i-1}\frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right]\left(I^{\beta}_{(a,a)}f\right)(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2$$

$$=\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left[\left(\log\frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\alpha_i-1}\frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right]\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma(\beta_i)}$$

$$\left[\int_a^{\tau_1}\int_a^{\tau_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log\frac{h(\tau_i)}{h(r_i)}\right)^{\beta_i-1}\frac{h'(r_i)}{h(r_i)}\right)f(r_1,r_2)\,dr_1dr_2\right]d\tau_1d\tau_2 \tag{2.7}$$

$$=\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\frac{h'(r_1)h'(r_2)}{h(r_1)h(r_2)}f(r_1,r_2)$$

$$\left[\int_{r_1}^{t_1}\int_{r_2}^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log\frac{h(\tau_i)}{h(r_i)}\right)^{\alpha_i-1}\frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\;\left(\log\frac{h(\tau_1)}{h(r_1)}\right)^{\beta_1-1}\;\left(\log\frac{h(\tau_2)}{h(r_2)}\right)^{\beta_2-1}\right)d\tau_1d\tau_2\right]dr_1dr_2.$$

Par le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x=\frac{\log h(\tau_1)-\log h(r_1)}{\log h(t_1)-\log h(r_1)},\; a\le r_1<\tau_1<t_1\le b \\ \text{et} \\ y=\frac{\log h(\tau_2)-\log h(r_2)}{\log h(t_2)-\log h(r_2)},\; a\le r_2<\tau_2<t_2\le b \end{cases} \tag{2.8}$$

on peut écrire

$$\int_{r_1}^{t_1}\int_{r_2}^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left[\left(\log\frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\alpha_i-1}\left(\log\frac{h(\tau_i)}{h(r_i)}\right)^{\beta_i-1}\frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right]d\tau_1d\tau_2$$

$$=\prod_{i=1}^{2}\left(\log\frac{h(t_i)}{h(r_i)}\right)^{\alpha_i+\beta_i-1}\int_0^1\int_0^1(1-x)^{\alpha_1-1}x^{\beta_1-1}(1-y)^{\alpha_2-1}y^{\beta_2-1}dxdy \tag{2.9}$$

$$=\prod_{i=1}^{2}\left(\log\frac{h(t_i)}{h(r_i)}\right)^{\alpha_i+\beta_i-1}\prod_{i=1}^{2}B(\alpha_i,\beta_i)$$

avec

$$B(\alpha_1,\beta_1)=\int_0^1(1-x)^{\alpha_1-1}x^{\beta_1-1}dx,\ B(\alpha_2,\beta_2)=\int_0^1(1-y)^{\alpha_2-1}y^{\beta_2-1}dy.$$

De (2.8), (2.9) et la fonction Bêta, on obtient

$$\begin{aligned}
&I^{\alpha}_{(a,a),h}\left(I^{\beta}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2)\\
&=\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left[\left(\log\frac{h(t_i)}{h(r_i)}\right)^{\alpha_i+\beta_i-1}\frac{h'(r_i)}{h(r_i)}\right]f(r_1,r_2)\,dr_1dr_2 \qquad (2.10)\\
&=\left(I^{\alpha+\beta}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2)=\left(I^{\beta+\alpha}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2).
\end{aligned}$$

D'où le Théorème 2.1.2. □

2.2 D'Autres Propriétés

Proposition 2.2.1

[13] Pour $f(x,y)=1$, on a

$$\left(I^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}1\right)(x,y)=\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i+1)}\left(\log\frac{h(x)}{h(a)}\right)^{\alpha_1}\left(\log\frac{h(y)}{h(a)}\right)^{\alpha_2},\alpha_1,\alpha_2>0. \qquad (2.11)$$

Preuve.

Par la définition 2.1.1, on a

$$\begin{aligned}
&\left(I^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}1\right)(x,y)\\
&=\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)}\int_a^{x}\int_a^{y}\left(\log\frac{h(x)}{h(t_1)}\right)^{\alpha_1-1}\left(\log\frac{h(y)}{h(t_2)}\right)^{\alpha_2-1}\frac{h'(t_1)h'(t_2)}{h(t_1)h(t_2)}dt_1dt_2 \qquad (2.12)\\
&=\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)}\left[\left(\log\frac{h(x)}{h(t_1)}\right)^{\alpha_1}\right]_{t_1=a}^{t_1=x}\left[\left(\log\frac{h(y)}{h(t_2)}\right)^{\alpha_2}\right]_{t_2=a}^{t_2=y}.
\end{aligned}$$

Doù l'égalité (2.11) est démontrée. □

Maintenant, on présente une relation entre la fonction Bêta d'Euler et l'intégrale mixte de type Hadamard avec le produit de la fonction log.

Théorème 2.2.1: [13]

Si $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$. Alors, on a

$$I_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\left[\prod_{i=1}^{2}\left(\log\frac{h(t_i)}{h(a)}\right)^{\beta_i-1}\right] = \frac{\prod_{i=1}^{2}\Gamma(\beta_i)}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i+\beta_i)}\prod_{i=1}^{2}\left(\log\frac{h(t_i)}{h(a)}\right)^{\alpha_i+\beta_i-1} \tag{2.13}$$

où $0 < a < t_1, t_2 \leq b$.

Preuve.

Par la définition 2.1.1, on a

$$\begin{cases} x = \frac{\log h(t_1) - \log h(\tau_1)}{\log h(t_1) - \log h(a)}, 0 < a < \tau_1 < t_1 \\ \text{et} \\ y = \frac{\log h(t_2) - \log h(\tau_2)}{\log h(t_2) - \log h(a)}, 0 < a < \tau_2 < t_2 \end{cases} \tag{2.14}$$

avec $(t_1, t_2) \in (]a, b])^2$, on peut écrire

$$\begin{aligned} & I_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\left[\prod_{i=1}^{2}\left(\log\frac{h(t_i)}{h(a)}\right)^{\beta_i-1}\right] \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left[\left(\log\frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\alpha_i-1}\left(\log\frac{h(\tau_i)}{h(a)}\right)^{\beta_i-1}\frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right]d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{2}\left(\log\frac{h(t_1)}{h(a)}\right)^{\alpha_i+\beta_i-1}}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)}\int_0^1\int_0^1 (1-x)^{\alpha_1-1}x^{\beta_1-1}(1-y)^{\alpha_2-1}y^{\beta_2-1}dxdy \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{2}\left(\log\frac{h(t_1)}{h(a)}\right)^{\alpha_i+\beta_i-1}}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)}\prod_{i=1}^{2}B(\alpha_i, \beta_i) \end{aligned} \tag{2.15}$$

où

$$B(\alpha_1,\beta_1)=\int_0^1(1-x)^{\alpha_1-1}x^{\beta_1-1}dx,\ B(\alpha_2,\beta_2)=\int_0^1(1-y)^{\alpha_2-1}y^{\beta_2-1}dy.$$

La preuve est donc réalisée. □

2.2.1 Relation Entre ${}^sJ^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}$ et $I^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}$

Proposition 2.2.2

[13] Soient f une fonction continue sur $([a,b])^2$ et ${}^sJ^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),,h}f$ est s—mixte intégrale fractionnaire de type Riemann–Liouville d'ordre (α_1,α_2) de f par rapport à la fonction h.
Alors

$$\lim_{s\to -1^+}\left({}^sJ^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2)=\left(I^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2) \tag{2.16}$$

où $s\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $\alpha_1,\alpha_2>0, a>0$.

Preuve.
On a

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\longrightarrow -1^+}\left({}^sJ^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2)\\
&=\lim_{s\longrightarrow -1^+}\frac{(s+1)^{2-(\alpha_1+\alpha_2)}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(h^{s+1}(t_i)-h^{s+1}(\tau_i)\right)^{\alpha_i-1}\ h^s(\tau_i)h'(\tau_i)\right)f(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2\\
&=\lim_{s\longrightarrow -1^+}\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\frac{h^{s+1}(t_i)-h^{s+1}(\tau_i)}{s+1}\right)^{\alpha_i-1}\ h^s(\tau_i)h'(\tau_i)\right)f(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2\\
&=\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left[\lim_{s\longrightarrow -1^+}\left(\frac{h^{s+1}(t_i)-h^{s+1}(\tau_i)}{s+1}\right)^{\alpha_i-1}\ h^s(\tau_i)h'(\tau_i)\right]f(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2\\
&=\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log\frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\alpha_i-1}\ \frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right)f(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2\\
&=\left(I^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a)}f\right)(t_1,t_2).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

D'où, la proposition. □

2.3 Opérateurs Mixtes de Type k–Hadamard d'Ordre Couplé

Définition 2.3.1: [13]

L'intégrale fractionnaire mixte de type k–Hadamard d'order (α_1, α_2), $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, de la fonction continue f sur $([a,b])^2$ par rapport à la fonction h, est définie par :

$$\begin{aligned}
&\left({}_kI^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h} f\right)(x,y) \\
&= \left({}_kI^{\alpha_1}_{a,h} \cdot {}_kI^{\alpha_2}_{a,h} f\right)(x,y) \\
&= \frac{1}{k^2 \prod_{i=1}^{2} \Gamma_k(\alpha_i)} \int_a^x \int_a^y \left(\log \frac{h(x)}{h(t)}\right)^{\frac{\alpha_1}{k}-1} \left(\log \frac{h(y)}{h(r)}\right)^{\frac{\alpha_2}{k}-1} \frac{h'(t)h'(r)}{h(t)h(r)} f(t,r)\,dt\,dr
\end{aligned} \tag{2.18}$$

où $k > 0$.

2.3.1 Existence

Proposition 2.3.1

[13]L'opérateur intégral mixte de type k–Hadamard d'ordre couplé $(\alpha_1, \alpha_2) \in (0, \infty)^2$ de la fonction $f \in L^1(([a,b])^2, \mathbb{R})$ par rapport à la fonction h, $\left({}_kI^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h} f\right)(t_1, t_2)$ existe pour tout $(t_1, t_2) \in ([a,b])^2$ et $\left({}_kI^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h} f\right)(t_1, t_2) \in L^1\left(([a,b])^2, \mathbb{R}\right)$, où $k > 0$.

Preuve.

Soit $T_2 : ([a,b])^4 \to \mathbb{R}$, où

$$\begin{aligned}
&T_2(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) \\
&= \left[\prod_{i=1}^{2} \left(\left(\log \frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1} \frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right)\right]_+
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$
= \begin{cases} \prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log\frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}\frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right), a \leq \tau_1 < t_1 \leq b, a \leq \tau_2 < t_2 \leq b \\ \text{et} \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad , a \leq t_1 < \tau_1 \leq b, a \leq t_2 < \tau_2 \leq b. \end{cases}
$$

L'application T_2 est mesurable sur $([a,b])^4$, alors on a

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b\int_a^b\left[\int_a^b\int_a^b\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log\frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}\frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right)f(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\right]dt_1dt_2\right| \\
&\leq \int_a^b\int_a^b|f(t_1,t_2)|\left[\left|\int_a^{t_2}\int_a^{t_1}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log\frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}\frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right)d\tau_1 d\tau_2\right|\right]dt_1dt_2 \\
&\leq \frac{k^2}{\prod_{i=1}^{2}\alpha_i}\int_a^b\int_a^b\prod_{i=1}^{2}\left(\log\frac{h(t_i)}{h(a)}\right)^{\frac{\alpha_i}{k}}|f(t_1,t_2)|\,dt_1dt_2 \qquad (2.20)\\
&\leq \frac{k^2}{\prod_{i=1}^{2}\alpha_i}\left(\log\frac{h(b)}{h(a)}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{k}}\int_a^b\int_a^b|f(t_1,t_2)|\,dt_1dt_2 \\
&\leq \frac{k^2}{\prod_{i=1}^{2}\alpha_i}\left(\log\frac{h(b)}{h(a)}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{k}}\|f\|_{L^1\left(([a,b])^2,\mathbb{R}\right)} < \infty.
\end{aligned}
$$

D'où, $T_2 f$ est intégrable sur $([a,b])^4$, par les théorèmes de Tonelli et Fubini, on a

$$
\int_a^b\int_a^b T_2(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)f(t_1,t_2)\,dt_1dt_2
$$

est dans l'espace $L^1\left(([a,b])^2,\mathbb{R}\right)$. Donc, $\left({}_kI^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2)$ existe pour tout $(t_1,t_2)\in([a,b])^2$. □

On continue avec les propriétés de cette classe d'opérateurs. On démontre le théorème suivant :

Théorème 2.3.1: [13]

Soit f une fonction continue sur $([a,b])^2$. Alors

$$\begin{aligned} {}_kI^{\alpha}_{(a,a),h}\left({}_kI^{\beta}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2) &= \left({}_kI^{\alpha+\beta}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2) \\ &= {}_k\, I^{\beta}_{(a,a),h}\left({}_kI^{\alpha}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2), \end{aligned} \tag{2.21}$$

pour tout $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\,, \beta=(\beta_1,\beta_2)\,,\, \alpha_1,\alpha_{2,}\beta_1,\beta_2>0$ et $0<a\le t_1,t_2\le b$.

Preuve.

On a

$$\begin{aligned} &{}_kI^{\alpha}_{(a,a),h}\left({}_kI^{\beta}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2) \\ &= \frac{1}{k^2\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log\frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}\ \frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right)\ \left({}_kI^{\beta}_{(a,a)}f\right)(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \frac{1}{k^2\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log\frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}\ \frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right)\Bigg[\frac{1}{k^2\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma_k(\beta_i)} \\ &\int_a^{\tau_1}\int_a^{\tau_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log\frac{h(\tau_i)}{h(r_i)}\right)^{\frac{\beta_i}{k}-1}\ \frac{h'(r_i)}{h(r_i)}\right)f\left(r_1,r_2\right)dr_1dr_2\Bigg]d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \frac{1}{k^4\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma_k(\beta_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\frac{h'(r_1)h'(r_2)}{h(r_1)h(r_2)}f\left(r_1,r_2\right) \\ &\left[\int_{r_1}^{\tau_1}\int_{r_2}^{\tau_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log\frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}\left(\log\frac{h(\tau_i)}{h(r_i)}\right)^{\frac{\beta_i}{k}-1}\frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right)d\tau_1 d\tau_2\right]dr_1dr_2. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Appliquant le changement de variables :

$$\begin{cases} x=\frac{\log h(\tau_1)-\log h(r_1)}{\log h(t_1)-\log h(r_1)}, a\le r_1<\tau_1\le t_1\le b \\ \\ \text{et} \\ \\ y=\frac{\log h(\tau_2)-\log h(r_2)}{\log h(t_2)-\log h(r_2)}, a\le r_2<\tau_2\le t_2\le b \end{cases} \tag{2.23}$$

on obtient

$$\int_{r_1}^{t_1}\int_{r_2}^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log\frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}\left(\log\frac{h(\tau_i)}{h(r_i)}\right)^{\frac{\beta_i}{k}-1}\frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right)d\tau_1 d\tau_2$$

$$=\prod_{i=1}^{2}\left(\log\frac{h(t_i)}{h(r_i)}\right)^{\frac{\alpha_i+\beta_i}{k}-1}\int_0^1\int_0^1(1-x)^{\frac{\alpha_1}{k}-1}x^{\frac{\beta_1}{k}-1}(1-y)^{\frac{\alpha_2}{k}-1}y^{\frac{\beta_2}{k}-1}dxdy \tag{2.24}$$

$$=k^2\prod_{i=1}^{2}\left(\log\frac{h(t_i)}{h(r_i)}\right)^{\frac{\alpha_i+\beta_i}{k}-1}\prod_{i=1}^{2}B_k(\alpha_i,\beta_i).$$

D'après (2.23), (2.24), on peut écrire

$${}_kI^{\alpha}_{(a,a),h}\left({}_kI^{\beta}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2)$$

$$=\frac{1}{k^2\prod_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i+\beta_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log\frac{h(t_i)}{h(r_i)}\right)^{\frac{\alpha_i+\beta_i}{k}-1}\frac{h'(r_i)}{h(r_i)}\right)f(r_1,r_2)dr_1dr_2 \tag{2.25}$$

$$=\left({}_kI^{\alpha+\beta}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2).$$

D'où la preuve du théorème. □

2.3.2 Propriétés de ${}_kI^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}$

Proposition 2.3.2

Si $f\equiv 1$ et $k>0$, alors

$$\left({}_kI^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}1\right)(x,y)=\frac{1}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i+1)}\left(\log\frac{h(x)}{h(a)}\right)^{\frac{\alpha_1}{k}}\left(\log\frac{h(y)}{h(a)}\right)^{\frac{\alpha_2}{k}},\alpha_1,\alpha_2>0. \tag{2.26}$$

Preuve.

Grâce à la définition 2.3.1, on a

$$\left(I^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}1\right)(x,y)$$

$$=\frac{1}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\int_a^x\int_a^y\left(\log\frac{h(x)}{h(t_1)}\right)^{\frac{\alpha_1}{k}-1}\left(\log\frac{h(y)}{h(t_2)}\right)^{\frac{\alpha_2}{k}-1}\frac{h'(t_1)h'(t_2)}{h(t_1)h(t_2)}dt_1dt_2 \tag{2.27}$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\left[\left(\log\frac{h(x)}{h(t_1)}\right)^{\frac{\alpha_1}{k}}\right]_{t_1=a}^{t_1=x}\left[\left(\log\frac{h(y)}{h(t_2)}\right)^{\frac{\alpha_2}{k}}\right]_{t_2=a}^{t_2=y}.$$

D'où la proposition. □

Si $f = h$, on donne le théorème suivant :

Théorème 2.3.2: [13]

Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \beta = (\beta_1, \beta_2)$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0, a > 0$ et $k > 0$. Alors, on a

$$_kI_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\left(\prod_{i=1}^{2}\left(\log\frac{h(t_i)}{h(a)}\right)^{\frac{\beta_i}{k}-1}\right) = \frac{\prod_{i=1}^{2}\Gamma_k(\beta_i)}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i+\beta_i)}\prod_{i=1}^{2}\left(\log\frac{h(t_i)}{h(a)}\right)^{\frac{\alpha_i+\beta_i}{k}-1} \tag{2.28}$$

où $0 < a < t_1, t_2 \leq b$.

Preuve.
On utilise le changement de variables :

$$\begin{cases} x = \frac{\log h(t_1) - \log h(\tau_1)}{\log h(t_1) - \log h(a)}, a \leq \tau_1 < t_1 \leq b \\ \text{et} \\ y = \frac{\log h(t_2) - \log h(\tau_2)}{\log h(t_2) - \log h(a)}, a \leq \tau_2 < t_2 \leq b \end{cases} \tag{2.29}$$

où $(t_1, t_2) \in (]a, b])^2$, on obtient

$$\begin{aligned} &_kI_{(a,a)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\left(\prod_{i=1}^{2}\left(\log\frac{h(t_i)}{h(a)}\right)^{\frac{\beta_i}{k}-1}\right) \\ &= \frac{1}{k^2\prod_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\left[\prod_{i=1}^{2}\left(\log\frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}\left(\log\frac{h(\tau_1)}{h(a)}\right)^{\frac{\beta_i}{k}-1}\right]d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{2}\left(\log\frac{h(t_i)}{h(a)}\right)^{\frac{\alpha_i+\beta_i}{k}-1}}{k^2\prod_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\int_0^1\int_0^1(1-x)^{\frac{\alpha_1}{k}-1}x^{\frac{\beta_1}{k}-1}(1-y)^{\frac{\alpha_2}{k}-1}y^{\frac{\beta_2}{k}-1}dxdy \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{2}\left(\log\frac{h(t_i)}{h(a)}\right)^{\frac{\alpha_i+\beta_i}{k}-1}}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\prod_{i=1}^{2}B_k(\alpha_i,\beta_i). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Le théorème est démontré. □

On démontre le résultat suivant :

Proposition 2.3.3

[13]Supposons que ${}_{k}^{s}J_{(a,a)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}f$ est $(k,s)-$mixte intégrale fractionnaire de type Riemann–Liouville d'order $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\,,\alpha_1,\alpha_2>0$, de la fonction continue f sur $([a,b])^2$ par rapport à la fonction h). Alors

$$\lim_{s\to -1^+}\left({}_{k}^{s}J_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)}f\right)(t_1,t_2)=\left({}_{k}I_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)}f\right)(t_1,t_2) \tag{2.31}$$

où $k>0$ et $s\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Preuve.

