



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research
جامعة محمد العيد باحديس - مستغانم
Abdelhamid Ibn Badis University of Mostaganem
كلية العلوم والتكنولوجيا
Faculty of Sciences and Technology
قسم الهندسة الميكانيكية
Department of Mechanical Engineering



N° d'ordre : M...../GM/2020

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE MASTERACADEMIQUE

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Thème

Calculs des pressions de contact dans les engrenages cylindriques à
dentures droites

Présenté par :

- ❖ MEFTAHI Ilyas
- ❖ MEGHALET Youcef

Soutenu le 30/06/2020 devant le jury composé de :

Président	Pr : H.GUECHICHI	Université de Mostaganem UMAB
Examineur	Dr : A . KHIAT	Université de Mostaganem UMAB
Examineur	Dr.	Université de Mostaganem UMAB
Encadreur	Dr : S. BENKABOUCHE	Université de Mostaganem UMAB

Année Universitaire : 2019 / 2020

Remerciement

*Nous tenions tout d'abord à remercier dieu le tout puissant et
miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience
d'accomplir ce Modeste travail.*

*Nous remercions Monsieur B.E.N.K.A.B.O.U.C.H.E, pour
avoir accepté de suivre et de diriger notre travail, pour le temps qu'il a
consacré à nous apporter les outils méthodologiques indispensables à la
réalisation de notre travail et pour ses précieux conseils, qui ont contribué à
alimenter notre réflexion.*

*Nous adressons nos remerciements les plus respectueux à Messieurs les membres du jury
pour avoir pris le temps de lire et d'examiner notre travail.*

*Nos remerciements vont également à nos Enseignants et nos Collègues de la filière de
Génie Mécanique en particulier ceux du parcours: construction mécanique.*

*Nous tenons à remercier tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, ont participé à la
réalisation de ce travail.*

Dédicace

Nous dédions ce travail :

À nos mères, nos pères, qui nous sont les

Plus chers au monde

À nos frères et sœurs, à nos familles

À tous nos amis et collègues

À tous ceux qui nous ont aidés à finir ce mémoire.

Remerciement	
Dédicaces	
Sommaire	
Introduction	1
Chapitre I :Généralité sur les engrenages	2
• 1.1. Historique	2
• 1.2. Définition	2
• 1.3. Avantages et inconvénients des engrenages	3
• 1.4. Les types d'engrenages	3
➤ 1.4.1 Engrenages cylindriques à denture droite	3
- I.4.1.1 Dimensions normalisées.....	4
- I.4.1.2 Profil des dents.....	5
- I.4.1.3 Profil en développante de cercle.....	6
- I.4.1.4 Ligne d'engrènement ou ligne d'action.....	6
- I.4.1.5 Equation de la développante de cercle.....	7
- I.4.1.6 Caractéristiques d'une denture, terminologie.....	7
- I.4.1.7 Caractéristiques et formule des engrenages cylindriques à denture droite.....	8
- I.4.1.8 Matériaux utilisés.....	8
➤ 1.4.2 Engrenages cylindriques à denture hélicoïdale.....	8
- I.4.2.1 Caractéristiques des engrenages à denture hélicoïdale.....	9
➤ 1.4.3 Engrenage conique ou à axes concourants.....	10
➤ 1.4.4 Engrenages à roue et vis sans fin.....	12
Chapitre II : calcul des pressions de contact dans les engrenages cylindriques à denture droite	15
• II.1 Introduction	15
• II.2 Pression de contact entre deux cylindres.....	15
➤ II.2.1 Contact de pression des engrenages à denture droite.....	17
• II.3 Contrainte de flexion.....	19
Chapitre III : Analyse des contraintes dans un engrenage cylindrique.....	24
• III.1 Introduction.....	24
• III-2 Calcul analytique des contraintes.....	24
• III-3 Calcul des paramètres des contraintes.....	24
• III-4 Calcul des pressions de contact.....	25
• III-5 Calcul des contraintes de flexion.....	26
Conclusion générale.....	29
Référence.....	30
Résumé.....	31
Abstract.....	31
ملخص.....	32

Introduction générale

Les études sur les engrenages ont, depuis longtemps, une grande importance dans la conception de ce type d'éléments de machine, les conditions d'usinage, la lubrification et ces périodes d'entretien ont aussi une influence sur la résistance des charges appliquées et la tenue en fatigue. Leur fonction est s'assurer une meilleure longévité de l'équipement dont ils sont montés, sans avoir des anomalies durant les périodes de fonctionnement.

Les engrenages cylindres ont une large application, dans le domaine industriel, car ils sont montés dans les réducteurs de vitesses, permettant la réduction de la vitesse de sortie, ainsi que la transmission des couples, selon la taille de ces équipements. Parfois les engrenages n'arrivent pas à satisfaire leur fonction, provoquant des dysfonctionnements des chaînes de production, cela est rendu aux anomalies rencontrées au niveau des dents : piqure, grippage, écaillage, ...etc. les causes de ces avaries sont : étude moins approfondie, mauvaise lubrification, les surcharges, ...etc.

Le travail envisagé dans ce mémoire, est une étude sur les contraintes résultantes par les charges exercées sur les dents d'un engrenage cylindrique à denture droite, telles que les pressions de contact, au niveau de la zone de contact entre la roue menante et la roue menée, et la contrainte de flexion au fond du pied de la dent. Une étude bibliographique est entamée, en premier chapitre, sur les différents systèmes d'engrènement, leurs caractéristiques géométriques, leurs avantages et inconvénients les uns par rapport aux autres. Le deuxième chapitre est réservé à la détermination des expressions analytiques des pressions de contact déduites selon la théorie de Hertz, ainsi que les contraintes de flexion, suivi de la mise en évidence des facteurs pratiques, qui entrent dans l'évaluation réelle de ces contraintes. Dans le troisième chapitre, un exemple d'application est étudié, afin de calculer les contraintes citées dans le chapitre cité au-dessus, et l'exploitation d'un ensemble de graphes déduisant les facteurs de correction.

Une conclusion finalise ce mémoire, et quelques recommandations pour les futures recherches.

Chapitre 1 : Généralité sur les engrenages

1.1. Historique

L'histoire des engrenages commence dans les civilisations antiques, avec les roues de friction. Cependant, c'est seulement dans la période de la renaissance que les mathématiciens ont commencé à appliquer les principes géométriques pour déterminer le meilleur profil de la dent d'engrenage. La conception d'un engrenage comprend des calculs mathématiques, l'aspect géométrique, la détérioration, les matériaux, la fabrication et la vérification. Parmi tous ces paramètres, il est essentiel de connaître avec précision les contraintes se trouvant dans la dent d'engrenage pour prévenir certains risques de rupture. Par conséquent, plusieurs méthodes théoriques et expérimentales ont été développées, à partir de la fin du XI^e siècle ; la figure 1.1 montre un dessin des mécanismes par Léonard de Vinci [1] .

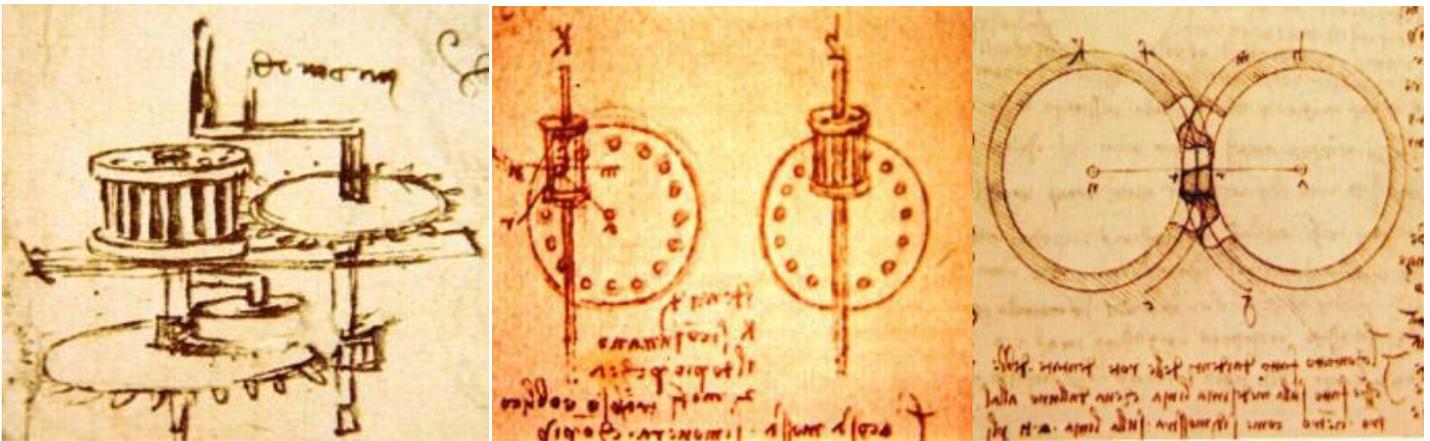


Figure 1.1 : Dessin représente des mécanismes par Léonard de Vinci

1.2. Définition

Un engrenage est un mécanisme composé de deux roues dentées mobiles autour d'axes de position fixe et dont l'une entraîne l'autre par l'action de dents successivement en contact, et on dit que les deux roues sont conjuguées. La plus petite roue est appelée pignon, la plus grande est la roue, voir la figure I.2.

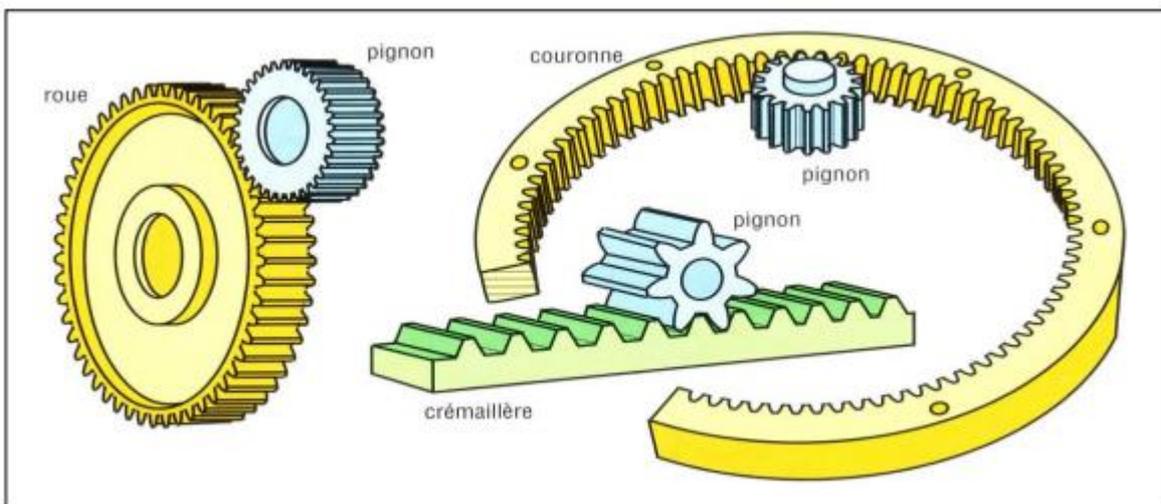


Figure 1.2 : Schéma d'engrenage (roue et pignon).

1.3. Avantages et inconvénients des engrenages :

Avantages

- Transmission de puissances élevées sous fréquences de rotation élevées.
- Transmission à rapport rigoureusement constante (transmission synchrone).
- Transmission parfaitement homocinétique.
- Possibilités de transmissions entre plusieurs arbres.
- Rendement élevé.
- Durée de vie importante et Bonne fiabilité.

Inconvénients

- Nécessité d'un entraxe précis et constant.
- Niveau sonore variable suivant le type d'engrenage.
- Transmission des à-coups et vibrations.
- Nécessité d'une lubrification, souvent par fluide.
- Réversibilité possible suivant type d'engrenage.
- Coût très variable suivant type d'engrenage et classe de qualité

1.4. Les types d'engrenages :

1.4.1 Engrenages cylindriques à denture droite

Ces engrenages sont les plus simples et les plus répandus, leurs surfaces primitives sont des cylindres parallèles tangents et le contact entre les dents se fait suivant une ligne droite inclinée d'un angle appelé angle de pression (voir figure 1.3).

