



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research
جامعة محمد الحميد ابن باديس - مستغانم
Abdelhamid Ibn Badis University of Mostaganem
كلية العلوم والتكنولوجيا
Faculty of Science and Technology



N° D'ORDRE : D-LMD...../2021

THESE

Présentée pour obtenir

LE DIPLOME DE DOCTORAT LMD
SPECIALITE : GENIE MECANIQUE
OPTION : Modélisation, Simulation et Calculs Scientifiques Appliqués

Par

ZAOUI FATIMA ZOHRA

Contribution à l'étude de la vibration libre des structures fonctionnellement graduées (FGM) par l'intermédiaire des théories de déformation de cisaillement avancées.

Soutenue le 05/ 04/ 2021

devant le jury composé de :

Président :	Mr. H. GUECHICHI	Professeur	U-Mostaganem
Examineur :	Mr. R. DJELTI	Professeur	U-Mostaganem
Examineur :	Mr. B. FAHSI	Professeur	U-Sidi Bel-Abbes
Examineur :	Mr. S. BENYOUCEF	Professeur	U-Sidi Bel-Abbes
Directeur de thèse :	Mr. A. TOUNSI	Professeur	U-Sidi Bel-Abbes
Co-directeur de thèse :	Mr. D. OUINAS	Professeur	U-Mostaganem

La théorie,

C'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne.

La pratique,

C'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi.

Ici, sont réunies théorie et pratique:

Rien ne fonctionne... et personne ne sait pourquoi

Albert Einstein



DÉDICACES

Et comme disait Marcel Proust :

" Soyons reconnaissants aux personnes qui nous donnent du bonheur; elles sont les charmants jardiniers par qui nos âmes fleurissent"

À mes chers parents, vous êtes la flamme de toutes mes réussites, vos attentions ont fait de ma vie une merveille. Merci pour tout l'amour, l'éducation et le bon sens que vous nous avez fait apprendre, moi, mes frères et ma sœur, que Dieu nous les garde et les préserve en bonne santé pendant toute notre vie,

À mes adorables frères Abdallah, Mohamed Sedik, Abdelwaret, tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.

À ma sœur Zoulikha, la plus pétillante, souriante et charmante petite sœur au monde.

À tous mes professeurs et éducateurs, depuis les jardins d'enfant jusqu'au doctorat: ma réussite est la vôtre.

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de mon cursus.



Remerciements

REMERCIEMENTS

Il me sera très difficile de remercier tout le monde car c'est grâce à l'aide de nombreuses personnes que j'ai pu mener cette thèse à son terme.

Ce travail de recherche a été réalisé en collaboration avec le laboratoire des Matériaux et Hydrologie, dirigé par **Mr. Mohamed BOURADA**, Professeur à l'université de Djillali Liabès de Sidi Bel Abbas. Je tiens à le remercier pour m'avoir accueillie au sein de ce laboratoire.

Je voudrais remercier grandement mon directeur de thèse, **Mr. Abdelouahed TOUNSI**, Professeur à l'université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbas, pour avoir dirigé ce travail de thèse, pour toute son aide. Je suis ravie d'avoir travaillé en sa compagnie car outre son appui scientifique, il a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cette thèse. Pour tout cela je le remercie.

J'exprime toute ma gratitude à **Mr. Djamel OUNAS**, Professeur à l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem et co-directeur de cette thèse, pour son encadrement consciencieux, la grande autonomie qu'il a su m'accorder ainsi que sa présence et son soutien scientifique et moral durant ces années. Merci pour la confiance dont vous avez fait preuve à mon égard. Je suis très reconnaissante à tout ce que vous avez fait pour moi afin de garantir le bon déroulement de mes travaux. Merci pour vos orientations, vos précieux conseils et votre patience. Des mots ne suffiront jamais pour exprimer ma gratitude pour ses œuvres à mon profit.

Je tiens à remercier **Mr. Hocine GUECHICHI**, Professeur à l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem de m'avoir fait l'honneur de présider le jury et pour sa participation scientifique ainsi que le temps qu'il a consacré à ma recherche.

J'adresse également mes sincères remerciements aux professeurs **Radouane DJELTI** (Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem), **Bouazza FAHSI** et **Samir BENYOUCEF** (Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbas), les membres du jury qui ont accepté de ménager un espace dans leur agenda pour évaluer ce travail. Soyez assuré de mon plus profond respect et de ma sincère gratitude.

D'autre part, ce travail s'est déroulé dans un laboratoire où une multitude de personnes se croisent tous les jours et je souhaiterais rendre hommage à tous ces gens, et bien plus encore à certaines (qui se reconnaîtront), qui ont rendu fort agréable mon passage au laboratoire et qui ont contribué à la réussite de ce travail. Ma reconnaissance dépasse ces quelques mots et ne peut être exprimée que par le cœur.

Enfin, je souhaite remercier ma famille qui m'a permis d'en arriver là et qui a toujours cru en moi. Je remercie du fond du cœur mes parents, ma sœur et mes frères pour leur soutien permanent, leur disponibilité et leurs sacrifices. Je leur dédie avec plaisir ce travail ainsi qu'à la mémoire de ma merveilleuse grand-mère Fatima. Qu'ils voient en ces quelques lignes le témoignage de ma profonde reconnaissance.



RÉSUMÉ

RÉSUMÉ

Dans ce travail, trois théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (2D, quasi-3D, quasi-3D hybride) sont présentées pour analyser le comportement des vibrations libres des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées et reposantes sur des fondations élastiques. Ces théories considèrent des distributions paraboliques des déformations de cisaillement à travers l'épaisseur tout en assurant la nullité des contraintes de cisaillement sur les bords libres de la plaque sans utiliser des facteurs de correction de cisaillement. Les propriétés matérielles sont supposées variables dans le sens de l'épaisseur de la plaque d'une façon continue selon une loi de puissance. Les équations de mouvement ont été dérivées à partir du principe d'Hamilton. Les solutions analytiques de la réponse dynamique des plaques sont obtenues en se basant sur la méthode de Navier afin de satisfaire les conditions d'appuis. Les investigations numériques sont présentées pour montrer l'effet de la composition matérielle, la géométrie de la plaque et les coefficients de rigidité des fondations élastiques sur les caractéristiques vibratoires des plaques FG. L'influence des propriétés matérielles dépendantes et indépendantes de la température sur les fréquences naturelles des plaques FGM simplement appuyées dans un environnement thermique a été aussi examinée. On peut conclure que les présentes théories sont non seulement précises et efficaces mais aussi simples pour la prédiction des réponses vibratoires des plaques FG reposant sur des appuis simples ou élastiques.

Mots clés : plaques fonctionnellement graduées, théories de déformation de cisaillement, propriétés matérielles, vibration libre, fréquence naturelle, fondation élastique, environnement thermique, propriétés dépendantes de la température.



ABSTRACT

ABSTRACT

In this work, three high order shear strain theories (2D, quasi-3D, quasi-3D hybrid) are presented to analyze the free vibration of simply supported functionally graded plates and resting on elastic foundations. These theories consider parabolic distributions of shear strain across the thickness satisfying the nullity of shear stresses at the free edges of the plate without using shear correction factors. The material properties are assumed to vary continuously and smoothly across the thickness of the plate according to a power law function. The equations of motion are derived from Hamilton's principle. Analytical solutions of the dynamic response of FG plates are obtained based on the Navier's method in order to satisfy the boundary conditions. Numerical investigations are carried out to study thoroughly the effect of material composition, plate geometry and foundation stiffness coefficients on the vibration characteristics of FG plates. The influence of temperature-dependent and temperature-independent material properties on natural frequencies of simply supported FG plates in a thermal environment has also been discussed. It can be concluded that the present theories are not only accurate and efficient but also simple for predicting the vibration responses of simply supported FG plates on elastic foundations.

Keywords: functionally graded plates; higher order shear deformation theory; material properties; free vibration; natural frequency; elastic foundation; thermal environment; temperature-dependent material properties.



ملخص

في هذا العمل، تم تقديم ثلاث نظريات حول تشوه القص العالي (ثنائي الأبعاد ، ثلاثي الأبعاد ، الهجين شبه ثلاثي الأبعاد) لدراسة الاهتزاز الحر للصفائح المتدرجة وظيفيًا والتي تستند على أسس بسيطة ومرنة. عدد المتغيرات و معادلات الحركة يقل بالنسبة للنموذج الحالي، وهذا ما يسهل التحليل البنيوي. تأخذ هذه النظريات في الاعتبار توزيعات تشوهات القص على شكل قطع مكافئ عبر سمك الصفيحة مع مراعاة انعدام إجهاد القص العرضي على الحواف العلوية و السفلية للصفيحة دون استعمال معامل تصحيح القص. تتغير خصائص المواد عبر سمك الصفيحة بشكل مستمر وفق قانون أسي. تم اشتقاق معادلات الحركة من مبدأ هاملتون. تم الحصول على الحلول التحليلية للاهتزاز الحر للوحات استنادًا على طريقة نافيه (Navier) وذلك من أجل تلبية شروط الدعم. يتم تقديم التحقيقات العددية لإظهار تأثير تركيبة المواد وهندسة الصفائح ومعاملات الأساس المرن على خصائص الاهتزاز للألواح المتدرجة وظيفيًا. كما تم فحص تأثير خصائص المواد المعتمدة على درجة الحرارة على الترددات الطبيعية للألواح المدعومة بأسس بسيطة في بيئة حارة. يمكن أن نستنتج أن النظريات الحالية ليست دقيقة وفعالة فحسب، بل بسيطة أيضًا للتنبؤ بالاستجابات الاهتزازية للصفائح المتدرجة وظيفيًا الموضوعه على دعائم بسيطة أو مرنة.

الكلمات المفتاحية: الصفائح المتدرجة وظيفيًا، نظريات تشوه القص العالي، خصائص مادية، الاهتزاز الحر، التردد الطبيعي، الأساس المرن، بيئة حارة، خصائص معتمدة على الحرارة.



TABLES DES MATIERES

TABLES DES MATIÈRES

Dédicaces	i
Remerciements	ii
Résumé	iv
Abstract	v
ملخص	vi
Tables des Matières.....	vii
Liste des Figures.....	x
Liste des Tableaux.....	xv
Liste des Notations	xviii
Introduction Générale	- 1 -

Chapitre I: Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués

I.1. Introduction	- 5 -
I.2. Concept des matériaux fonctionnellement gradués.....	- 5 -
I.3. Histoire de développement des matériaux FGM : d'une idée à une réalité.....	- 9 -
I.4. Classification conventionnelle des matériaux FGM	- 11 -
I.4.1. En fonction de la structure du FGM.....	- 11 -
I.4.2. En fonction du gradient.....	- 13 -
I.5. Modèles mathématiques d'homogénéisation des propriétés matérielles des FGM....	- 14 -
I.5.1. Les lois de mélange.....	- 15 -
I.5.1.1. Loi de puissance (P-FGM).....	- 16 -
I.5.1.2. Loi sigmoïde (S-FGM)	- 17 -
I.5.1.3. Loi exponentielle (E-FGM)	- 17 -
I.6. Techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés.....	- 18 -
I.6.1. Procédés de fabrication à l'état solide.....	- 19 -
I.6.1.1. Technique de métallurgie des poudres.....	- 19 -
I.6.2. Procédés de fabrication à l'état liquide	- 20 -
I.6.2.1. Coulage en bande (Tape Casting).....	- 20 -
I.6.2.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting).....	- 21 -
I.6.2.3. Projection du plasma (Plasma Spraying)	- 21 -
I.6.2.4. Frittage et infiltration.....	- 22 -
I.6.2.5. Technique d'infiltration par centrifugation.....	- 22 -
I.6.3. Procédés de Fabrication par projection de matière	- 23 -
I.6.3.1. Procédé de fusion sélective par laser (SLM).....	- 24 -
I.7. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés.....	- 24 -
I.7.1. Domaine d'énergie.....	- 25 -
I.7.2. Domaine aérospatial.....	- 26 -
I.7.3. Domaine biomédical.....	- 27 -
I.7.4. Domaine militaire.....	- 27 -
I.7.5. Domaine maritime.....	- 28 -
I.7.6. Domaine sportif.....	- 28 -

I.7.7. Autres applications	- 28 -
I.8. Conclusion.....	- 28 -

**Chapitre II: Analyse des structures FGM par les théories d'élasticité:
« Revue bibliographique »**

II.1. Introduction	- 30 -
II.2. Généralités sur les théories d'élasticité.....	- 30 -
II.2.1. Définition des plaques.....	- 30 -
II.2.2. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)	- 35 -
II.2.3. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)	- 37 -
II.2.4. La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	- 40 -
II.2.4.1. Les théories basées sur des fonctions polynomiales	- 42 -
II.2.4.2. Les théories basées sur des fonctions non-polynomiales.....	- 43 -
II.2.5. Les théories tridimensionnelles (3D et quasi-3D).....	- 45 -
II.3. Analyse de la réponse dynamique des structures FGM : Revue de la littérature	- 46 -
II.3.1. Analyses de l'influence des fondations élastiques	- 50 -
II.3.2. Etudes reportées sur l'effet thermique	- 52 -
II.4. Conclusion.....	- 54 -

**Chapitre III: Analyse de vibration libre des plaques FGM sur des
fondations élastiques par une théorie quasi-3D hybride**

III.1. Introduction	- 56 -
III.2. Formulations théoriques	- 57 -
III.2.1. Propriétés de la plaque FGM	- 57 -
III.2.2. Cinématique et relations constitutives	- 58 -
III.2.3. Principe d'Hamilton.....	- 60 -
III.3. Solutions analytiques.....	- 64 -
III.4. Résultats numériques et discussions	- 65 -
III.4.1. Etude des plaques isotropes homogènes	- 65 -
III.4.2. Analyse des plaques FGM	- 67 -
III.4.3. Etude paramétrique	- 69 -
III.5. Conclusion.....	- 75 -

**Chapitre IV: Etude Analytique de l'influence de la déformation
normale sur la vibration libre des plaques FGM**

IV.1. Introduction	- 76 -
IV.2. Modèles mathématiques.....	- 76 -
IV.2.1. Géométrie de la plaque FGM	- 76 -
IV.2.2. Cinématique de la théorie.....	- 77 -
IV.2.3. Les équations de mouvement	- 80 -
IV.3. Procédure analytique de Navier	- 84 -
IV.4. Analyse vibratoire des différents types de plaques.....	- 85 -

IV.4.1. Analyse des plaques isotropes.....	- 86 -
IV.4.2. Investigation sur des plaques FGM simplement appuyées.....	- 87 -
IV.4.3. Analyse des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques.....	- 91 -
IV.5. Conclusion.....	- 98 -

Chapitre V: Analyse de la réponse dynamique des plaques FGM sous l'effet thermique