On a

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\longrightarrow -1^+}\left({}_{k}^{s}J_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)}f\right)((t_1,t_2))\\
&=\lim_{s\longrightarrow -1^+}\frac{(s+1)^{2-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{k}}}{k^2\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(h^{s+1}(t_i)-h^{s+1}(\tau_i)\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}h^s(\tau_i)h'(\tau_i)\right)f(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\\
&=\lim_{s\longrightarrow -1^+}\frac{1}{k^2\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\frac{h^{s+1}(t_i)-h^{s+1}(\tau_i)}{s+1}\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}h^s(\tau_i)h'(\tau_i)\right)f(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\\
&=\frac{1}{k^2\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left[\lim_{s\longrightarrow -1^+}\left(\frac{h^{s+1}(t_i)-h^{s+1}(\tau_i)}{s+1}\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}h^s(\tau_i)h'(\tau_i)\right]f(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\\
&=\frac{1}{k^2\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\log\frac{h(t_i)}{h(\tau_i)}\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}\frac{h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}f(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\\
&=\left({}_{k}I_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)}f\right)((t_1,t_2)).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

D'où, la proposition. □

2.4 Intégrale Mixte de Type $s-$Hadamard d'Ordre Couplé

Définition 2.4.1: [13]

L'intégrale fractionnaire mixte de type $s-$Hadamard d'order (α_1, α_2), $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, de la fonction continue f sur $([a,b])^2$ par rapport à la fonction h), est définie par :

$$\left({}^{s}I^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h} f\right)(t_1,t_2)$$
$$= \frac{(s+1)^{2-\alpha_1-\alpha_2}}{\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{t_1}\int_a^{t_2} \prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1} h(t_i) - \log^{s+1} h(\tau_i)\right)^{\alpha_i-1} \tag{2.33}$$
$$\frac{\log^s h(\tau_i) h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right) f(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

où $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2.4.1 Existence de l'Intégrale Mixte de Type $s-$Hadamard d'Ordre Couplé

Maintenant on présente le résultat suivant :

Théorème 2.4.1: [13]

Si $f \in L^1\left(([a,b])^2, \mathbb{R}\right)$, alors $\left({}^{s}I^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h} f\right)(t_1,t_2)$ existe pour tout $(t_1,t_2) \in ([a,b])^2$ et $\left({}^{s}I^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h} f\right)(t_1,t_2) \in L^1\left(([a,b])^2, \mathbb{R}\right)$, avec $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ et $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Preuve.
Soit l'opérateur $T_3 : ([a,b])^4 \to \mathbb{R}$, tel que

$$T_3(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)$$
$$= \left[\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1} h(t_i) - \log^{s+1} h(\tau_i)\right)^{\alpha_i-1} \frac{\log^s h(\tau_i) h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right)\right]_+ \tag{2.34}$$

$$= \begin{cases} \prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1}h\left(t_i\right)-\log^{s+1}h\left(\tau_i\right)\right)^{\alpha_i-1}\frac{\log^s h(\tau_i)h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right), \\ \text{pour } a\leq \tau_1 < t_1\leq b, a\leq \tau_2 < t_2 \leq b \\ \text{et} \\ 0, \qquad a\leq t_1<\tau_1\leq b, a\leq t_2<\tau_2\leq b. \end{cases}$$

On sait que T_3 est mesurable sur $([a,b])^4$, alors on a

$$\begin{aligned} &\int_a^b\int_a^b\left[\int_a^b\int_a^b\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1}h\left(t_i\right)-\log^{s+1}h\left(\tau_i\right)\right)^{\alpha_i-1}\frac{\log^s h(\tau_i)h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right)\right. \\ &\left. f\left(\tau_1,\tau_2\right)d\tau_1 d\tau_2\right]dt_1dt_2 \\ &\leq \int_a^b\int_a^b\left|f\left(t_1,t_2\right)\right|\left(\left|\int_a^{t_2}\int_a^{t_1}\prod_{i=1}^{2}\left[\left(\left(\log^{s+1}h\left(t_i\right)-\log^{s+1}h\left(\tau_i\right)\right)^{\alpha_i-1}\right)\right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left.\frac{\log^s h(\tau_i)h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right]d\tau_1d\tau_2\right|\right)dt_1dt_2 \qquad (2.35) \\ &\leq \frac{1}{\prod_{i=1}^{2}\alpha_i}\int_a^b\int_a^b\prod_{i=1}^{2}\left(\log^{s+1}h\left(t_i\right)-\log^{s+1}h\left(a\right)\right)^{\alpha_i}\left|f\left(t_1,t_2\right)\right|dt_1dt_2 \\ &\leq \frac{1}{(s+1)^2\prod_{i=1}^{2}\alpha_i}\left(\log^{s+1}h\left(b\right)-\log^{s+1}h\left(a\right)\right)^{\alpha_1+\alpha_2}\int_a^b\int_a^b\left|f\left(t_1,t_2\right)\right|dt_1dt_2 \\ &\leq \frac{1}{(s+1)^2\prod_{i=1}^{2}\alpha_i}\left(\log^{s+1}h\left(b\right)-\log^{s+1}h\left(a\right)\right)^{\alpha_1+\alpha_2}\left\|f\right\|_{L^1\left(([a,b])^2,\mathbb{R}\right)}<\infty. \end{aligned}$$

D'où, $T_3 f$ est intégrable sur $([a,b])^4$. Donc,

$$\int_a^b\int_a^b T_3\left(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2\right)f\left(t_1,t_2\right)dt_1dt_2$$

est dans l'espace $L^1\left(([a,b])^2,\mathbb{R}\right)$. Donc, $\left({}^sI^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2)$ existe pour tout $(t_1,t_2)\in([a,b])^2$.

□

Théorème 2.4.2: [13]

Soit f une fonction continue sur $([a,b])^2$. Alors,

$$ {}^sI^{\alpha}_{(a,a),h}\left({}^sI^{\beta}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2)=\left({}^sI^{\alpha+\beta}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2)={}^sI^{\beta}_{(a,a),h}\left({}^sI^{\alpha}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2) \qquad (2.36)$$

où $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ et $0 < a \leq t_1, t_2 \leq b$.

Preuve.
En utilisant la définition 2.4.1, on obtient

$$\begin{aligned}
&{}^{s}I^{\alpha}_{(a,a),h}\left({}^{s}I^{\beta}_{(a,a),h} f\right)(t_1,t_2)\\
&= \frac{(s+1)^{2-\alpha_1-\alpha_2}}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{t_1}\int_a^{t_2} \prod_{i=1}^{2}\Big(\left(\log^{s+1} h(t_i) - \log^{s+1} h(\tau_i)\right)^{\alpha_i-1}\\
&\frac{\log^s h(\tau_i) h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\Big)\left({}^{s}I^{\beta}_{(a,a)} f\right)(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\\
&= \frac{(s+1)^{2-\alpha_1-\alpha_2}}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{t_1}\int_a^{t_2} \prod_{i=1}^{2}\Big(\left(\log^{s+1} h(t_i) - \log^{s+1} h(\tau_i)\right)^{\alpha_i-1}\\
&\frac{\log^s h(\tau_i) h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\Big) \frac{(s+1)^{2-\beta_1-\beta_2}}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma(\beta_i)}\\
&\Big[\int_a^{\tau_1}\int_a^{\tau_2} \prod_{i=1}^{2}\Big(\left(\log^{s+1} h(\tau_i) - \log^{s+1} h(r_i)\right)^{\beta_i-1}\\
&\frac{\log^s h(r_i) h'(r_i)}{h(r_i)}\Big) f(r_1,r_2)\,dr_1 dr_2\Big] d\tau_1 d\tau_2\\
&= \frac{(s+1)^{4-\alpha_1-\alpha_2-\beta_1-\beta_2}}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)} \int_a^{t_1}\int_a^{t_2} \prod_{i=1}^{2} \frac{\log^s h(r_i) h'(r_i)}{h(r_i)} f(r_1,r_2)\\
&\Big[\int_{r_1}^{t_1}\int_{r_2}^{t_2} \prod_{i=1}^{2}\Big(\left(\log^{s+1} h(t_i) - \log^{s+1} h(\tau_i)\right)^{\alpha_i-1}\\
&\frac{\log^s h(\tau_i) h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\left(\log^{s+1} h(\tau_i) - \log^{s+1} h(r_i)\right)^{\beta_i-1}\Big)\\
&\frac{\log^s h(r_i) h'(r_i)}{h(r_i)} f(r_1,r_2)\,d\tau_1 d\tau_2\Big] dr_1 dr_2.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Par le changement de variables

$$\begin{cases} x = \frac{\log^{s+1} h(\tau_1) - \log^{s+1} h(r_1)}{\log^{s+1} h(t_1) - \log^{s+1} h(r_1)}, \ a \leq r_1 < \tau_1 < t_1 \leq b, \\ \\ \text{et} \\ \\ y = \frac{\log^{s+1} h(\tau_2) - \log^{s+1} h(r_2)}{\log^{s+1} h(t_2) - \log^{s+1} h(r_2)}, \ a \leq r_2 < \tau_2 < t_2 \leq b \end{cases} \tag{2.38}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}&\int_{r_1}^{t_1}\int_{r_2}^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\Big[\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(\tau_i)\right)^{\alpha_i-1}\\&\left(\log^{s+1}h(\tau_i)-\log^{s+1}h(r_i)\right)^{\beta_i-1}\tfrac{\log^{s}(\tau_i)h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\Big]d\tau_1 d\tau_2\\&=\frac{\prod_{i=1}^{2}\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(r_i)\right)^{\alpha_i+\beta_i-1}}{(s+1)^2}\\&\int_0^1\int_0^1(1-x)^{\alpha_1-1}x^{\beta_1-1}(1-y)^{\alpha_2-1}y^{\beta_2-1}dxdy\\&=\frac{\prod_{i=1}^{2}\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(r_i)\right)^{\alpha_i+\beta_i-1}}{(s+1)^2}B(\alpha_1,\beta_1)B(\alpha_2,\beta_2).\end{aligned}\tag{2.39}$$

D'où, par (2.37), (2.39) et par la fonction Bêta, on remarque que

$$\begin{aligned}&{}^{s}I^{\alpha}_{(a,a),h}\left({}^{s}I^{\beta}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2)\\&=\frac{(s+1)^{2-\alpha_1-\alpha_2-\beta_1-\beta_2}}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\Big(\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(r_i)\right)^{\alpha_i+\beta_i-1}\\&\tfrac{\log^{s}h(r_i)h'(r_i)}{h(r_i)}\Big)f(r_1,r_2)dr_1dr_2\\&=\left({}^{s}I^{\alpha+\beta}_{(a,a),h}f\right)(t_1,t_2).\end{aligned}\tag{2.40}$$

La preuve est terminée. □

Proposition 2.4.1

[13] Si $f(t_1,t_2)=1$ et $s\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Alors on a

$$\left({}^{s}I^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}1\right)(x,y)=\frac{\prod_{i=1}^{2}\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(a)\right)^{\alpha_i}}{(s+1)^{\alpha_1+\alpha_2}\prod_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i+1)}.\tag{2.41}$$

Preuve.

On peut écrire

$$\begin{aligned}
&\left({}^{s}I_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)}1\right)(x,y)\\
&=\frac{(s+1)^{2-\alpha_1-\alpha_2}}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\int_a^x\int_a^y\left(\log^{s+1}h(x)-\log^{s+1}h(t_1)\right)^{\alpha_1-1}\\
&\left(\log^{s+1}h(y)-\log^{s+1}h(t_2)\right)^{\alpha_2-1}\frac{\log^{s}h(t_1)h'(t_1)}{h(t_1)}\frac{\log^{s}h(t_2)h'(t_2)}{h(t_2)}dt_1dt_2 \qquad (2.42)\\
&=\frac{1}{(s+1)^{\alpha_1+\alpha_2}\prod_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\left[\left(\log^{s+1}h(x)-\log^{s+1}h(t_1)\right)^{\alpha_1}\right]_{t_1=a}^{t_1=x}\\
&\left[\left(\log^{s+1}h(y)-\log^{s+1}h(t_2)\right)^{\alpha_1}\right]_{t_2=a}^{t_2=y}.
\end{aligned}$$

On obtient (2.41). □

Théorème 2.4.3: [13]

Soient $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2)$, $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2>0$ et $s\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
&{}^{s}I_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\left(\prod_{i=1}^{2}\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(a)\right)^{\beta_i-1}\right)\\
&=\frac{\prod_{i=1}^{2}\Gamma(\beta_i)}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i+\beta_i)}\prod_{i=1}^{2}\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(a)\right)^{\alpha_i+\beta_i-1}
\end{aligned} \qquad (2.43)$$

où $0<a<t_1,t_2\leq b$.

Preuve.
Par le changement de variables

$$\begin{cases}
x=\frac{\log^{s+1}h(t_1)-\log^{s+1}h(\tau_1)}{\log^{s+1}h(t_1)-\log^{s+1}h(a)}, a\leq\tau_1<t_1\leq b\\
\text{et}\\
y=\frac{\log^{s+1}h(t_2)-\log^{s+1}h(\tau_2)}{\log^{s+1}h(t_2)-\log^{s+1}h(a)}, a\leq\tau_2<t_2\leq b
\end{cases} \qquad (2.44)$$

où $(t_1,t_2)\in(]a,b])^2$, on a

$$
\begin{aligned}
&{}^{s}I_{(a,a)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\left(\prod_{i=1}^{2}\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(a)\right)^{\beta_i-1}\right)\\
&=\frac{(s+1)^{2-\alpha_1-\alpha_2}}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left[\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(\tau_i)\right)^{\alpha_i-1}\frac{\log^{s}(\tau_i)h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\left(\log^{s+1}h(\tau_i)-\log^{s+1}h(a)\right)^{\beta_i-1}\right]d\tau_1 d\tau_2\\
&=\frac{\prod_{i=1}^{2}\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(a)\right)^{\alpha_i+\beta_i-1}}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)}\int_0^1\int_0^1(1-x)^{\alpha_1-1}x^{\beta_1-1}(1-y)^{\alpha_2-1}y^{\beta_2-1}dxdy\\
&=\frac{\prod_{i=1}^{2}\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(a)\right)^{\alpha_i+\beta_i-1}}{(s+1)^{\alpha_1+\alpha_2}\prod_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)}B(\alpha_1,\beta_1)B(\alpha_2,\beta_2).
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

D'où la preuve est achevée. □

2.5 Opérateur Mixte de Type (k,s) –Hadamard d'Ordre Couplé

Dans cette section, on introduit l'opérateur mixte de type (k,s) –Hadamard d'ordre couplé.

Définition 2.5.1: [13]

L'intégrale fractionnaire mixte de type (k,s)–Hadamard d'order $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ et $\alpha_1,\alpha_2>0$, de la fonction continue f sur $([a,b])^2$ par rapport à h est définie par :

$$
\begin{aligned}
&\left({}_{k}^{s}I_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)}f\right)(t_1,t_2)\\
&=\frac{(s+1)^{2-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{k}}}{k^2\prod_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(\tau_i)\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}\right.\\
&\left.\frac{\log^{s}h(\tau_i)h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right)f(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

où $k>0$ et $s\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Maintenant on montre le résultat suivant :

Théorème 2.5.1: [13]

Supposons que $f \in L^1\left(([a,b])^2, \mathbb{R}\right)$, $k>0, s \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Alors $\left({}_k^s I^{\alpha}_{(a,a),h} f\right)(t_1,t_2)$ existe pour tout $(t_1,t_2) \in ([a,b])^2$ et $\left({}_k^s I^{\alpha}_{(a,a),h} f\right)(t_1,t_2) \in L^1\left(([a,b])^2, \mathbb{R}\right)$, $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 > 0$.

Preuve.

On considère l'application $T_4 : ([a,b])^4 \to \mathbb{R}$, avec

$$T_4(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2) = \left\lfloor \prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1} h(t_i) - \log^{s+1} h(\tau_i)\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1} \frac{\log^s h(\tau_i) h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right)\right\rfloor_+$$

$$= \begin{cases} \prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1} h(t_i) - \log^{s+1} h(\tau_i)\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1} \frac{\log^s h(\tau_i) h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right), \\ \\ a \leq \tau_1 < t_1 \leq b, a \leq \tau_2 < t_2 \leq b \\ \text{et} \\ 0, \qquad a \leq t_1 < \tau_1 \leq b, a \leq t_2 < \tau_2 \leq b. \end{cases} \tag{2.47}$$

T_4 est mesurable sur $([a,b])^4$, alor on a

$$\begin{aligned} &\left|\int_a^b\int_a^b\left(\int_a^b\int_a^b \prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1} h(t_i) - \log^{s+1} h(\tau_i)\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}\right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left.\frac{\log^s h(\tau_i) h'(\tau_i)}{h(\tau_i)} f(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2\right) dt_1 dt_2\right| \\ &\leq \int_a^b\int_a^b |f(t_1,t_2)| \left|\int_a^b\int_a^b \prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1} h(t_i) - \log^{s+1} h(\tau_i)\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}\right.\right. \\ &\left.\left.\frac{\log^s h(\tau_i) h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right) d\tau_1 d\tau_2\right| dt_1 dt_2 \\ &\leq \frac{1}{\prod_{i=1}^{2}\alpha_i}\int_a^b\int_a^b \prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1} h(t_i) - \log^{s+1} h(a)\right)^{\frac{\alpha_i}{k}}\right)|f(t_1,t_2)|\, dt_1 dt_2 \\ &\leq \frac{1}{\prod_{i=1}^{2}\alpha_i}\left(\log^{s+1} h(b) - \log^{s+1} h(a)\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{k}}\int_a^b\int_a^b |f(t_1,t_2)|\, dt_1 dt_2 \\ &\leq \frac{1}{\prod_{i=1}^{2}\alpha_i}\left(\log^{s+1} h(b) - \log^{s+1} h(a)\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{k}} \|f\|_{L^1\left(([a,b])^2,\mathbb{R}\right)} < \infty. \end{aligned} \tag{2.48}$$

D'où, l'application $T_4 f$ est intégrable sur $([a,b])^4$. Alors, on déduit que

$$\int_a^b \int_a^b T_4(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2) f(t_1,t_2)\, dt_1 dt_2, \tag{2.49}$$

est dans l'espace $L^1\left(([a,b])^2, \mathbb{R}\right)$. Donc, $\left({}_k^s I_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)} f\right)(t_1,t_2)$ existe pour tout $(t_1,t_2) \in ([a,b])^2$.