Du fait de leur relative simplicité, ils sont souvent utilisés pour introduire les relations de cinématique et les définitions normalisées concernant la géométrie des engrenages.



Figure 1.3 : Engrenages cylindriques à denture droite.

I.4.1.1 Dimensions normalisées

Deux valeurs permettent de définir les roues dentées, le module et l'angle de pression :

- Le module m

Le module, désigné généralement par m , est une caractéristique importante des engrenages qui représente la dimension des dents. Pour qu'il y ait engrenement correct entre un pignon et une roue, il est nécessaire que leurs modules soient les mêmes (voir Tableau 1.1, et figure 1.4).

Tableau 1.1 : Modules normalisés des engrenages [2].

Valeurs normalisées du module m									
Valeurs principales en mm					Valeurs secondaires en mm				
0.06	0.25	1.25	5	20	0.07	0.28	1.125	5.5	22
0.08	0.30	1.5	6	25	0.09	0.35	1.375	7	28
0.1	0.40	2	8	32	0.11	0.45	1.75	9	36
0.12	0.5	2.5	10	40	0.14	0.55	2.75	11	45
0.15	0.75	3	12	50	0.18	0.7	3.5	14	55
0.2	1	4	16	60	0.22	0.9	4.5	18	70

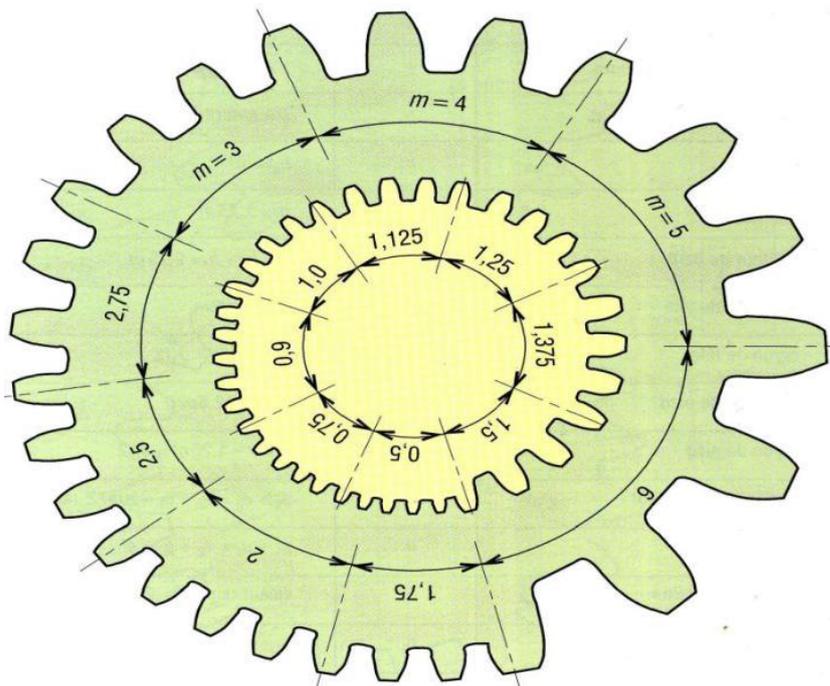


Figure 1.4 : Exemple de différents modules.

- Angle de pression α

Pour une position de contact quelconque entre le pignon et la roue le long de la ligne d'engrènement, les angles de pressions respectifs \varnothing_r de la roue et \varnothing_p du pignon sont différents. Cependant, lorsque ce point de contact se fait en O (point primitif), les angles de pression deviennent égaux à \varnothing_c qui est aussi l'angle de pression de l'outil de taillage (figure 1.5).

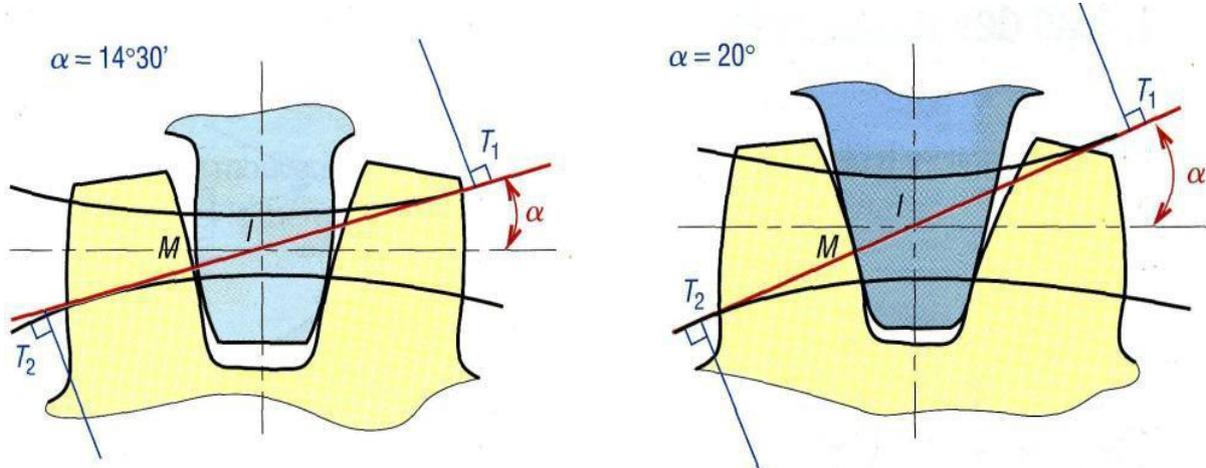


Figure 1.5 : Angle de pression.

I.4.1.2 Profil des dents

Les dents doivent permettre de maintenir toujours les deux roues en contact, d'assurer une rotation continue d'une roue par rapport à l'autre et de ne pas bloquer le fonctionnement de l'engrenage. Le profil d'une dent de roue dentée n'est ni une droite ni un arc de cercle (figure 1.6).

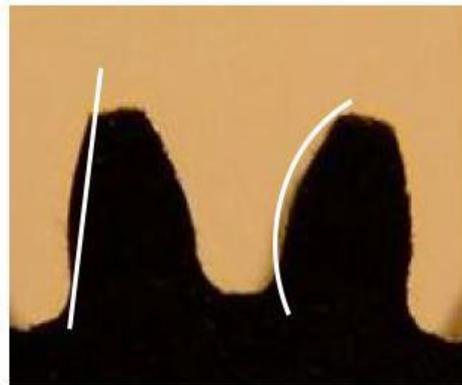


Figure 1.6 : Profil d'une dent en comparaison avec une droite et un arc de cercle

I.4.1.3 Profil en développante de cercle

La développante de cercle est donc la courbe dont les normales restent tangentes à un cercle fixe. Plus concrètement, c'est la courbe que trace une main déroulant une bobine de fil tenue dans l'autre main.

Si on considère deux cercles de base associés à deux roues d'un même engrenage, il est possible de faire rouler sans glisser une droite simultanément sur les deux cercles. De ce fait la vitesse circonférentielle des points des cercles est la même que ceux de la droite. Un point de la droite (point d'engrènement) va générer, sur les deux pignons, le flanc de dent ; la figure 1.7 représente la développante de cercle.

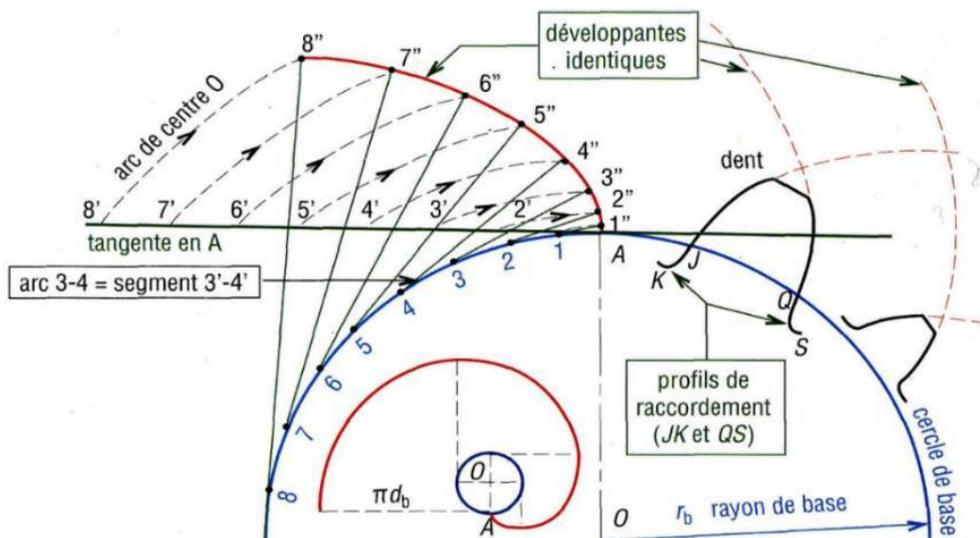


Figure 1.7 : Développante de cercle.

I.4.1.4 Ligne d'engrènement ou ligne d'action

L'approche se définit comme étant la phase où le point de contact C entre une paire de dents sur la ligne d'action se déplace de T1 à O, soit du début du contact jusqu'au point primitif. La retraite se définit comme étant la phase où le point de contact C entre une paire de dents sur la ligne d'engrènement se déplace de O à T2, soit du point primitif jusqu'à la fin du contact ; la figure 1.8 représente l'approche et la retraite dans un couple d'engrenage.

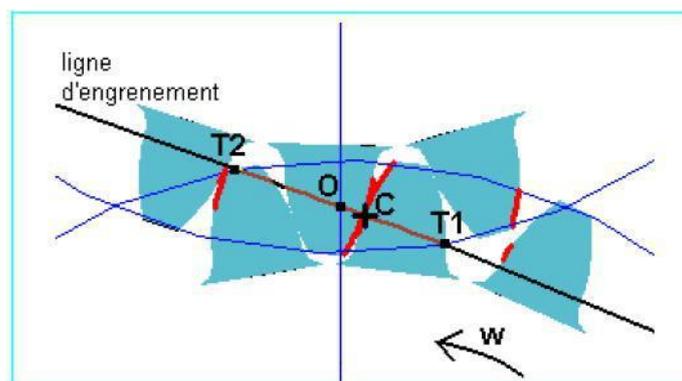


Figure 1.8 : Approche et retraite dans un couple d'engrenage.

I.4.1.5 Equation de la développante de cercle

Une développante de cercle est une courbe définie par l'ensemble des points M tels que, en coordonnées polaires ; la figure 1.9 montre les paramètres de la développante de cercle.

$$\overline{TM} = \text{arc}(TP)$$

Le cercle de base C_b de rayon r_b définit la développante de cercle :

$$r_b \tan(\alpha) = r_b(\theta + \alpha)$$

$$p = r_b / \cos(\alpha)$$

$$\theta = \tan(\alpha) - \alpha$$

avec : $\theta = \text{inv}(\alpha)$ et $\text{inv}20^\circ = 0,0149043839$

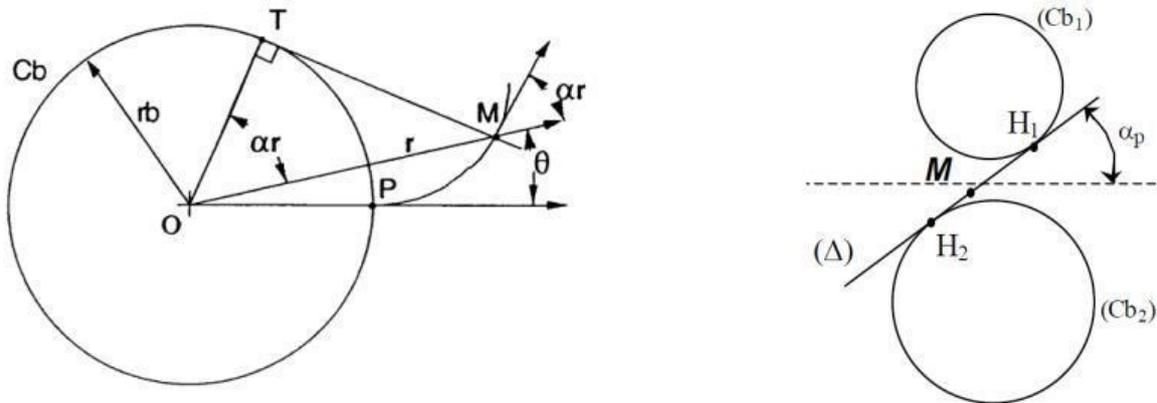


Figure 1.9 : Paramétrage de la développante de cercle [1].