V.1. Introduction	- 100 -
V.2. Développement analytique	- 100 -
V.2.1. Géométrie de la plaque FGM.....	- 100 -
V.2.2. Propriétés des matériaux	- 100 -
V.2.3. Champs thermiques.....	- 101 -
V.2.3.1. Température uniforme.....	- 102 -
V.2.3.2. Température linéaire	- 102 -
V.2.3.3. Température non linéaire	- 102 -
V.2.3.4. Température sinusoïdale	- 103 -
V.2.4. Champs des déplacements	- 103 -
V.2.5. Les équations gouvernantes de la plaque	- 105 -
V.2.6. Solutions de Navier.....	- 107 -
V.3. Résultats numériques et discussion.....	- 108 -
V.3.1. L'influence des conditions thermiques sur les propriétés matérielles	- 109 -
V.3.2. Validation analytique du modèle proposé.....	- 112 -
V.3.3. Etude paramétrique	- 117 -
V.4. Conclusion.....	- 121 -
Conclusion générale et perspectives	- 122 -
Références Bibliographiques.....	- 125 -



LISTES DES FIGURES

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I

Figure I.1. Concept des matériaux à gradient de propriétés (Loh et al., 2018).	5 -
Figure I.2. Illustration de la différence de variation des propriétés dans les composites classiques et les FGM (Shinohara, 2013).....	7 -
Figure I.3. Composants à gradient fonctionnel: (a) chemises de cylindre et engrenages ; (b) frein à disques; et (c) piston fabriqué par la méthode de coulée centrifuge (Rajan et Pai, 2014).	8 -
Figure I.4. Exemples de quelques combinaisons pour un matériau FGM (El-Galy et al., 2019).....	8 -
Figure I.5. Exemples des matériaux FGM dans la nature (Baghersahi, 2017).	9 -
Figure I.6. Protection thermique (Houari, 2011).....	10 -
Figure I.7. Différents types d'un FGM. (a) le modèle discret (b) le modèle continu sans interface; (c) gradient de la composition (f) gradient de la dimension; (d,g) gradient de l'orientation; (e,h) gradient de la fraction volumique (Zhang et al., 2019).....	12 -
Figure I.8. Classification des FGM selon le type du gradient (El-Galy et al., 2019).	13 -
Figure I.9. Classification des directions du gradient (Muller et al., 2012).	14 -
Figure I.10. Une plaque fonctionnellement graduée (Elishakoff et al., 2016).	15 -
Figure I.11. Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur d'un matériau P-FGM. ...	16 -
Figure I.12. Distribution de la fraction volumique en fonction de l'épaisseur d'un matériau S-FGM.....	17 -
Figure I.13. Variation de la fraction volumique d'un matériau E-FGM à travers l'épaisseur. -	18 -

Figure I.14. Classification des méthodes de fabrication des FGMs (El-Galy et al. 2019).	- 19 -
Figure I.15. Principe de la métallurgie des poudres (El-Galy et al. 2019).	- 20 -
Figure I.16. Principe de la méthode coulage en bande (Faddoul, 2012).	- 20 -
Figure I.17. Concept de la technique de projection du plasma (Tan et al., 2017).	- 22 -
Figure I.18. Principe d'infiltration par centrifugation (El-Galy et al. 2019).	- 23 -
Figure I.19. Dépôt en phase vapeur d'un revêtement sur une pièce (Muller, 2013).	- 23 -
Figure I.20. (a) Schéma du procédé de Fabrication par laser (Zhang et al., 2019), (b) Un FGM type Ti6Al4V fabriqué par SLM (Qu et al., 2010).	- 24 -
Figure I.21. Principaux domaines d'application des matériaux FGM (Khathun, 2018).	- 25 -
Figure I.22. Réacteur nucléaire (Mahmoudi, 2018).	- 26 -
Figure I.23. Produits en matériaux FGM utilisés dans l'aérospatial (Domack et Baughman, 2005; Qian et Dutta, 2003).	- 26 -
Figure I.24. Application du FGM dans les biomatériaux (Muller, 2013).	- 27 -

CHAPITRE II

Figure II.1. Différents types d'appuis des plaques.	- 31 -
Figure II.2. Utilisation des plaques dans divers domaines de l'ingénierie (Szilard, 2004).	- 33 -
Figure II.3. Forces internes dans divers types d'éléments de plaque (Szilard, 2004).	- 34 -
Figure II.4. Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff avant et après déformation (Reddy, 2004).	- 36 -
Figure II.5. Illustration d'une plaque non déformée et déformée selon les hypothèses de Reissner-Mindlin (Reddy, 2004).	- 38 -
Figure II.6. Distribution du déplacement et des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans les deux théories FSDT et CPT.	- 39 -

Figure II.7. Illustration de la cinématique de la plaque d'ordre élevé (Reddy, 1997). - 40 -

Figure II.8. Distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie HSDT. - 41 -

CHAPITRE III

Figure III.1. Géométrie d'une plaque FG rectangulaire sur des appuis élastiques. - 57 -

Figure III.2. Variation de la fréquence naturelle adimensionnelle $\bar{\beta} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque FGM carrée type Al/Al_2O_3 par rapport de l'indice du gradient. - 70 -

Figure III.3. Variation de la fréquence naturelle adimensionnelle $\bar{\beta} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque FGM type Al/Al_2O_3 en fonction du rapport de forme a/b ($a/h = 10$). - 70 -

Figure III.4. Variation de la fréquence naturelle adimensionnelle $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque FGM carrée type Al/Al_2O_3 par rapport aux paramètres de la fondation élastique et l'indice matériel ($a/h = 5$). - 71 -

Figure III.5. Variation de la fréquence naturelle adimensionnelle $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque FGM carrée type Al/Al_2O_3 par rapport aux paramètres de la fondation élastique et au rapport de forme ($a/h = 10, p = 1$). - 72 -

Figure III.6. Influence des paramètres de la fondation élastique (\bar{k}_w, \bar{k}_s) sur la variation de la fréquence naturelle adimensionnelle $\tilde{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque FGM carrée type Al/ZrO_2 pour différents rapports de forme ($a/h = 10, p = 1$). - 73 -

Figure III.7. Variation de la fréquence naturelle $\bar{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_M / E_M}$ des différentes plaques FGM en fonction du gradient matériel p ($a/h = 10$). - 74 -

CHAPITRE IV

Figure IV.1. Géométrie d'une plaque FG rectangulaire sur des fondations élastiques à deux paramètres. - 77 -

Figure IV.2. Comparaison des fonctions de forme $f(z)$ (a) et leurs dérivées $f'(z)$ (b) pour différentes théories de déformation d'ordre élevé.....- 78 -

Figure IV.3. Effet de l'indice de puissance (p) et du rapport géométrique (a/h) sur la variation des fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\beta} = (\omega a^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ des plaques FG Al/Al_2O_3 simplement appuyées.....- 90 -

Figure IV.4. Variation des fréquences fondamentales adimensionnelles $\tilde{\omega} = (\omega a^2/h)\sqrt{\rho_m/E_m}$ des plaques carrées FG Al/Al_2O_3 en fonction des paramètres de la fondation élastique ($p=2, a/h=10$)- 95 -

Figure IV.5. Influence de l'indice de puissance (p) et du rapport géométrique (a/h) sur la variation des fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\beta} = (\omega a^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ des plaques FG Al/Al_2O_3 sur des fondations élastiques (\bar{k}_w, \bar{k}_s).- 96 -

Figure IV.6. Influence des paramètres de la fondation élastique sur l'évolution des fréquences naturelles adimensionnelles $\tilde{\omega} = \omega(a^2/h)\sqrt{\rho_m/E_m}$ pour différentes plaques FG ($p=2, a/h=10$).....- 98 -

CHAPITRE V

Figure V.1. Géométrie d'une plaque FG rectangulaire.- 101 -

Figure V.2. Variation du module élastique à travers l'épaisseur (z/h) de la plaque FG dans un champ thermique uniforme pour différentes valeurs d'indice de puissance (p).- 110 -

Figure V.3. Variation du module élastique à travers l'épaisseur (z/h) de la plaque FG dans un champ thermique linéaire pour différentes valeurs d'indice de puissance (p).- 110 -

Figure V.4. Variation du module élastique à travers l'épaisseur (z/h) de la plaque FG dans un champ thermique non-linéaire pour différentes valeurs d'indice de puissance (p).- 111 -

Figure V.5. Variation du module élastique à travers l'épaisseur (z/h) de la plaque FG dans un champ thermique sinusoïdal pour différentes valeurs d'indice de puissance (p).- 111 -

Figure V.6. Comparaison de la variation du module élastique à travers l'épaisseur (z/h) de la plaque FG sous différents chargements thermiques- 112 -

Figure V.7. Fréquences naturelles adimensionnelles des quatre premiers modes pour des plaques FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyées soumises à différents chargements thermiques $a/h = 10$, $a = 0.2$, $p = 1$ - 119 -

Figure V.8. Variation des fréquences naturelles adimensionnelles des quatre premiers modes pour des plaques FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyées sous l'influence des différents chargements thermiques et du rapport géométrique (b/a). $a/h = 10$, $a = 0.2$, $p = 2$...- 120 -



LISTES DES TABLEAUX

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE I

Tableau I.1. Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.- 6 -

CHAPITRE II

Tableau II.1. Quelques modèles de fonction de forme $f(z)$ et de déplacement transversal correspondant (w) pour différentes théories de déformation par cisaillement.- 42 -

CHAPITRE III

Tableau III.1. Propriétés mécaniques des matériaux utilisés pour la plaque FG.- 65 -

Tableau III.2. Fréquences adimensionnelles des plaques isotropes carrées et simplement appuyées.- 66 -

Tableau III.3. Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles des plaques FG type Al/Al_2O_3- 67 -

Tableau III.4. Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ des plaques FG carrées type Al / ZrO_2 ($a / h = 5$).- 68 -

CHAPITRE IV

Tableau IV.1. Propriétés des matériaux utilisées dans les plaques FGM.....- 85 -

Tableau IV.2. Fréquences fondamentales adimensionnelles $\hat{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_0}$ des plaques carrées isotropes simplement appuyées.....- 86 -

Tableau IV.3. Fréquences fondamentales adimensionnelles $\hat{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_0}$ des plaques carrées isotropes sur des fondations élastiques ($h / b = 0.2$).- 87 -

Tableau IV.4. Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ des plaques FGM Al / Al_2O_3- 88 -

Tableau IV.5. Trois premières fréquences fondamentales adimensionnelles $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ des plaques FGM Al / Al_2O_3 carrées simplement appuyées.- 88 -

Tableau IV.6. Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ des plaques FGM carrées type Al / ZrO_2 ($a / h = 5$).- 91 -

Tableau IV.7. Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles $\tilde{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ des plaques carrées FGM Al / ZrO_2 ($m = n = 1$).- 92 -

Tableau IV.8. Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ des plaques carrées FGM Al / Al_2O_3 - 93 -

Tableau IV.9. Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ des plaques carrées FGM Al / Al_2O_3 sur des fondations élastiques ($h / a = 0.15$).- 94 -

Tableau IV.10. Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ des plaques rectangulaires FGM Al / ZrO_2 sur des fondations élastiques ($a / b = 1.5$).- 97 -

CHAPITRE V

Tableau V.1. Coefficients mécaniques dépendants de la température pour $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ et Si_3N_4/SUS_304 (Reddy et Chin, 1998).- 109 -

Tableau V.2. Fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyées sous chargement thermique non linéaire.- 113 -

Tableau V.3. Fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques FG (Si_3N_4/SUS_304) simplement appuyées sous chargement thermique non linéaire.- 114 -

Tableau V.4. Cinq premières fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyées sous chargement thermique ($p = 2$)- 115 -

Tableau V.5. Cinq premières fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques FG (Si_3N_4/SUS_304) simplement appuyées sous chargement thermique ($p = 2$).- 116 -

Tableau V.6. Fréquences naturelles adimensionnelles dépendantes de la température d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée pour différents modes de vibration dans un champ thermique non linéaire.....- 117 -

Tableau V.7. Fréquences naturelles adimensionnelles dépendantes de la température d'une plaque FG (Si_3N_4/SUS_30_4) simplement appuyée pour différents modes de vibration dans un champ thermique non linéaire.....- 118 -



LISTES DES NOTATIONS

LISTE DES NOTATIONS

a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
G	Module de cisaillement dans le plan
E	Module de Young suivant x
ν	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$P(z)$	Propriété matérielle effective
P_t, P_b	Propriétés de la partie supérieure (top) et la partie inférieure (bottom)
p	Indice matériel
$V(z)$	Fraction volumique
T_b	Température au niveau de la surface inférieure de la plaque
T_t	Température au niveau de la surface supérieure de la plaque
$\Delta T(z)$	Variation de la température
$\Gamma(z, t)$	Propriété matérielle effective en fonction de la température
$E(z, t)$	Module de Young en fonction de la température
$\nu(z, t)$	Coefficient de Poisson en fonction de la température
$\rho(z, t)$	Masse volumique en fonction de la température
$\alpha(z, t)$	Coefficient de dilatation thermique en fonction de la température
$k(z)$	Conductivité thermique
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement axial de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z .
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z .
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$g(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$g'(z)$	La deuxième dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
U_M	Énergie de déformation due aux effets mécaniques
U_T	Énergie de déformation due aux effets thermiques
δU	Variation de l'énergie potentielle
δK	Variation de l'énergie cinétique
δV_e	Variation de l'énergie de déformation de la fondation élastique
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
ε^0	Champ des déformations en membrane
k^b	Champ des déformations en flexion
k^s	Champ des déformations en cisaillement
N_x, N_y, N_z, N_{xy}	Efforts normaux
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
Q_{xz}^s, Q_{yz}^s	Effort de cisaillement
$Q_{ij}(z)$	Coefficients de rigidité
I_i, J_i, K_i	Moments d'inerties
f_e	L'intensité de la réaction de la fondation.
K_w	Coefficient de rigidité de la fondation type Winkler
K_s	Coefficient de rigidité de la fondation de Pasternak
∂	Dérivée partielle
i et j	Nombres naturels

$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s,$ D_{ij}^s, H_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
$A_{ij}^T, B_{ij}^T, D_{ij}^T, B_{ij}^{sT},$ D_{ij}^{sT}, H_{ij}^{sT}	Termes de rigidité due à l'effet thermique
ω	Fréquence naturelle
m, n	Mode de vibration
$[S]$	Matrice de rigidité
$[M]$	Matrice de masse
$\{\Delta\}$	Vecteur des déplacements généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[\]$	Matrice



INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GENERALE

Un grand progrès dans la technologie de fabrication matérielle a été mis en œuvre pour développer de nouvelle génération des matériaux afin de répondre aux exigences de l'industrie. Comme depuis l'histoire de la civilisation humaine a évolué à partir des outils de pierre à l'ère de l'acier et à l'ère spatiale, l'innovation de certains matériaux à chaque époque a été faite pour soutenir le développement de la technologie. Les rails et les chaudières en acier de la révolution industrielle ont été utilisés pendant l'époque d'acier. À l'ère spatiale, les matériaux composites ont été introduits pour la fabrication de structures intelligentes qui étaient robustes et légères. Les matériaux composites qui sont connus sous le nom de matériaux modernes sont composés de deux ou plusieurs matériaux différents, pour avoir les propriétés souhaitées dans des applications spécifiques. Les matériaux composites légers appelés composites stratifiés matrice-fibre ont été utilisés avec succès dans l'aéronautique, l'automobile, l'industrie marine et d'autres applications d'ingénierie. Cependant, l'inadéquation des propriétés mécaniques à travers l'interface de deux matériaux différents peuvent provoquer d'importantes contraintes inter-laminaires. Donc, des problèmes de décollement et de délaminage peuvent survenir, surtout dans un environnement à haute température.