□

Théorème 2.5.2: [13]

Soit f une fonction continue sur $([a,b])^2$ et $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Alors,

$$\begin{aligned} &{}_k^s I_{(a,a)}^{\alpha}\left({}_k^s I_{(a,a)}^{\beta} f\right)(t_1,t_2) \\ &= \left({}_k^s I_{(a,a)}^{\alpha+\beta} f\right)(t_1,t_2) = {}_k^s I_{(a,a)}^{\beta}\left({}_k^s I_{(a,a)}^{\alpha} f\right)(t_1,t_2), \end{aligned} \tag{2.50}$$

pour tout $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2), \beta = (\beta_1,\beta_2)$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ et $0 < a \leq t_1, t_2 \leq b$.

***Preuve*.**
D'après la définition 2.5.1, on a

$$\begin{aligned} &{}_k^s I_{(a,a)}^{\alpha}\left({}_k^s I_{(a,a)}^{\beta} f\right)(t_1,t_2) \\ &= \frac{(s+1)^{2-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{k}}}{k^2 \prod_{i=1}^{2} \Gamma_k(\alpha_i)} \int_a^{t_1}\int_a^{t_2} \prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1} h(t_i) - \log^{s+1} h(\tau_i)\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}\right. \\ &\left.\frac{\log^s h(\tau_i) h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right)\left({}_k^s I_{(a,a)}^{\beta} f\right)(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \frac{(s+1)^{2-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{k}}}{k^2 \prod_{i=1}^{2} \Gamma_k(\alpha_i)} \int_a^{t_1}\int_a^{t_2} \prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1} h(t_i) - \log^{s+1} h(\tau_i)\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}\right. \\ &\left.\frac{\log^s h(\tau_i) h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right) \frac{(s+1)^{2-\frac{\beta_1+\beta_2}{k}}}{k^2 \prod_{i=1}^{2} \Gamma_k(\beta_i)} \end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\left[\int_a^{\tau_1}\int_a^{\tau_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1}h(\tau_i)-\log^{s+1}h(r_i)\right)^{\frac{\beta_i}{k}-1}\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\log^s h(r_i)h'(r_i)}{h(r_i)}\right)f(r_1,r_2)\,dr_1dr_2\right]d\tau_1d\tau_2$$

$$=\frac{(s+1)^{4-\frac{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2}{k}}}{k^4\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)\Gamma_k(\beta_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\frac{\log^s h(r_1)h'(r_1)}{h(r_1)}$$

$$\frac{\log^s h(r_2)h'(r_2)}{h(r_2)}f(r_1,r_2)$$

$$\left[\int_{r_1}^{t_1}\int_{r_2}^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(\tau_i)\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}\right.\right.$$

$$\left.\frac{\log^s h(\tau_i)h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right)$$

$$\left.\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1}h(\tau_i)-\log^{s+1}h(r_i)\right)^{\frac{\beta_i}{k}-1}\right)d\tau_1d\tau_2\right]dr_1dr_2.$$

Par le changement de variables

$$\begin{cases} x=\frac{\log^{s+1}h(\tau_1)-\log^{s+1}h(r_1)}{\log^{s+1}h(t_1)-\log^{s+1}h(r_1)}, a\le r_1<\tau_1\le t_1\le b \\ \\ \text{et} \\ \\ y=\frac{\log^{s+1}h(\tau_2)-\log^{s+1}h(r_2)}{\log^{s+1}h(t_2)-\log^{s+1}h(r_2)}, a\le r_2<\tau_2\le t_2\le b \end{cases} \tag{2.52}$$

on peut écrire

$$\int_{r_1}^{t_1}\int_{r_2}^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(\tau_i)\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}\frac{\log^s h(\tau_i)h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right)$$

$$\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1}h(\tau_i)-\log^{s+1}h(r_i)\right)^{\frac{\beta_i}{k}-1}\right)d\tau_1d\tau_2$$

$$=\frac{\prod\limits_{i=1}^{2}\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(r_i)\right)^{\frac{\alpha_i+\beta_i}{k}-2}}{(s+1)^2} \tag{2.53}$$

$$\int_0^1\int_0^1(1-x)^{\frac{\alpha_1}{k}-1}x^{\frac{\beta_1}{k}-1}(1-y)^{\frac{\alpha_2}{k}-1}y^{\frac{\beta_2}{k}-1}dx$$

$$=\frac{\prod\limits_{i=1}^{2}\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(r_i)\right)^{\frac{\alpha_i+\beta_i}{k}-2}}{(s+1)^2}k^2B_k(\alpha_1,\beta_1)B_k(\alpha_2,\beta_2)$$

avec

$$B_k(\alpha_1,\beta_1)=\frac{1}{k}\int_0^1(1-x)^{\frac{\alpha_1}{k}-1}x^{\frac{\beta_1}{k}-1}dx$$

et

$$B_k(\alpha_2,\beta_2)=\frac{1}{k}\int_0^1(1-y)^{\frac{\alpha_2}{k}-1}y^{\frac{\beta_2}{k}-1}dy.$$

D'où, par (2.51),(2.53), on obtient

$$\begin{aligned}&{}_k^sI^{\alpha}_{(a,a)}\left({}_k^sI^{\beta}_{(a,a)}f\right)(t_1,t_2)\\&=\frac{(s+1)^{4-\frac{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2}{k}}}{k^4\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)\Gamma_k(\beta_i)}\int_a^t\int_a^t\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(r_i)\right)^{\frac{\alpha_i+\beta_i}{k}-2}\right.\\&\left.\frac{\log^s h(r_i)h'(r_i)}{h(r_i)}\right)f(r_1,r_2)dr_1dr_2=\left({}_k^sI^{\alpha+\beta}_{(a,a)}f\right)(t_1,t_2).\end{aligned}\tag{2.54}$$

□

Proposition 2.5.1

[13] Si $f(t_1,t_2)=1$ et $s\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, alors on a

$$\left({}_k^sI^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}1\right)(x,y)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(a)\right)^{\frac{\alpha_i}{k}}\right)}{(s+1)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{k}}\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i+1)}.\tag{2.55}$$

Preuve.

On utilise la définition 2.5.1. On peut écrire

$$\begin{aligned}&\left({}_k^sI^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}1\right)(x,y)\\&=\frac{(s+1)^{2-\alpha_1-\alpha_2}}{k^2\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\int_a^x\int_a^y\left(\log^{s+1}h(x)-\log^{s+1}h(t_1)\right)^{\frac{\alpha_1}{k}-1}\\&\left(\log^{s+1}h(y)-\log^{s+1}h(t_2)\right)^{\frac{\alpha_2}{k}-1}\frac{\log^s h(t_1)h'(t_1)}{h(t_1)}\frac{\log^s h(t_2)h'(t_2)}{h(t_2)}dt_1dt_2\\&=\frac{1}{(s+1)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{k}}\prod\limits_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\left[\left(\log^{s+1}h(x)-\log^{s+1}h(t_1)\right)^{\frac{\alpha_1}{k}}\right]_{t_1=a}^{t_1=x}\\&\left[\left(\log^{s+1}h(y)-\log^{s+1}h(t_2)\right)^{\frac{\alpha_1}{k}}\right]_{t_2=a}^{t_2=y}.\end{aligned}\tag{2.56}$$

Donc la preuve de (2.55) est terminée. □

Théorème 2.5.3: [13]

Soient $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2)$, $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2>0$ et pour $k>0, s\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Alors, on a

$$\begin{aligned}&{}_k^sI^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a),h}\left[\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(a)\right)^{\frac{\beta_i}{k}-1}\right)\right]\\&=\frac{\prod_{i=1}^{2}\Gamma_k(\beta_i)}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i+\beta_i)}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(a)\right)^{\frac{\alpha_i+\beta_i}{k}-2}\right)\end{aligned}\tag{2.57}$$

avec $0<a<t_1,t_2\leq b$.

Preuve.
On applique la définition 2.5.1 et en utilisant le changement de variables suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{\log^{s+1}h(t_1)-\log^{s+1}h(\tau_1)}{\log^{s+1}h(t_1)-\log^{s+1}h(a)},\, a\leq\tau_1<t_1\leq b\\ \\ \text{et}\\ \\ y=\frac{\log^{s+1}h(t_2)-\log^{s+1}h(\tau_2)}{\log^{s+1}h(t_2)-\log^{s+1}h(a)},\, a\leq\tau_2<t_2\leq b,\end{array}\right.\tag{2.58}$$

avec $(t_1,t_2)\in(]a,b])^2$, on obtient

$$\begin{aligned}&{}_k^sI^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a,a)}\left[\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}a\right)^{\frac{\beta_i}{k}-1}\right)\right]\\&=\frac{(s+1)^{2-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{k}}}{k^2\prod_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left[\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(\tau_i)\right)^{\frac{\alpha_1}{k}-1}\right.\\&\left.\frac{\log^s h(\tau_i)h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(a)\right)^{\frac{\beta_i}{k}-1}\right]d\tau_1d\tau_2\\&=\frac{\prod_{i=1}^{2}\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(a)\right)^{\frac{\alpha_i+\beta_i}{k}-2}}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)}\end{aligned}\tag{2.59}$$

$$\int_0^1\int_0^1 (1-x)^{\frac{\alpha_1}{k}-1}x^{\frac{\beta_1}{k}-1}(1-y)^{\frac{\alpha_2}{k}-1}y^{\frac{\beta_2}{k}-1}dxdy$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{2}\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(a)\right)^{\frac{\alpha_i+\beta_i}{k}-2}}{(s+1)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{k}}\prod_{i=1}^{2}\Gamma(\alpha_i)}B_k(\alpha_1,\beta_1)B_k(\alpha_2,\beta_2)$$

où

$$B_k(\alpha_1,\beta_1)=\frac{1}{k}\int_0^1(1-x)^{\frac{\alpha_1}{k}-1}x^{\frac{\beta_1}{k}-1}dx$$

et

$$B_k(\alpha_2,\beta_2)=\frac{1}{k}\int_0^1(1-y)^{\frac{\alpha_2}{k}-1}y^{\frac{\beta_2}{k}-1}dy.$$

La preuve est terminée. □

Remarque

1. Si on prend $s\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $k=1$ dans la formule (2.46), on obtient (2.33).
2. Si on prend $s=0$ et $k=1$ dans la formule (2.50), on obtient (2.6).
3. Si on prend $s=0$ et $k>0$ dans la formule (2.50), on obtient (2.21).
4. Si on prend $s\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $k=1$ dans la formule (2.55), on obtient (2.41).
5. Si on prend $s=0$ et $k=1$ dans la formule (2.57), on obtient (2.13).
6. Si on prend $s=0$ et $k>0$ dans la formule (2.57), on obtient (2.28).

2.6 Applications

On applique l'intégrale mixte $(k,s)-$ Hadamard sur l'inégalité inverse de type Minkowskii.

Théorème 2.6.1: [13]

Soient $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, q > 0, p \geq 1, k > 0, s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Supposons que f et g sont deux fonctions positives définies sur $([a,b])^2$. Si pour tout $t_1, t_2 \in [a,b]$,

$$0 < m \leq \frac{f(t_1,t_2)}{g(t_1,t_2)} \leq M, \quad g(t_1,t_2) \neq 0 \tag{2.60}$$

alors

$$\begin{aligned}&\left[{}_k^sI_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)} f^{qp}(t_1,t_2)\right]^{\frac{1}{p}} + \left[{}_k^sI_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)} g^{qp}(t_1,t_2)\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{M^q(m^q+2)+1}{(1+M^q)(1+m^q)} \left[{}_k^sI_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)} (f^q+g^q)^p(t_1,t_2)\right]^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{2.61}$$

Preuve.

On considère la quantité définie par

$$\begin{aligned}&{}_k^sG_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2) \\ &= \frac{(s+1)^{2-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{k}}}{k^2\prod_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)} \prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(\tau_i)\right)^{\frac{\alpha_i}{k}-1}\frac{\log^s h(\tau_i)h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\right).\end{aligned} \tag{2.62}$$

De (2.59), on peut écrire

$$(M^q+1)^p f^{pq}(\tau_1,\tau_2) \leq M^{qp}(f^q+g^q)^p(\tau_1,\tau_2) \tag{2.63}$$

pour tout $\tau_1 \in [a,t_1]$ et $\tau_2 \in [a,t_2]$.

On utilise $(k,s)-$Hadamard integration, on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{(M^q+1)^p(s+1)^{2-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{k}}}{k^2\prod_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(\tau_i)\right)^{\frac{\alpha_1}{k}-1}\right. \\ &\left.\frac{\log^s h(\tau_i)h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(a)\right)^{\frac{\beta_i}{k}-1}\right)f^{pq}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 \\ &\leq \frac{M^{qp}(s+1)^{2-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{k}}}{k^2\prod_{i=1}^{2}\Gamma_k(\alpha_i)}\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(\tau_i)\right)^{\frac{\alpha_1}{k}-1}\right. \\ &\left.\frac{\log^s h(\tau_i)h'(\tau_i)}{h(\tau_i)}\left(\log^{s+1}h(t_i)-\log^{s+1}h(a)\right)^{\frac{\beta_i}{k}-1}\right)(f^q+g^q)^p(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\end{aligned} \tag{2.64}$$

ce qui équivaut à

$$(M^q+1)^p \ {}_k^sI_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)} f^{pq}(t_1,t_2) \leq M^{qp} \ {}_k^sI_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)} (f^q+g^q)^p(t_1,t_2). \tag{2.65}$$

Donc

$$\left({}_k^sI_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)} f^{pq}(t_1,t_2)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{M^q}{1+M^q} \left({}_k^sI_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)} (f^q+g^q)^p(t_1,t_2)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.66}$$

D'autre part, on a

$$\left(1+\frac{1}{m^q}\right)^p g^{qp}(\tau_1,\tau_2) \leq \frac{1}{m^{qp}}(f^q+g^q)^p(\tau_1,\tau_2) \tag{2.67}$$

pour tout $(\tau_1,\tau_2)\in(a,t_1](a,t_2]$.

De la même manière, on peut obtenir l'estimation suivante :

$$(m^q+1)^p \ {}_k^sI_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)} g^{qp}(\tau_1,\tau_2) \leq \ {}_k^sI_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)} (f^q+g^q)^p(\tau_1,\tau_2). \tag{2.68}$$

Par conséquent

$$\left({}_k^sI_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)} g^{pq}(t_1,t_2)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{1+m^q} \left({}_k^sI_{(a,a),h}^{(\alpha_1,\alpha_2)} (f^q+g^q)^p(t_1,t_2)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.69}$$

En combinant les inégalités (2.67) et (2.69), on obtient l'inégalité (2.61). □

Chapitre 3

Inégalités Pondérées de Type Chebyshev

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la fonctionnelle de Chebyshev avec poids. On prouve quelques inégalitées intégrales fractionnaires liées à l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

On rappele alors la fonctionnelle de Chebyshev [22] définie par :

$$T(f,g;p) := \int_a^b p(x) \int_a^b (pfg)(x)dx - \int_a^b (pf)(x)dx \int_a^b (pg)(x)dx \tag{3.1}$$

avec f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ et $p : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ est une fonction intégrable sur $[a,b]$.

3.2 Estimations Avec Poids

Théorème 3.2.1: [15]

Soient $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue et $p : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable. Si $(\phi')^2 \in L^1([a,b],\mathbb{R})$, alors pour tout $\alpha > 0$, on a l'inégalité suivante :

$$J_a^\alpha p(b) J_a^\alpha p\phi^2(b) - \left(J_a^\alpha p\phi(b)\right)^2 \leq \int_a^b H(x)\left(\phi'(x)\right)^2 dx \tag{3.2}$$

où

$$H(x) := \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\left[\left(J_a^\alpha bp(b)\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}p(t)dt\right) - J_a^\alpha p(b)\int_a^x t(b-t)^{\alpha-1}p(t)dt\right]. \tag{3.3}$$

Preuve.

On a :

$$\begin{aligned} &J_a^\alpha p(b) J_a^\alpha pfg(b) - J_a^\alpha pf(b) J_a^\alpha pg(b) \\ &= \frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_a^b\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}(b-t)^{\alpha-1}p(s)p(t)\left[(f(s)-f(t))\ (g(s)-g(t))\right]dsdt. \end{aligned} \tag{3.4}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} &J_a^\alpha p(b) J_a^\alpha pfg(b) - J_a^\alpha pf(b) J_a^\alpha pg(b) \\ &= \frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_a^b\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}(b-t)^{\alpha-1}p(s)p(t)\left[(f(s)-f(t))\left(\int_t^s g'(x)dx\right)\right]dsdt. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Et comme $a \leq t \leq x \leq s \leq b$, on peut écrire

$$\begin{aligned} &J_a^\alpha p(b) J_a^\alpha pfg(b) - J_a^\alpha pf(b) J_a^\alpha pg(b) \\ &= \frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_a^b\left[\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}p(t)\left(\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}(f(s)-f(t))p(s)ds\right)dt\right](g'(x))\,dx \end{aligned} \tag{3.6}$$

On remplace $f(x) = x$ dans (3.6), on obtient

$$J_a^\alpha p(b) J_a^\alpha b(pg)(b) - J_a^\alpha bp(b) J_a^\alpha pg(b)$$

$$= \frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_a^b\left[\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}p(t)\left(\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}(s-t)p(s)ds\right)dt\right](g'(x))\,dx \tag{3.7}$$

$$= \int_a^b H(x)g'(x)dx$$

avec

$$H(x)=\frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}p(t)\left(\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}(s-t)p(s)ds\right)dt$$

$$=\frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\left[\int_a^b s(b-s)^{\alpha-1}p(s)ds\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}p(t)dt-\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}p(s)ds\int_a^x t(b-t)^{\alpha-1}p(t)dt\right]$$

$$=\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\left[\left(J_a^\alpha bp(b)\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}p(t)dt\right)-J_a^\alpha p(b)\int_a^x t(b-t)^{\alpha-1}p(t)dt\right]. \tag{3.8}$$

D'autre part, on a

$$J_a^\alpha p(b)J_a^\alpha p\phi^2(b)-\left(J_a^\alpha p\phi(b)\right)^2$$

$$=\frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_a^b\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}(b-t)^{\alpha-1}p(s)p(t)\left[\phi(s)-\phi(t)\right]^2 dsdt \tag{3.9}$$

$$=\frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_a^b\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}(b-t)^{\alpha-1}p(s)p(t)(s-t)^2\left[\frac{\phi(s)-\phi(t)}{(s-t)}\right]^2 dsdt,$$

par conséquent,

$$J_a^\alpha p(b)J_a^\alpha p\phi^2(b)-\left(J_a^\alpha p\phi(b)\right)^2$$

$$=\frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_a^b\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}(b-t)^{\alpha-1}p(s)p(t)(s-t)^2\left[\frac{\int_t^s(\phi'(x))dx}{(s-t)}\right]^2 dsdt. \tag{3.10}$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\int_t^s(\phi'(x))\,dx$ de (3.10), on trouve

$$J_a^\alpha p(b)J_a^\alpha p\phi^2(b)-\left(J_a^\alpha p\phi(b)\right)^2$$

$$\leq\frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_a^b\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}(b-t)^{\alpha-1}p(s)p(t)(s-t)^2\left[\frac{\left(\int_s^t 1dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_t^s(\phi'(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}}{(s-t)}\right]^2 dsdt \tag{3.11}$$

$$=\frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_a^b\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}(b-t)^{\alpha-1}p(s)p(t)(s-t)\left(\int_t^s(\phi'(x))^2dx\right)dsdt.$$

Alors, d'après (3.7) et (3.11), on obtient (3.2). □

Remarque

Si on prend $\alpha = 1$ dans le théorème 3.2.1, on obtient un résultat similaire au lemme 2.1 de la référence [8].