I.4.1.6 Caractéristiques d'une denture, terminologie

Le cercle primitif est celui représentant le diamètre de la roue de friction (figure 1.10). Le cercle de tête est le diamètre extérieur de la roue dentée au sommet des dents, le cercle de pied est à la base des dents : cercle de tête = cercle de pied + 2 x hauteur des dents. La hauteur des dents est décomposée en un creux et une saillie, proportionnels au module.

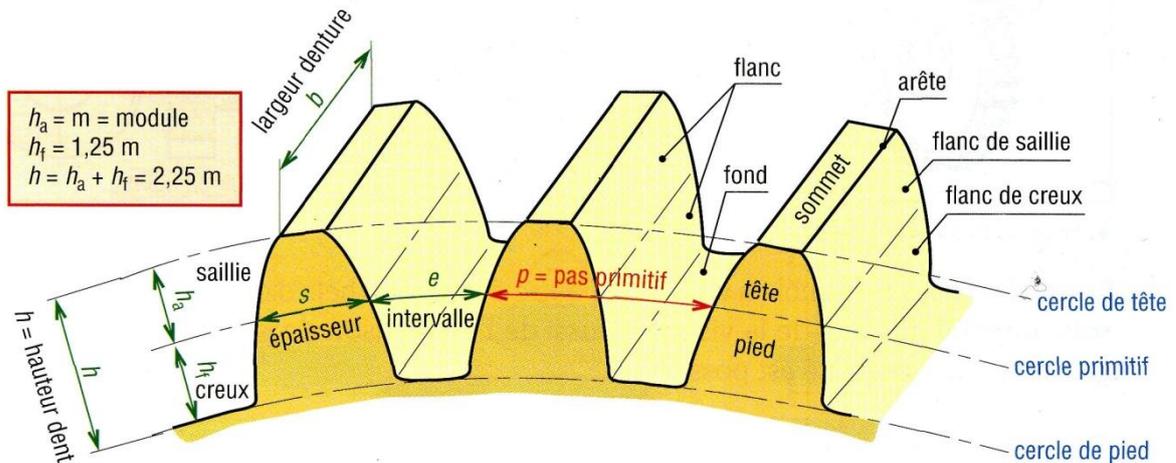


Figure 1.10 : Caractéristiques d'une denture

I.4.1.7 Caractéristiques et formule des engrenages cylindriques à denture droite :

Désignation	symbole	Valeur
module	m	la valeur permettant de définir les caractéristiques dimensionnelles de la roue dentée.
Nombre de dents	Z	Nombre entier positif lie aux conditions de fonctionnement et de fabrication.
Pas	p	$p = \pi.m$
Saillie de la dent	h_a	$h_a = m$
Creux de la dent	h_f	$h_f = 1.25m$
Hauteur de la dent	h	$h = 2.25m$
Largeur de denture	b	$b = k m$ (k compris entre 8 et 10, souvent 10)
Diamètre primitif	d_p	$d_p = m.Z$
Diamètre de tête	d_s	$d_s = d + 2 h_a = m (Z + 2)$
Diamètre de pied	d_f	$d_f = d - 2h_f = m (Z - 2.5)$
Entraxe de l'engrenage	a	$a = (d_1 + d_2) / 2$
Angle de pression	α	Généralement $\alpha = 20^\circ$

Tableau 1.2 : Caractéristiques des engrenages à denture droite

I.4.1.8 Matériaux utilisés :

- Fonte à graphite sphéroïdal EN-GJS (ex « FGS ») : Roues des grandes dimensions.
- Aciers ordinaires type C : Engrenages peu chargés.
- Matières plastiques : Nylon, Téflon.

1.4.2 Engrenages cylindriques à denture hélicoïdale :

Les engrenages à denture hélicoïdale permettent une transmission plus souple, plus progressive et moins bruyante que les engrenages à dentures droite, La transmission des efforts est plus importante (nombres de dents en contacts plus élevés), y compris aux vitesses élevées, ils sont notamment utilisés dans les boites de vitesses d'automobiles, les réducteurs et les multiplicateurs de vitesses. Les inconvénients de ce type d'engrenage sont (figure I.11):

- Des efforts supplémentaires dus à l'angle d'hélice (force axiale sur les paliers et augmentation des efforts de flexion).

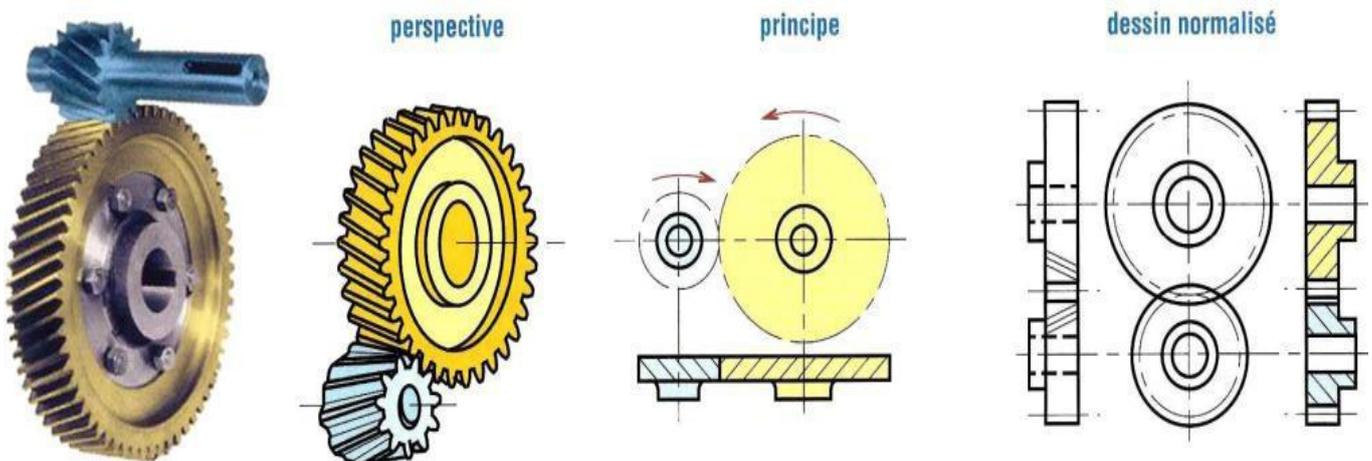


Figure 1.11 : Engrenages cylindrique à denture hélicoïdale

I.4.2.1 Caractéristiques des engrenages à denture hélicoïdale

Toutes les roues à denture hélicoïdale de même module et de même angle d'hélice engrenant entre elles (quels que soient leurs diamètres ou leurs nombres de dents). Seules les hélices doivent être de sens contraire sur les roues.

Les dentures hélicoïdales provoquent une poussée axiale, d'où la nécessité de l'emploi de butées. La poussée axiale est proportionnelle à l'angle d'hélice β . On peut donc réduire la poussée axiale en diminuant l'angle d'hélice, mais on peut également la supprimer, en utilisant des roues jumelées dont les dentures sont inclinées en sens opposé ou encore par l'utilisation d'une denture en chevrons ; la figure 1.12 représente les caractéristiques des engrenages à denture hélicoïdale.

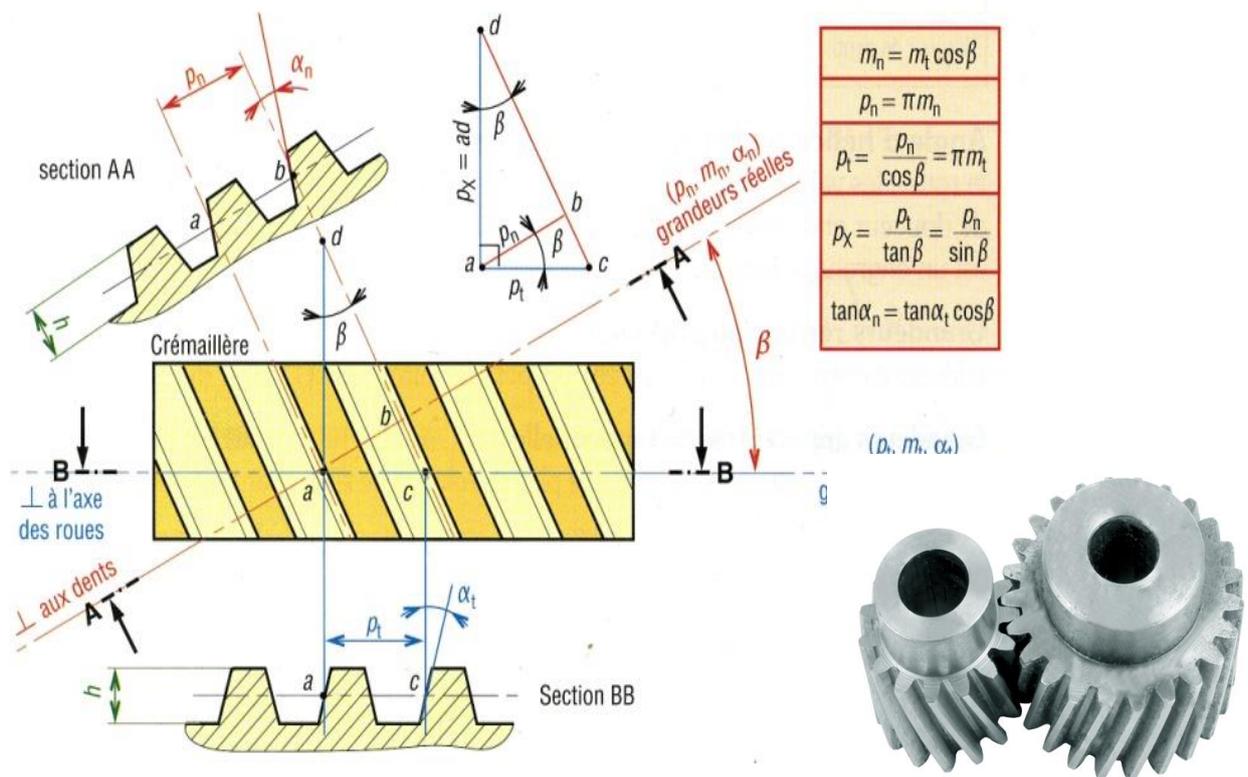


Figure 1.12 : Caractéristiques des engrenages à denture hélicoïdale.

Chapitre I

Le tableau 1.3 représente les caractéristiques et formule des engrenages droits à denture hélicoïdale.

Désignation	Symbole	Valeur
Angle d'hélice	β	Valeur comprise entre 15° et 30°
Sens de l'hélice		Si le pignon a une hélice à gauche, la roue aura une hélice à droite.
Nombre de dent	Z	la valeur permettant de définir les caractéristiques dimensionnelles de la roue dentée.
Module réel	m_s	Nombre entier positif lie aux conditions de fonctionnement et de fabrication.
Pas réel	p_s	$p_s = \pi \cdot m_s$
Module apparent	m_t	$m_t = m_s / \cos\beta$
Pas apparent	p_t	$p_t = \pi \cdot m_t$
Diamètre primitif	d	$d = m_t \cdot Z$
Entraxe de l'engrenage	a	$a = (d_1 + d_2) / 2$
Angle de pression	α	Généralement, $\alpha = 20^\circ$
Longueur de denture	b	$b = K \cdot m_s$

Tableau 1.3 : Les caractéristiques des engrenages cylindriques à denture hélicoïdale

1.4.3 Engrenage conique ou à axes concourants

Les engrenages coniques permettent la transmission du mouvement entre deux arbres concourants dont le point de rencontre est obligatoirement le sommet des deux cônes primitifs. Par conséquent, il y a un couple unique de surfaces coniques conjuguées pour chaque rapport de vitesse d'un couple conique sans changer l'ensemble des deux engrenages ; la figure 1.13 illustre type d'engrenage conique ou à axes concourants.

Principaux types

★ Engrenages coniques à denture droite

Ce sont les plus simples. La direction des génératrices du profil de la denture passe par le sommet S. Aux vitesses élevées on retrouve les mêmes inconvénients que les engrenages droits à dentures droites (bruits de fonctionnement, fortes pressions sur les dents...)