En général, différents types de matériaux homogènes isotropes tels que les matériaux dans le groupe de métaux et de polymères ont été largement utilisés dans plusieurs domaines de l'ingénierie depuis plusieurs décennies. Matériaux dans le groupe de métaux se distinguent par une haute résistance et la ténacité, tandis que les polymères sont bons pour une grande flexibilité et résistance à la corrosion. Cependant, ces types de matériaux ne parviennent pas à résister à des charges extrêmes de température. Par conséquent, pour améliorer les propriétés en termes de résistance thermique, des matériaux céramiques peuvent être mélangés avec des métaux et des polymères afin de combiner leurs avantages spécifiques. En raison de la croissance récente d'une tendance à utiliser des matériaux pour le marquage des structures d'ingénierie qui sont soumises à des charges mécaniques sous haute température, il est important de créer une nouvelle classe de matériaux afin de soutenir une telle exigence.

De nombreux milieux naturels présentent des variations unidirectionnelles et continues de leurs propriétés élastiques. Les tissus vivants, la croûte terrestre, les océans ou encore l'os

cortical en font partie. Tirant leur inspiration de la nature qui les entoure, les scientifiques (chercheurs et ingénieurs), se sont penchés sur les avantages que présentaient ce type de matériaux en terme de comportement mécanique et c'est ainsi que l'on vit apparaître, dans les années 1980, les matériaux à gradients de propriétés (Functionally Graded Materials « FGM »). Ils permettent par exemple de reproduire les propriétés structurales et matérielles des tissus biologiques tels que l'os à différentes étapes de son évolution (croissance, vieillissement ou pathologie).

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), sont un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques. La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, en génie civil et également dans des applications biomédicales.

Il est important d'étudier et de comprendre le comportement des structures en matériaux FGM soumises à diverses charges mécaniques, statiques et dynamiques, pour une conception appropriée et afin d'avoir des structures solides et de minimiser les coûts nécessaires à leur traitement et à leur fabrication. Donc, pour étudier telles structures FGM en utilisant les théories classiques des poutres et des plaques, on constate généralement que les résultats de l'analyse de la flexion sont sous-estimés, alors que les charges critiques de la stabilité et les fréquences naturelles de l'analyse dynamique sont surestimées. Il est donc recommandé d'appliquer les théories qui tiennent en compte des effets de déformation de cisaillement à l'analyse des poutres et des plaques produites à partir de FGM afin d'obtenir des résultats plus précis et adéquats.

En conséquence, l'objectif de cette thèse est porté sur une contribution à l'analyse de la vibration libre des plaques FGM en développant des modèles mathématiques raffinés, simples et fiables sur la base des théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé bidimensionnelles (2D) et quasi-tridimensionnelles (quasi-3D). Plusieurs paramètres, qui ont des influences significatives sur les résultats analytiques, sont pris en compte dans cette recherche et comparés à d'autres résultats numériques trouvés dans la littérature.

Pour ce faire, le travail de cette thèse s'articule autour de cinq chapitres dont voici les détails :

Le premier chapitre s'intéresse à une présentation synthétique des matériaux fonctionnellement gradués, leurs propriétés et l'histoire de leur développement. Il évoque aussi les différents modèles analytiques d'homogénéisation qui permettent d'estimer l'évolution des propriétés élastiques en fonction de différents paramètres, notamment la fraction volumique de charge. D'autre part, il présente les méthodes d'élaboration de ces matériaux, ainsi que leurs domaines d'applications.

Le deuxième chapitre présente une revue de quelques travaux scientifiques portant sur les matériaux à gradient de propriétés « FGM » en mettant l'accent sur les travaux publiés récemment. Les progrès récents dans la caractérisation, la modélisation et l'analyse des structures en FGM sont aussi présentés.

Le troisième chapitre détaille la mise en œuvre d'un modèle analytique basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé à cinq variables pour étudier la vibration libre des plaques FG reposant sur des fondations élastiques. L'effet de la géométrie de la plaque, l'indice matériel et les composantes des matériaux sur la réponse en vibration de la plaque est aussi recherché.

Dans le quatrième chapitre, une théorie 2D et quasi-3D de déformation de cisaillement ont été développés afin de pouvoir examiner l'influence de l'effet de l'étirement sur le comportement vibratoire des plaques FGM. Une nouvelle fonction de gauchissement a été établie en combinant deux fonctions exponentielle et trigonométrique tout en assurant une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur permettant leur nullité aux bords libres de la plaque.

Le cinquième chapitre s'est concentré à l'analyse de la réponse dynamique des plaques FGM soumises à des chargements thermiques en utilisant une théorie de déformation d'ordre élevé bidimensionnelle à quatre variables. Les propriétés matérielles sont supposées dépendantes de la température et varient à travers l'épaisseur de la plaque selon une loi de puissance. Les conditions thermiques uniforme, linéaire, non linéaire et sinusoïdale sont prises en compte aux surfaces supérieure et inférieure des plaques FG simplement appuyées. Pour optimiser le comportement vibratoire en fonction de ces conditions thermiques, une

Introduction générale

étude numérique paramétrique a été effectuée sur les plaques FGM. Cette étude a été réalisée en faisant varier la composition matérielle (indice de puissance), la géométrie de la plaque et le type du champ thermique.

A la fin, une conclusion générale est dressée mettant en évidence les principaux résultats obtenus sur le comportement vibratoire des plaques en matériaux FGM. Des perspectives de recherche ouvertes à la suite de ce travail sont également proposées.

Chapitre

I

Généralités sur les matériaux Fonctionnellement gradués

Dans ce chapitre, nous présentons les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'applications.

Sommaire

I.1.	Introduction	5
I.2.	Concept des matériaux fonctionnellement gradués	5
I.3.	Histoire de développement des matériaux FGM : d'une idée à une réalité	9
I.4.	Classification conventionnelle des matériaux FGM	11
I.4.1.	En fonction de la structure du FGM.....	11
I.4.2.	En fonction du gradient	13
I.5.	Modèles mathématiques d'homogénéisation des propriétés matérielles des FGM	14
I.5.1.	Les lois de mélange	15
I.5.1.1.	Loi de puissance (P-FGM)	16
I.5.1.2.	Loi sigmoïde (S-FGM).....	17
I.5.1.3.	Loi exponentielle (E-FGM).....	17
I.6.	Techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés	18
I.6.1.	Procédés de fabrication à l'état solide	19
I.6.1.1.	Technique de métallurgie des poudres	19
I.6.2.	Procédés de fabrication à l'état liquide	20
I.6.2.1.	Coulage en bande (Tape Casting).....	20
I.6.2.2.	Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting).....	21
I.6.2.3.	Projection du plasma (Plasma Spraying).....	21
I.6.2.4.	Frittage et infiltration	22
I.6.2.5.	Technique d'infiltration par centrifugation.....	22
I.6.3.	Procédés de Fabrication par projection de matière	23
I.6.3.1.	Procédé de fusion sélective par laser (SLM)	24
I.7.	Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés	25
I.8.	Conclusion	28

I.1. Introduction

La récente technologie nécessite d'employer des matériaux innovants caractérisés selon les exigences en termes de performances techniques, de fiabilité, d'économie d'élaboration, de durabilité et d'impact environnemental, les matériaux classiques ne répondent pas toujours à ces spécifications. Dans ce contexte, la conception des matériaux avancés qui allient d'une façon simultanée la rigidité, la résistance, la ténacité élevée et une grande légèreté est un facteur plus important. Pour atteindre ces objectifs, les chercheurs et les industriels ont contribué au développement d'une nouvelle génération des matériaux composites appelée « matériaux à gradient de propriétés » qui font l'objet d'importantes recherches.

I.2. Concept des matériaux fonctionnellement gradués

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM), matériaux révolutionnaires, appartiennent à la classe des matériaux avancés dont la composition, la microstructure et même les propriétés mécaniques varient de manière continue et cohérente d'une surface à l'autre le long de l'axe de construction (Figure I.1), ce qui permet d'améliorer les performances et la fiabilité du matériau et d'atténuer ainsi les concentrations de contraintes que l'on trouve dans les composites laminés (Popoola et al., 2016).

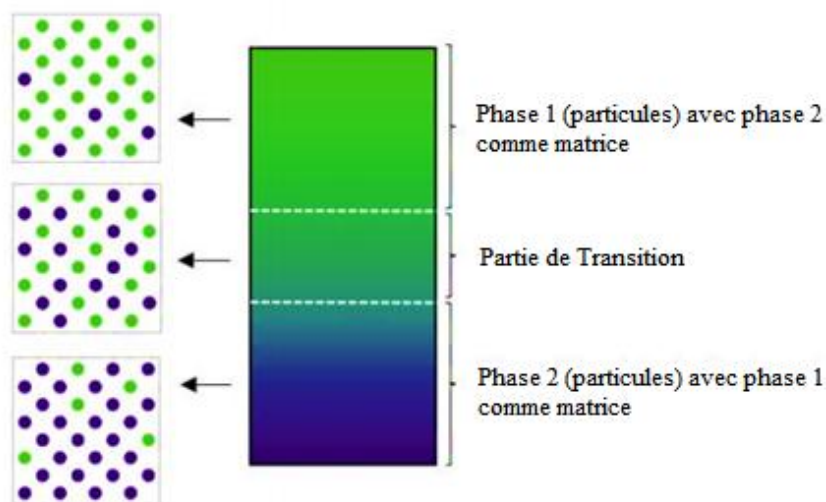


Figure I.1. Concept des matériaux à gradient de propriétés (Loh et al., 2018).

La composition d'un matériau à gradient fonctionnel peut être définie comme "un changement de composition dans le volume de masse d'un matériau visant à mélanger et à faire varier dynamiquement les proportions des matériaux dans un volume tridimensionnel afin de produire une intégration homogène de structures fonctionnelles monolithiques aux propriétés variées" (Mahmoud et Elbestawi, 2017).

La graduation des propriétés du matériau réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les facteurs de concentration de contraintes. La variation graduelle donne un matériau très efficace adapté aux besoins de la structure et qui est donc appelé *matériau fonctionnellement gradué* « FGM ». Ils sont généralement fabriqués à partir de composants isotropes tels que les métaux et les céramiques, car ils sont employés également comme structures de barrière thermique dans des environnements à gradients thermiques importants (par exemple, dispositifs thermoélectriques pour la conversion d'énergie, industrie des semi-conducteurs). Dans ces applications, la céramique offre une résistance à la chaleur et à la corrosion, tandis que le métal assure la solidité et la ténacité (Tableau I.1) (Elishakoff et al., 2016).

Tableau I.1. Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal (Elishakoff et al., 2016).

La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none">- Bonne résistance thermique ;- Bonne résistance à l'oxydation ;- Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	<ul style="list-style-type: none">-Élimination des problèmes de l'interface ;-Relaxation les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	<ul style="list-style-type: none">- Bonne résistance mécanique ;- Conductivité thermique élevée,- Très bonne ténacité.

La différence de composition et de propriétés entre un matériau composite ordinaire et un FGM comme indiqué dans la figure I.2 est caractérisée par la présence d'une interface distincte entre les métaux et les céramiques dans un matériau composite ordinaire, mais pas

dans un FGM. Cette différence correspond à la répartition des propriétés telles que le coefficient de dilatation thermique, la conductivité thermique et la résistance thermique. Un matériau composite ordinaire présente un changement soudain de propriétés à l'interface, tandis qu'un FGM présente un changement progressif à l'intérieur de celui-ci. La différence des coefficients de dilatation thermique à l'interface provoque une contrainte thermique interne à des températures élevées, conduisant parfois au délaminage au niveau des interfaces. Comme le montre la figure I.2, un FGM réduit la contrainte thermique de près de 30 % et peut empêcher la rupture de l'interface (Shinohara, 2013).

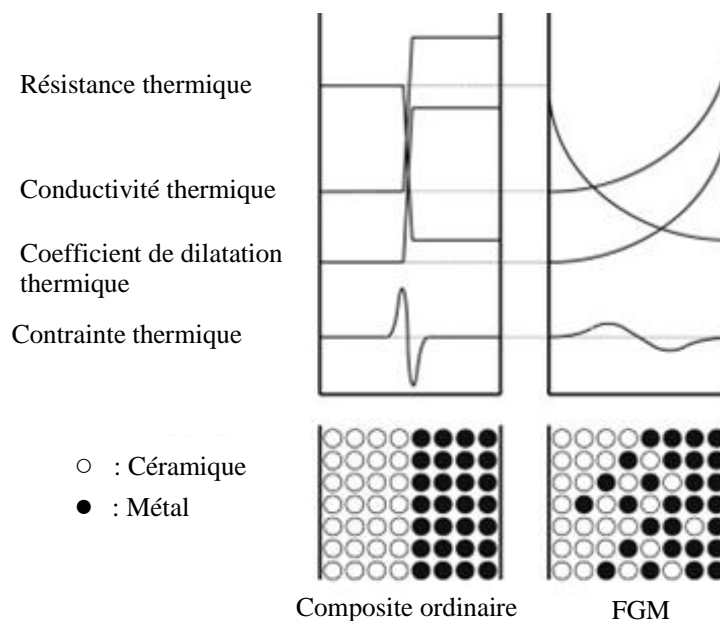


Figure I.2. Illustration de la différence de variation des propriétés dans les composites classiques et les FGM (Shinohara, 2013).