Corollaire 3.2.1

[15] Soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue. Si $(\phi')^2 \in L^1([a,b],\mathbb{R})$, alors pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\begin{aligned} &\tfrac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_a^\alpha \phi^2(b) - \left(J_a^\alpha \phi(b)\right)^2 \\ &\leq \tfrac{1}{2\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left[\left(J_a^\alpha b \int_a^x (b-t)^{\alpha-1} dt\right) - \tfrac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x t(b-t)^{\alpha-1} dt\right] (\phi'(x))^2 \, dx. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Preuve.
On prend $p(x) = 1, x \in [a,b]$ dans $H(x)$ de (3.8), on obtient la quantité suivante :

$$H_1(x) = \tfrac{1}{2\Gamma(\alpha)} \left[\left(J_a^\alpha b \int_a^x (b-t)^{\alpha-1} dt\right) - \tfrac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x t(b-t)^{\alpha-1} dt\right]. \tag{3.13}$$

Par le théorème 3.2.1, on déduit (3.12). □

Remarque

Si on prend $\alpha = 1$ dans le corollaire 3.2.1, on obtient un résultat similaire au corollaire 2.2 de [8].

Notre deuxième résultat est donné par le théorème suivant

Théorème 3.2.2: [15]

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions absolument continues sur $[a,b]$ et $p : [a,b] \to \mathbb{R}^+$. Si $(f')^2, (g')^2 \in L^1([a,b],\mathbb{R})$, alors pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\begin{aligned} &\left| J_a^\alpha p(b) J_a^\alpha pfg(b) - \left(J_a^\alpha pf(b)\right)\left(J_a^\alpha pg(b)\right)\right| \\ &\leq \left(\int_a^b H(x)(f'(x))^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b H(x)(g'(x))^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Preuve.
En utilisant l'inégalité fractionnaire pondérée de Cauchy-Schwarz avec double intégrale, on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\left|J_a^\alpha p(b) J_a^\alpha pfg(b) - \left(J_a^\alpha pf(b)\right)\left(J_a^\alpha pg(b)\right)\right| \\
&\leq \tfrac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\left(\int_a^b\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}(b-t)^{\alpha-1}p(s)p(t)\left(f(s)-f(t)\right)^2 dsdt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\left(\int_a^b\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}(b-t)^{\alpha-1}p(s)p(t)\left(g(s)-g(t)\right)^2 dsdt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[J_a^\alpha p(b) J_a^\alpha pf^2(b) - \left(J_a^\alpha pf(b)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[J_a^\alpha p(b) J_a^\alpha pg^2(b) - \left(J_a^\alpha pg(b)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

comme $(f')^2$ et $(g')^2 \in L^1([a,b],\mathbb{R})$, alors d'après le théorème 3.2.1, on obtient (3.14). □

Une version non pondérée pour le résultat ci-dessus peut être donnée comme suit :

Corollaire 3.2.2

[15] Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions absolument continues sur $[a,b]$. Si $(f')^2, (g')^2 \in L^1([a,b],\mathbb{R})$, alors pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\left|\tfrac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_a^\alpha fg(b) - J_a^\alpha f(b) J_a^\alpha g(b)\right| \leq \left(\int_a^b H_1(x)\left(f'(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b H_1\left(g'(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.16}$$

où H_1 est donnée par (3.13).

Preuve.
On a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_a^\alpha fg(b) - J_a^\alpha f(b) J_a^\alpha g(b)\right| \\
&\leq \left(\int_a^b H_1(x)\left(f'(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b H_1\left(g'(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\tfrac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left[\left(J_a^\alpha b\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}dt\right) - \tfrac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x t(b-t)^{\alpha-1}dt\right]\left(f'(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\left(\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_a^b\left[\left(J_a^\alpha b\int_a^x(b-t)^{\alpha-1}dt\right)-\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x t(b-t)^{\alpha-1}dt\right](g'(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^b\left[\left(J_a^\alpha b\int_a^x(b-t)^{\alpha-1}dt\right)-\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x t(b-t)^{\alpha-1}dt\right](f'(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\int_a^b\left[\left(J_a^\alpha b\int_a^x(b-t)^{\alpha-1}dt\right)-\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x t(b-t)^{\alpha-1}dt\right](g'(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où, le corollaire 3.2.2 est démontré. □

Remarque

Si on prend $\alpha=1$ dans le corollaire 3.2.2, alors on obtient le corollaire 2.4 de [8].

3.3 D'autres Résultats

Théorème 3.3.1: [15]

Soient g une fonction croissante sur $[a,b]$, f une fonction absolument continue sur $[a,b]$ et p une fonction positive et integrable sur $[a,b]$. Si $f'\in L^\infty([a,b],\mathbb{R})$, alors pour tout $\alpha>0$, on a

$$\left|J_a^\alpha p(b)J_a^\alpha pfg(b)-J_a^\alpha pf(b)J_a^\alpha pg(b)\right|\leq||f'||_\infty\int_a^b H(x)g'(x)dx. \tag{3.18}$$

Preuve.

Puisque, on a

$$\left|J_a^\alpha p(b)J_a^\alpha pfg(b)-J_a^\alpha pf(b)J_a^\alpha pg(b)\right|$$

$$=\frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\left|\int_a^b\int_a^b(b-s)^{\alpha-1}(b-t)^{\alpha-1}p(s)p(t)\right. \tag{3.19}$$

$$\left.[(f(s)-f(t))(g(s)-g(t))]\,dsdt\right|,$$

par conséquent, on peut écrire

$$\left|J_a^\alpha p(b) J_a^\alpha pfg(b) - J_a^\alpha pf(b) J_a^\alpha pg(b)\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)} \int_a^b \int_a^b (b-s)^{\alpha-1}(b-t)^{\alpha-1} p(s)p(t) \tag{3.20}$$

$$\left|\frac{(f(s)-f(t))}{s-t}\right| |(s-t)(g(s)-g(t))| \, ds dt.$$

Et comme $f' \in L^\infty([a,b],\mathbb{R})$, cela donne que

$$\left|J_a^\alpha p(b) J_a^\alpha pfg(b) - J_a^\alpha pf(b) J_a^\alpha pg(b)\right|$$

$$\leq \frac{\|f'\|_\infty}{2\Gamma^2(\alpha)} \int_a^b \int_a^x (b-s)^{\alpha-1}(b-t)^{\alpha-1} p(s)p(t)(s-t)$$

$$\left(\int_a^b g'(x)dx\right) ds dt \tag{3.21}$$

$$= \frac{\|f'\|_\infty}{2\Gamma(\alpha)} \left[\left(J_a^\alpha bp(b) \int_a^x (b-t)^{\alpha-1} p(t) dt\right) - J_a^\alpha p(b)\right.$$

$$\left.\int_a^x t(b-t)^{\alpha-1} p(t) dt\right] \left(\int_a^b g'(x)dx\right).$$

D'où, l'inégalité (3.18) est démontrée. □

Remarque

Pour $\alpha = 1$ dans le théorème 3.3.1, on obtient le théorème 2.5 de [8].

Corollaire 3.3.1

[15]Soient g une fonction croissante sur $[a,b]$ et f une fonction absolument continue. Si $f' \in L^\infty([a,b],\mathbb{R})$, alors pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\left|\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_a^\alpha fg(b) - J_a^\alpha f(b) J_a^\alpha g(b)\right| \leq \|f'\|_\infty \left(\int_a^b H_1(x) g'(x) dx\right) \tag{3.22}$$

où H_1 est donnée par (3.13).

Remarque

Si $\alpha = 1$ dans le corollaire 3.3.1, alors on obtient le théorème 2.6 de [8].

En utilisant deux fonctions absolument continues, on établit le résultat suivant :

Théorème 3.3.2: [15]

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions absolument continues et g croissante sur $[a,b]$. Si $f', g' \in L^{\infty}([a,b], \mathbb{R})$, alors pour toute fonction positive p définie sur $[a,b]$, on a

$$\left|J_a^{\alpha}p(b)J_a^{\alpha}pfg(b) - J_a^{\alpha}pf(b)J_a^{\alpha}pg(b)\right| \leq ||f'||_{\infty}||g'||_{\infty} \int_a^b H(x)dx. \tag{3.23}$$

Preuve.

Il est facile de voir que

$$\left|J_a^{\alpha}p(b)J_a^{\alpha}pfg(b) - J_a^{\alpha}pf(b)J_a^{\alpha}pg(b)\right|$$

$$\leq ||f'||_{\infty} \int_a^b H(x)g'(x)dx \tag{3.24}$$

$$\leq ||f'||_{\infty}||g'||_{\infty} \int_a^b H(x)dx.$$

□

Remarque

Si $\alpha = 1$ dans le théorèm 3.3.2, alors on obtient le théorème 2.7 de [8].

Corollaire 3.3.2

[15] Soient $f et g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions absolument continues et g croissante sur $[a,b]$. Si $f', g' \in L^{\infty}([a,b], \mathbb{R})$, alors pour toute fonction positive p définie sur $[a,b]$, on a l'inégalité suivante :

$$\left|\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_a^{\alpha}fg(b) - J_a^{\alpha}f(b)J_a^{\alpha}g(b)\right| \leq ||f'||_{\infty}||g'||_{\infty} \int_a^b H_1(x)dx. \tag{3.25}$$

Chapitre 4

Systèmes Différentiels de Type Hadamard

4.1 Introduction

L'étude des systèmes couplés d'équations différentielles fractionnaires soumis à des conditions aux limites est l'un des plus importants champs d'applications. En effet de nombreux phénomènes se modélisent par des équations différentielles fractionnaires. Ces applications peuvent être consultés dans les références [1, 4, 5, 8, 9, 18, 31, 35, 41, 46, 47, 55, 56, 59, 60, 70].

Ce chapitre est consacré à l'étude d'existence et d'unicité des solutions du système d'équations différentielles fractionnaires au sens de Hadamard suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) = f(t,u(t),v(t),D^{p}v(t)), \ t \in [1,T], T > 1, 1 < \alpha \leq 2, \\ \\ D^{\beta}v(t) = g(t,u(t),v(t),D^{q}u(t)), \ t \in [1,T], T > 1, 1 < \beta \leq 2, \\ \\ u(1) = 0, D^{\sigma_1}u(T) = I^{\sigma_1}(u(T) - v(\xi)), \sigma_1 > 0, 1 < \xi < T, \\ \\ v(1) = 0, D^{\sigma_2}v(T) = I^{\sigma_2}(v(T) - u(\xi)), \sigma_2 > 0, 1 < \xi < T \end{cases} \tag{4.1}$$

où D^{l} est la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard d'ordre $l \in \{\alpha, \beta, p, q, \sigma_1, \sigma_2\}$ avec $0 < q, \sigma_1 < \alpha, 0 < p, \sigma_2 < \beta$ et $I^{\sigma_i}, i = 1, 2$ désignent les opérateurs intégraux fractionnaires de

Hadamard d'ordre σ_1, σ_2 respectivement et $f, g : [1, T]\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions données vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard et $X = C([1, T], \mathbb{R})$ est l'espace de Banach des fonctions continues de $[1, T]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|$, $\|x\| = \sup\{|x(t)| : t \in [1, T]\}$.

Dans la section 4.2 de ce chapitre on présente la solution intégrale de système fractionnaire couplé (4.1) avec les conditions aux limites sous lesquelles on peut montrer l'existence et l'unicité des solutions. Ensuite, dans la section 4.3, on prouve l'existence des solutions de notre problème en appliquant le théorème de Schaefer. On consacre la section 4.4 à l'unicité de solution du problème (4.1) en utilisant le théorème de point fixe de Banach.

4.2 Résutats Préliminaires et Hypothèses

Dans la présente section, on donne quelques lemmes qui seront utilisés dans les démonstrations des résultats de ce chapitre.

Lemme 4.2.1:
[45] Soient $\rho > 0, \rho \notin \mathbb{N}$ et $n = [\rho] + 1$ et $f \in AC^n(1, T)$. L'équation différentielle fractionnaire suivante

$$D^\rho f(t) = 0, \qquad n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^* \tag{4.2}$$

admet une solution sous la forme

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i (\log t)^{\rho - i} \tag{4.3}$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, et $n-1 < \rho < n$.

Lemme 4.2.2:
[45] Soient $\rho > 0, \rho \notin \mathbb{N}$ et $n = [\rho] + 1$. Alors pour $f \in AC^n(1, T)$, on a

$$I^\rho D^\rho f(t) = f(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i (\log t)^{\rho - i} \tag{4.4}$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, and $n-1 < \rho < n$.

Lemme 4.2.3:

[45] Soit $\beta \geq \alpha > 0$. Alors, on a

$$I^{\alpha}(\log t)^{\beta-1}=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(\log t)^{\beta+\alpha-1}\text{ et }\ D^{\alpha}(\log t)^{\beta-1}=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(\log t)^{\beta-\alpha-1}. \tag{4.5}$$

On démontre le résultat suivant :

Lemme 4.2.4:

[14]Soient φ et ψ deux fonctions telles que $\varphi, \psi \in C([1,T],\mathbb{R})$. Alors le système

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t)=\varphi(t), \quad t\in[1,T], T>1, 1<\alpha\leq 2,\\[2ex] D^{\beta}v(t)=\psi(t), \quad t\in[1,T], T>1, 1<\beta\leq 2,\\[2ex] u(1)=0,\ D^{\sigma_1}u(T)=I^{\sigma_1}(u(T)-v(\xi)), \sigma_1>0, \xi\in(1,T)\\[2ex] v(1)=0,\ D^{\sigma_2}v(T)=I^{\sigma_2}(v(T)-u(\xi)), \sigma_2>0, \xi\in(1,T)\end{cases} \tag{4.6}$$

admet une solution donnée par :

$$\begin{aligned} u(t)=\int_1^t \frac{\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\varphi(s)}{s}ds-\frac{(\log t)^{\alpha-1}}{\Delta_1}&\left\{\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\left[\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right]\Gamma(\beta+\sigma_1)}\right.\\ &\left[\int_1^T\left(\frac{(\log\frac{T}{s})^{\beta+\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_2)}-\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\beta-\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta-\sigma_2)}\right)\frac{\psi(s)}{s}ds-\int_1^{\xi}\frac{\left(\log\frac{\xi}{s}\right)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\frac{\varphi(s)}{s}ds\right]\\ &\left.+\int_1^T\left(\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\sigma_1-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1)}-\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha-\sigma_1-1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)}\right)\frac{\varphi(s)}{s}ds-\int_1^{\xi}\frac{\left(\log\frac{\xi}{s}\right)^{\beta+\sigma_1-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)}\frac{\psi(s)}{s}ds\right\} \end{aligned} \tag{4.7}$$

et

$$\begin{aligned} v(t)=\int_1^t \frac{\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\frac{\psi(s)}{s}ds-\frac{(\log t)^{\beta-1}}{\Delta_2}&\left\{\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\left[\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right]\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\right.\\ &\left[\int_1^T\left(\frac{(\log\frac{T}{s})^{\alpha+\sigma_1-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1)}-\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha-\sigma_1-1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)}\right)\frac{\varphi(s)}{s}ds-\int_1^{\xi}\frac{\left(\log\frac{\xi}{s}\right)^{\beta+\sigma_1-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)}\frac{\psi(s)}{s}ds\right]\\ &\left.+\int_1^T\left(\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\beta+\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_2)}-\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\beta-\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta-\sigma_2)}\right)\frac{\psi(s)}{s}ds-\int_1^{\xi}\frac{\left(\log\frac{\xi}{s}\right)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\frac{\varphi s)}{s}ds\right\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

où

$$\Delta_1 = \frac{\Gamma(\alpha)\left[\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right]}{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)} - \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-2}}{\left[\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right]\Gamma(\alpha+\sigma_2)\Gamma(\beta+\sigma_1)} \tag{4.9}$$

et

$$\Delta_2 = \frac{\Gamma(\beta)\left[\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right]}{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)} - \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-2}}{\left[\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right]\Gamma(\beta+\sigma_1)\Gamma(\alpha+\sigma_2)}. \tag{4.10}$$

Preuve.
Grâce aux lemmes 4.2.1 et 4.2.2, le problème (4.1) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} u(t) = I^{\alpha}\varphi(t) - c_1(\log t)^{\alpha-1} - c_2(\log t)^{\alpha-2} \\ \text{et} \\ v(t) = I^{\beta}\psi(t) - d_1(\log t)^{\beta-1} - d_2(\log t)^{\beta-2}, \end{cases} \tag{4.11}$$

où c_1, c_2, d_1 et $d_2 \in \mathbb{R}$. D'après les conditions $u(1) = 0$ et $v(1) = 0$ on a $c_2 = d_2 = 0$.

Et par le lemme 4.2.3, on obtient

$$c_1 = \frac{1}{\Delta_1}\left\{\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\left[\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right]\Gamma(\beta+\sigma_1)}\left[I^{\beta+\sigma_2}\psi(T) - I^{\beta-\sigma_2}\psi(T) - I^{\alpha+\sigma_2}\varphi(\xi)\right] + I^{\alpha+\sigma_1}\varphi(T) - I^{\alpha-\sigma_1}\varphi(T) - I^{\beta+\sigma_1}\psi(\xi)\right\} \tag{4.12}$$

et

$$d_1 = \frac{1}{\Delta_2}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\left[\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right]\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\left[I^{\alpha+\sigma_1}\varphi(T) - I^{\alpha-\sigma_1}\varphi(T) - I^{\beta+\sigma_1}\psi(\xi)\right] + I^{\beta+\sigma_2}\psi(T) - I^{\beta-\sigma_2}\psi(T) - I^{\alpha+\sigma_2}\varphi(\xi)\right\}. \tag{4.13}$$

Substituant les constantes c_1, d_1, c_2 et d_2 dans (4.11), on obtient (4.7) et (4.8).

D'où le lemme 4.2.4 est démontré. □

Maintenant, on introduit l'espace suivant :

$$X = \{u \mid u \in C([1,T],\mathbb{R}) \text{ et } D^q u \in C([1,T],\mathbb{R})\}$$

l'espace de Banach des fonctions continues u et $D^q u$ de $[1,T]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|$, telle que $\|u\|_X = \max_{t\in[1,T]} |u(t)| + \max_{t\in[1,T]} |D^q u(t)|$, où $0 < q < \alpha$.

De la même façon, on peut définir l'espace de Banach suivant :

$$Y = \{v \mid v \in C([1,T],\mathbb{R}) \ \text{ et } D^p v \in C([1,T],\mathbb{R})\ \}$$

qui sera muni de la norme $\|.\|$, telle que $\|v\|_Y = \max_{t\in[1,T]} |v(t)| + \max_{t\in[1,T]} |D^p v(t)|$.
Alors, pour tout $(x,y) \in XY$; (XY est le produit cartésien des espaces X et Y) tel que

$$\text{XY}= \left\{(x,y) : (x,y) \in [C([1,T],\mathbb{R})]^2 \ \text{ et } \ \|(x,y)\|_{XY} = \|x\|_X + \|y\|_Y\right\}$$

où $\left(XY, \|(x,y)\|_{XY}\right)$ est un espace de Banach.