★ Engrenages coniques à denture hélicoïdale ou spirale

Les engrenages coniques à denture spirale tels que nous les usinons, se calculent comme les roues coniques à denture droite en ce qui concerne les cônes primitifs de référence uniquement et en considérant leur module apparent.

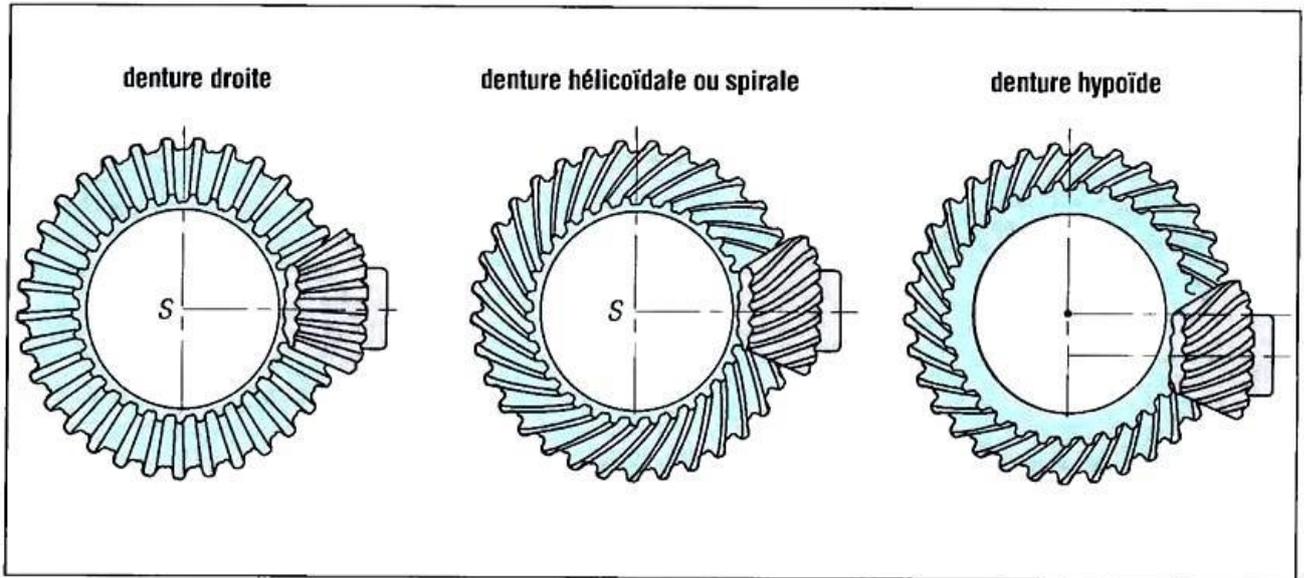


Figure 1.13 : Engrenage conique ou à axes concourants

Caractéristiques des engrenages coniques à dentures droites

La taille et la forme de la dent (module m , pas p , d , d_a , d_f , h , h_a , h_f) sont définies à partir du plus grand cercle ou sur l'extrémité la plus large de la denture.

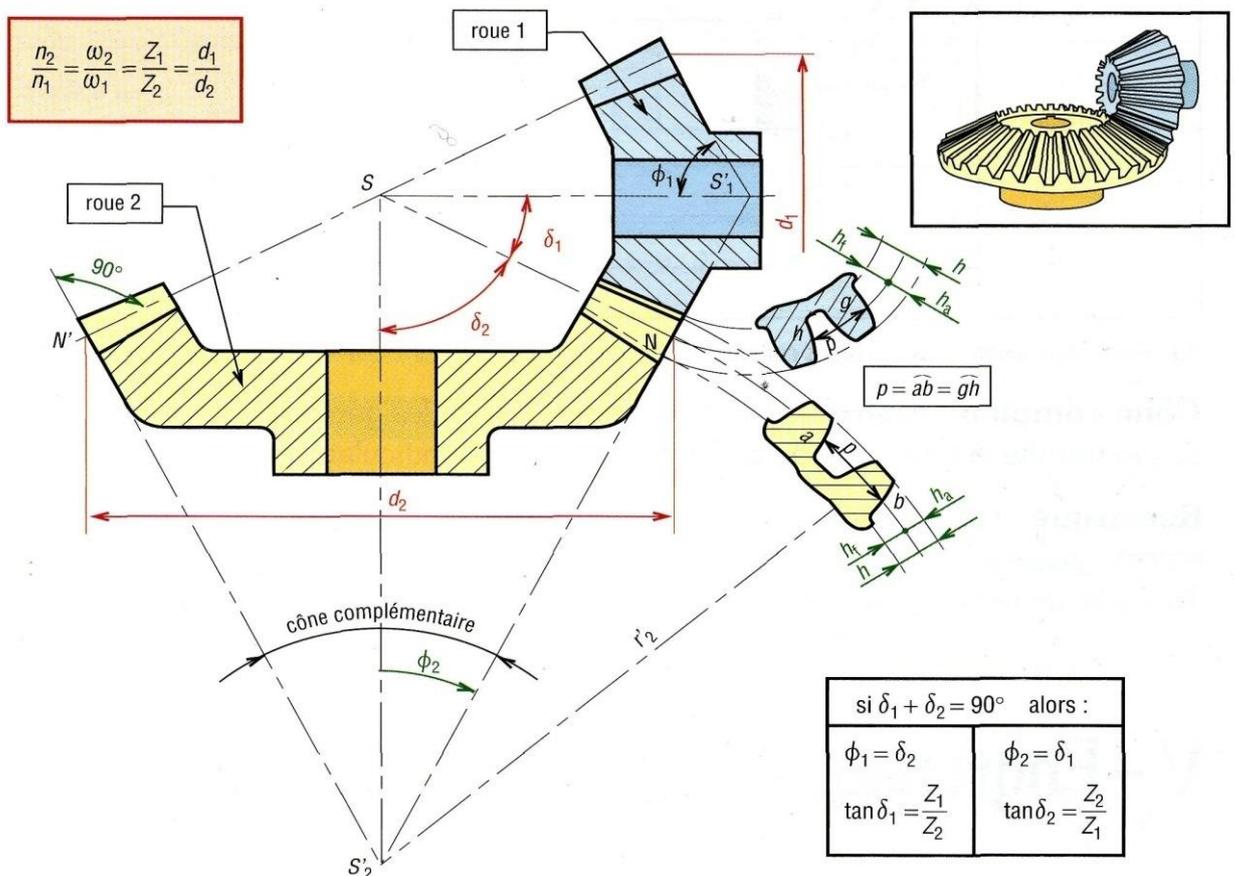


Figure 1.14 : Deux roues à denture conique en contact.

Principales caractéristiques des engrenages coniques

Le tableau 1.4 illustre les paramètres géométriques des engrenages coniques.

Désignation	Symbole	Valeur
module	m	la valeur permettant de définir les caractéristiques dimensionnelles de la roue dentée.
Nombre de dents	Z	Nombre entier positif lie aux conditions de fonctionnement et de fabrication.
Pas	p	$p = \pi \cdot m$
Angle entre les arbres	Σ	fonction de l'architecture du système
Rapport de transmission	i	$i = N_1/N_2 = \omega_1/\omega_2 = Z_2/Z_1 = d_2/d_1$
Angle primitif	δ	$\tan \delta_1 = Z_1/Z_2 = N_2/N_1 \tan \delta_2 = Z_2/Z_1 = N_1/N_2$
Diamètre primitif	d_p	$d_p = m \cdot Z$
Saillie de la dent	h_a	$h_a = m$
Creux de la dent	h_r	$h_r = 1.25m$
Hauteur de la dent	h	$h = 2.25m$
Epaisseur de la dent	s	$s = p / 2 = \pi \cdot m / 2$
Intervalle de la dent	e	$e = p / 2 = \pi \cdot m / 2$
Largeur de denture	b	$b = k m$ (k compris entre 8 et 10, souvent 10)
Diamètre de tête	d_s	$d_s = d + 2 h_a \cdot \cos \delta = m (Z + 2 \cos \delta)$
Diamètre de pied	d_f	$d_f = d - 2h_f \cdot \cos \delta = m (Z - 2.5 \cos \delta)$
Angle de pression	α	Généralement $\alpha = 20^\circ$
Angle de saillie	θ_a	$\tan \theta_a = (2m \cdot \sin \delta) / d$
Angle de creux	θ_f	$\tan \theta_f = (2,5m \cdot \sin \delta) / d$
Angle de tête	δ_a	$\delta_a = \delta + \theta_a$
Angle de pied	δ_f	$\delta_f = \delta - \theta_f$

Tableau 1.4 : Les paramètres géométriques des engrenages coniques

1.4.4 Engrenages à roue et vis sans fin

La vis sans fin est constituée d'un long cylindre étroit, présentant une denture hélicoïdale continue, analogue au filetage d'une vis cylindrique, se mettant en prise avec une roue à denture hélicoïdale. Les engrenages à vis sans fin diffèrent des engrenages à roues à denture hélicoïdale.

En effet, les dents de la vis sans fin s'engagent continûment en glissant sur celles de la roue menée, mais ne leur appliquent pas directement un effort de rotation. Les vis sans fin servent principalement à transmettre une rotation, avec une forte réduction de vitesse, entre deux arbres orthogonaux (figure I.15).

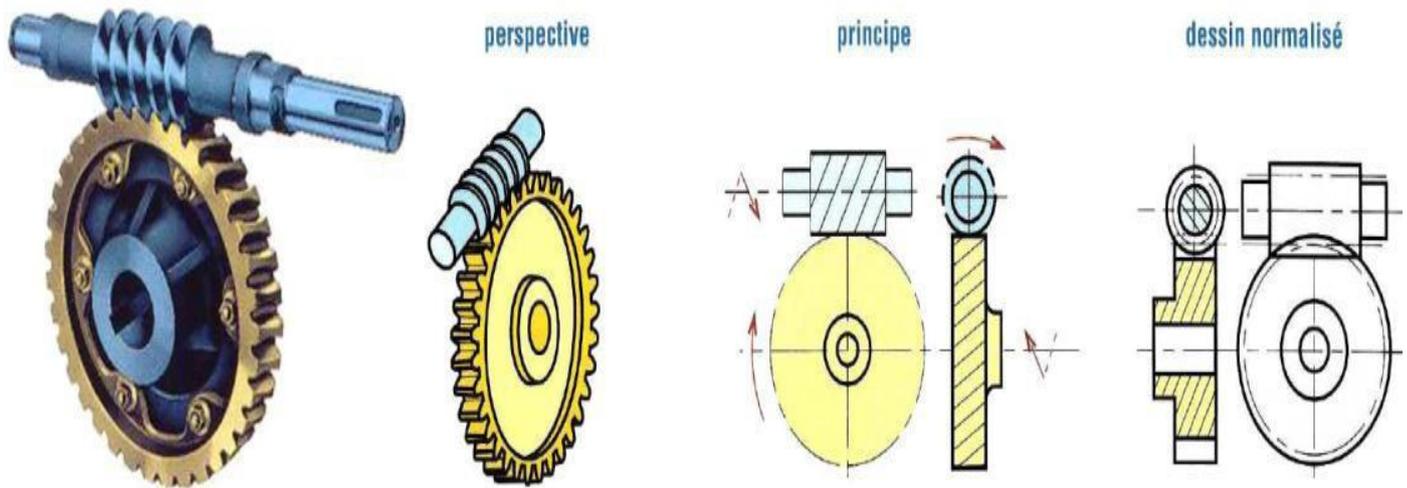


Figure I.15 : Principaux engrenages roue et vis

Avantages – Inconvénients

- Ce mécanisme permet d'obtenir un grand rapport de réduction avec seulement deux roues dentées (1/200).
- Les systèmes roue-vis sans fin sont presque toujours irréversibles. On peut donc les utiliser pour maintenir une orientation.
- L'engrènement se fait avec beaucoup de glissement entre les dentures, donc usure et rendement faible (60%).
- La vis supporte un effort axial important.

Caractéristiques cinématiques et géométriques

Particularité : le rapport des nombres de dents est différent du rapport des diamètres primitifs comme pour les engrenages hypoïdes.