Les FGM présentent plusieurs avantages par rapport aux alliages et aux matériaux composites classiques. Ils introduisent des moyens pour contrôler la réponse des matériaux à la déformation, à la charge dynamique ainsi qu'à la corrosion et à l'usure, etc. En outre, ils permettent de tirer parti des avantages de différents matériaux qui les constituent, par exemple la céramique et les métaux (Petit et al., 2018). De plus, la biocompatibilité de certaines FGM augmente leur aptitude à remplacer les os. Les FGM peuvent également constituer une barrière thermique et peuvent être utilisées comme revêtement à haute résistance aux rayons et ils peuvent aussi réduire les contraintes résiduelles (Saleh et al., 2019). De même, les FGM peuvent être utilisées comme une interface de liaison à haute résistance pour relier deux matériaux incompatibles (Udupa et al., 2014). En plus, la possibilité et la facilité d'adapter les propriétés des matériaux aux exigences souhaitées est l'un des avantages de ces composites

avancés. Quelques motifs réalisés à l'aide du FGM sont présentés dans la figure I.3 (Rajan et Pai, 2014).

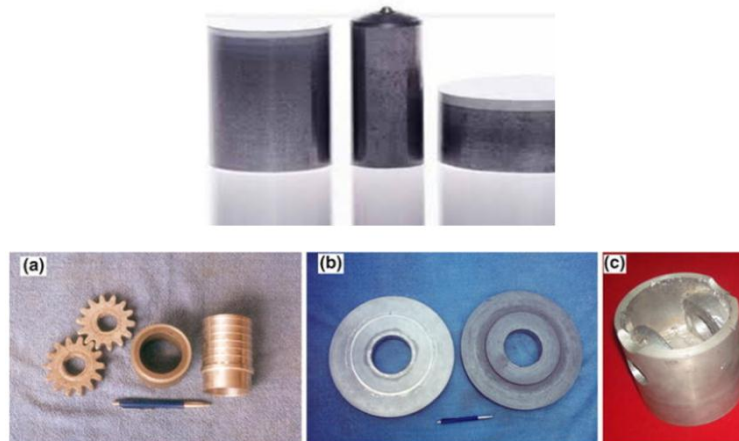


Figure I.3. Composants à gradient fonctionnel: (a) chemises de cylindre et engrenages ; (b) frein à disques; et (c) piston fabriqué par la méthode de coulée centrifuge (Rajan et Pai, 2014).

Le changement continu dans la composition et de la microstructure conduit à une variation continue dans les différentes propriétés (mécaniques, thermiques...etc.) d'un matériau « FGM ». Les chercheurs ont initialement classé les FGM dans la catégorie des matériaux composites conventionnels en fonction des combinaisons de constituants utilisées (Almasi et al., 2016). Il existe de nombreuses combinaisons possibles de matériaux qui peuvent être utilisés pour produire des FGM. Les plus courantes sont : métal-métal, métal-céramique, céramique-céramique ou céramique-polymère (Jamaludin et al., 2013) comme le montre la figure I.4 ci-dessus.

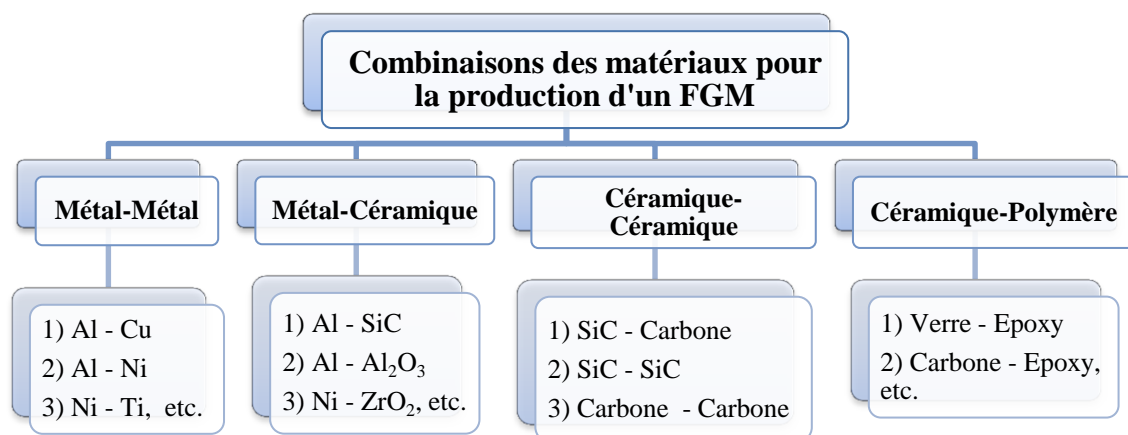
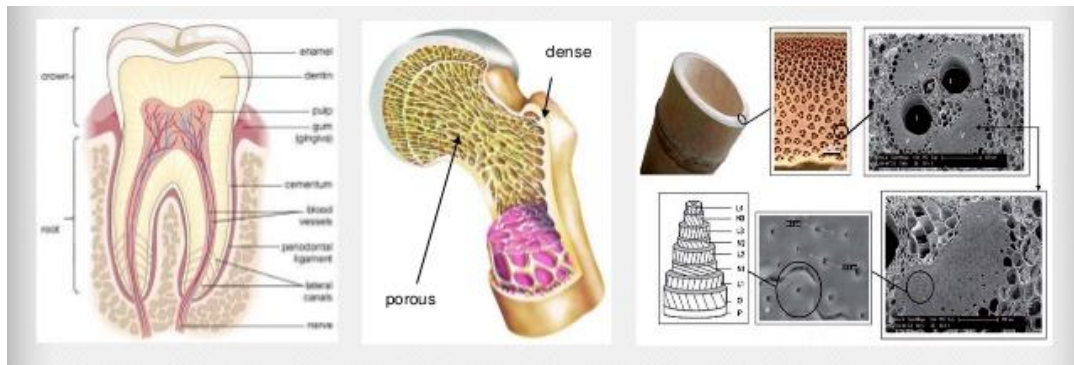


Figure I.4. Exemples de quelques combinaisons pour un matériau FGM (El-Galy et al., 2019).

I.3. Histoire de développement des matériaux FGM : d'une idée à une réalité

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués a été aperçu dans la nature depuis des millions d'années (Figure I.5). On peut les trouver dans les tissus des plantes, des animaux et même dans notre corps en citant à titre d'exemple les os, les coquilles, les noix de coco et les feuilles de certaines graminées comme les bambous. La nature donne toujours un moyen aux scientifiques, chaque fois qu'ils sont confrontés à des problèmes technologiques (Mahamood et Akinlabi, 2017).



(a) Une dent

(b) Un os

(c) Fibres de plantes

Figure I.5. Exemples des matériaux FGM dans la nature (Baghersshahi, 2017).

Les matériaux à gradient de propriétés ont été développés pour la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par Niino et ses collègues à Sendai. L'idée était de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion (Koizumi, 1994). Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique (Koizumi, 1997). Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être utilisée pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques (Nguyen et al., 2007).

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux capables d'éliminer les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (Abdizadeh, 1997). Dix-sept laboratoires de recherches, des universités et des entreprises ont

été engagées dans ce projet. Ils ont montré également comment un FGM peut alléger ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles (Koizumi, 1997).

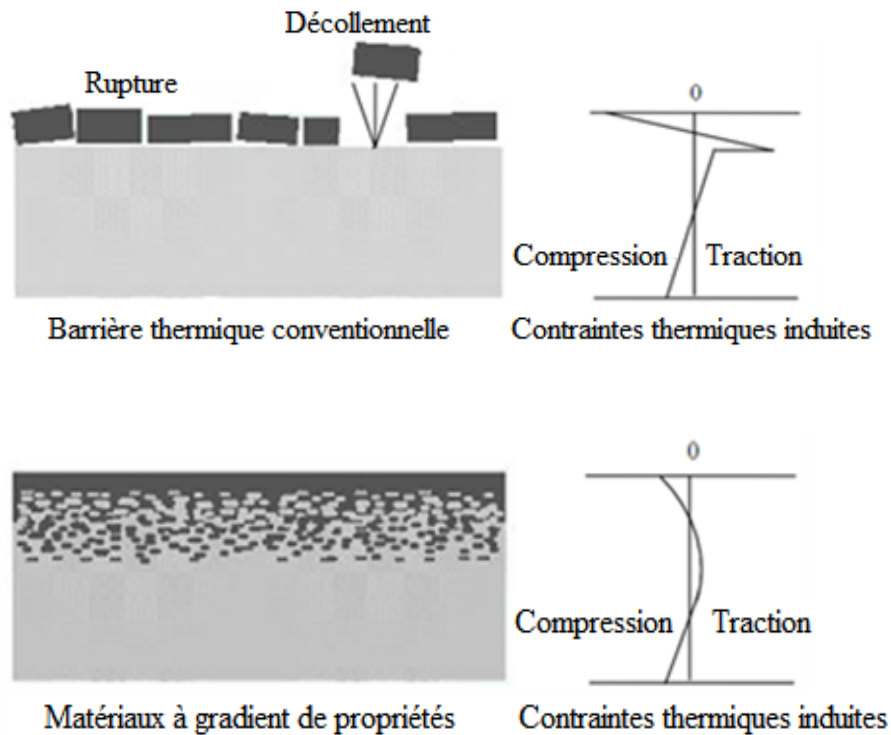


Figure I.6. Protection thermique (Houari, 2011).

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux et les murs thermiques spéciaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette époque, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques (Koizumi, 1994). Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
- Ténacité du matériau côté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Durant la période des (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10mm d'épaisseur et 30mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K.

Dans les années (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique (Okamura, 1991).

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations pour les futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique (Attia, 2015).

I.4. Classification conventionnelle des matériaux FGM

Dès le développement des matériaux à gradient fonctionnel, le concept était d'éliminer l'interface qui existait dans le matériau composite traditionnel, et de le remplacer par une interface graduellement progressive. L'intérêt croissant pour ce type de matériau a entraîné le développement de différents types de FGM. Le type d'application prévue détermine généralement le type de FGM à utiliser. Les différents types de FGM qui sont actuellement produits peuvent être classés en fonction de plusieurs paramètres (Neubrand et Rödel, 1997).

I.4.1. En fonction de la structure du FGM

Les FGM sont caractérisées par des transitions graduelles dans les compositions / constituants ou les microstructures (par exemple, la taille des grains, la texture, la porosité, etc.), dans au moins une direction, conduisant à des changements fonctionnels associés à au

moins d'une propriété (Zhang et al., 2019). Pour cela, il existe deux modèles de progression fonctionnelle ; le modèle continu et le modèle discontinu. Dans le cas des FGM à changement progressive, ils donnent lieu à une structure à couches multiples avec existence d'interface entre ces couches discrètes (Figure I.7a) (Shen, 2009; Udupa et al., 2014). D'autre part, les FGM à variation continue, la modification de la composition et de la microstructure se produit d'une manière continue d'un côté à l'autre où aucune zone ou ligne de séparation peut être observée à l'intérieur du matériau pour distinguer les propriétés de chaque zone (Figure I.7b). La gradation spatiale peut se manifester à un niveau global ou local. Dans la gradation globale, la variation des propriétés s'étend sur la plus grande partie du matériau. Par contre, la gradation locale est limitée à un emplacement spécifique dans le matériau, comme un revêtement sur la surface ou un joint dans la région inter-faciale (Miyamoto et al., 1999). Les FGM peuvent être aussi classés selon la composition (Figure I.7c), la dimension des particules (Figure I.7f), leurs orientations (Figure I.7d, g) et la fraction volumique des constituants (Figure I.7e, h) (El-Galy et al., 2019). La gradation structurelle du matériau pourrait être décrite comme une fonction de transition qui montre la relation entre la position spatiale et l'état de la gradation (Lee, 2013).

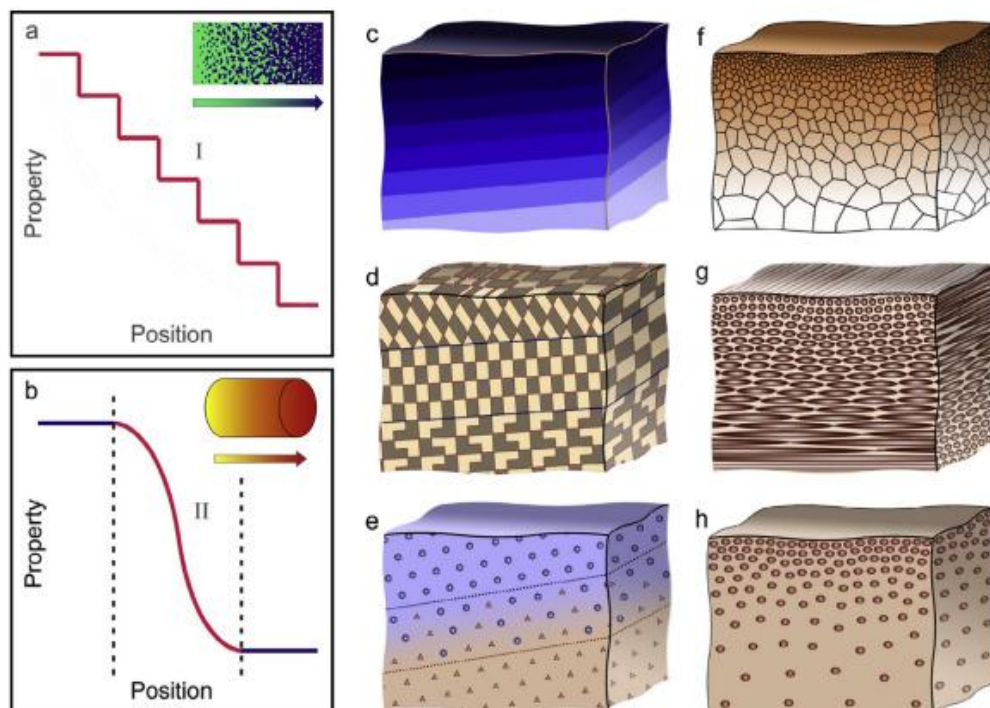


Figure I.7. Différents types d'un FGM. (a) le modèle discret (b) le modèle continu sans interface; (c) gradient de la composition (f) gradient de la dimension; (d,g) gradient de l'orientation; (e,h) gradient de la fraction volumique (Zhang et al., 2019).

I.4.2. En fonction du gradient

Les FGM peuvent généralement être classées en trois groupes de gradient différents : la composition chimique, la microstructure et la porosité, comme le montre la figure I.8 (Mahmoud et Elbestawi, 2017). Le type de gradient au niveau de la composition chimique des FGM dépend de la composition du matériau, qui varie d'une substance à l'autre, conduisant à différentes phases avec des structures chimiques différentes. Ces différentes phases de production dépendent de la quantité de matière synthétique et les conditions dans lesquelles les matériaux sont produits (Popoola et al., 2016).

La graduation de la microstructure du FGM peut être atteinte au cours du processus de solidification. Dans ce type, le noyau du même matériau peut se refroidir lentement, ce qui permet de générer différentes microstructures à partir de la surface jusqu'à l'intérieur du matériau (Popovich et al., 2017). L'avantage de ce type gradient est qu'il est possible d'obtenir un noyau assez dur avec une surface plus tenace, ce qui augmenterait la résistance à l'usure (Mahmoud et Elbestawi, 2017).