On a aussi besoin de définir la boule

$$B_R = \left\{(u,v) \in [C([1,T],\mathbb{R})]^2 : \|(u,v)\|_{XY} = \|u\|_X + \|v\|_Y \le R\right\}.$$

On introduit les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}\gamma_1 = \frac{1}{|\Delta_1|}\Bigg[&\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-1}}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|\Gamma(\beta+\sigma_1)\Gamma(\alpha+\sigma_2+1)}\\ &+\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1+1)}+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1+1)}\Bigg]\left((\log T)^{\alpha-1}+\frac{\Gamma(\alpha)(\log T)^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)}\right)\\ &+\frac{(\log T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{(\log T)^{\alpha-q}}{\Gamma(\alpha-q+1)},\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 = \frac{1}{|\Delta_1|}\Bigg[&\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|\Gamma(\beta+\sigma_1)}\left(\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2}}{\Gamma(\beta+\sigma_2+1)}\right.\\ &\left.+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2}}{\Gamma(\beta-\sigma_2+1)}\right)+\frac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1+1)}\Bigg]\left((\log T)^{\alpha-1}+\frac{\Gamma(\alpha)(\log T)^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)}\right),\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3 = \frac{1}{|\Delta_2|}\Bigg[&\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right|\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\left(\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1+1)}\right.\\ &\left.+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1+1)}\right)+\frac{(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2+1)}\Bigg]\left((\log T)^{\beta-1}+\frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{\Gamma(\beta-p)}\right),\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{|\Delta_2|}\Bigg[\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-1}}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right|\Gamma(\alpha+\sigma_2)\Gamma(\beta+\sigma_1+1)}$$
$$+\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2}}{\Gamma(\beta+\sigma_2+1)}+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2}}{\Gamma(\beta-\sigma_2+1)}\Bigg]\left((\log T)^{\beta-1}+\frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{\Gamma(\beta-p)}\right) \tag{4.17}$$
$$+\frac{(\log T)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{(\log T)^{\beta-p}}{\Gamma(\beta-p+1)}$$

et

$$\gamma_0 = \min\Big\{1-\big[m_1(\gamma_1+\gamma_3)+(n_1+n_3)(\gamma_2+\gamma_4)\big],$$
$$1-\big[(m_2+m_3)(\gamma_1+\gamma_3)+n_2(\gamma_2+\gamma_4)\big]\Big\} \tag{4.18}$$

telles que $m_i, n_i \geq 0, i = 1,2,3.$

On impose les hypothèses suivantes

$(H1)$: Les fonctions $f, g : [1,T]\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sont continues.

$(H2)$: Il existe deux réels positifs K_1 et K_2, tels que :

$$|f(t,u(t),v(t),D^p v(t))| \leq K_1, \quad |g(t,u(t),v(t),D^q u(t))| \leq K_2 \tag{4.19}$$

pour tout $(u,v)\in B_R$.

$(H3)$: Il existe des réels positifs $m_0, n_0 > 0$ et $m_i, n_i \geq 0$ $i = 1,2,3$
tels que, pour tout $t\in[1,T]$ et $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, on a

$$|f(t,x_1,x_2,x_3)| \leq m_0 + \sum_{i=1}^{3} m_i|x_i|, \quad |g(t,x_1,x_2,x_3)| \leq n_0 + \sum_{i=1}^{3} n_i|x_i|. \tag{4.20}$$

$(H4)$: Il existe deux fonctions positives $a \in L^{\frac{1}{\sigma}}([1,T],\mathbb{R}^+)$, $\sigma\in(0,1)$
et $b\in L^{\frac{1}{\rho}}([1,T],\mathbb{R}^+)$, $\rho\in(0,1)$, telles que :

$$|f(t,x_1,x_2,x_3) - f(t,y_1,y_2,y_3)| \leq a(t)\sum_{i=1}^{3}|x_i-y_i| \tag{4.21}$$

et

$$|g(t,x_1,x_2,x_3) - g(t,y_1,y_2,y_3)| \leq b(t)\sum_{i=1}^{3}|x_i-y_i| \tag{4.22}$$

avec $x_i, y_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,3.$

4.3 Premier Résultat : Existence de Solutions

On définit l'opérateur $A : XY \to XY$ par :

$$A(u,v)(t) := (A_1(u,v)(t),\ A_2(u,v)(t)),\ t \in [1,T] \tag{4.23}$$

tel que, pour tout $t \in [1,T]$

$$\begin{aligned}
&A_1(u,v)(t)\\
&= \int_1^t \frac{\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{f(s,u(s),v(s),D^p v(s))}{s} ds - \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{\Delta_1} \left\{ \frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)}{\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1} - \Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}} \right.\\
&\frac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)} \left[\int_1^T \left(\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\beta+\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_2)} - \frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\beta-\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta-\sigma_2)} \right) \frac{g(t,u(t),v(t),D^q u(t))}{s} ds \right.\\
&\left. - \int_1^\xi \frac{\left(\log\frac{\xi}{s}\right)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)} \frac{f(s,u(s),v(s),D^p v(s))}{s} ds \right] + \int_1^T \left(\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\sigma_1-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1)} - \frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha-\sigma_1-1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)} \right) \frac{f(s,u(s),v(s),D^p v(s))}{s} ds\\
&\left. - \int_1^\xi \frac{\left(\log\frac{\xi}{s}\right)^{\beta+\sigma_1-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)} \frac{g(t,u(t),v(t),D^q u(t))}{s} ds \right\}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

et

$$\begin{aligned}
&A_2(u,v)(t)\\
&= \int_1^t \frac{\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \frac{g(t,u(t),v(t),D^q u(t))}{s} ds - \frac{(\log t)^{\beta-1}}{\Delta_2} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)}{\left[\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1} - \Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right]} \right.\\
&\frac{(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)} \left[\int_1^T \left(\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\sigma_1-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1)} - \frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha-\sigma_1-1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)} \right) \frac{f(s,u(s),v(s),D^p v(s))}{s} ds \right.\\
&\left. - \int_1^\xi \frac{\left(\log\frac{\xi}{s}\right)^{\beta+\sigma_1-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)} \frac{g(t,u(t),v(t),D^q u(t))}{s} ds \right] + \int_1^T \left(\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\beta+\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_2)} - \frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\beta-\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta-\sigma_2)} \right) \frac{g(t,u(t),v(t),D^q u(t))}{s} ds\\
&\left. - \int_1^\xi \frac{\left(\log\frac{\xi}{s}\right)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)} \frac{f(s,u(s),v(s),D^p v(s))}{s} ds \right\}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

4.3.1 Conditions Suffisantes d'Existence

Théorème 4.3.1: [14]

Soient $\Delta_1 \neq 0$ et $\Delta_2 \neq 0$. *Supposons que les hypothèses* $(H1),(H2)$ et $(H3)$ sont vérifiées. Si

$$m_1(\gamma_1+\gamma_3)+(n_1+n_3)(\gamma_2+\gamma_4)<1 \text{ et } (m_2+m_3)(\gamma_1+\gamma_3)+n_2(\gamma_2+\gamma_4)<1, \quad (4.26)$$

alors le systéme (4.1) *admet au moins une* solution sur $[1,T]$.

Preuve.

Tout d'abord, on montre que l'opérateur A est complètement continu. (Notez que par $(H1)$ implique l'operateur A est continu). On procède en trois étapes :

Etape 1

Soit $(u,v)\in B_R$. Donc par $(H2)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
&|A_1(u,v)(t)| \\
&\leq \sup_{t\in[1,T]} \int_1^t \frac{\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{|f(s,u(s),v(s),D^p v(s))|}{s}ds \\
&+ \sup_{t\in[1,T]} \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{|\Delta_1|} \left\{ \frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|\Gamma(\beta+\sigma_1)} \right. \\
&\left[\int_1^T \left(\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\beta+\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_2)}+\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\beta-\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta-\sigma_2)}\right)\frac{|g(t,u(t),v(t),D^q u(t))|}{s}ds \right. \qquad (4.27)\\
&\left. +\int_1^\xi \frac{\left(\log\frac{\xi}{s}\right)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\frac{|f(s,u(s),v(s),D^p v(s))|}{s}ds\right] \\
&+\int_1^T \left(\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\sigma_1-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1)}+\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha-\sigma_1-1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)}\right)\frac{|f(s,u(s),v(s),D^p v(s))|}{s}ds \\
&\left.+\int_1^\xi \frac{\left(\log\frac{\xi}{s}\right)^{\beta+\sigma_1-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)}\frac{|g(t,u(t),v(t),D^q u(t))|}{s}ds\right\}
\end{aligned}$$

$$\leq K_1\left\{\int_1^T \frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{ds}{s}+\frac{(\log T)^{\alpha-1}}{|\Delta_1|}\left[\left(\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)}\int_1^\xi\frac{\left(\log\frac{\xi}{s}\right)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\frac{ds}{s}\right)+\int_1^T\left(\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\sigma_1-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1)}+\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha-\sigma_1-1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)}\right)\frac{ds}{s}\right]\right\}$$

$$+\frac{K_2(\log T)^{\alpha-1}}{|\Delta_1|}\left[\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|}\right.$$

$$\left.\frac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)}\int_1^T\left(\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\beta+\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_2)}+\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\beta-\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta-\sigma_2)}\right)\frac{ds}{s}+\int_1^\xi\frac{\left(\log\frac{\xi}{s}\right)^{\beta+\sigma_1-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)}\frac{ds}{s}\right]$$

$$\leq K_1\left\{\frac{(\log T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{(\log T)^{\alpha-1}}{|\Delta_1|}\left[\left(\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)\Gamma(\alpha+\sigma_2+1)}\right)+\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1+1)}+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1+1)}\right]\right\}$$

$$+\frac{K_2(\log T)^{\alpha-1}}{|\Delta_1|}\left[\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|}\right.$$

$$\left.\frac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)}\left(\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2}}{\Gamma(\beta+\sigma_2+1)}+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2}}{\Gamma(\beta-\sigma_2+1)}\right)+\frac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1+1)}\right].$$

Avec les mêmes arguments et d'après le lemme 4.2.3, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|D^qA_1(u,v)(t)\right|\\
&\leq K_1\left\{\frac{(\log T)^{\alpha-q}}{\Gamma(\alpha-q+1)}+\frac{\Gamma(\alpha)(\log T)^{\alpha-q-1}}{|\Delta_1|\Gamma(\alpha-q)}\left[\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|}\right.\right.\\
&\left.\left.\frac{(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)\Gamma(\alpha+\sigma_2+1)}+\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1+1)}+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1+1)}\right]\right\}\\
&+K_2\frac{\Gamma(\alpha)(\log T)^{\alpha-q-1}}{|\Delta_1|\Gamma(\alpha-q)}\left[\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|\Gamma(\beta+\sigma_1)}\right.\\
&\left.\left(\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2}}{\Gamma(\beta+\sigma_2+1)}+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2}}{\Gamma(\beta-\sigma_2+1)}\right)+\frac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1+1)}\right].
\end{aligned}\tag{4.28}$$

Par conséquent, cela implique

$$\begin{aligned}
&\left\|A_1(u,v)\right\|_X\\
&=\sup_{t\in[1,T]}\left|A_1(u,v)(t)\right|+\sup_{t\in[1,T]}\left|D^qA_1(u,v)(t)\right|\\
&\leq K_1\left\{\frac{1}{|\Delta_1|}\left(\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-1}}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|\Gamma(\alpha+\sigma_2+1)\Gamma(\beta+\sigma_1)}+\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1+1)}\right.\right.
\end{aligned}\tag{4.29}$$

$$+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1+1)}\Big)\Big((\log T)^{\alpha-1}+\frac{\Gamma(\alpha)(\log T)^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)}\Big)+\frac{(\log T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{(\log T)^{\alpha-q}}{\Gamma(\alpha-q+1)}\Big\}$$

$$+\frac{K_2}{|\Delta_1|}\Big[\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|\Gamma(\beta+\sigma_1)}\Big(\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2}}{\Gamma(\beta+\sigma_2+1)}$$

$$+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2}}{\Gamma(\beta-\sigma_2+1)}\Big)+\frac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1+1)}\Big]\Big((\log T)^{\alpha-1}+\frac{\Gamma(\alpha)(\log T)^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)}\Big)<\infty.$$

D'autre part, on voit que

$$\begin{aligned}&|A_2(u,v)(t)|\\
&\leq K_1\frac{(\log T)^{\beta-1}}{|\Delta_2|}\Big[\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right|\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\Big(\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1+1)}\\
&+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1+1)}\Big)+\frac{(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2+1)}\Big]+K_2\Big\{\frac{(\log T)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{(\log T)^{\beta-1}}{|\Delta_2|}\\
&\Big[\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-1}}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right|\Gamma(\alpha+\sigma_2)\Gamma(\beta+\sigma_1+1)}+\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2}}{\Gamma(\beta+\sigma_2+1)}+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2}}{\Gamma(\beta-\sigma_2+1)}\Big]\Big\}\end{aligned}\tag{4.30}$$

et

$$\begin{aligned}&|D^pA_2(u,v)(t)|\\
&\leq K_1\frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{|\Delta_2|\Gamma(\beta-p)}\Big[\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right|\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\Big(\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1+1)}\\
&+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1+1)}\Big)+\frac{(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2+1)}\Big]+K_2\Big\{\frac{(\log T)^{\beta-p}}{\Gamma(\beta-p+1)}+\frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{|\Delta_2|\Gamma(\beta-p)}\\
&\Big(\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-1}}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right|\Gamma(\alpha+\sigma_2)\Gamma(\beta+\sigma_1+1)}+\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2}}{\Gamma(\beta+\sigma_2+1)}+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2}}{\Gamma(\beta-\sigma_2+1)}\Big)\Big\}.\end{aligned}\tag{4.31}$$

D'où, on peut écrire

$$\begin{aligned}&\|A_2(u,v)\|_Y\\
&\leq\frac{K_1}{|\Delta_2|}\Big[\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-1}(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right|\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\Big(\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1+1)}\\
&+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1+1)}\Big)+\frac{(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2+1)}\Big]\Big((\log T)^{\beta-1}+\frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{\Gamma(\beta-p)}\Big)\\
&+K_2\Big\{\frac{1}{|\Delta_2|}\Big[\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-1}}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right|\Gamma(\alpha+\sigma_2)\Gamma(\beta+\sigma_1+1)}\end{aligned}\tag{4.32}$$

$$+\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2}}{\Gamma(\beta+\sigma_2+1)}+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2}}{\Gamma(\beta-\sigma_2+1)}\Big]\Big((\log T)^{\beta-1}+\frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{\Gamma(\beta-p)}\Big)$$

$$+\frac{(\log T)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{(\log T)^{\beta-p}}{\Gamma(\beta-p+1)}\Big\}<\infty$$

et par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
&\|A(u,v)\|_{XY}\\
&\leq K_1\Big\{\frac{1}{|\Delta_1|}\Big[\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-1}}{\big|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\alpha+\sigma_2+1)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\big|\Gamma(\alpha+\sigma_2+1)\Gamma(\beta+\sigma_1)}\\
&+\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1+1)}+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1+1)}\Big]\Big((\log T)^{\alpha-1}+\frac{\Gamma(\alpha)(\log T)^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)}\Big)+\frac{(\log T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{(\log T)^{\alpha-q}}{\Gamma(\alpha-q+1)}\\
&+\frac{1}{|\Delta_2|}\Big[\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\big|\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\big|\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\Big(\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1+1)}+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1+1)}\Big)\\
&+\frac{(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2+1)}\Big]\Big((\log T)^{\beta-1}+\frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{\Gamma(\beta-p)}\Big)\Big\}\\
&+K_2\Big\{\frac{1}{|\Delta_1|}\Big[\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\big|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\big|\Gamma(\beta+\sigma_1)}\\
&\Big(\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2}}{\Gamma(\beta+\sigma_2+1)}+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2}}{\Gamma(\beta-\sigma_2+1)}\Big)+\frac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1+1)}\Big]\Big((\log T)^{\alpha-1}+\frac{\Gamma(\alpha)(\log T)^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)}\Big)\\
&+\frac{1}{|\Delta_2|}\Big[\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-1}}{\big|\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\big|\Gamma(\alpha+\sigma_2)\Gamma(\beta+\sigma_1+1)}+\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2}}{\Gamma(\beta+\sigma_2+1)}\\
&+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2}}{\Gamma(\beta-\sigma_2+1)}\Big]\Big((\log T)^{\beta-1}+\frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{\Gamma(\beta-p)}\Big)+\frac{(\log T)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{(\log T)^{\beta-p}}{\Gamma(\beta-p+1)}\Big\}\\
&\leq(\gamma_1+\gamma_3)K_1+\big(\gamma_2+\gamma_4\big)K_2<\infty.
\end{aligned}\tag{4.33}$$

Cela montre que l'opérateur A est uniformément borné.