Les caractéristiques de la roue sont celles d'une roue droite à denture hélicoïdale. Z_v représente le nombre de filets de la vis (de 1 à 8 filets et parfois plus).

Le pas axial p_x mesure la distance (suivant l'axe de rotation) entre deux filets consécutifs de la vis. Le pas de l'hélice p_z représente le pas du filet, ou d'un des filets, de la vis.

La vis et la roue ont le même pas normal p_n . Le pas axial de la vis est égal au pas apparent de la roue ; la figure 1.16 illustre les principaux paramètres du système roue et vis.

Chapitre II : calcul des pressions de contact dans les engrenages cylindriques à denture droite.

II.1 Introduction

De nombreux contacts intervenant dans les ensembles mécaniques correspondent à un contact suivant un point ou une ligne si l'on idéalise les pièces en présence des supposant rigides ; ce type de contact constitue la famille des contacts hertziens pour lesquels les premiers éléments de solution ont été proposés par Heinrich Hertz entre 1881 et 1895 [3].

En pratique, sous l'effet d'une force normale au plan tangent commun entre deux pièces, une surface de contact se crée à travers laquelle les efforts sont transmis d'une pièce à l'autre. Ces efforts surfaciques génèrent une répartition spécifique de contraintes (efforts de cohésion) dans la région du contact qui peut entraîner des déformations permanentes ou des endommagements ; il est important de pouvoir les prévoir.

II.2 Pression de contact entre deux cylindres :

L'application de la théorie de Hertz à ce contact permet de prévoir la forme et les dimensions de la surface de contact (dans notre cas est un contact linéique de deux cylindre)

La surface formée par le contact de deux cylindres est une surface rectangulaire (fig II.1)

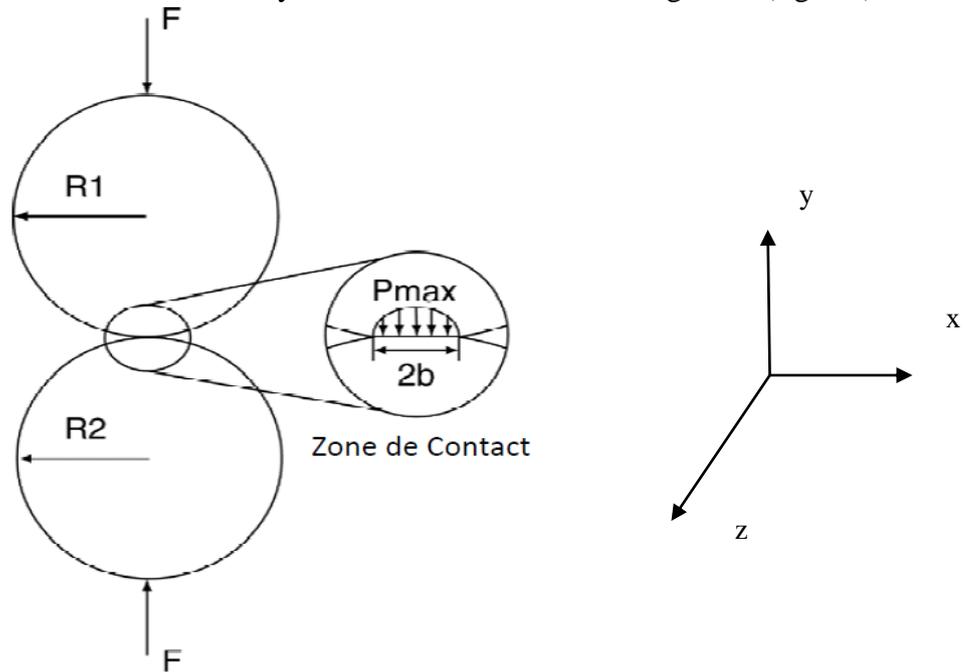


Figure II.1 : Modèle de Hertz pour deux cylindres parallèles en contact.

La largeur de contact est donnée par la formule suivante :

$$b = 2 \sqrt{\frac{F(k_1+k_2)}{l(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})}} \dots\dots\dots \text{II-1}$$

Avec : $k_i = \frac{(1-\nu_i^2)}{\pi E_i} \dots\dots\dots \text{II-2}$

Chapitre II

ν_i, E_i : Coefficients de poisson et modules d'Young des matériaux des cylindres.

l : Longueur de la ligne de contact entre les cylindres.

b : largeur de contact.

F : force appliquée.

La répartition des contraintes suivant les directions x, y et z sont données par les formules suivantes :

$$\text{Pour } x=0 \quad \text{on a : } P_{max} = \frac{2F}{\pi bl} \dots \dots \dots \text{II-3}$$

$$\sigma_x = -P_{max} \left\{ \left[2 - \frac{1}{1+\frac{y^2}{b^2}} \right] \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} - 2 \frac{y}{b} \right\} \dots \dots \dots \text{II-4}$$

$$\sigma_y = \frac{-P_{max}}{\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}} \dots \dots \dots \text{II-5}$$

$$\sigma_z = -2\nu P_{max} \left(\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} - \frac{y}{b} \right) \dots \dots \dots \text{II-6}$$

La représentation de ces contraintes est montrée sur la figure II.3

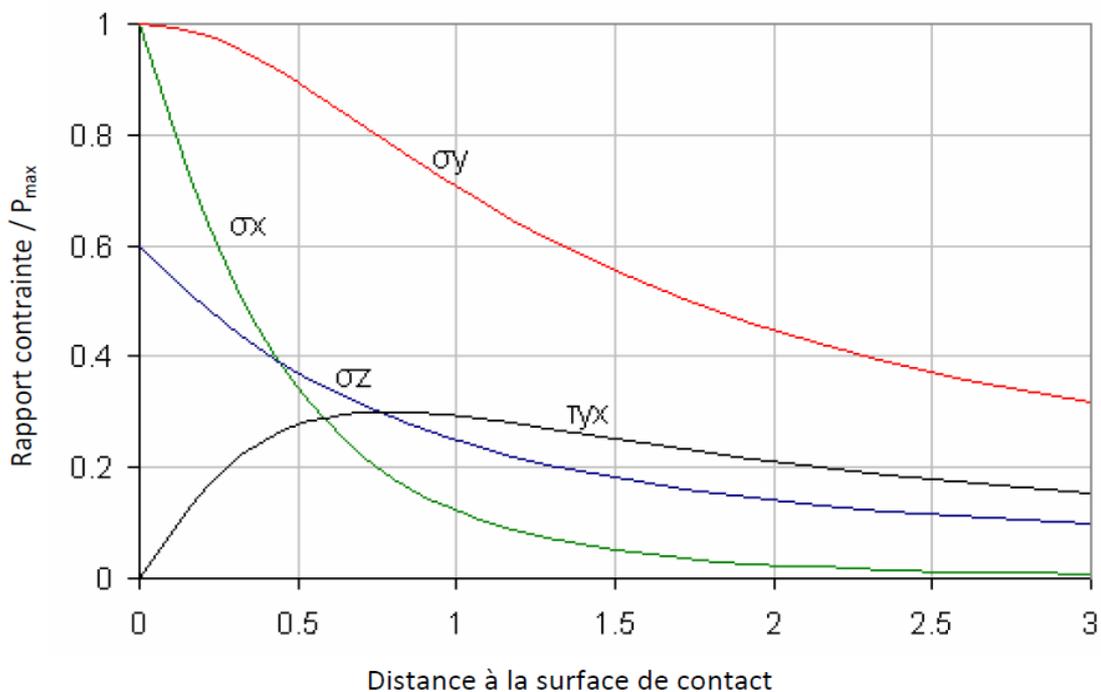


Figure II.2 Distribution des composantes des contraintes près de la surface

On remarque sur la figure II.2, que la contrainte la plus importante est celle suivant l'axe y, c'est la pression qu'exerce la force sur les surfaces en contact, elle diminuée progressivement en fonction de la distance de la surface de contact.

II.2.1 Contact de pression des engrenages à denture droite :

Les dents d'engrenage doivent également pouvoir fonctionner pendant la durée de vie requise sans trop piquer la forme des dents. La piquûre est un phénomène dans lequel de petites particules sont retirées de la surface des faces des dents en raison d'une pression de contact élevée, ce qui provoque la fatigue. La figure II.3 montre une pression de communication locale élevée. Un processus prolongé après le début du forage provoque une rugosité des dents et, éventuellement, la forme se détériore. Une défaillance rapide suit. A noter que les dents d'entraînement et les dents entraînées sont soumises à ces pressions de haute intensité de manière uniforme. La référence [4] fournit un traitement complet contre l'usure des engrenages. Travailler au point de contact sur les dents de l'engrenage consiste à réaliser deux surfaces des courbes à l'extérieur. Si le matériau de l'engrenage est infiniment rigide, la connexion est une simple ligne. En effet, du fait de l'élasticité du matériau, la forme de la dent change légèrement, ce qui conduit la force transmise à agir sur une petite zone rectangulaire. La contrainte résultante est appelée contrainte tangentielle ou hertz. La référence [5] donne la figure suivante de l'équation de contrainte de Hertz,

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{F_n}{b} \frac{1}{\pi \left\{ \left[\frac{1-\nu_1^2}{E_1} \right] + \left[\frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right] \right\}} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)} \dots\dots\dots \text{II-7}$$

où les indices 1 et 2 renvoient aux matériaux des deux corps en contact.

F_n : la force normale fournie par la dent d'entraînement sur la dent entraînée.

b : la largeur de face des dents d'engrenage.

E_i : Les module d'élasticité des matériaux des dents.

ν_i : Les coefficients de Poisson.

ρ_i : Les rayons de courbure des deux surfaces des dents en contact.

$$\rho_i = \frac{D_{pi}}{2} \sin(\alpha) \dots\dots\dots \text{II-8}$$

Avec : $F_n = \frac{F_t}{\cos(\alpha)} \dots\dots\dots \text{II-9}$

F_t : la force tangentielle

α : angle de pression

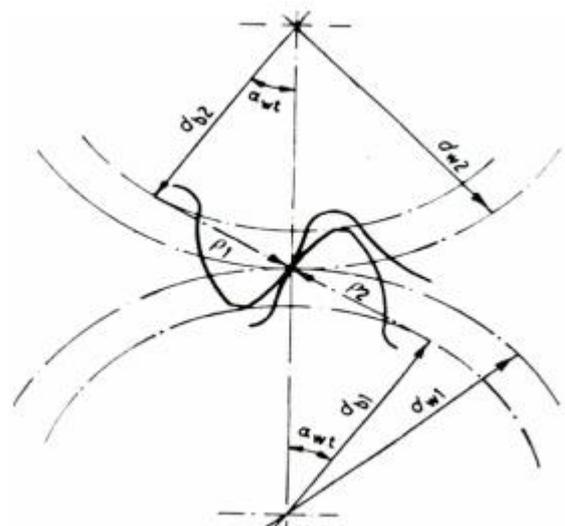


Fig.II.3 : Notation pour la Contrainte de Contact entre Deux Engrenages.

Chapitre II

Selon la formule II.1 on peut déduire le coefficient élastique des matériaux :

$$C_p = \sqrt{\frac{1}{\pi\left\{\left[\frac{1-v_1^2}{E_1}\right]+\left[\frac{1-v_2^2}{E_2}\right]\right\}}} \dots\dots\dots\text{II.10}$$

C'est une propriété élastique des matériaux mise en contact entre les dents.

Selon AGMA [American Gear Manufacturers Association], un facteur géométrique I est introduit dans la formule II.1, qui dépend de la forme des dents ainsi que le rapport de réduction. Ce facteur géométrique est représenté sur la figure II.3.