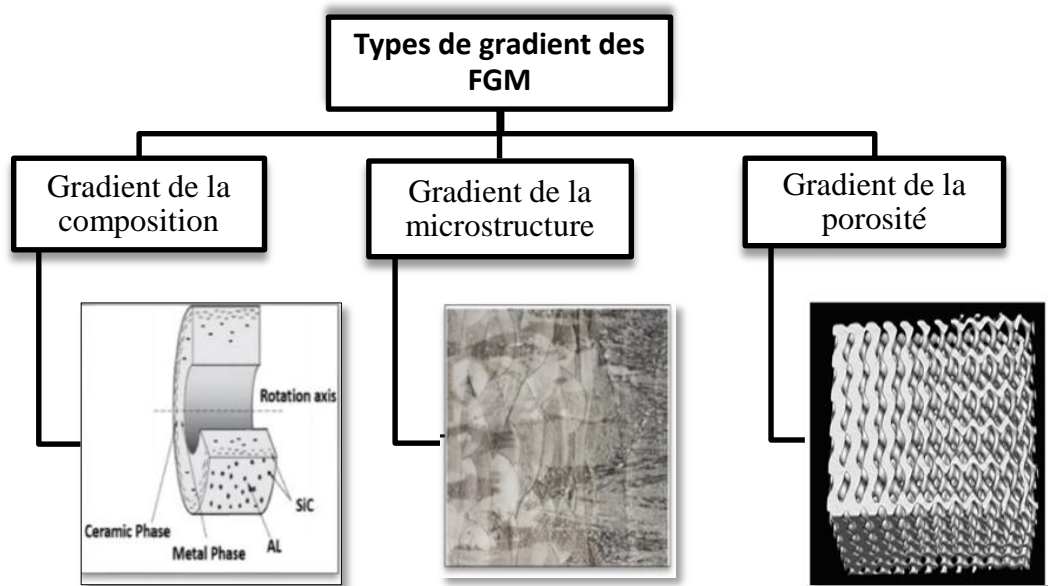


Figure I.8. Classification des FGM selon le type du gradient (El-Galy et al., 2019).

Avec les changements de la localisation spatiale dans le matériau en vrac, Il est possible de créer un gradient de porosité fonctionnelle en modifiant la porosité dans le volume du matériau. La variation de la densité va être associée à la variation des propriétés mécaniques, ce qui peut rendre la pièce plus fonctionnelle qu'un seul matériau constitutif pour certaines applications (Mota et Loja, 2019). La taille des particules de poudre peut être

mesuré à partir de la taille des pores utilisés lors de la graduation à différentes positions dans le matériau en vrac. Ce type de matériau fonctionnel est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'ils ont l'intention de remplacer consiste en une porosité graduelle, et la porosité graduelle aiderait également à l'intégration de l'implant et des tissus environnants (Gabbrielli et al., 2007).

Les principaux paramètres de conception d'un FGM comprennent la dimension du vecteur de gradient, la forme géométrique et la répartition équipotentielle des surfaces. Les caractéristiques et la fonctionnalité du composant sont en outre déterminées par la direction du gradient dans la composition (Craveiro et al., 2013). La conception et les types de gradient volumétrique peuvent être réalisés en une seule dimension (1D), deux dimensions (2D) et en trois dimensions (3D) comme illustré dans la figure I.9, et en distribuant les matériaux uniformément ou par des motifs spéciaux (Loh et al., 2018; Muller et al., 2012).

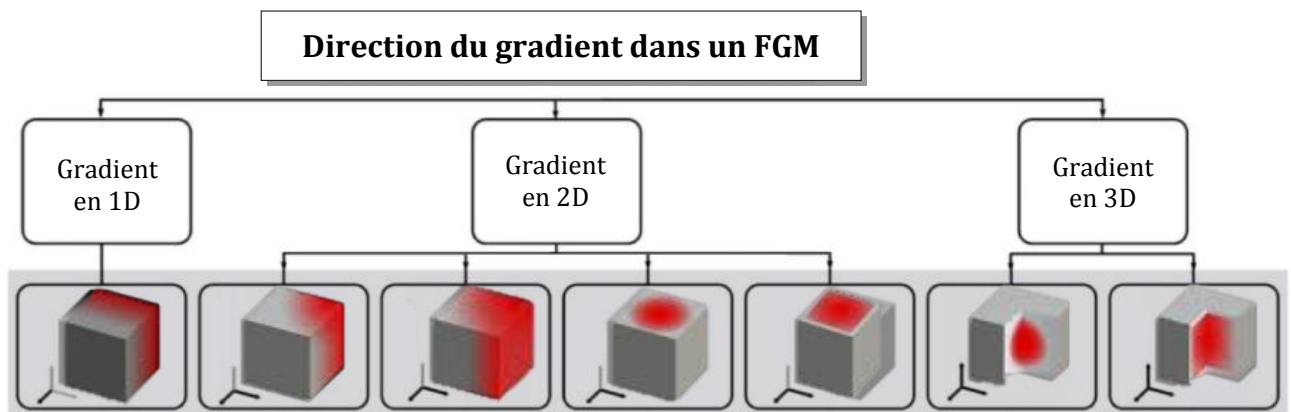


Figure I.9. Classification des directions du gradient (Muller et al., 2012).

I.5. Modèles mathématiques d'homogénéisation des propriétés matérielles des FGM

Les FGMs sont des matériaux hétérogènes constitués par l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes. Donc, il est très utile d'avoir des schémas d'homogénéisation pour simplifier leurs microstructures non-homogènes complexes afin de les analyser d'une manière efficace. Des solutions fermées de certains problèmes fondamentaux de la mécanique des solides peuvent être obtenues par cette idéalisation et aussi elle aidera à l'évolution et le développement des modèles numériques pour les structures en FGMs. Un FGM typique représente un composite de particules avec une distribution prescrite des fractions volumiques des phases constitutives. Les propriétés de ces

matériaux sont généralement supposées suivre une graduation continue à travers l'épaisseur (Bakora, 2016). Pour cela, Plusieurs modèles mathématiques d'homogénéisation ont été développés au fil des années pour déduire les propriétés effectives des matériaux FGM macroscopiquement homogènes. Ces modèles sont disponibles pour estimer les propriétés globales des composites à partir de la connaissance de la composition des matériaux et des propriétés des composants (Elishakoff et al., 2016).

1.5.1. Les lois de mélange

Selon la règle des mélanges, on suppose qu'une propriété matérielle arbitraire, désignée par P , d'une plaque FGM varie de façon régulière et continue dans une direction, en fonction des fractions volumiques et des propriétés des matériaux constitutifs. Comme on considère que la variation des propriétés se fait dans la direction de l'épaisseur (z), voir la figure I.10.

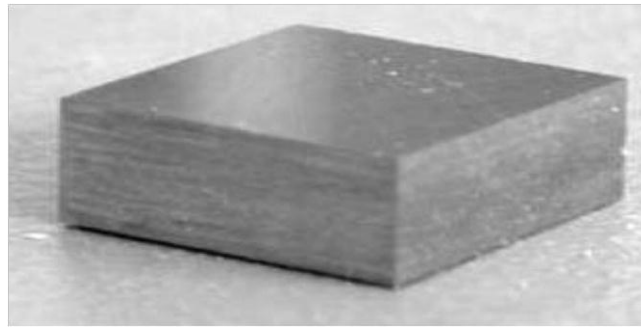


Figure I.10. Une plaque fonctionnellement graduée (Elishakoff et al., 2016).

Dans ce contexte, P peut représenter, par exemple, le module d'élasticité, la masse volumique et/ou le coefficient de Poisson. Cette propriété peut être exprimée sous la forme d'une combinaison linéaire (Eq. I.1) (Elishakoff et al., 2016).

$$P(z) = P_1V_1 + P_2V_2 \quad (\text{I.1})$$

Tel que z est la direction de distribution, P_1 , P_2 et V_1 , V_2 sont les propriétés matérielles et les fractions volumiques des matériaux constitutifs 1 et 2, respectivement. La somme des fractions volumiques de tous les matériaux constitutifs doit être égale à l'unité.

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (\text{I.2})$$

1.5.1.1. La loi de puissance (P-FGM)

Cette loi est la plus fréquemment utilisé et surtout pour le calcul et l'analyse des contraintes (Bakora, 2016). La fraction volumique de cette classe est soumis à une fonction en loi de puissance (Bao et Wang, 1995; Zaoui et al., 2017a) comme suit

$$V_1(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \tag{I.3a}$$

$$V_2(z) = 1 - \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \tag{I.3b}$$

Où k ($0 \leq k \leq \infty$) est un indice matériel qui définit le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur et h est l'épaisseur du matériau. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ est définie, les propriétés matérielles peuvent être déterminées par la loi de mélange suivante

$$P(z) = P_2 + (P_1 - P_2) \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \tag{I.4}$$

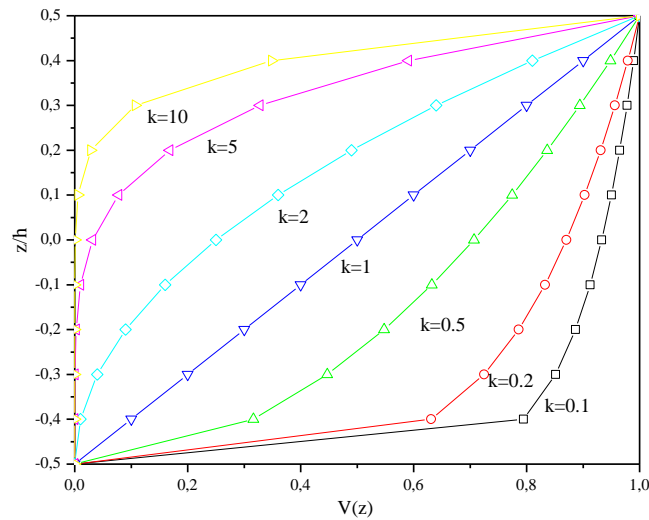


Figure I.11. Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur d'un matériau P-FGM.

La variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur du FGM est représentée sur la figure I.11 pour différentes valeurs de k . Comme le montre la figure, le changement de la valeur de k génère un nombre infini de distributions de composition. Cette loi de puissance reflète une règle simple des mélanges utilisés pour obtenir les propriétés efficaces du FGM. La quantité du matériau 2 contenue dans la plaque augmente avec l'augmentation de la valeur de k . La valeur $k = 0$ représente une plaque entièrement homogène constituée du matériau 1 (Markworth et Saunders, 1995).

1.5.1.2. La loi sigmoïde (S-FGM)

La fraction volumique d'un matériau type S-FGM telle qu'elle est montrée dans la Figure I.12, est définie en utilisant deux fonctions de loi de puissance qui assurent une distribution régulière des contraintes dans le sens de l'épaisseur (Beldjelili et al., 2016; Chikh et al., 2016; Lee et al., 2015) comme suit

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.5a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.5b})$$

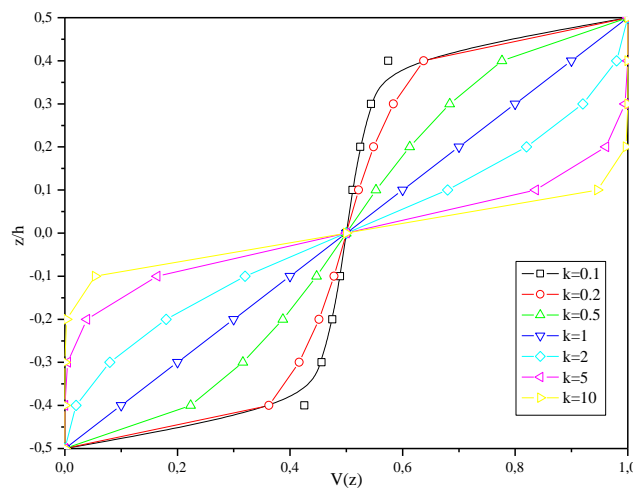


Figure I.12. Distribution de la fraction volumique en fonction de l'épaisseur d'un matériau S-FGM.

En utilisant la loi des mélanges, les propriétés matérielles d'un matériau S-FGM peuvent être calculées par

$$P(z) = V_1(z) P_1 + [1 - V_1(z)] P_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.6a})$$

$$P(z) = V_2(z) P_1 + [1 - V_2(z)] P_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.6b})$$

1.5.1.3. La loi exponentielle (E-FGM)

Dans ce cas, la fraction volumique représentée sur la figure I.13 est censée d'être variable d'une façon continue dans le sens de l'épaisseur en fonction d'une distribution exponentielle (Delale et Erdogan, 1983; Mantari et Guedes Soares, 2013; Meradjah et al., 2018) comme indiqué dans l'équation (I.7).

$$P(z) = P_1 e^{k(z+h/2)} \quad (I.7a)$$

Avec

$$k = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad (I.7b)$$

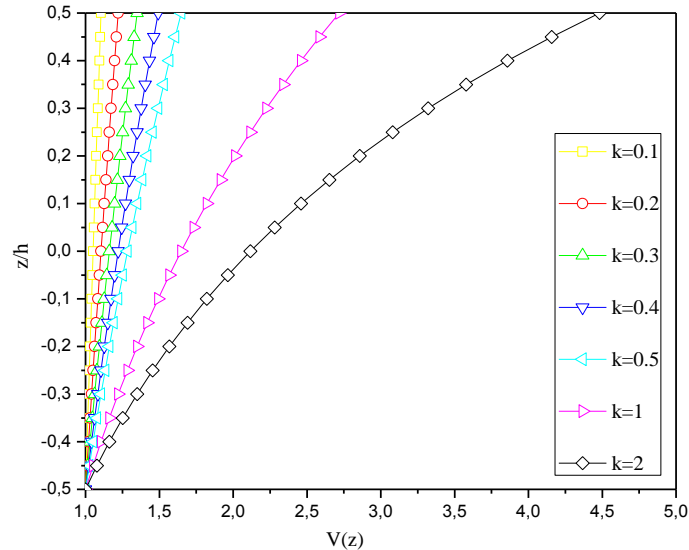


Figure I.13. Variation de la fraction volumique d'un matériau E-FGM à travers l'épaisseur.

I.6. Techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés

Les structures en matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials - FGM) sont des structures dont la composition et la microstructure du matériau changent graduellement à l'intérieur de la pièce. Cette distribution de matière permet de réaliser des gradients de propriétés au niveau mécanique, physique, chimique, etc. Donc, pour pouvoir fabriquer des pièces à gradient fonctionnel, il est nécessaire d'avoir une méthodologie de fabrication complète et permettant de passer de l'objet imaginé par le concepteur au produit final. Cette méthodologie comporte la description de la pièce à fabriquer, la détermination d'une stratégie de fabrication adaptée et la génération des instructions de fabrication. Parmi les étapes du processus de fabrication, celle du choix d'une stratégie de fabrication occupe une place importante (Muller, 2013).