Etape 2

Ensuite, on prouve que A est équi-continu. Soient $t_1,t_2\in[1,T]$ $(t_1<t_2)$ et $(u,v)\in B_R$. Alors,

on a

$$
\begin{aligned}
&|A_1(u,v)(t_2)-A_1(u,v)(t_1)| \\
&\leq \int_1^{t_1} \frac{\left(\log\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha-1}-\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{|f(s,u(s),v(s),D^p v(s))|}{s} ds + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{|f(s,u(s),v(s),D^p v(s))|}{s} ds \\
&+ \frac{(\log t_2)^{\alpha-1}-(\log t_1)^{\alpha-1}}{|\Delta_1|} \left\{ \frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|\Gamma(\beta+\sigma_1)} \right. \\
&\left[\int_1^T \left(\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\beta+\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_2)} + \frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\beta-\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta-\sigma_2)}\right) \frac{|g(t,u(t),v(t),D^q u(t))|}{s} ds \right. \\
&\qquad \left. + \int_1^{\xi} \frac{\left(\log\frac{\xi}{s}\right)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)} \frac{|f(s,u(s),v(s),D^p v(s))|}{s} ds \right] \\
&\qquad + \int_1^T \left(\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\sigma_1-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1)} + \frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha-\sigma_1-1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)}\right) \frac{|f(s,u(s),v(s),D^p v(s))|}{s} ds \\
&\qquad \left. + \int_1^{\xi} \frac{\left(\log\frac{\xi}{s}\right)^{\beta+\sigma_1-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)} \frac{|g(t,u(t),v(t),D^q u(t))|}{s} ds \right\} \\
&\qquad \leq \frac{K_1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(\log t_2)^{\alpha}-(\log t_1)^{\alpha}\right] + \frac{(\log t_2)^{\alpha-1}-(\log t_1)^{\alpha-1}}{|\Delta_1|} \\
&\qquad \left\{ \frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|\Gamma(\beta+\sigma_1)} \left[K_2\left(\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2}}{\Gamma(\beta+\sigma_2+1)} + \frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2}}{\Gamma(\beta-\sigma_2+1)}\right)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + K_1 \frac{\left(\log\frac{\xi}{s}\right)^{\alpha+\sigma_2}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2+1)}\right] + K_1\left[\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1+1)} + \frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1+1)}\right] + K_2 \frac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1+1)} \right\}
\end{aligned} \tag{4.34}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&|D^q A_1(u,v)(t_2)-D^q A_1(u,v)(t_1)| \\
&\leq \frac{K_1}{\Gamma(\alpha-q+1)}\left[(\log t_2)^{\alpha-q}-(\log t_1)^{\alpha-q}\right] + \frac{\Gamma(\alpha)\left[(\log t_2)^{\alpha-q-1}-(\log t_1)^{\alpha-q-1}\right]}{|\Delta_1|\Gamma(\alpha-q)} \\
&\left\{ \frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|\Gamma(\beta+\sigma_1)} \left[K_2\left(\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_2+1)} + \frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2}}{\Gamma(\beta-\sigma_2+1)}\right)\right.\right. \\
&\left.\left. + K_1 \frac{\left(\log\frac{\xi}{s}\right)^{\alpha+\sigma_2}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2+1)}\right] + K_1\left[\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1+1)} + \frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1+1)}\right] + K_2 \frac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1+1)} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.35}
$$

Avec les mêmes arguments que précédemment, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
&|A_2(u,v)(t_2)-A_2(u,v)(t_1)| \\
&\le \tfrac{K_2}{\Gamma(\beta+1)}\left[(\log t_2)^{\beta}-(\log t_1)^{\beta}\right]+\tfrac{(\log t_2)^{\beta-1}-(\log t_1)^{\beta-1}}{|\Delta_2|} \\
&\left\{\tfrac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}}\right. \\
&\tfrac{(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\left[K_1\left(\tfrac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1+1)}+\tfrac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1+1)}\right)+K_2\tfrac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1+1)}\right] \\
&\left.+K_2\left[\tfrac{(\log T)^{\beta+\sigma_2}}{\Gamma(\beta+\sigma_2+1)}+\tfrac{(\log T)^{\beta-\sigma_2}}{\Gamma(\beta-\sigma_2+1)}\right]+K_1\tfrac{(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2+1)}\right\}
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&|D^pA_2(u,v)(t_2)-D^pA_2(u,v)(t_1)| \\
&\le \tfrac{K_2}{\Gamma(\beta-p+1)}\left[(\log t_2)^{\beta-p}-(\log t_1)^{\beta-p}\right]+\tfrac{\Gamma(\beta)\left[(\log t_2)^{\beta-p-1}-(\log t_1)^{\beta-p-1}\right]}{|\Delta_2|\Gamma(\beta-p)} \\
&\left\{\tfrac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\left[K_1\left(\tfrac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1+1)}+\tfrac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1+1)}\right)\right.\right. \\
&\left.\left.+K_2\tfrac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1+1)}\right]+K_2\left[\tfrac{(\log T)^{\beta+\sigma_2}}{\Gamma(\beta+\sigma_2+1)}+\tfrac{(\log T)^{\beta-\sigma_2}}{\Gamma(\beta-\sigma_2+1)}\right]+K_1\tfrac{(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2+1)}\right\}.
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

D'où les second membres de $(4.34),(4.35),(4.36)$ et (4.37) tendent vers zero lorsque $t_1\to t_2$ indépendamment de $(u,v)\in B_R$. Alors, en utilisant les étapes $1,2$ et par le théorème d'Arzela-Ascoli, on conclut que l'opéreteur A est complètement continu.

Etape 3

Il nous reste à démontrer que l'ensemble défini par :

$$
\digamma(S)=\{(u,v)\in XY \mid (u,v)=\lambda S(u,v), 0<\lambda<1\} \tag{4.38}
$$

est borné.

Soit $(u,v)\in\digamma(S)$, $(u,v)=\lambda A(u,v)$. Pour tout $t\in[1,T]$, en utilisant $(H3)$, on a

$$
u(t)=\lambda A_1(u,v)(t),\quad v(t)=\lambda A_2(u,v)(t)
$$

alors,

$$
\begin{aligned}
&|u(t)| \\
&\leq \lambda (m_0 + m_1 |u(t)| + m_2 |v(t)| + m_3 |D^p v(t)|) \left\{ \tfrac{(\log T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \tfrac{(\log T)^{\alpha-1}}{|\Delta_1|} \right. \\
&\left. \left[\tfrac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1+1)} + \tfrac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1+1)} + \tfrac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log \xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-1}}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|\Gamma(\beta+\sigma_1)\Gamma(\alpha+\sigma_2+1)} \right] \right\} \\
&+\lambda [n_0 + n_1 |u(t)| + n_2 |v(t)| + n_3 |D^q u(t)|] \tfrac{(\log T)^{\alpha-1}}{|\Delta_1|} \left\{ \tfrac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)}{\Gamma(\beta+\sigma_1)} \right. \\
&\left. \tfrac{(\log \xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|} \left(\tfrac{(\log T)^{\beta+\sigma_2}}{\Gamma(\beta+\sigma_2+1)} + \tfrac{(\log T)^{\beta-\sigma_2}}{\Gamma(\beta-\sigma_2+1)} \right) + \tfrac{(\log \xi)^{\beta+\sigma_1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1+1)} \right\}
\end{aligned} \tag{4.39}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&|D^q u(t)| \\
&\leq \lambda (m_0 + m_1 |u(t)| + m_2 |v(t)| + m_3 |D^p v(t)|) \left\{ \tfrac{(\log T)^{\alpha-q}}{\Gamma(\alpha-q+1)} + \tfrac{\Gamma(\alpha)(\log T)^{\alpha-q-1}}{|\Delta_1|\Gamma(\alpha-q)} \left[\tfrac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1+1)} \right. \right. \\
&\left. \left. + \tfrac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1+1)} + \tfrac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log \xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-1}}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|\Gamma(\beta+\sigma_1)\Gamma(\alpha+\sigma_2+1)} \right] \right\} \\
&+\lambda [n_0 + n_1 |u| + n_2 |v| + n_3 |D^q u|] \tfrac{\Gamma(\alpha)(\log T)^{\alpha-q-1}}{|\Delta_1|\Gamma(\alpha-q)} \left[\tfrac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)}{\Gamma(\beta+\sigma_1)} \right. \\
&\left. \tfrac{(\log \xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|} \left(\tfrac{(\log T)^{\beta+\sigma_2}}{\Gamma(\beta+\sigma_2+1)} + \tfrac{(\log T)^{\beta-\sigma_2}}{\Gamma(\beta-\sigma_2+1)} \right) + \tfrac{(\log \xi)^{\beta+\sigma_1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1+1)} \right].
\end{aligned} \tag{4.40}
$$

On a, aussi

$$
\begin{aligned}
&|v(t)| \\
&\leq \lambda (m_0 + m_1 |u(t)| + m_2 |v(t)| + m_3 |D^p v(t)|) \tfrac{(\log T)^{\beta-1}}{|\Delta_2|} \left[\tfrac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)} \right. \\
&\left. \tfrac{(\log \xi)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right|} \left(\tfrac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1+1)} + \tfrac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1+1)} \right) + \tfrac{(\log \xi)^{\alpha+\sigma_2}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2+1)} \right] \\
&+\lambda (n_0 + n_1 |u(t)| + n_2 |v(t)| + n_3 |D^q u(t)|) \left\{ \tfrac{(\log T)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} \right. \\
&+ \tfrac{(\log T)^{\beta-1}}{|\Delta_2|} \left[\tfrac{(\log T)^{\beta+\sigma_2}}{\Gamma(\beta+\sigma_2+1)} + \tfrac{(\log T)^{\beta-\sigma_2}}{\Gamma(\beta-\sigma_2+1)} + \tfrac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right|} \right. \\
&\left. \left. \tfrac{(\log \xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)\Gamma(\beta+\sigma_1+1)} \right] \right\},
\end{aligned} \tag{4.41}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|D^{p} v(t)\right| \\
&\leq \lambda\left(m_{0}+m_{1}|u|+m_{2}|v|+m_{3}\left|D^{p} v\right|\right) \frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{\left|\Delta_{2}\right| \Gamma(\beta-p)}\left[\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_{1}) \Gamma(\alpha-\sigma_{1})}{\Gamma(\alpha+\sigma_{2})}\right. \\
&\left.\frac{(\log \xi)^{\alpha+\sigma_{2}-1}}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_{1})(\log T)^{\alpha+\sigma_{1}-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_{1})(\log T)^{\alpha-\sigma_{1}-1}\right|}\left(\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_{1}}}{\Gamma(\alpha+\sigma_{1}+1)}+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_{1}}}{\Gamma(\alpha-\sigma_{1}+1)}\right)+\frac{(\log \xi)^{\alpha+\sigma_{2}}}{\Gamma(\alpha+\sigma_{2}+1)}\right] \quad (4.42)\\
&+\lambda\left(n_{0}+n_{1}|u|+n_{2}|v|+n_{3}\left|D^{q} u\right|\right)\left\{\frac{(\log T)^{\beta-p}}{\Gamma(\beta-p+1)}+\frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{\left|\Delta_{2}\right| \Gamma(\beta-p)}\left(\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_{2}}}{\Gamma(\beta+\sigma_{2}+1)}\right.\right. \\
&\left.\left.+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_{2}}}{\Gamma(\beta-\sigma_{2}+1)}+\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_{1}) \Gamma(\alpha-\sigma_{1})(\log \xi)^{\alpha+\beta+\sigma_{1}+\sigma_{2}-1}}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_{1})(\log T)^{\alpha+\sigma_{1}-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_{1})(\log T)^{\alpha-\sigma_{1}-1}\right| \Gamma(\alpha+\sigma_{2}) \Gamma(\beta+\sigma_{1}+1)}\right)\right\} .
\end{aligned}
$$

Cela, implique

$$
\begin{aligned}
&A\|u\|_{X}=\sup_{t \in[1, T]}|u(t)|+\sup_{t \in[1, T]}\left|D^{q} u(t)\right| \\
&\leq \lambda\left(m_{0} \gamma_{1}+\|u\|_{X}\left[m_{1} \gamma_{1}+(n_{1}+n_{3}) \gamma_{2}\right]+n_{0} \gamma_{2}+\|v\|_{Y}\left[(m_{2}+m_{3}) \gamma_{1}+n_{2} \gamma_{2}\right]\right) \quad (4.43)\\
&\leq m_{0} \gamma_{1}+\|u\|_{X}\left[m_{1} \gamma_{1}+(n_{1}+n_{3}) \gamma_{2}\right]+n_{0} \gamma_{2}+\|v\|_{Y}\left[(m_{2}+m_{3}) \gamma_{1}+n_{2} \gamma_{2}\right]
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\|v\|_{Y}=\sup_{t \in[1, T]}|v(t)|+\sup_{t \in[1, T]}\left|D^{p} v(t)\right| \\
&\leq \lambda\left(m_{0} \gamma_{3}+\|u\|_{X}\left[m_{1} \gamma_{3}+(n_{1}+n_{3}) \gamma_{4}\right]+n_{0} \gamma_{4}+\|v\|_{Y}\left[(m_{2}+m_{3}) \gamma_{3}+n_{2} \gamma_{4}\right]\right) \quad (4.44)\\
&\leq m_{0} \gamma_{3}+\|u\|_{X}\left[m_{1} \gamma_{3}+(n_{1}+n_{3}) \gamma_{4}\right]+n_{0} \gamma_{4}+\|v\|_{Y}\left[(m_{2}+m_{3}) \gamma_{3}+n_{2} \gamma_{4}\right].
\end{aligned}
$$

Par conséquent, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{0}\left(\|u\|_{X}+\|v\|_{Y}\right) \leq\|u\|_{X}\left\{1-\left[m_{1}(\gamma_{1}+\gamma_{3})+(n_{1}+n_{3})(\gamma_{2}+\gamma_{4})\right]\right\} \\
&+\|v\|_{Y}\left\{1-\left[(m_{2}+m_{3})(\gamma_{1}+\gamma_{3})+n_{2}(\gamma_{2}+\gamma_{4})\right]\right\} \quad (4.45)\\
&\leq m_{0}(\gamma_{1}+\gamma_{3})+n_{0}(\gamma_{2}+\gamma_{4})
\end{aligned}
$$

avec γ_0 est définie par (4.18). Ainsi,

$$
\|(u, v)\|_{XY} \leq \frac{(\gamma_{1}+\gamma_{3}) m_{0}+(\gamma_{2}+\gamma_{4}) n_{0}}{\gamma_{0}}<\infty . \quad (4.46)
$$

On conclut par le théorème de Leray-Shauder que l'opérateur A admet au moins un point fixe qui est une solution du système (4.1). □

4.4 Deuxième Résultat : Existence d'une Solution Unique

Maintenant, on considère les quantités suivantes :

$$
\begin{aligned}
\nabla_1 = {} & \frac{1}{|\Delta_1|}\Bigg[\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|}\frac{(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-\sigma-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)\Gamma(\beta+\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_2-\sigma}\right)^{1-\sigma} \\
& +\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1-\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_1-\sigma}\right)^{1-\sigma}+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1-\sigma}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha-\sigma_1-\sigma}\right)^{1-\sigma}\Bigg] \\
& \left((\log T)^{\alpha-1}+\frac{\Gamma(\alpha)(\log T)^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)}\right)+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha-\sigma}\right)^{1-\sigma}+\frac{(\log T)^{\alpha-q-\sigma}}{\Gamma(\alpha-q)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha-q-\sigma}\right)^{1-\sigma} \\
& +\frac{1}{|\Delta_2|}\Bigg[\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right|}\frac{(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\left(\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1-\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_1-\sigma}\right)^{1-\sigma}\right. \\
& \left.+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1-\sigma}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha-\sigma_1-\sigma}\right)^{1-\sigma}\right)+\frac{(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_2-\sigma}\right)^{1-\sigma}\Bigg] \\
& \left((\log T)^{\beta-1}+\frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{\Gamma(\beta-p)}\right)
\end{aligned} \tag{4.47}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\nabla_2 = {} & \frac{1}{|\Delta_1|}\Bigg[\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|\Gamma(\beta+\sigma_1)}\left(\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2-\rho}}{\Gamma(\beta+\sigma_2)}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_2-\rho}\right)^{1-\rho}\right. \\
& \left.+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2-\rho}}{\Gamma(\beta-\sigma_2)}\left(\frac{1-\rho}{\beta-\sigma_2-\rho}\right)^{1-\rho}\right)+\frac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-\rho}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_1-\rho}\right)^{1-\rho}\Bigg] \\
& \left((\log T)^{\alpha-1}+\frac{\Gamma(\alpha)(\log T)^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)}\right) \\
& +\frac{1}{|\Delta_2|}\Bigg[\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right|}\frac{(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-\rho-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)\Gamma(\beta+\sigma_1)}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_1-\rho}\right)^{1-\rho} \\
& +\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2-\sigma}}{\Gamma(\beta+\sigma_2)}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_2-\rho}\right)^{1-\rho}+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2-\rho}}{\Gamma(\beta-\sigma_2)}\left(\frac{1-\rho}{\beta-\sigma_2-\rho}\right)^{1-\rho}\Bigg] \\
& \left((\log T)^{\beta-1}+\frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{\Gamma(\beta-p)}\right)+\frac{(\log T)^{\beta-\rho}}{\Gamma(\beta)}\left(\frac{1-\rho}{\beta-\rho}\right)^{1-\rho}+\frac{(\log T)^{\beta-p-\rho}}{\Gamma(\beta-p)}\left(\frac{1-\rho}{\beta-\sigma_2-\rho}\right)^{1-\rho}.
\end{aligned} \tag{4.48}
$$

En utilisant le principe de contraction de Banach associée à l'inégalité de Hölder, on donne le résultat suivant :

4.4.1 Conditions Suffisantes

On démontre le théorème suivant

Théorème 4.4.1: [14]

Soient $\Delta_1 \neq 0$ et $\Delta_2 \neq 0$. Supposons que $(H1)$ et $(H4)$ sont vérifiées. Si

$$\|a\| \nabla_1 + \|b\| \nabla_2 \leq 1 \tag{4.49}$$

avec $\|a\| = \left(\int_1^T |a(s)|^{\frac{1}{\sigma}} ds\right)^{\sigma}$ et $\|b\| = \left(\int_1^T |b(s)|^{\frac{1}{\rho}} ds\right)^{\rho}$, alors le système couplé (4.1) a une solution unique définie sur $[1,T]$.

Preuve.

Soient $(u_i, v_i) \in XY, (i = 1,2)$ et $t \in [1,T]$. De $(H1)$ et $(H4)$, on a

$$\begin{aligned}
&|A_1(u_1,v_1)(t) - A_1(u_2,v_2)(t)| \\
&\leq \sup_{t\in[1,T]} \int_1^t \frac{\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{a(s)(|u_1(s)-u_2(s)|+|v_1(s)-v_2(s)|+|D^p v_1(s)-D^p v_2(s)|)}{s} ds \\
&+ \sup_{t\in[1,T]} \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{|\Delta_1|} \left\{ \frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1} - \Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|} \frac{(\log \xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)} \right. \\
&\left[\int_1^T \left(\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\beta+\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_2)} + \frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\beta-\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta-\sigma_2)} \right) \frac{b(s)(|u_1(s)-u_2(s)|+|v_1(s)-v_2(s)|+|D^q u_1(s)-D^q u_2(s)|)}{s} ds \right. \\
&\left. + \int_1^{\xi} \frac{\left(\log\frac{\xi}{s}\right)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)} \frac{a(s)(|u_1(s)-u_2(s)|+|v_1(s)-v_2(s)|+|D^p v_1(s)-D^p v_2(s)|)}{s} ds \right] \\
&+ \int_1^T \left(\frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\sigma_1-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1)} + \frac{\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha-\sigma_1-1}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)} \right) \frac{a(s)(|u_1(s)-u_2(s)|+|v_1(s)-v_2(s)|+|D^p v_1(s)-D^p v_2(s)|)}{s} ds \\
&\left. + \int_1^{\xi} \frac{\left(\log\frac{\xi}{s}\right)^{\beta+\sigma_1-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)} \frac{b(s)(|u_1(s)-u_2(s)|+|v_1(s)-v_2(s)|+|D^q u_1(s)-D^q u_2(s)|)}{s} ds \right\}.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Par l'inégalité de Hölder, on trouve