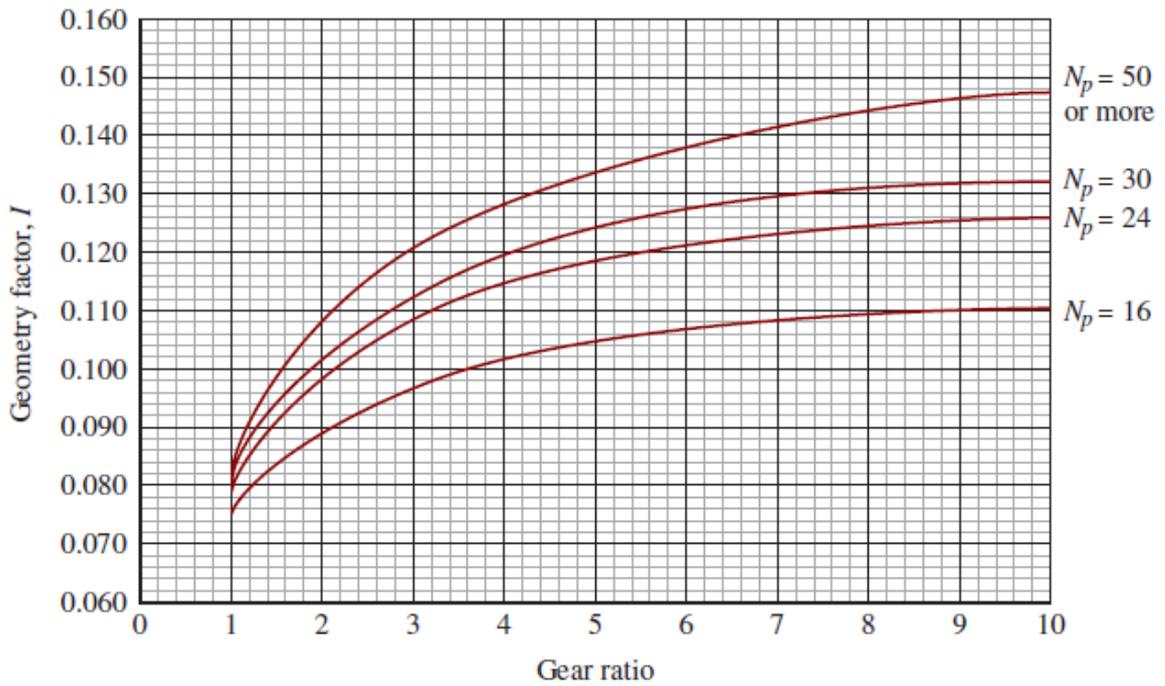


Figure II.4 variation du facteur géométrique d'engrenage externe droit en fonction de rapport de réduction pour angle de pression $\alpha = 20^\circ$

La formule (II.1) est réécrite par :

$$\sigma_c = C_p \sqrt{\frac{F_t}{bD_p I}} \dots\dots\dots\text{II.11}$$

La formule (II.5) est formule statique, en pratique elle sera multipliée par des autres facteurs, dépendant des conditions de service.

La pression de contact réelle est donnée par la formule suivante :

$$\sigma_{cR} = C_p \sqrt{\frac{F_t}{bD_p I} \cdot K_a K_s K_m K_v} \dots\dots\dots\text{II.12}$$

Avec :

K_a : Facteur de surcharge

K_s : facteur de forme

K_m : facteur de distribution de charge

K_v : facteur dynamique.

La formule II.6 est appliquée sur la roue menant (pignon), pour déterminer la pression de contact réelle, sur cette roue, qui est égale à celle de la roue menée.

II.3 Contrainte de flexion :

L'analyse des contraintes des dents d'engrenage est facilitée par la prise en compte des composantes de force orthogonale, F_t et F_r , comme le montre la figure 2.2 .

1.

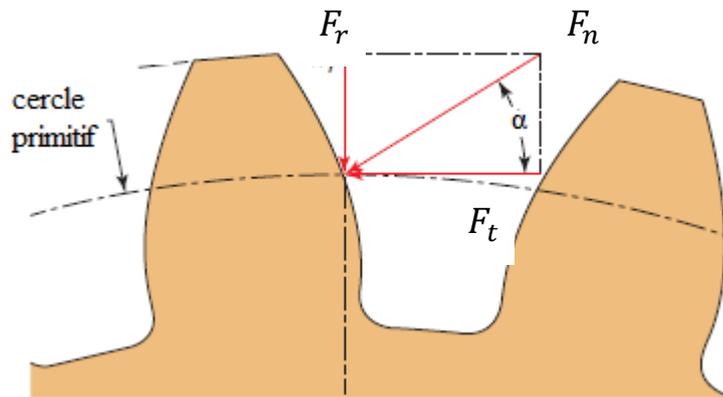


Figure II.5 : Forces sur les dents de l'engrenage: (force tangentielle, F_t), (force radiale, F_r);(Force normale, F_n)

La force tangentielle, F_t , produit un moment de flexion sur la dent d'engrenage similaire à celui sur une poutre en porte-à-faux.

La contrainte de flexion qui en résulte est maximale à la base de la dent dans le congé qui relie le profil de la développante au bas de l'espace dentaire. En tenant compte de la géométrie détaillée de la dent, Wilfred Lewis a développé l'équation de la contrainte à la base du profil de développante, qui est maintenant appelée l'équation de Lewis :

Équation de Lewis pour la contrainte de flexion dans les dents d'engrenage :

$$\sigma_f = \frac{F_t D_p}{b Y} \dots\dots\dots \text{II-13}$$

F_t : force tangentielle.

D_p : pas diamétral de la dent.

b : largeur du visage de la dent .

Chapitre II

Y : Facteur de forme de Lewis, qui dépend de la forme de la dent, de l'angle de pression, du pas diamétral, du nombre de dents dans l'engrenage et de l'endroit où F_t agit

Le tableau II.1 représente des valeurs du facteur de Lewis en fonction du nombre de dents

Nombre de dents	Y	Nombre de dents	Y
12	0.245	28	0.353
13	0.261	30	0.359
14	0.277	34	0.371
15	0.290	38	0.384
16	0.296	43	0.397
17	0.303	50	0.409
18	0.309	60	0.422
19	0.314	75	0.435
20	0.322	100	0.447
21	0.328	150	0.460
22	0.331	300	0.472
24	0.337	400	0.480
26	0.346		

Tableau II.1 : Valeurs du facteur de forme de Lewis Y du nombre de dents.

L'approche AGMA pour concevoir des dents d'engrenage pour résister à la rupture par fatigue de flexion, tout en étant basée sur l'équation de Lewis idéalisée, implique une longue liste de facteurs d'ajustement empiriques (parfois appelés facteurs de déclassement) pour tenir compte de l'influence de diverses fabrications, variabilités d'assemblage, géométriques, de chargement et de matériaux. De nombreuses pages de graphiques et de graphiques de données à l'appui sont publiées par l'AGMA. La présentation dans ce texte ne représente qu'un synopsis de la procédure AGMA, avec une sélection abrégée de données justificatives pour démontrer l'approche de base ; tout concepteur responsable de la conception ou du développement des engrenages est bien avisé de consulter les normes AGMA les plus récentes.

L'équation de base de la contrainte de flexion AGMA peut s'écrire :

$$\sigma_f = \frac{F_t P_d}{b I} K_a K_m K_v K_I \dots \dots \dots \text{II-14}$$

K_a : Facteur de surcharge ; P_d : Pas diamétral

K_m : Facteur de distribution de charge. ; b : Largeur frontale

K_v : Facteur dynamique ; F_t : La force tangentielle

K_I : Facteur de ralenti = 1,42 pour les dents folles avec flexion bidirectionnelle; = 1,0 pour l'équipement dents avec flexion unidirectionnelle.

I : Facteur de géométrie

Facteur de surcharge K_a :

caractéristiques de la machine menante	Valeurs du coefficient d'application		
	Uniforme	Chocs modérés	Chocs importants
Uniforme	1,00	1,25	1,75
Chocs légers	1,25	1,50	2 ou plus
Chocs moyens	1,50	1,75	2,25 ou plus

Tableau 2.2 : Valeurs Recommandées pour K_a

Facteur de distribution de charge, K_m :

Condition de support	Largeur de la face, <i>mm</i>			
	≤ 50	150	225	≥ 400
Précis, rigide, peu de jeux dans les paliers	1,3	1,4	1,5	1,8
Précision et rigidité moins bonne, contact probable sur toute la largeur de la face	1,6	1,7	1,8	2,0
Précision et rigidité telles que le contact ne se fait pas sur toute la largeur de la face	$\geq 2,0$			

Tableau 2.3 : Facteur de distribution de charge, K_m

Facteur de forme K_s :

AGMA indique que le facteur de forme peut être considéré comme étant de 1,00 pour la plupart des engrenages.

Facteur dynamique K_v :

Le facteur dynamique tient compte du fait que la charge est assumée par une dent avec un certain degré d'impact et que la charge réelle soumise à la dent est plus élevée que la charge transmise seule. La valeur de K_v dépend de la précision du profil dentaire, des propriétés élastiques de la dent et de la vitesse à laquelle les dents entrent en contact. Le graphe de la figure II.4 présente la variation du coefficient d'application en fonction de la vitesse de la ligne circonférentielle.

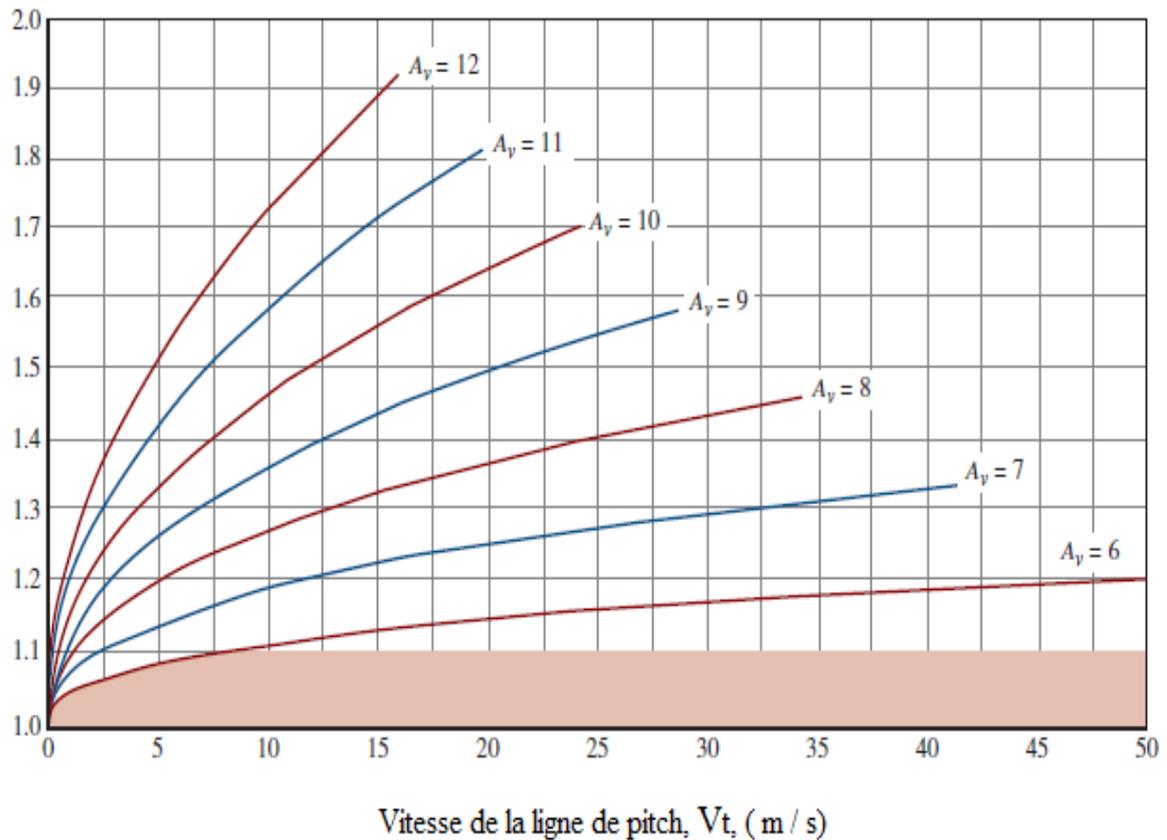


Figure II.6 : Facteur dynamique, K_v (Adapté de la norme AGMA 2001, Facteurs d'évaluation fondamentaux et méthodes de calcul pour engrenage droit)

Le facteur de géométrie I , comme discuté dans la section précédente, se trouve à la fois pour le pignon et l'engrenage. La figure II-7 est utilisée pour sélectionner le facteur de géométrie, en fonction de l'angle de pression et du nombre de dents du jeu d'engrenages à engrener. Pour des engrenages à 275 dents avec un angle de pression de 20° ,