La stratégie de fabrication des pièces en matériaux à gradient fonctionnel peut être divisée en deux étapes. La production de la structure spatialement non homogène qui est appelé « gradation » et la transformation de cette structure en matériau massif (en bloc) connu sous le nom « consolidation ». Pour cela, une variété de méthodes et procédés d'élaboration des FGM a été développée en vue de produire ce type de matériau (Jamaludin et al., 2013)

(Figure I.14). La méthode de production la plus appropriée dépend principalement de la combinaison de matériaux, du type de fonction de transition requise et de la géométrie du composant souhaité et l'état initial du matériau constituant un FGM (Muller, 2013).

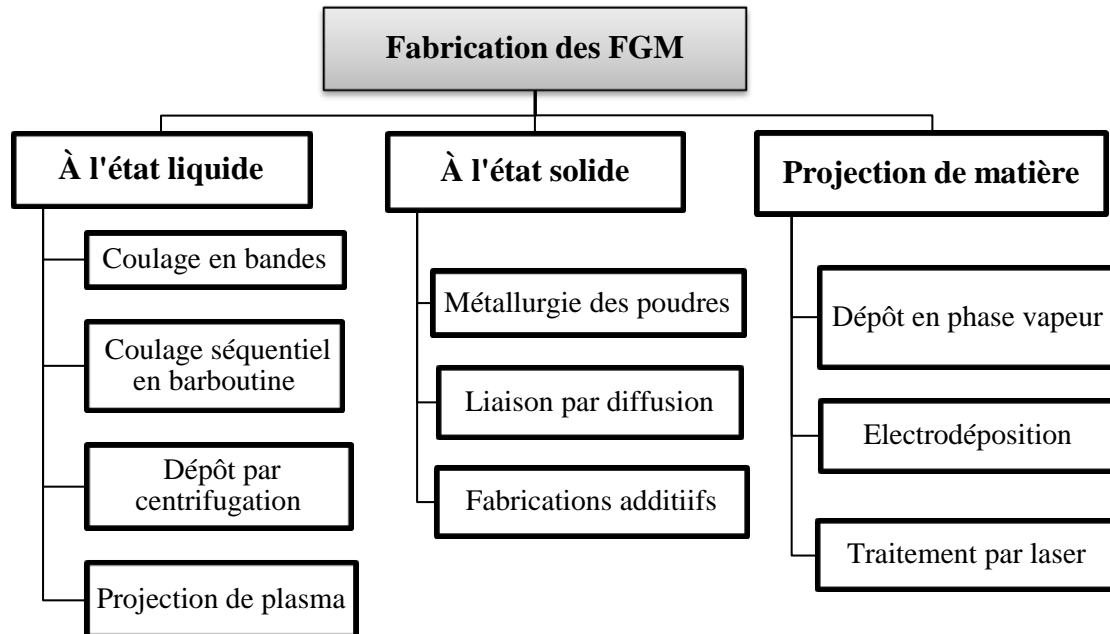


Figure I.14. Classification des méthodes de fabrication des FGMs (El-Galy et al. 2019).

1.6.1. Procédés de fabrication à l'état solide

1.6.1.1. Technique de métallurgie des poudres

La métallurgie des poudres est le procédé conventionnel le plus approprié pour la fabrication des matériaux fonctionnellement gradués (Kawasaki et Watanabe, 1997). Il s'agit de frittage de poudre (Gang Jin et al., 2005). Son principe comme montré dans la Figure I.15, consiste en premier temps au choix de la combinaison de matériaux (métal, céramique) qui sont sous forme de poudres, suivi par le mélange de ces poudres; l'empilement de la poudre pré-mélangée de manière échelonnée ou continue selon la distribution prédéfinie des composants; puis le compactage de la poudre empilée par pression isostatique à froid (CIP); et enfin le comprimé préparé est consolidé dans un four de frittage pour obtenir la pièce désirée (Bishop et al., 1993; Parihar et al., 2018).

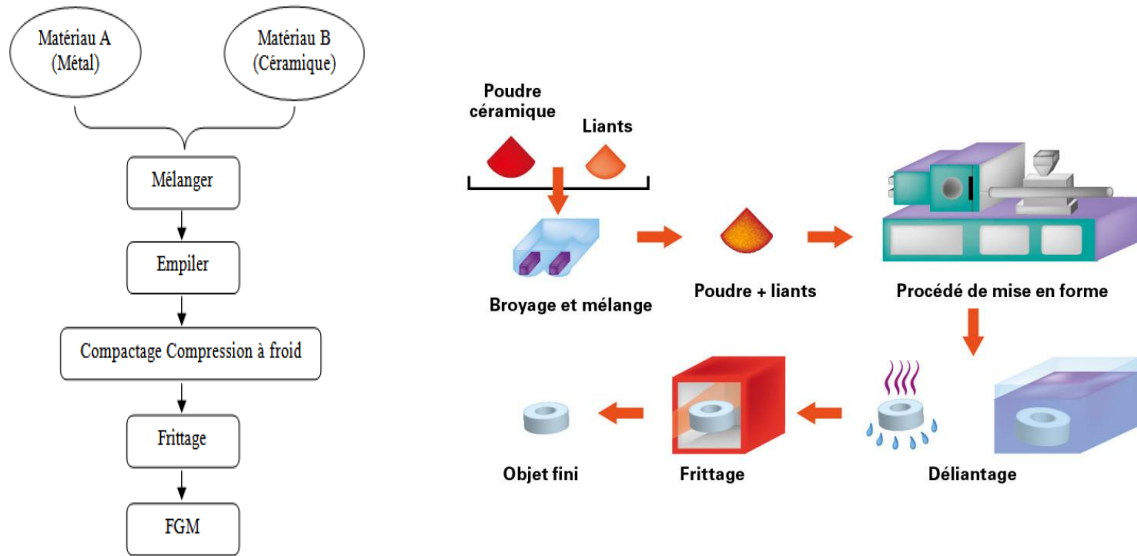


Figure I.15. Principe de la métallurgie des poudres (El-Galy et al. 2019).

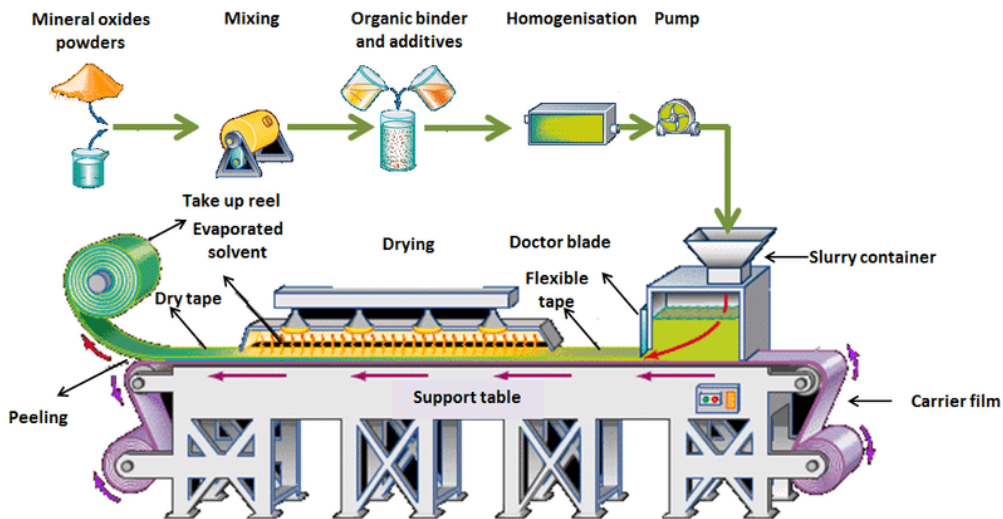


Figure I.16. Principe de la méthode coulage en bande (Faddoul, 2012).

I.6.2. Procédés de fabrication à l'état liquide

I.6.2.1. Coulage en bande (Tape Casting)

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (Figure I.16), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande

(Lostec, 1997). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés. Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes: soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler et al. (1973); soit par empilement de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression (Boch et al., 1986).

1.6.2.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru (Moya et al., 1992). Donc, le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- Formation du tesson ou "prise";
- Consolidation du tesson ou "raffermissement";
- La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches (Houari, 2011).

1.6.2.3. Projection du plasma (Plasma Spraying)

Dans ce procédé, un gaz utilisé est ionisé entre une anode et une cathode dans un pistolet à plasma. Le plasma atteint des températures comprises entre 15 000 et 20 000 °C. Une poudre de revêtement est injectée dans le jet de plasma par un gaz porteur, où elle fond avant de se déposer sur le substrat ou l'objet nécessitant le revêtement. Les particules de poudre fusionnent ensemble sur le substrat pour former un revêtement protecteur (Figure I.17).

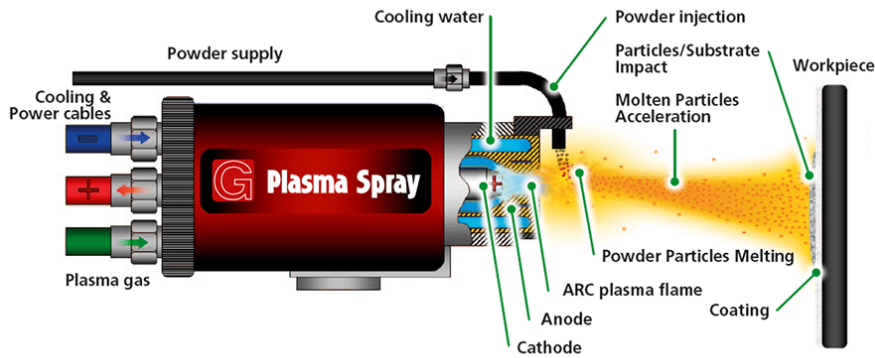


Figure I.17. Concept de la technique de projection du plasma (Tan et al., 2017).

Cette méthode est devenue très utilisable pour la fabrication des FGM surtout pour les revêtements de barrière thermique (TBC) dans les turbines à gaz. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (Steffens et al., 1990).

1.6.2.4. Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique (Takahashi et al., 1990).

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres (Houari, 2011).

1.6.2.5. Technique d'infiltration par centrifugation

En outre, la technique de dépôt par centrifugation consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindrique, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (Figure I.18) (Abdizadeh, 1997).

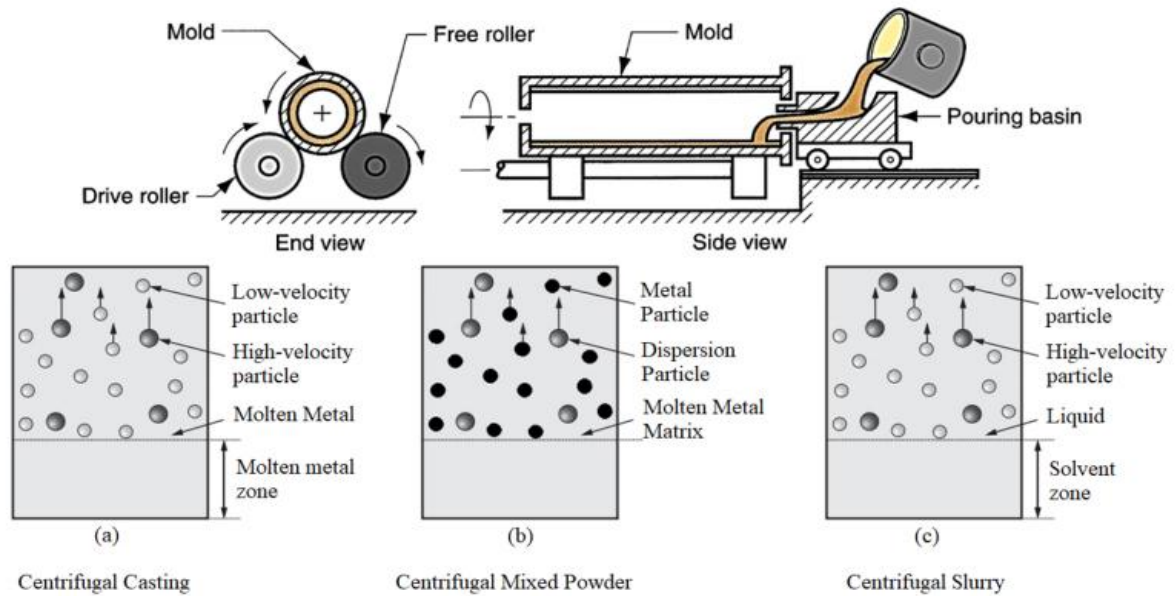


Figure I.18. Principe d’infiltration par centrifugation (El-Galy et al. 2019).

I.6.3. Procédés de Fabrication par projection de matière

Ces techniques sont basées sur la déposition de matière. Elles permettent d’avoir un ou plusieurs revêtements sur une pièce existante. Ce revêtement a une épaisseur de l’ordre du micromètre en ce qui concerne la projection en phase vapeur (Figure I.19) (Groves et Wadley, 1997), tandis qu’elle est de l’ordre du millimètre pour les procédés d’électrodéposition (Put et al., 2003) et de projection thermique (Xinhua et al., 1997). Avec ces techniques, les dimensions du gradient sont donc très limitées. De plus, le choix de la distribution des matériaux est souvent restreint. En effet, les surfaces d’équi-composition sont, dans la plupart des cas, parallèles à la surface extérieure de la pièce (Muller, 2013).

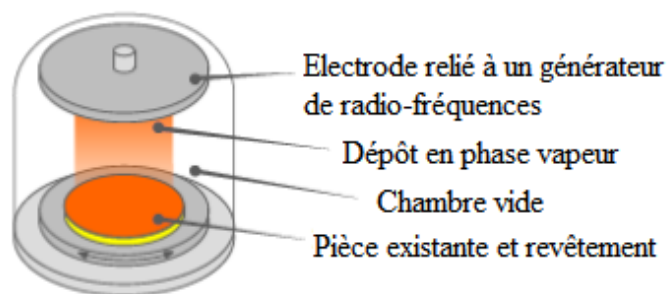


Figure I.19. Dépôt en phase vapeur d’un revêtement sur une pièce (Muller, 2013).

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des

particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux (Abdizadeh, 1997; Chikh, 2016).