$$
\begin{aligned}
&|A_1(u_1,v_1)(t)-A_1(u_2,v_2)(t)|\\
&\leq \sup_{t\in[1,T]}\left(|u_1(t)-u_2(t)|+|v_1(t)-v_2(t)|+|D^p v_1(t)-D^p v_2(t)|\right)\\
&\left\{\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_1^T\left(\log\tfrac{T}{s}\right)^{\frac{\alpha-1}{1-\sigma}}\tfrac{ds}{s}\right)^{1-\sigma}\left(\int_1^T|a(s)|^{\frac{1}{\sigma}}ds\right)^{\sigma}\right.\\
&+\tfrac{(\log T)^{\alpha-1}}{|\Delta_1|}\left[\tfrac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)}{|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}|}\tfrac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)}\right.\\
&\tfrac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\left(\int_1^{\xi}\left(\log\tfrac{\xi}{s}\right)^{\frac{\alpha+\sigma_2-1}{1-\sigma}}\tfrac{ds}{s}\right)^{1-\sigma}\left(\int_1^T|a(s)|^{\frac{1}{\sigma}}ds\right)^{\sigma}\\
&+\left(\tfrac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma_1)}\left(\int_1^T\left(\log\tfrac{T}{s}\right)^{\frac{\alpha+\sigma_1-1}{1-\sigma}}\tfrac{ds}{s}\right)^{1-\sigma}+\tfrac{1}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)}\left(\int_1^T\left(\log\tfrac{T}{s}\right)^{\frac{\alpha-\sigma_1-1}{1-\sigma}}\tfrac{ds}{s}\right)^{1-\sigma}\right)\\
&\left.\left.\left(\int_1^T|a(s)|^{\frac{1}{\sigma}}ds\right)^{\sigma}\right]\right\}\\
&+\sup_{t\in[1,T]}\left(|u_1(t)-u_2(t)|+|v_1(t)-v_2(t)|+|D^q u_1(t)-D^q u_2(t)|\right)\\
&\tfrac{(\log T)^{\alpha-1}}{|\Delta_1|}\left\{\tfrac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}|\Gamma(\beta+\sigma_1)}\right.\\
&\left[\tfrac{1}{\Gamma(\beta+\sigma_2)}\left(\int_1^T\left(\log\tfrac{T}{s}\right)^{\frac{\beta+\sigma_2-1}{1-\rho}}\tfrac{ds}{s}\right)^{1-\rho}\right.\\
&\left.+\tfrac{1}{\Gamma(\beta-\sigma_2)}\left(\int_1^T\left(\log\tfrac{T}{s}\right)^{\frac{\beta-\sigma_2-1}{1-\rho}}\tfrac{ds}{s}\right)^{1-\rho}\right]\left(\int_1^T|b(s)|^{\frac{1}{\rho}}ds\right)^{\rho}\\
&\left.+\tfrac{1}{\Gamma(\beta+\sigma_1)}\left(\int_1^{\xi}\left(\log\tfrac{\xi}{s}\right)^{\frac{\beta+\sigma_1-1}{1-\rho}}\tfrac{ds}{s}\right)^{1-\rho}\left(\int_1^T|b(s)|^{\frac{1}{\rho}}ds\right)^{\rho}\right\}
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq\left(\|u_1-u_2\|+\|v_1-v_2\|\right)\|a\|\left\{\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\tfrac{1-\sigma}{\alpha-\sigma}\right)^{1-\sigma}(\log T)^{\alpha-\sigma}\right.\\
&+\tfrac{(\log T)^{\alpha-1}}{|\Delta_1|}\left[\left(\tfrac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)}{|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}|}\tfrac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)}\right.\right.
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_2-\sigma}\right)^{1-\sigma}(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-\sigma}\Bigg)+\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1-\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_1-\sigma}\right)^{1-\sigma}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha-\sigma_1-\sigma}\right)^{1-\sigma}(\log T)^{\alpha-\sigma_1-\sigma}\Bigg]\Bigg\}$$

$$+\frac{\|b\|(\|u_1-u_2\|+\|v_1-v_2\|)(\log T)^{\alpha-1}}{|\Delta_1|}\Bigg[\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|}$$

$$\frac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)}\Bigg(\frac{1}{\Gamma(\beta+\sigma_2)}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_2-\rho}\right)^{1-\rho}(\log T)^{\beta+\sigma_2-\rho}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\beta-\sigma_2)}\left(\frac{1-\rho}{\beta-\sigma_2-\rho}\right)^{1-\rho}(\log T)^{\beta-\sigma_2-\rho}\Bigg)+\frac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-\rho}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_1-\rho}\right)^{1-\rho}\Bigg].$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
&|D^qA_1(u_1,v_1)(t)-D^qA_1(u_2,v_2)(t)|\\
&\leq\|a\|(\|u_1-u_2\|+\|v_1-v_2\|)\Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha-q)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha-q-\sigma}\right)^{1-\sigma}(\log T)^{\alpha-q-\sigma}\\
&+\frac{\Gamma(\alpha)(\log T)^{\alpha-q-1}}{|\Delta_1|\Gamma(\alpha-q)}\Bigg(\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|\Gamma(\beta+\sigma_1)}\\
&\frac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_2-\sigma}\right)^{1-\sigma}(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-\sigma}\Bigg)+\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1-\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_1-\sigma}\right)^{1-\sigma}\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha-\sigma_1-\sigma}\right)^{1-\sigma}(\log T)^{\alpha-\sigma_1-\sigma}\Bigg] \qquad (4.52)\\
&+\|b\|(\|u_1-u_2\|+\|v_1-v_2\|)\frac{\Gamma(\alpha)(\log T)^{\alpha-q-1}}{|\Delta_1|\Gamma(\alpha-q)}\\
&\Bigg[\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|\Gamma(\beta+\sigma_1)}\\
&\Bigg(\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2-\rho}}{\Gamma(\beta+\sigma_2)}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_2-\rho}\right)^{1-\rho}+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2-\rho}}{\Gamma(\beta-\sigma_2)}\left(\frac{1-\rho}{\beta-\sigma_2-\rho}\right)^{1-\rho}\Bigg)\\
&+\frac{1}{\Gamma(\beta+\sigma_1)}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_1-\rho}\right)^{1-\rho}(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-\rho}\Bigg].
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
&||A_1(u_1,v_1)-A_1(u_2,v_2)||_X\\
&\leq (\|u_1-u_2\|+\|v_1-v_2\|)\,\|a\|\left\{\frac{1}{|\Delta_1|}\left[\left(\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|}\right.\right.\right.\\
&\left.\frac{(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-\sigma-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)\Gamma(\beta+\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_2-\sigma}\right)^{1-\sigma}\right)+\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1-\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_1-\sigma}\right)^{1-\sigma}\\
&\left.+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1-\sigma}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha-\sigma_1-\sigma}\right)^{1-\sigma}\right]\left((\log T)^{\alpha-1}+\frac{\Gamma(\alpha)(\log T)^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)}\right)+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha-\sigma}\right)^{1-\sigma}\\
&\left.+\frac{(\log T)^{\alpha-q-\sigma}}{\Gamma(\alpha-q)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha-q-\sigma}\right)^{1-\sigma}\right\}\\
&+(\|u_1-u_2\|+\|v_1-v_2\|)\,\frac{\|b\|}{|\Delta_1|}\left[\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|}\right.\\
&\frac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)}\left(\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2-\rho}}{\Gamma(\beta+\sigma_2)}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_2-\rho}\right)^{1-\rho}+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2-\rho}}{\Gamma(\beta-\sigma_2)}\left(\frac{1-\rho}{\beta-\sigma_2-\rho}\right)^{1-\rho}\right)\\
&\left.+\frac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-\rho}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_1-\rho}\right)^{1-\rho}\right]\left((\log T)^{\alpha-1}+\frac{\Gamma(\alpha)(\log T)^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)}\right).
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
&|A_2(u_1,v_1)(t)-A_2(u_2,v_2)(t)|\\
&\leq (\|u_1-u_2\|+\|v_1-v_2\|)\,\frac{\|a\|}{|\Delta_2|}\left[\left(\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right|}\right.\right.\\
&\frac{(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\left(\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1-\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_1-\sigma}\right)^{1-\sigma}+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1-\sigma}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha-\sigma_1-\sigma}\right)^{1-\sigma}\right)\\
&\left.+\frac{(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_2-\sigma}\right)^{1-\sigma}\right]\left((\log T)^{\beta-1}+\frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{\Gamma(\beta-p)}\right)\\
&+(\|u_1-u_2\|+\|v_1-v_2\|)\,\|b\|\left\{\frac{1}{|\Delta_2|}\left[\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right|}\right.\right.\\
&\left.\frac{(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-\rho-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)\Gamma(\beta+\sigma_1)}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_1-\rho}\right)^{1-\rho}\right)+\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2-\rho}}{\Gamma(\beta+\sigma_2)}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_2-\rho}\right)^{1-\rho}\\
&\left.+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2-\rho}}{\Gamma(\beta-\sigma_2)}\left(\frac{1-\rho}{\beta-\sigma_2-\rho}\right)^{1-\rho}\right]\left((\log T)^{\beta-1}+\frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{\Gamma(\beta-p)}\right)+\frac{(\log T)^{\beta-\rho}}{\Gamma(\beta)}\left(\frac{1-\rho}{\beta-\rho}\right)^{1-\rho}\\
&\left.+\frac{(\log T)^{\beta-p-\rho}}{\Gamma(\beta-p)}\left(\frac{1-\rho}{\beta-p-\rho}\right)^{1-\rho}\right\}
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&|D^{p}A_{2}(u_{1},v_{1})(t)-D^{p}A_{2}(u_{2},v_{2})(t)|\\
&\leq (\|u_{1}-u_{2}\|+\|v_{1}-v_{2}\|)\,\frac{\|a\|\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{|\Delta_{2}|\Gamma(\beta-p)}\bigg[\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_{1})\Gamma(\alpha-\sigma_{1})}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_{1})(\log T)^{\alpha+\sigma_{1}-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_{1})(\log T)^{\alpha-\sigma_{1}-1}\right|}\\
&\frac{(\log\xi)^{\alpha+\sigma_{2}-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_{2})}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma_{1})}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_{1}-\sigma}\right)^{1-\sigma}(\log T)^{\alpha+\sigma_{1}-\sigma}+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_{1}-\sigma}}{\Gamma(\alpha-\sigma_{1})}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha-\sigma_{1}-\sigma}\right)^{1-\sigma}\right)\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\sigma_{2})}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_{2}-\sigma}\right)^{1-\sigma}(\log\xi)^{\alpha+\sigma_{2}-\sigma}\bigg]\\
&+(\|u_{1}-u_{2}\|+\|v_{1}-v_{2}\|)\,\|b\|\bigg[\frac{1}{\Gamma(\beta-p)}\left(\frac{1-\rho}{\beta-p-\rho}\right)^{1-\rho}(\log T)^{\beta-p-\rho}\\
&+\frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{|\Delta_{2}|\Gamma(\beta-p)}\bigg(\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_{1})\Gamma(\alpha-\sigma_{1})(\log\xi)^{\alpha+\sigma_{2}-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_{2})\left|\Gamma(\alpha-\sigma_{1})(\log T)^{\alpha+\sigma_{1}-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_{1})(\log T)^{\alpha-\sigma_{1}-1}\right|}\\
&\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+\sigma_{1})}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_{1}-\rho}\right)^{1-\rho}(\log\xi)^{\beta+\sigma_{2}-\rho}\right)+\frac{1}{\Gamma(\beta+\sigma_{2})}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_{2}-\rho}\right)^{1-\rho}(\log T)^{\beta+\sigma_{2}-\rho}\\
&+\frac{1}{\Gamma(\beta-\sigma_{2})}\left(\frac{1-\rho}{\beta-\sigma_{2}-\rho}\right)^{1-\rho}(\log T)^{\alpha-\sigma_{1}-\sigma}\bigg].
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
&\|A_{2}(u_{1},v_{1})-A_{2}(u_{2},v_{2})\|_{Y}\\
&\leq (\|u_{1}-u_{2}\|+\|v_{1}-v_{2}\|)\,\frac{\|a\|}{|\Delta_{2}|}\bigg[\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_{1})\Gamma(\alpha-\sigma_{1})(\log\xi)^{\alpha+\sigma_{2}-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_{2})\left|\Gamma(\alpha-\sigma_{1})(\log T)^{\alpha+\sigma_{1}-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_{1})(\log T)^{\alpha-\sigma_{1}-1}\right|}\\
&\frac{(\log\xi)^{\alpha+\sigma_{2}-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_{2})}\left(\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_{1}-\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma_{1})}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_{1}-\sigma}\right)^{1-\sigma}+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_{1}-\sigma}}{\Gamma(\alpha-\sigma_{1})}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha-\sigma_{1}-\sigma}\right)^{1-\sigma}\right)\\
&+\frac{(\log\xi)^{\alpha+\sigma_{2}-\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma_{2})}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_{2}-\sigma}\right)^{1-\sigma}\bigg]\left((\log T)^{\beta-1}+\frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{\Gamma(\beta-p)}\right)\\
&+(\|u_{1}-u_{2}\|+\|v_{1}-v_{2}\|)\,\|b\|\bigg\{\frac{1}{|\Delta_{2}|}\bigg[\bigg(\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_{1})\Gamma(\alpha-\sigma_{1})(\log\xi)^{\alpha+\sigma_{2}-1}}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_{1})(\log T)^{\alpha+\sigma_{1}-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_{1})(\log T)^{\alpha-\sigma_{1}-1}\right|}\\
&\frac{(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_{1}+\sigma_{2}-\rho-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_{2})\Gamma(\beta+\sigma_{1})}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_{1}-\rho}\right)^{1-\rho}\bigg)+\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_{2}-\sigma}}{\Gamma(\beta+\sigma_{2})}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_{2}-\rho}\right)^{1-\rho}\\
&+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_{2}-\rho}}{\Gamma(\beta-\sigma_{2})}\left(\frac{1-\rho}{\beta-\sigma_{2}-\rho}\right)^{1-\rho}\bigg]\left((\log T)^{\beta-1}+\frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{\Gamma(\beta-p)}\right)+\frac{(\log T)^{\beta-\rho}}{\Gamma(\beta)}\left(\frac{1-\rho}{\beta-\rho}\right)^{1-\rho}+\frac{(\log T)^{\beta-p-\rho}}{\Gamma(\beta-p)}\left(\frac{1-\rho}{\beta-\sigma_{2}-\rho}\right)^{1-\rho}\bigg\}.
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

D'où,

$$
\begin{aligned}
&\|A(u_1,v_1)-A(u_2,v_2)\|_{XY}\\
&\leq (\|u_1-u_2\|+\|v_1-v_2\|)\,\|a\|\left\{\frac{1}{|\Delta_1|}\left[\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|}\right.\right.\\
&\frac{(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-\sigma-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)\Gamma(\beta+\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_2-\sigma}\right)^{1-\sigma}\Bigg)+\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1-\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_1-\sigma}\right)^{1-\sigma}\\
&+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1-\sigma}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha-\sigma_1-\sigma}\right)^{1-\sigma}\Bigg]\left((\log T)^{\alpha-1}+\frac{\Gamma(\alpha)(\log T)^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)}\right)+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha-\sigma}\right)^{1-\sigma}\\
&+\frac{(\log T)^{\alpha-q-\sigma}}{\Gamma(\alpha-q)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha-q-\sigma}\right)^{1-\sigma}+\frac{1}{|\Delta_2|}\left[\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right|}\frac{(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\right.\\
&\left(\frac{(\log T)^{\alpha+\sigma_1-\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_1-\sigma}\right)^{1-\sigma}+\frac{(\log T)^{\alpha-\sigma_1-\sigma}}{\Gamma(\alpha-\sigma_1)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha-\sigma_1-\sigma}\right)^{1-\sigma}\right)\\
&\left.\left.+\frac{(\log\xi)^{\alpha+\sigma_2-\sigma}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)}\left(\frac{1-\sigma}{\alpha+\sigma_2-\sigma}\right)^{1-\sigma}\right]\left((\log T)^{\beta-1}+\frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{\Gamma(\beta-p)}\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(\|u_1-u_2\|+\|v_1-v_2\|)\,\|b\|\left\{\frac{1}{|\Delta_1|}\left[\frac{\Gamma(\beta+\sigma_2)\Gamma(\beta-\sigma_2)}{\left|\Gamma(\beta-\sigma_2)(\log T)^{\beta+\sigma_2-1}-\Gamma(\beta+\sigma_2)(\log T)^{\beta-\sigma_2-1}\right|}\right.\right.\\
&\frac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-1}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)}\left(\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2-\rho}}{\Gamma(\beta+\sigma_2)}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_2-\rho}\right)^{1-\rho}+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2-\rho}}{\Gamma(\beta-\sigma_2)}\left(\frac{1-\rho}{\beta-\sigma_2-\rho}\right)^{1-\rho}\right)\\
&\left.+\frac{(\log\xi)^{\beta+\sigma_1-\rho}}{\Gamma(\beta+\sigma_1)}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_1-\rho}\right)^{1-\rho}\right]\left((\log T)^{\alpha-1}+\frac{\Gamma(\alpha)(\log T)^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)}\right)\\
&+\frac{1}{|\Delta_2|}\left[\frac{\Gamma(\alpha+\sigma_1)\Gamma(\alpha-\sigma_1)}{\left|\Gamma(\alpha-\sigma_1)(\log T)^{\alpha+\sigma_1-1}-\Gamma(\alpha+\sigma_1)(\log T)^{\alpha-\sigma_1-1}\right|}\frac{(\log\xi)^{\alpha+\beta+\sigma_1+\sigma_2-\rho-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma_2)\Gamma(\beta+\sigma_1)}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_1-\rho}\right)^{1-\rho}\right.\\
&\left.+\frac{(\log T)^{\beta+\sigma_2-\sigma}}{\Gamma(\beta+\sigma_2)}\left(\frac{1-\rho}{\beta+\sigma_2-\rho}\right)^{1-\rho}+\frac{(\log T)^{\beta-\sigma_2-\rho}}{\Gamma(\beta-\sigma_2)}\left(\frac{1-\rho}{\beta-\sigma_2-\rho}\right)^{1-\rho}\right]\left((\log T)^{\beta-1}+\frac{\Gamma(\beta)(\log T)^{\beta-p-1}}{\Gamma(\beta-p)}\right)\\
&\left.+\frac{(\log T)^{\beta-\rho}}{\Gamma(\beta)}\left(\frac{1-\rho}{\beta-\rho}\right)^{1-\rho}+\frac{(\log T)^{\beta-p-\rho}}{\Gamma(\beta-p)}\left(\frac{1-\rho}{\beta-\sigma_2-\rho}\right)^{1-\rho}\right\}.
\end{aligned}
$$

En tenant compte de (4.49), on obtient

$$\|A(u_1,v_1)-A(u_2,v_2)\|_{XY}\leq\|u_1-u_2\|_X+\|v_1-v_2\|_Y\,. \tag{4.58}$$

Donc A est une application contractante. Le système (4.1) admet un point fixe unique. □

Exemple 1

Considérons le système non linéaires de type Hadamard

$$\begin{cases} D^{\frac{5}{3}}u(t) = \frac{u(t)}{44e^t} - \frac{v(t)}{50t^3} + \frac{D^{\frac{4}{3}}v(t)}{33e^{t^2+1}} + \log(t+1), t \in [1,e] \\ D^{\frac{3}{2}}v(t) = \frac{u(t)}{35\pi t^3} + \frac{v(t)}{20e^2\sqrt{t^2+1}} + \frac{D^{\frac{4}{3}}u(t)}{41e^{t^2-1}} + t, t \in [1,e], \\ u(1) = 0, \ \ D^{\frac{1}{2}}u(e) = I^{\frac{1}{2}}\left(u(e) - v\left(\frac{3}{2}\right)\right), \\ v(1) = 0, \ \ D^{\frac{1}{2}}v(e) = I^{\frac{1}{2}}\left(v(e) - u\left(\frac{3}{2}\right)\right) \end{cases} \tag{4.59}$$

où $\alpha = \frac{5}{3}, \beta = \frac{3}{2}, \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2}, p = q = \frac{4}{3}$, $f(t, u(t), v(t), D^p v(t)) = \frac{u(t)}{44e^t} - \frac{v(t)}{50t^3}$ $+ \frac{D^{\frac{4}{3}}v(t)}{33e^{t^2+1}} + \log(t+1)$, $g(t, u(t), v(t), D^q u(t)) = \frac{u(t)}{35\pi t^3} + \frac{v(t)}{20e^2\sqrt{t^2+1}} \frac{D^{\frac{4}{3}}u(t)}{41e^{t^2-1}} + t$,
telles que : $|f(t, u_1, u_2, u_3)| \leq m_0 + \sum_{i=1}^{3} m_i |u_i|$, $|g(t, u_1, u_2, u_3)| \leq n_0 + \sum_{i=1}^{3} n_i |u_i|$
avec $m_0 = 1.3133, m_1 = 8.360910^{-3}, m_2 = 0.02, m_3 = 4.101110^{-3}, n_0 = e$
$n_1 = 9.094610^{-3}, n_2 = 4.784810^{-3}, n_3 = 0.02439$. On constate que
$\gamma_1 = 2.1571, \gamma_2 = 5.5533, \gamma_3 = 3.592910^{-5}, \gamma_4 = 3.2927$.
On voie que

$$m_1(\gamma_1 + \gamma_3) + (n_1 + n_3)\left(\gamma_2 + \gamma_4\right) = 0.31424 < 1$$

et

$$(m_2 + m_3)(\gamma_1 + \gamma_3) + n_2\left(\gamma_2 + \gamma_4\right) = 9.431610^{-2} < 1.$$

D'après le théorème 4.3.1, le problèm (4.59) admet au moins une solution sur $[1, e]$.