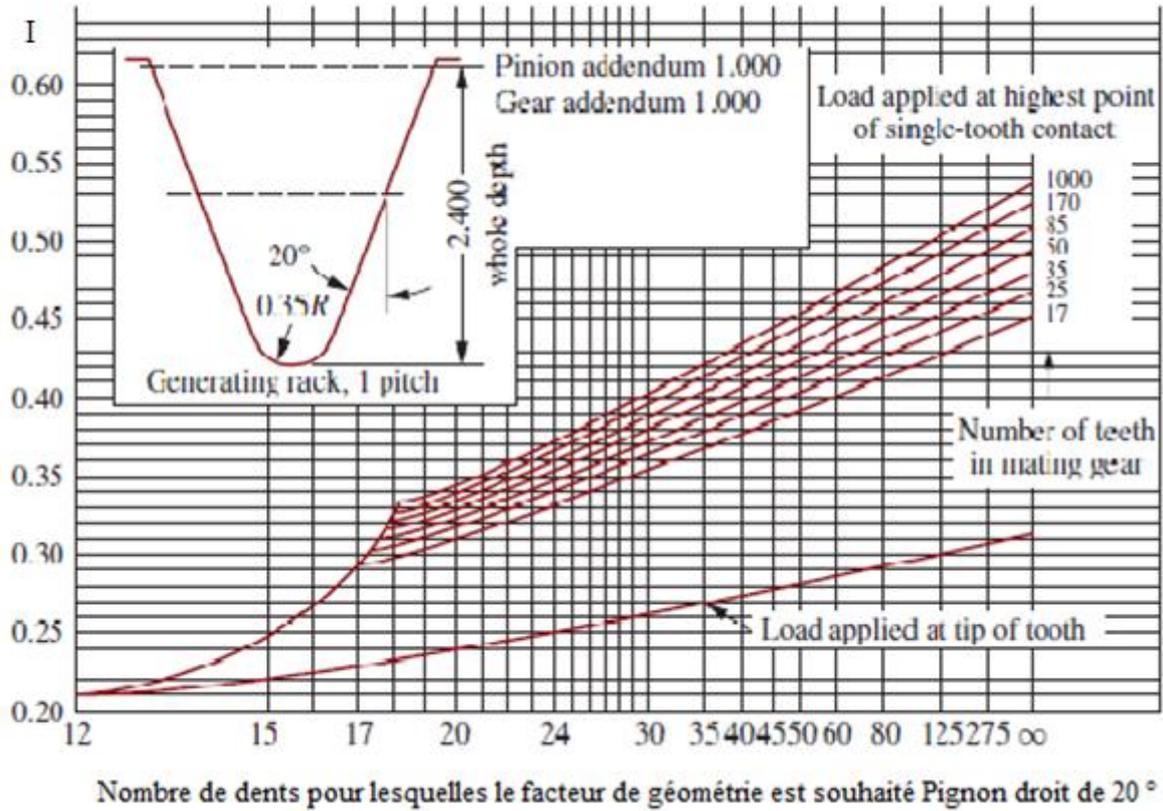


Figure II.7 : Facteur de géométrie I AGMA pour la flexion de 20 °

Chapitre III : Analyse des contraintes dans un engrenage cylindrique.

III-1 Introduction :

L'analyse des contraintes dans les engrenages à un rôle important dans l'étude et la conception de tous les types d'engrenage. Les contraintes des pressions de contact entre les roues dentées, ainsi que les contraintes de flexion au fond de pied de la dent, sont déterminées par des méthodes analytiques, en se basant sur la théorie de Hertz, et sur les études de grandes sociétés d'engineering telles que : AGMA et ANSI. Afin de réaliser ce travail, nous prenons un système d'engrenage composé d'un pignon et roue dentée, entraîné par un moteur dont les paramètres de fonctionnement sont connus.

III-2 Calcul analytique des contraintes :

En se basant sur les données suivantes :

Un engrenage cylindrique à denture droite, transmis une puissance de 75KW à 1500tr/min, d'un pignon A ($Z_1 = 20$ dents) à une roue dentée B ($Z_2 = 40$ dents), avec un module de $m = 8$ mm et angle de pression de 20° . Les roues dentées ont la nuance d'acier 34CD4, avec un module d'élasticité $E = 210$ GPa, et coefficient de poisson $\nu = 0.3$.

III-3 Calcul des paramètres des contraintes :

L'ensemble des paramètres calculés sont récapitulés dans le tableau III.1

Désignation	Symbole	Formule de calcul	Valeurs
Couple de torsion	C (N.m)	$C = \frac{P}{\omega}$	477,70
Diamètre primitif de ZA	DP_A (mm)	$DP_A = m \cdot Z_A$	160
Diamètre primitif de ZB	DP_B (mm)	$DP_B = m \cdot Z_B$	320
Le Pas	P (mm)	$P = m \cdot \pi$	25.12
La force tangentielle	F_t (N)	$F_t = \frac{2C}{DP_A}$	5971,25
La force normale	F_n (N)	$F_n = \frac{F_t}{\cos(\alpha)}$	6354,47
Le rayon de courbure	$\rho_{1,2}$ (mm)	$\rho_{1,2} = \frac{DP_{A,B}}{2} \sin(\alpha)$	27,36 54,72
La largeur de dent	b (mm)	$b = (6 \text{ à } 10)m$	64
Le pas diamétral	P_d (mm)	$P_d = \frac{Z_A}{D_{pA}}$	0.125

Tableau III-1 Paramètres de calcul

III-4 Calcul des pressions de contact :

$$k_1 = k_2 = \frac{(1 - \nu^2)}{\pi E} = \frac{(1 - 0.3^2)}{\pi * 210000} = 1.38 * 10^{-6} \left(\frac{mm^2}{N}\right)$$

$$b = 2 \sqrt{\frac{F(k_1 + k_2)}{l\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)}} = 2 \sqrt{\frac{2 * 5971.25 * 1.38 * 10^{-6}}{64\left(\frac{1}{27.36} + \frac{1}{54.72}\right)}} = 0.137 \text{ mm}$$

$$P_{max} = \frac{2F}{\pi b l} = \frac{2 * 5971.25}{\pi * 0.137 * 64} = 433.55 \text{ MPa}$$

D'après la formule $\sigma_y = \frac{-P_{max}}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}}$ on remplit le tableau III-2 :

y (mm)	1	2	2.5	3	4
σ_y (MPa)	-58.85	-29.63	-23.72	-19.78	-14.84
σ_y/P_{max}	-0.136	-0.068	-0.055	-0.045	-0.034

Tableau III-2 : les valeurs de σ_y et le rapport de contrainte.

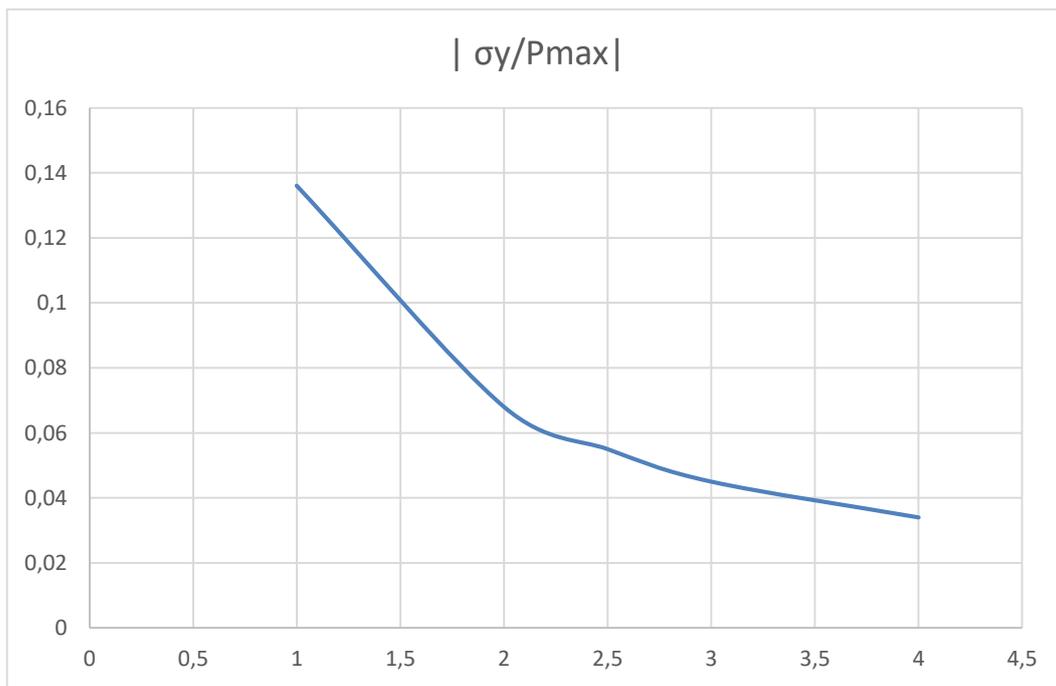


Figure III.1 : la courbe de contrainte σ_y en fonction y.

D après l'équation (II.10)

$$C_p = \sqrt{\frac{1}{2\pi\left\{\frac{(1 - \nu^2)}{E}\right\}}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\left\{\frac{(1 - 0.3^2)}{210000}\right\}}} = 191,65$$

La pression de contact statique est donnée par la formule II-11

$$\sigma_c = C_p \sqrt{\frac{F_t}{bD_{p1}I}} = 191.65 \sqrt{\frac{5971,25}{64 * 160 * 0.095}} = 474,82 \text{ MPa}$$

I= 0.095 d après le figure II.4

La pression de contact réelle :

$$\sigma_{cR} = C_p \sqrt{\frac{F_t}{bD_{p1}I}} \cdot K_0 K_s K_m K_v = 191.65 \sqrt{\frac{5971,25}{64 * 160 * 0.095}} * 1.5 * 1 * 1.6 * 1.12$$

$$\sigma_{cR} = 778,47 \text{ MPa}.$$

Les facteurs intervenant dans la formule II-11 sont déterminés à partir des graphes [3] et hypothèses des engrenages :

- $K_s = 1,00$ pour la plupart des engrenages.
- $K_0 = 1.5$ (tableaux 2.2 Chocs légers)
- $K_m = 1.6$ (tableaux 2.3 $b < 50$ et contact probable sur toute la largeur de la face).
- $K_v = 1.12$ (Figure II.6 A₆ transmission automobile, $V = (2\pi * 0.08 * 1500) / 60 = 12.57$ m/s).

III-5 Calcul des contraintes de flexion :

La contrainte de flexion est donnée suivant l'équation (II-13)

- $Y = 0.322$ (**Tableau II.1**)

Donc :

$$\sigma_f = \frac{F_t P_d}{bY} = \frac{5971,25 * 0.125}{64 * 0.322} = 36,22 \text{ MPa}$$

La contrainte de flexion réelle :

I= 0.33 (**Figure II.7** $Z_1=20$ et $Z_2=40$)

$$\sigma_{fR} = \frac{F_t D_p}{bI} K_0 K_m K_v K_I = \frac{5971,25 * 0.125}{64 * 0.33} * 1.5 * 1.6 * 1.12 * 1 = 95 \text{ MPa}$$

Les facteurs insérés dans le calcul de la contrainte de flexion sont pris les mêmes.

Le couple de torsion déduit par la puissance du moteur est un couple maximal, donc les contraintes calculées sont donc des contraintes maximales.

Chapitre III

Le tableau III-2 résume la variation des valeurs des contraintes calculées (statiques et réelles) en fonction de la variation de la force tangentielle.

La force tangentielle (N)	Les contraintes calculées (MPa)			
	Pression de contact		Contrainte de flexion	
	Cas statique	Cas réel	Cas statique	Cas réel
2 000	274,80	450,53	12,13	31,81
3 000	336,55	551,77	18,19	47,72
4 000	388,62	637,14	24,26	63,63
5 000	434,50	712,37	30,32	79,54
5 972	474,82	778,47	36,21	95

Tableau III-3 : Les valeurs des contraintes calculées (statiques et réelles).