1.6.3.1. Procédé de fusion sélective par laser (SLM)

La technique de fusion sélective par laser (ou Selective Laser Melting) (Figure I.20) est directement dérivée de la stéréo-lithographie. A partir d'un fichier CAO, et d'un tranchage en couches 2D successives, un faisceau laser fond une poudre pré-déposée et, couche par couche, en permettant une dilution entre-couches qui assure la continuité de la matière, génère une pièce 3D. La technique peut être utilisée sur les polymères, mais est particulièrement attractive sur les matériaux métalliques car elle permet l'obtention de pièces bonne matière (densité proche de 1), présentant des bonnes propriétés mécaniques (équivalentes ou légèrement supérieures à celles obtenues en fonderie), et un bon respect des côtes (Gharbi, 2013; Masmoudi, 2016).

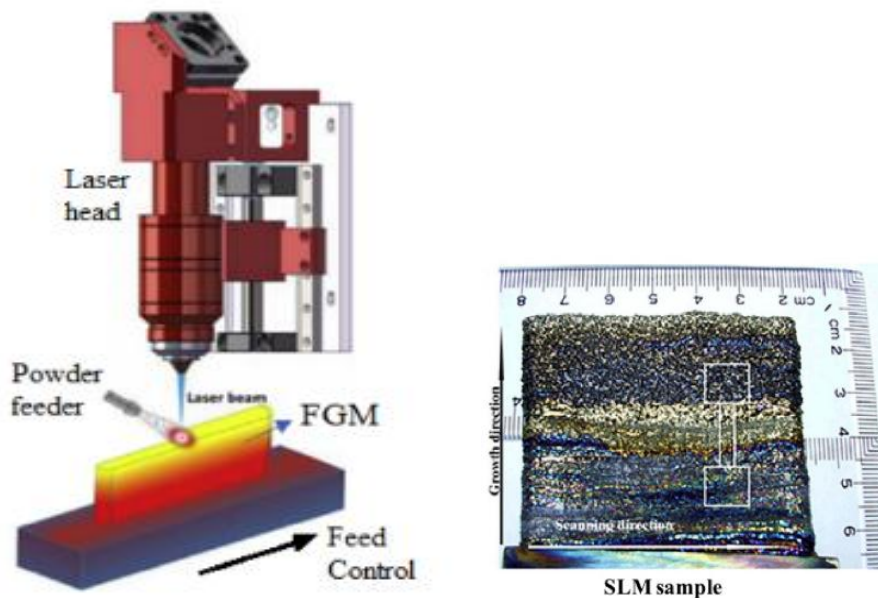


Figure I.20. (a) Schéma du procédé de Fabrication par laser (Zhang et al., 2019), (b) Un FGM type Ti6Al4V fabriqué par SLM (Qu et al., 2010).

I.7. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés

Dès la création des matériaux FGM, ils ont suscités un intérêt particulier grâce à leur caractéristiques spécifiques telles que la résistance, la rigidité, la conductivité et le poids léger...etc, qui les ont favorisées dans presque tous les domaines d'activité humaine (Figure

I.21). Les matériaux à gradient fonctionnel sont également idéaux pour réduire le désaccord entre les propriétés thermomécaniques de la liaison métal-céramique qui aide à prévenir le délaminage. Les demandes futures pour des matériaux fonctionnalisés sont dans de telles applications, où des propriétés mécaniques, thermiques et chimiques importantes sont requises, et qui doivent être capables de supporter des environnements de travail sévères. L'utilisation de matériaux fonctionnels est maintenant considérée comme l'un des matériaux les plus importants, efficaces et efficaces pour promouvoir le développement durable dans les industries.



Figure I.21. Principaux domaines d'application des matériaux FGM (Khathun, 2018).

1.7.1. Domaine d'énergie

Les industries de l'énergie ont constamment besoin de différents types de matériaux fonctionnels, afin d'améliorer l'efficacité de certains de leurs équipements. Parmi les applications des matériaux fonctionnels dans l'industrie de l'énergie, citons la paroi interne des réacteurs nucléaires (Figure I.22), le convertisseur thermoélectrique pour la conversion d'énergie, le panneau solaire, les cellules solaires, les tubes et récipients sous pression, l'électrode graduée pour la production de le combustible à oxyde solide, les matériaux piézo-électriques à gradient fonctionnel pour le transducteur à ultrasons, le diélectrique, la pile à combustible, les revêtements de pale de turbine, et pour les revêtements à barrière thermique (Yadroitsev et al., 2007).

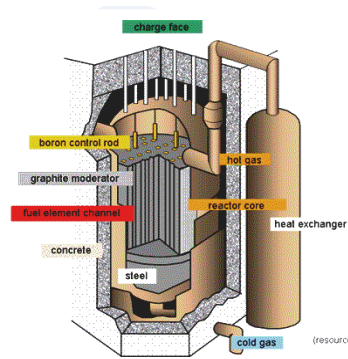


Figure I.22. Réacteur nucléaire (Mahmoudi, 2018)

1.7.2. Domaine aérospatial

Le concept d'un matériau FGM fit son apparition dans ce domaine où le but était de concevoir un matériau apte à résister à la fois à des sollicitations thermiques et mécaniques (Muller, 2013). Par exemple, le centre de recherche de la NASA a conçu des supports de fixation en FGM pour des navettes spatiales permettant de relier le réservoir au fuselage (Figure I.23a). Ils ont trouvé que pendant les phases de vol, la température du fuselage peut atteindre les 1000°C tandis que celle du réservoir est proche des 400°C. Donc, La création de ces supports de fixation en utilisant un gradient de matériau d'un alliage base Titane à un alliage base Nickel-Chrome, doit leur permettre de supporter ces contraintes thermiques en limitant les efforts de cisaillement et de flexion qui impactent leur durée de vie (Domack et Baughman, 2005).

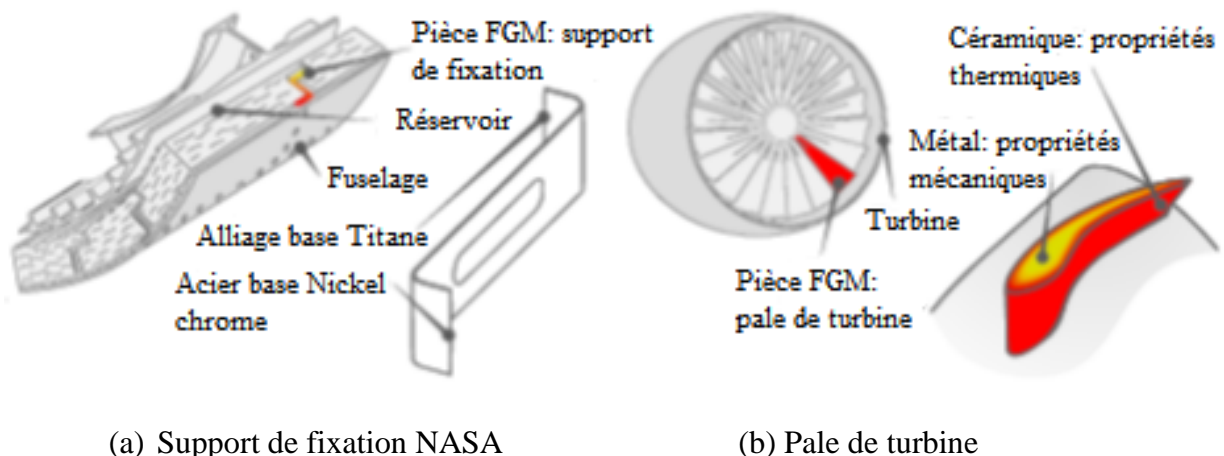


Figure I.23. Produits en matériaux FGM utilisés dans l'aérospatial (Domack et Baughman, 2005; Qian et Dutta, 2003).

1.7.3. *Domaine biomédical*

La technologie des FGM a été utilisée aussi dans le domaine biomédical où elle a trouvé à trouvé un large éventail d'applications dans le domaine dentaire et orthopédique pour le remplacement des dents et des os comme les implants dentaires, les prothèses de hanche (Figure I.24a) et les os artificiels. De nombreux chercheurs ont rapporté que les FGM pouvaient donner aux implants une solidité suffisante pour supporter la charge physiologique, et que la structure à porosité graduée pouvait améliorer les propriétés mécaniques de l'implant pour optimiser la réponse du matériau à la charge externe (Becker et Bolton, 1997; Pompe et al., 2003; Wang et al., 2012). Par exemple, pour les implants dentaires (Figure I.24b) formé à partir d'un FGM en titane/hydroxyapatite (Ti/HAP) présentait une bonne biocompatibilité et une bonne résistance mécanique (Watari et al., 1997). Aucune inflammation n'a été observée dans les implants dentaires traditionnels en Ti pur et dans les implants améliorés en Ti/HAP MGF après huit semaines. Mais les implants Ti/HAP MGF ont montré une meilleure biocompatibilité pour les os nouvellement formés (Watari et al., 1997).

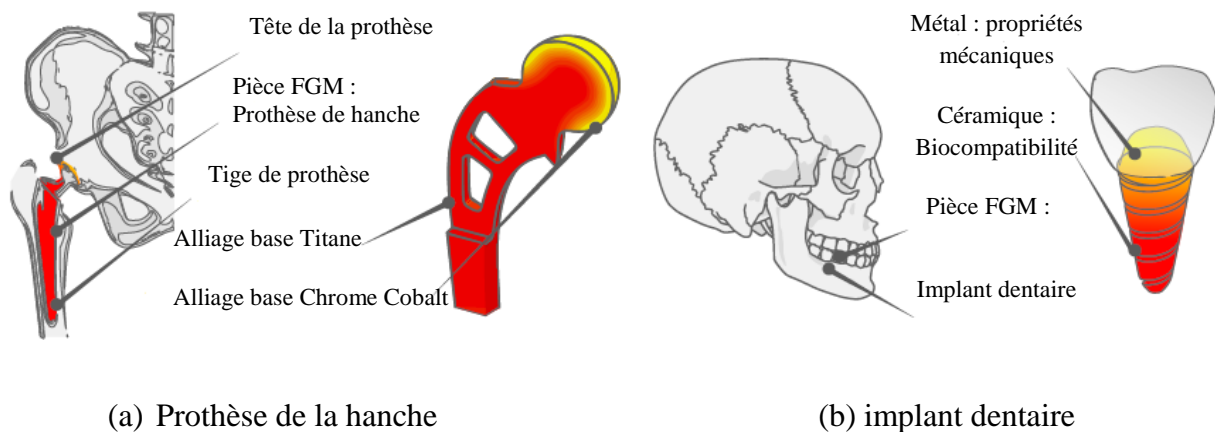


Figure I.24. Application du FGM dans les biomatériaux (Muller, 2013).

1.7.4. *Domaine militaire*

L'aptitude des matériaux FGM à fournir des propriétés de résistance à la pénétration en empêchant la propagation des fissures est une caractéristique attractive qui les rend très utiles dans l'industrie de la défense. Ils sont utilisés dans des applications telles que les gilets pare-balles, les plaques d'armure et récemment dans véhicules blindés (Lu et al., 2011; Saiyathibrahim et al., 2015).

1.7.5. Domaine maritime

Les matériaux fonctionnellement gradués trouvent également leur application dans l'industrie maritime. Ils ont été utilisés dans l'arbre d'hélice, les cylindres de plongée, les dômes sonar, le système de tuyauterie composite et la coque cylindrique sous pression (Benadouda, 2019).

1.7.6. Domaine sportif

Les matériaux composites répondent bien aux exigences sportives, malgré un coût relativement élevé, divers composants et accessoires sportifs peuvent bénéficier de l'utilisation du FGM. Par exemple, pointes en carbure ont été fabriquées pour les chaussures de Baseball afin de réduire l'usure. Entre la pointe et de la structure des chaussures une région à matériau gradué a été produite afin de réduire l'impact sur les extrémités. Ceci est un excellent exemple comment les FGM pourraient être utilisées pour produire des articles de sport de haute performance. Les sports concernés par ces matériaux sont surtout, le tennis, le ski, les sports nautiques...etc. Les composites permettent d'augmenter sur mesure les performances, la fiabilité des articles de sports (Hopkinson et al., 2006; Meftah, 2018).

1.7.7. Autres applications

On trouve également des applications dans le domaine de l'électronique (Müller et al., 2003), de la chimie, ou de la production d'outillage (Jiang et al., 2005). Cette liste n'est évidemment pas exhaustive et on imagine qu'au fur et à mesure des avancées scientifiques. L'appropriation de ce type de structure par les concepteurs permettra encore de l'élargir. Effectivement, les possibilités de combinaison sont en théorie quasiment illimitées et chaque combinaison forme une structure avec des propriétés spécifiques. On peut donc penser que les structures en matériaux FGM vont transformer en profondeur le monde de la conception en augmentant considérablement les possibilités dans l'étape stratégique du choix des matériaux (Muller, 2013). Le domaine d'application des matériaux fonctionnellement gradués devrait augmenter si le coût de production de ce matériau est réduit à l'avenir.

I.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication,

leurs domaines d'application et les différents modèles d'homogénéisation pour pouvoir étudier les différentes structures en FGM.

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie mécanique.

Chapitre

II

Analyse des structures FGM par les théories d'élasticité: « Revue bibliographique »

Une revue critique est donnée dans ce chapitre, dans lequel différentes théories adoptées pour étudier le comportement statique et dynamique des structures en matériaux ont été discutées.

Sommaire

II.1. Introduction	30
II.2. Généralités sur les théories d'élasticité	30
II.2.1. Définition des plaques.....	30
II.2.2. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)	35
II.2.3. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)	37
II.2.4. La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	40
II.2.4.1. Les théories basées sur des fonctions polynomiales	42
II.2.4.2. Les théories basées sur des fonctions non-polynomiales.....	43
II.2.5. Les théories tridimensionnelles (3D et quasi-3D).....	45
II.3. Analyse de la réponse dynamique des structures FGM : Revue de la littérature	46
II.3.1. Analyses de l'influence des fondations élastiques	50
II.3.2. Etudes reportées sur l'effet thermique	52
II.4. Conclusion	54

II.1. Introduction

Les structures composées de matériaux composites comptent parmi les structures les plus importantes utilisées dans l'ingénierie moderne et, en particulier, dans l'industrie aérospatiale. Ces structures légères sont également de plus en plus utilisées dans des applications d'ingénierie civile, mécanique et de transport. L'augmentation rapide de l'utilisation industrielle de ces structures a entraîné le développement de nouveaux outils analytiques et numériques adaptés à l'analyse et à l'étude du comportement mécanique de ces structures. Le comportement des structures composées de matériaux composites avancés est considérablement plus complexe que celui des structures isotropes. Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

Donc, ce chapitre est consacré à la présentation des différentes théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements afin de mieux étudier les différentes structures. Il est bien connu que ces modèles structurels sont basés sur des hypothèses relatives à la cinématique des déformations ou des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque.