Exemple 2

Considérons le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} D^{\frac{\sqrt{5e}}{2}}u(t) = \frac{1}{61e^t}\left(\frac{u(t)}{et} + \frac{v(t)}{t+1} + D^{\frac{\pi}{6}}v(t)\right) + t, t \in [1,e] \\ \\ D^{\frac{(e+1)^2}{7}}v(t) = \frac{t}{51e}\left(\frac{u(t)}{t-4} + \frac{v(t)}{2t} + \frac{D^{\frac{e}{\pi}}u(t)}{e+1}\right) - 3t, t \in [1,e], \\ \\ u(1) = 0, \;\; D^{\frac{1}{2}}u(e) = I^{\frac{1}{2}}\left(u(e) - v\left(\sqrt{e}\right)\right), \\ \\ v(1) = 0, \;\; D^{\frac{\sqrt{e-1}}{2}}v(e) = I^{\frac{\sqrt{e-1}}{2}}\left(v(e) - u\left(\sqrt{e}\right)\right) \end{cases} \tag{4.60}$$

on a, $\alpha = \frac{\sqrt{5e}}{2}, \beta = \frac{(e+1)^2}{7}, \sigma_1 = \frac{1}{2}, \sigma_2 = \frac{\sqrt{e-1}}{2}, p = \frac{\pi}{6}, q = \frac{e}{\pi}, \xi = \sqrt{e}, \delta = \frac{e}{3}, \rho = \frac{3}{4}$
et $f(t,u(t),v(t),D^p v(t)) = \frac{1}{61e^t}\left(\frac{u(t)}{et} + \frac{v(t)}{t+1} + D^{\frac{e\pi}{6}}v(t)\right) + t,$
$g(t,u(t),v(t),D^q u(t)) = \frac{t}{51e}\left(\frac{u(t)}{t-4} + \frac{v(t)}{2t} + \frac{D^{\frac{2e}{\pi}}u(t)}{e+1}\right) - 3t$
on a $|f(t,u_1,u_2,u_3) - f(t,v_1,v_2,v_3)| \leq a(t)\sum_{i=1}^{3}|u_i - v_i|,$
$|g(t,u_1,u_2,u_3) - g(t,v_1,v_2,v_3)| \leq b(t)\sum_{i=1}^{3}|u_i - v_i|$, telles que : $a(t) = \frac{1}{61e^t}, b(t) = \frac{t}{51e}$
avec $\Delta_1 = -0.11100, \Delta_2 = -0.18790, \nabla_1 = 51.197.73, \;\nabla_2 = 26.51$
et $\|a\| = \left(\int_1^e |a(s)|^{\frac{1}{\delta}}ds\right)^{\delta} = 4.759510^{-3}, \|b\| = \left(\int_1^e |b(s)|^{\frac{1}{\rho}}ds\right)^{\rho} = 2.036810^{-2}.$
Par conséquent,

$$\|a\|\nabla_1 + \|b\|\nabla_2 = 0.71784 \leq 1.$$

Toutes les conditions du théorème 4.4.1 sont vérifies. Cela nous permet de conclure que le système (4.60) admet une solution unique sur $[1,e]$.

Conclusion et Perspectives

L'objectif de cette thèse est la généralisation des inégalités intégrales d'ordres non entier et l'étude d'un système des équations différentielles d'ordre arbitraires au sens de Hadamard.

On a donné quelques résultats sur la généralisation des opérateurs intégraux fractionnaires, on a démontré aussi certaines propriétés telles que : semi-groupe et la commutativité pour les classes suivantes : l'intégrale fractionnaire mixte de type Hadamard, l'opérateur mixte $k-$fractionnaire et les intégrales mixtes s et $(k,s)-$fractionnaires de type Hadamard par rapport à une fonction h croissante et positive sur $(a,b]$. On a également généralisé certaines classes d'inégalités intégrales classiques de type Chebyshev avec poids par les opérateurs fractionnaires de Riemann Liouville. Ces résultats se sont les généralités des travaux de Awan Pecaric et Rehmen de 2015.

On a appliqué les inégalités fractionnaires pour étudier une classe de système couplé d'ordre arbitraire, et en particulier : fournir une réponse à la question d'existence et d'unicité de la solution d'équations différentielles fractionnaires avec des conditions aux limites au sens de Hadamard. En effet, après avoir donné la représentation du problème, on a établit des conditions suffisantes assurant l'existence et l'unicité de solution du système considéré.

A l'issue de cette petite contribution dans le calcul fractionnaire, des perspectives sont ouvertes : A l'aide de ces nouveaux intégrales, on peut étudier et présenter des nouvelles estimations pour les variables aléatoires continues avec fonctions de densité à plusieurs variables. On peut aussi envisager la question d'existence et d'unicité pour pas mal de classe d'équations fractionaires de type Hadamrd. Voilà donc queleques chemins à suivre.

Bibliographie

[1] **R.P. Agarwal, D. Baleanu, V. Hedayati and S. Rezapour**, *Two fractional derivative inclusion problems via integral boundary condition.* Appl. Math. Comput. 257 (2015), 205-212.

[2] **R.P. Agarwal, Y. Zhou and Y. He**, *Existence of fractional neutral functional differential equations.* Comput. Math. Appl. 59 (2010), 1095-1100.

[3] **B. Ahmad and S.K. Ntouyas**, *A fully Hadamard type integralboundary value problem of a coupled system of fractional differential equations.* Fract. Calc. Appl. Anal. 17 (2014), 348-360.

[4] **B. Ahmad and J.J. Nieto**, *Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions.* Comput. Math. Appl. vol. 58 (2009), no. 9, 1838-1843.

[5] **A. Alsaedi, S. K. Ntouyas, R. P. Agarwal and B. Ahmad**, *On Caputo type sequential fractional differential equations with nonlocal integral boundary conditions.* Advances in Difference Equations. article 33, (2015).

[6] **G. A. Anastassiou**, *Advances on Fractional Inequalities*, Springer Briefs in Mathematics, Springer, New York, NY, USA. (2011).

[7] **S. Anber, Z. Dahmani and B. Bendoukha**, *Some new results using integration of arbitrary order*, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 4(2), (2013), 45-52.

[8] **K. M. Awan, j. Pecaric and A. Rehman**, *Steffensen's generalization of Chebyshev inequality* J. Math. Inequal, 9(1), (2015), 155-163.

[9] **C. Bai**, *Impulsive periodic boundary value problems for fractional differential equation involving Riemann–Liouville sequential fractional derivative.* J. Math. Anal. Appl. 3(2), (2011), 211-231.

[10] **D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas and J.J. Trujillo**, *Fractional Calculus Models and Numerical Methods Series on Complexity.* Nonlinearity and Chaos, World Scientific, Boston. (2012).

[11] **S. Belarbi and Z. Dahmani**, *On some new fractional integral inequalities*, J. Inequal. Pure Appl. Math. 10(3), (2009), 1-12.

[12] **M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas**, *Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions.* Nonlinear Anal. 71 (2009), 2391-2396.

[13] **M. Bezziou and Z. Dahmani**, *New coupled order Hadamard operators and some applications.* Advances in Operator Theory. 4 (2019), 651-672.

[14] **M. Bezziou, Z. Dahmani and M. Houas**, *Differential systems of Hadamard type : existence and uniqueness of solutions*, Eurasian Mathematical Journal. 10(1), (2019).

[15] **M. Bezziou, Z. Dahmani and A. Khameli,** *Some weighted inequalities of Chebyshev type via RL-approach,* Mathematica. 60(83), (2018), 12-20.

[16] **M. Bezziou, Z. Dahmani and M.Z. Sarikaya**, *New operators for fractional integration theory with some applications*, JME. Vol. 12, No. 4, (2018), 87-100.

[17] **M. Bezziou, Z. Dahmani, M.Z. Sarikaya and I. Jebril**, New mixed operators for fractional integrations with some applications, Malaysian Journal of Mathematical Sciences soumis.

[18] **P.L. Butzer, A.A. Kilbas and J.J. Trujillo**, *Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property.* J. Math. Anal. Appl. 269 (2002), 387-400.

[19] **L. Byszewski**, *Theorems about existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem.* J. Math. Anal.Appl. 162 (1991), 494-505.

[20] **R.E. Castello and E. Trousselot**, Reverse generalized Hôlder and Minkowski type inequalities and their applications, Bol. Mat. 17 (2010), no. 2, 137-142.

[21] **P. Cerone and S. S. Dragomir,** *Some new Ostrowski-type bounds for the Chebyshev functional and applications*, J. Math. Inequal. 8(1), (2014), 159-170.

[22] **P. L. Chebyshev**, *Sur les expressions approximatives des integrales definis par les autres prises entre les memes limite*. Proc. Math. Soc. Charkov. 2 (1882), 93-98.

[23] **Y. Chen, D. Chen and Z. Lv**, *The existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with multi-point boundary conditions.* Bull. Iranian Math. Soc. 38 (2012), 607-624.

[24] **V. L. Chinchane and D. B. Pachpatte**, *New fractional inequalities involving Saigo fractional integral operator*, Math. Sci. Lett. 3(3), (2014) 133-139.

[25] **Z. Dahmani,** *New inequalities in fractional integrals,* International Journal of Nonlinear Sciences. 9(4), (2010), 493-497.

[26] **Z. Dahmani**, *About some integral inequalities using Riemann-Liouville integrals*. General Mathematics. 20(4), (2012), 63-69.

[27] **Z. Dahmani**, On Minkowski and Hermite-Hadamard integral inequalities via fractional integration, Annals of Functional Analysis. 1 (2010), no. 1, 51-58.

[28] **Z. Dahmani and N. Bedjaoui**, *New generalized integral inequalities*, J. Advan. Res. Appl. Math. 3(4) (2011) 58-66.

[29] **Z. Dahmani, O. Mechouar and S. Brahami**, *Certain inequalities related to the Chebyshev's functional involving Riemann-Liouville operator*. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications. 3(4), (2011), 38-44.

[30] **Z. Dahmani and H. Metakkel El Ard**, *Generalizations of some integral inequalities using Riemann-Liouville operator*, Int. J. Open Problems Compt. Math. 4(4), (2011) 40-46.

[31] **Z. Dahmani and L. Tabharit**, *On weighted Grüss type inequalities via fractional integrals*. JARPM. Journal of Advanced Research in Pure Mathematics. 2(4), (2010), 31-38.

[32] **K. Deimling**, *Nonlinear Functional Analysis.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. (1985).

[33] **R. Diaz and E. Pariguan**, On hypergeometric functions and Pochhammer k-symbol, Divulg. Math. 15 (2007), no. 2, 179-192.

[34] **S. S. Dragomir**, *A generalization of Grüss inequality in inner product spaces and applications*, J. Math. Annal. Appl. 237(1), (1999), 74-82.

[35] **K. Ferreira and A.C. Rui**, *Nontrivial solutions for fractional q-difference boundary value problems.* Theory Differ.Equ. 70 (2010), 1-10.

[36] **F. Gorenflo and Mainardi,** *Fractional calculus : integral and differential equations of fractional order*, Springer Verlag, Wien. (1997), 223-276.

[37] **A. Granas and J. Dugundji**, *Fixed Point Theory.* Springer, New York. 123 (2003).

[38] **Hadamard,** *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, Jour.Pureand Appl. Math. 4(8),(1892),101-186.

[39] **R. Hilfer**, *Applications of Fractional Calculus in Physics.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd (2000).

[40] **M. Houas and Z. Dahmani**, *On existence of solutions for fractional differential equations with nonlocal multi-point boundary conditions.* Lobachevskii Journal of Mathematics. 37 (2), (2016), 120-127.

[41] **M. Houas, Z. Dahmani and M. Benbachir**, *New results for a boundary value problem for differential equations of arbitrary order.* International Journal of Modern Mathematical Sciences. 7 (2), (2013), 195-211.

[42] **X. Jiang, M. Xu and H. Qi**, *The fractional diffusion model with an absorption term and modified Fick's law for non-local transport processes.* Nonlinear Anal. Real World Appl. 11 (2010), no. 1, 262-269.

[43] **U.N. Katugompola,** *New Approach To A Generalized Fractional Integral*, Applied Math and Comp. 218 (2011), no. 3, 860-865.

[44] **A.A. Kilbas**, *Hadamard-type fractional calculus.* J. Korean Math. Soc. 38 (2001), 1191-1204.

[45] **A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo**, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V, Amsterdam. (2006).

[46] **S. Konjik, L. Oparnica and D. Zorica**, *Waves in viscoelastic media described by a linear fractional model.* Integral Transforms Spec. Funct. 22 (2011), no 4-5, 283-291.

[47] **V. Lakshmikantham and A.S. Vatsala**, *Basic theory of fractional differential equations.* Nonlinear Anal. 69 (2008), 2677-2682.

[48] **Y. Li, Z. Wei**, *Positive solutions for a coupled systems of mixed higher-order nonlinear singular fractional differential equations.* Fixed Point Theory. 15 (2014), 167-178.

[49] **F. Mainardi**, *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity, An Introduction to Mathematical Models.* Imperial College Press and World Sci. London-Singapore. (2010).

[50] **F. Mainardi**, *Fractional calculus. Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F. Mainaedi, Eds)*. Springer-Verlag, Wien. (1997), 291-348.

[51] **A. McD Mercer**, *An improvement of Grüss inequality*. JIPAM. 10(4), (2005), Art.93.

[52] **A. McD Mercer and P. Mercer**, *New proofs of the Grüss inequality*. Aust. J. Math. Anal. Appl. 1(2), (2004), Art.12.

[53] **D.S. Mitrinovic, J.E. Peăric and A.M. Fink**, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic. (1993).

[54] **K. S. Miller and B. Ross**, *An introduction to the fractional calculus and differential equations*. Jhon Wiley, New York. 1993.

[55] **S.Mubeen and G.M. Habibullah,** *k–fractional integrals and application*, Int. J. Contemp.Math. Sciences. 7(2), (2012), 89-94.

[56] **T.F. Nonnenmacher and R. Metzler**, *On the Riemann-Liouville fractional calculus and some recent applications.* Fractals. 3(3), (1995), 557-566.

[57] **S.k. Ntouyas**, *boundary value problems for nonlinear fractional differential equations and inclusions with nonlocal and fractional integral boundary conditions.* Opuscula Math. 33(1), (2013), 117-138.

[58] **K. Oldham**, *Rractional differential equations in electrochemistry.* Adv. Eng. Softw. 41 (2010), no. 1., 9-12.

[59] **A. M. Ostrowski,** *On an integral inequality*, Aequationes Math. 4 (1970), 358-373.

[60] **D. O'Regan and S. Stanek**, *Fractional boundary value problems with singularities in space variables.* Nonlinear Dyn. 71 (2013), 641-652.

[61] **B. G. Pachpatte**, *Mathematical inequalities*, North Holland Mathematical Library. 67 (2005).

[62] **B. G. Pachpatte**. *On multidimensional Grüss type integral inequalities*. J.I.P.A.M. 03(2), (2002) : Art. 27.

[63] **I. Podlubny**, *Fractional Differential Equations.* Academic Press, San Diego. (1999).

[64] **S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev,** *Fractional Integrals and Derivatives Theory and Application*, Gordan and Breach Science, New York. 1993.

[65] **M. Z. Sarikatya,** *On the Ostrowski type integral inequality*, Acta Math. Univ. Comenianaen. LXXIX(1), (2010), 129-134.

[66] **M. Z. Sarikaya, N. Aktan and H. Yildirim**, *On weighted Chebyshev-Grüss like inequalities on time scales*. J. Math. Inequal. 2(2), (2008), 185-195.

[67] **M. Z. Sarikaya, Z. Dahmani, M.E. Kiris and F. Ahmad**, $(k,s)-$*Riemann-Liouville fractional integral and applications*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. Volume 45 (1) (2016), 77-89.

[68] **M. Z. Sarikaya and A. Karaca**, *On the* $k-$*Riemann-Liouville fractional integral and applications*, International Journal of Statistics and Mathematics. 1(3), (2014) 033-043.

[69] **M. Z. Sarıkaya and H. Ogunmez**, *On new inequalities via Riemann-Liouville Fractional Integration*, Abstract and Applied Analysis. vol, Article ID 428983, (2012), 10 pages.

[70] **M. Z. Sarikaya and H. Yaldiz**, *New generalization fractional inequalities of Ostrowski-Grüss type*. Lobachevskii Journal of Mathematics. 34(4), (2013), 326-331.

[71] **E. Set, M. Tomar and M.Z. Sarikaya**, *On generalization Grüss type inequalities for* $k-$*fractional integrals*. Applied Mthematics and Computation. 269 (2015), 29-34.

[72] **S. Tafa and K. Brahimb**, *Some new results using Hadamard fractional integral*. Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 7(1), (2016), 103-109.

[73] **D.K. Tong, R.H. Wang and H.S. Yang**, *Exact solutions for the flow of non-Newtonian fluid with fractional derivative in an annular pipe.* Sci. China. Ser. G. 48 (2005), 485-495.

[74] **D. Ucar and A. Deniz**, *Generalizations of Hölder's inequalities on time scales*, Journal of Math. Inequal. 9(1), (2015), 247-255.

[75] **J. Wang, H. Xiang and Z. Liu**, *Positive solution to nonzero boundary values problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations.* Int. J. Diff. Equ. (2010).

[76] **W. Yang**, *Positive solutions for singular Hadamard fractional differential system with four-point coupled boundary conditions.* J. Appl. Math. Comput. 49 (2015),357-381.

[77] **W. Yang**, *Positive solutions for singular coupled integral boundary value problems of nonlinear Hadamard fractional differential equations.* J. Nonlinear Sci. Appl. 8 (2015), 110-129.

[78] **K. Zhang, J. Xu, D. O'Regan**, *Positive solutions for a coupled systems of nonlinear fractional differential equations.* Math. Methods Appl. Sci. 38 (2015), 1662-1672.