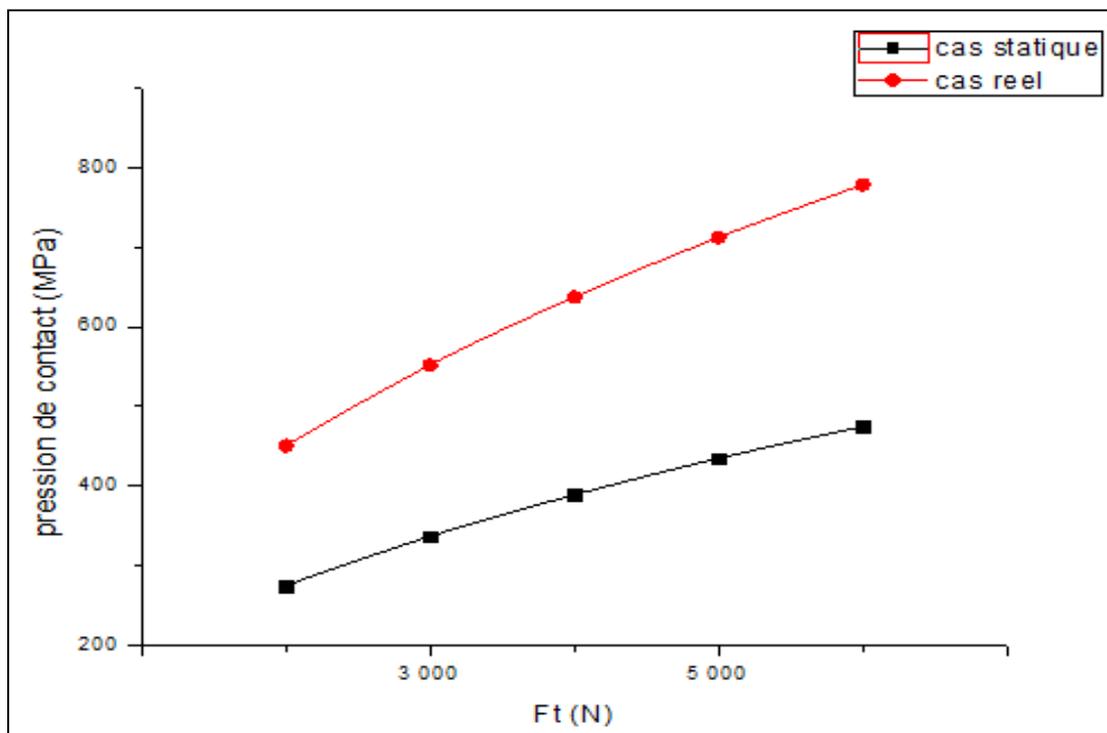


Figure III.2 : l'évolution de la courbe des contraintes de pressions de contact statiques et réelles en fonction la force tangentielle.

La figure III.2 représente l'évolution des contraintes de pressions de contact statiques et réelles, selon la variation de l'intensité de la charge tangentielle. Les allures des deux contraintes sont croissantes d'une façon non linéaire, avec une séparation remarquable entre elles, cela est rendu aux facteurs de correction qui interviennent dans le calcul des pressions réelles, répondant ainsi aux conditions exigées.

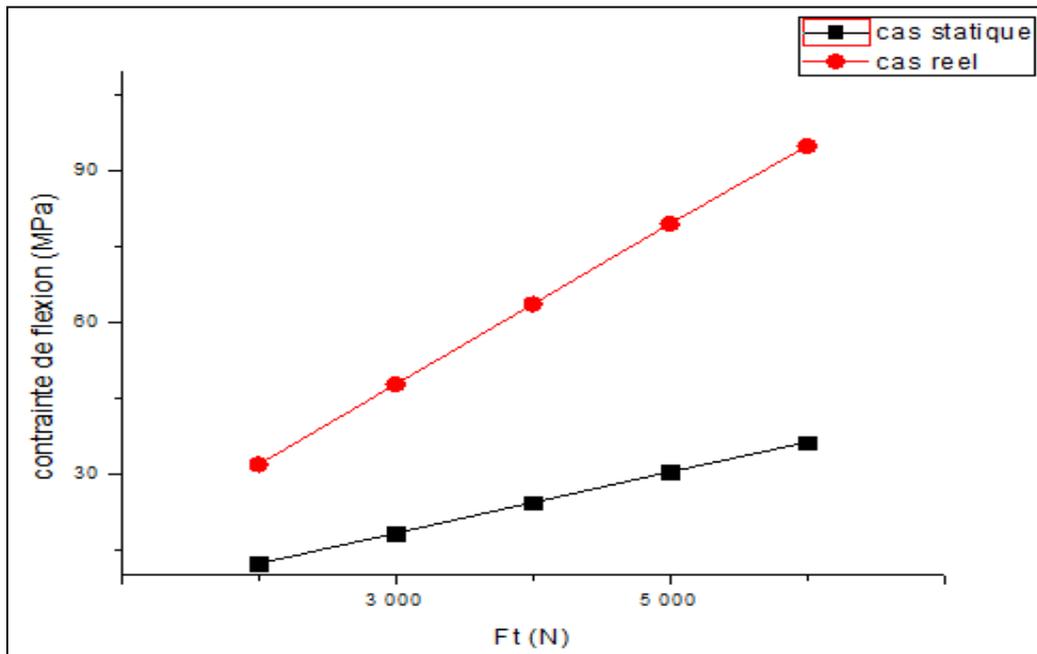


Figure III.3 : l'évolution de la courbe de contrainte de flexion en fonction la force tangentielle.

On remarque sur la figure III.3 que les allures des contraintes de flexion statiques et réelles en fonction de force tangentielle, varient d'une façon linéaire. L'allure de la contrainte réelle est positionnée en dessus de l'allure de la contrainte station de flexion, cela montre l'effet des facteurs de corrections qui indispensable dans le calcul des contraintes de flexion dans un engrenage.

Comparativement entre les valeurs des pressions de contact et celles des contraintes de flexion, les premières semblent plus importante (statiques ou réelles). Les zones ou les pressions sont maximales, sont les plus chargées, pour cette raison des anomalies apparaissent et provoquent l'endommagement et la rupture des dents.

Conclusion générale

Le but de ce travail est de calculer les contraintes de pression de contact, ainsi que les contraintes de flexion, engendrées par des charges appliquées sur le système d'engrenage cylindrique à denture droite,

L'évaluation de ces types de contraintes et pressions est très important dans la conception des roues dentée. Leurs intensités et zones d'apparition permet de donner une vision sur la profondeur affectée afin de prévoir un traitement thermique ou mécanique approprié, dont le but d'améliorer la dureté superficielle des roues dentées.

Nous avons pris un engrenage (pignon / roue) à denture droite, avec des caractéristiques dimensionnel et conditions de fonctionnement. En premier lieu, nous avons calculé les paramètres intervenant dans la détermination des pressions de contact et les contraintes de flexion.

Les résultats obtenus montrent les points suivants :

- Les pressions de contact statiques, sont déterminées à partir des formules issues de la théorie de Hertz.
- Les facteurs de correction tels que le facteur de : forme, surcharge...etc., sont introduits afin d'avoir des pressions de contact réelles, ils sont déterminés selon des graphes, en fonction des paramètres d'engrenage. Les contraintes réelles ont des intensités supérieures, par rapport aux contraintes statiques.
- Les différentes valeurs calculées (statiques et réelles) sont en fonction avec la force tangentielle appliquée sur la ligne de contact, résultante du couple de torsion de la roue menante.
- Les contraintes de flexion sont aussi calculées (statiques et réelles) selon les formules de Lewis. Les contraintes réelles ont des valeurs plus importantes que celles des valeurs statiques, vu l'introduction des facteurs de corrections.
- Les pressions de contact ont des valeurs élevées, contrairement aux valeurs de contraintes de flexion, cela montre, les charges que supportent les zones de contact entre les dents, ou dans ces endroits il se produit de nombreuses anomalies, conduisant à la rupture des dents.

En perspectives, il sera intéressant de poursuivre ce travail, en traitant :

- L'application d'un traitement thermique ou mécanique, afin d'améliorer la résistance des dents à la fatigue.
- Exploitation d'un code éléments finis pour obtenir des résultats de simulation, et les comparer aux résultats analytiques,
- Etude d'un ca réel, en appliquant la démarche de ce travail.

Référence

- [1] MELIH Miloud, OUNADJELA Bachir, « Automatisation du calcul des dimensions géométriques d'un engrenage », faculté de Technologie, Université Aboubekr BELKAID Tlemcen, MEMOIRE En vue de l'obtention du diplôme de MASTER, 2017-2018.
- [2] DERGAL Moundhir AbdouEssamed. Mémoire de master. Université d'oran. 2012
- [3] Techniques De L'Ingénieur, extrait gratuits, « Frottement, usure et lubrification ;SURFACES », 4^{ème} édition, p55-57.
- [4] American Gear Manufacturers Association. Standard 908-B89 (R2015). *Geometry Factors for Determining the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur, Helical, and Herringbone Gear Teeth*. Alexandria, VA.: American Gear Manufacturers Association, 2015.
- [5] American Gear Manufacturers Association. Standards 2001-D04 (R2016) (based on P_d) and 2101-D04 (R2016) (based on Metric Module, m). *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*. American Gear Manufacturers Association Alexandria, VA: American Gear Manufacturers Association, 2016.
- [6] Jack A. Collins, Henry R. Busby & George H. Staab; « MECHANICAL DESIGN OF MACHINE ELEMENTS AND MACHINES », 2^{ème} édition, *The Ohio State University 2010*, p594-700.
- [7] Robert L. Mott, Edward M. Vavrek & Jyhwen Wang; « MACHINE ELEMENTS IN MECHANICAL DESIGN », 6^{ème} édition, Pearson 330 Hudson Street, NY, NY 10013 2018, p304-470.

Résumé

Le but de ce travail est le calcul des contraintes au niveau des dents d'un engrenage cylindrique à denture droite. Les pressions de contact réelles ont des valeurs importantes contrairement aux valeurs des contraintes statiques. Dans les deux cas nous avons appliqué la théorie de Hertz déterminant les pressions de contact entre deux solides. Les facteurs de correction ont une influence remarquable sur ces types de contraintes, puisqu'ils ont des résultats proches de la réalité. Les contraintes de flexion sont calculées suivant la formule de Lewis, nous avons obtenu des contraintes statiques et des contraintes réelles aussi en introduisant les facteurs de correction

Les zones de contacts entre les dents, sont généralement les zones les plus chargées, cela est montré par les valeurs importantes des pressions de contact au niveau de ces zones. Un traitement de surface approprié est recommandé en vue d'améliorer la teneur en fatigue des engrenages.

Mots clés : *engrenage, pressions, contact, Hertz, contraintes.*

Abstract

The purpose of this work is the calculation of the stresses at the level of the teeth of a spur gear. Real contact pressures have significant values unlike static stress values. In both cases we applied the Hertz theory determining the contact pressures between two solids. The correction factors have an influence remarkable on these types of stresses, since they have results close to reality. The bending stresses are calculated according to the Lewis formula, we obtained static stresses and real stresses also by introducing the correction factors.

The contact zones between the teeth are generally the most loaded regions, this is shown by the large values of the contact pressures in these zones. Appropriate surface treatment is recommended to improve the fatigue content of the gears.

Keywords: *gear, pressure, contact, Hertz, stress.*

ملخص:

الغرض من هذا العمل هو حساب الضغوط على مستوى أسنان الترس المحفز. لضغوط الاتصال الحقيقية قيم كبيرة على عكس قيم الضغط الساكن. في كلتا الحالتين طبقنا نظرية هيرتز التي تحدد ضغوط التلامس بين مادتين صلبتين. عوامل التصحيح لها تأثير مؤثر على هذه الأنواع من الضغوط، لأنها لها نتائج قريبة من الواقع. يتم حساب الضغوط الانحناء وفقاً لصيغة لوييس ، وحصلنا على ضغوط ثابتة وضغوط حقيقية أيضاً من خلال إدخال عوامل التصحيح .

تكون مناطق التلامس بين الأسنان بشكل عام أكثر المناطق تحميلاً، ويتضح ذلك من خلال القيم الكبيرة لضغوط التلامس في هذه المناطق. يوصى بالمعالجة السطحية المناسبة لتحسين محتوى التعب من التروس.

الكلمات الرئيسية: الترس ، الضغط ، التلامس ، هيرتز ، الإجهاد