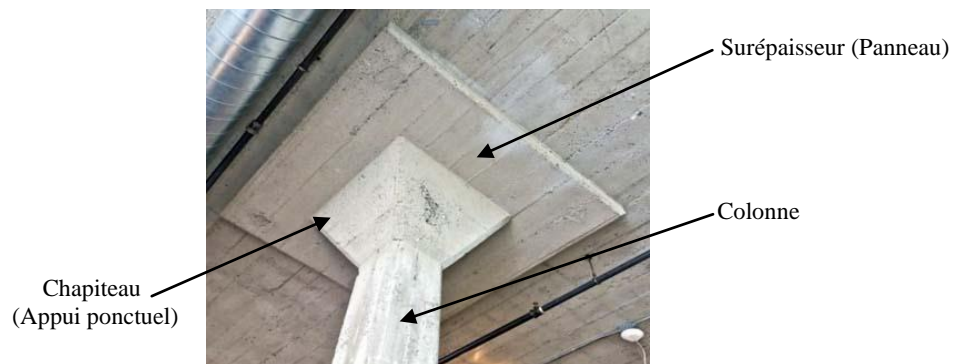
En général, ces hypothèses permettent de réduire un problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel. Ainsi, ces théories sont appropriées pour décrire le comportement des plaques minces et/ou moyennement épaisses. Comme les plaques fonctionnellement graduées (FG) peuvent avoir une épaisseur importante, les théories bidimensionnelles peuvent s'avérer inadéquates d'où il est nécessaire d'envisager l'étude des plaques FG dans le cadre tridimensionnel en utilisant les théories tridimensionnelles (3D) et quasi- tridimensionnelles.

II.2. Généralités sur les théories d'élasticité

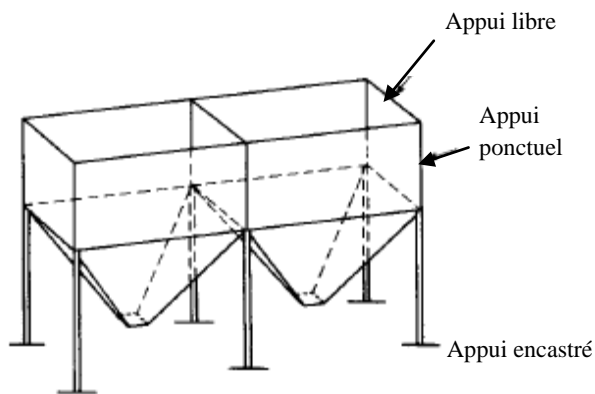
II.2.1. Définition des plaques

Les plaques sont des éléments structurels droits, plans et bidimensionnels dont la dimension, appelée épaisseur h , est beaucoup plus petite que les autres dimensions. Géométriquement, elles sont délimitées par des lignes droites ou courbes. Comme leurs

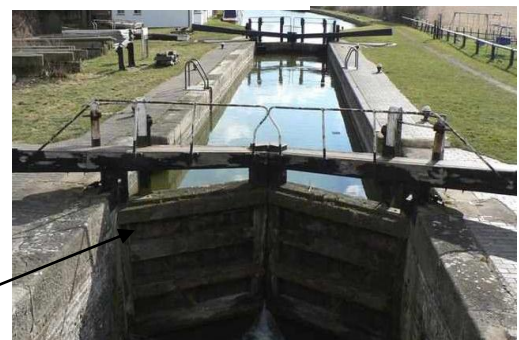
homologues, les poutres, elles servent non seulement de composants structurels mais peuvent également former des structures complètes comme les tabliers des ponts, par exemple. En statique, les plaques ont des conditions aux limites libres, simplement appuyées et fixées, y compris des appuis et des retenues élastiques, ou même, dans certains cas, des appuis ponctuels (Figure II.1). Les charges statiques et dynamiques supportées par les plaques sont principalement perpendiculaires à la surface de la plaque. Ces charges externes sont supportées par des moments de flexion et de torsion internes et par des forces de cisaillement transversales (Carrera et al., 2011).



(a) Plancher (Tarun Kumar, 2017)



(B) Portiques



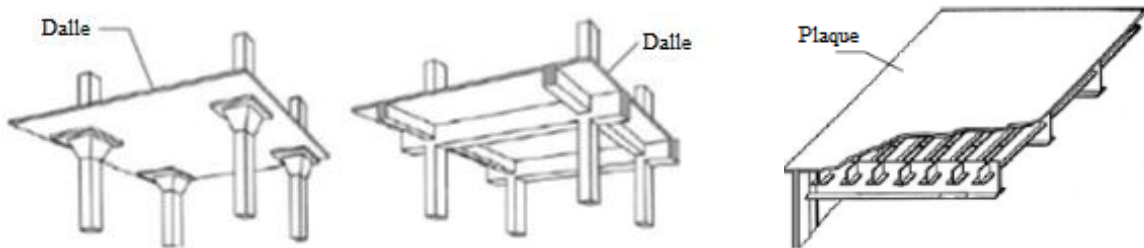
(C) Ecluse (Asif, 2012)

Figure II.1. Différents types d'appuis des plaques.

L'action structurelle bidimensionnelle des plaques permet d'obtenir des structures plus légères et offre donc des avantages économiques. En outre, de nombreuses configurations structurelles nécessitent une protection partielle ou même complète qui peut facilement être réalisée par des plaques, sans l'utilisation d'un revêtement supplémentaire, ce qui permet de réaliser des économies supplémentaires en termes de coûts de matériaux et de main-d'œuvre.

Chapitre II Analyse des structures FGM par les théories d'élasticité: « Revue bibliographique »

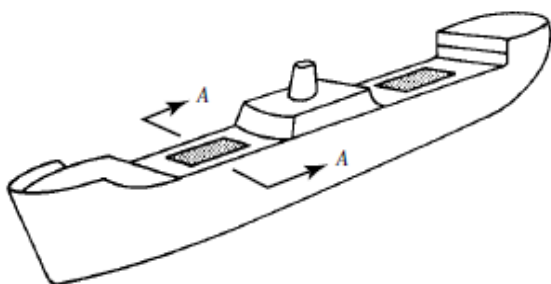
Par conséquent, les plaques ont pris une importance particulière et leur application a été augmentée considérablement ces dernières années. Un grand nombre de composants structurels des ouvrages d'art peuvent être classés comme des plaques. Les exemples typiques des structures de génie civil sont les dalles des planchers et des fondations, les portes d'écluses, les murs de soutènement minces et les tabliers des ponts. Les plaques sont également indispensables dans la construction navale et l'industrie aérospatiale. Les ailes et une grande partie du fuselage d'un avion, par exemple, sont constituées d'une peau de plaque légèrement incurvée avec un ensemble de nervures raidies. La coque d'un navire, son pont et sa superstructure sont d'autres exemples de structures en plaques renforcées. Les plaques font aussi souvent partie de machines et d'autres dispositifs mécaniques. La figure II.2 illustre schématiquement certaines de ces applications industrielles (Szilard, 2004).



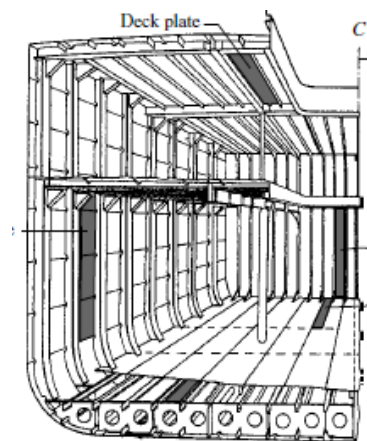
(a1) Dalles en béton armé dans les bâtiments

(a2) Tablier d'un pont en acier

(a) Utilisation des plaques dans la construction

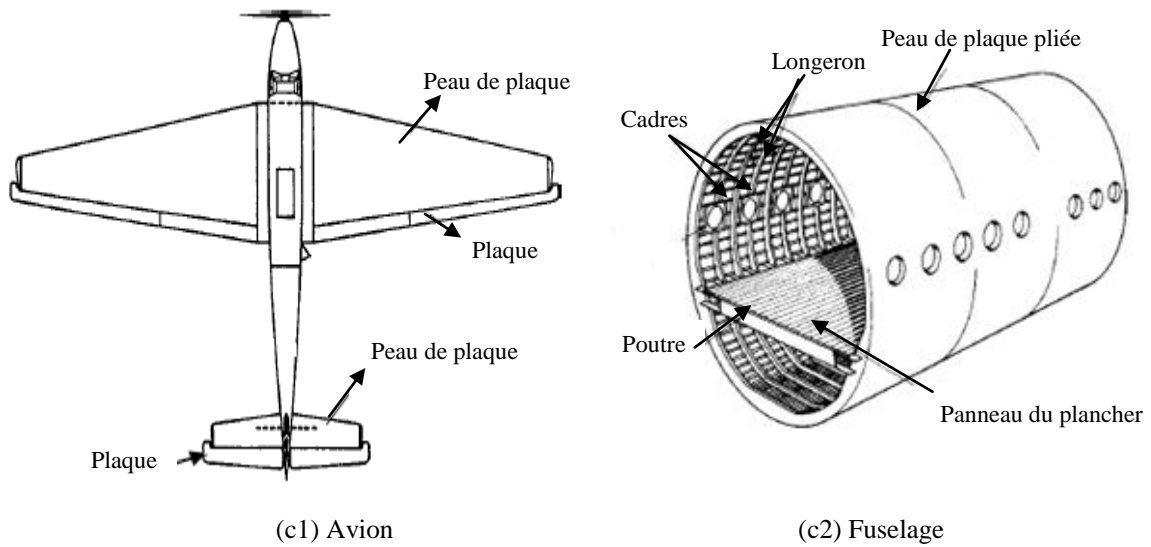


(b1) navire marchand

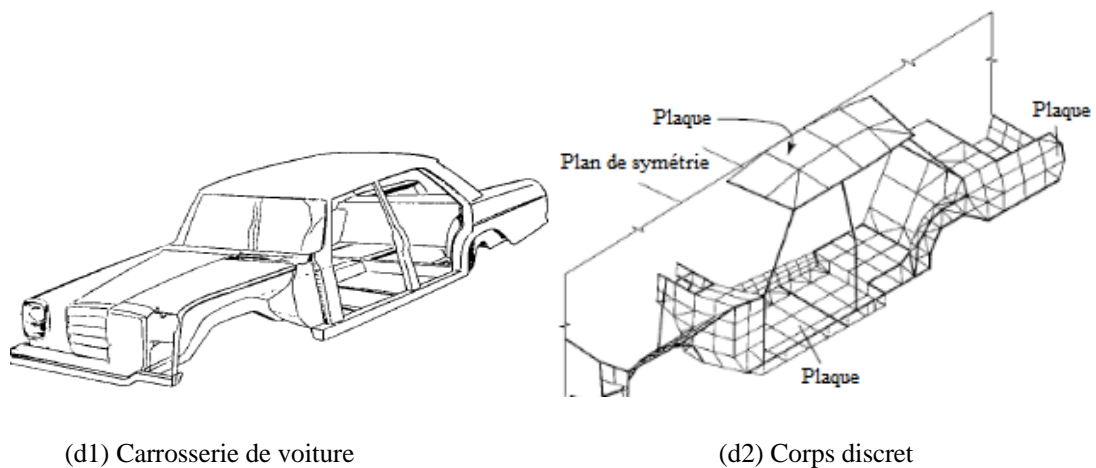


(b2) Coupe A-A

(b) Utilisation des plaques dans la construction navale



(c) Utilisation des plaques dans les structures aérospatiales



(d) Utilisation des plaques dans l'industrie automobile

Figure II.2. Utilisation des plaques dans divers domaines de l'ingénierie (Szilard, 2004).

Dans toutes les analyses structurales, l'ingénieur est obligé, en raison de la complexité de toute structure réelle, d'en remplacer par un modèle d'analyse simplifié, doté uniquement des paramètres importants qui influencent le plus sa réponse statique ou dynamique. Dans l'analyse des plaques, ces idéalizations concernent :

1. la géométrie de la plaque et ses supports,
2. le comportement du matériau utilisé, et
3. le type des charges et leur mode d'application.

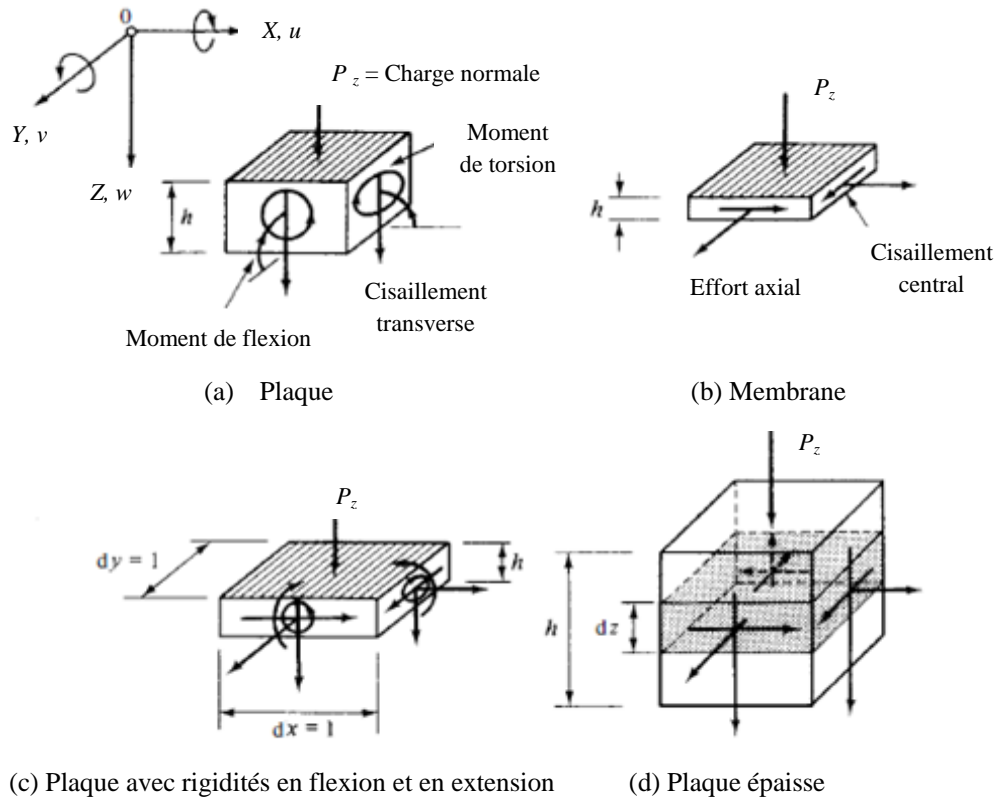


Figure II.3. Forces internes dans divers types d'éléments de plaque (Szilard, 2004).

Les plaques peuvent être classées en quatre types en fonction de leur rapport épaisseur/longueur (h/L):

- *Plaques rigides* ($1/50 < h/L < 1/10$) sont des plaques minces, rigides à la flexion, qui supportent des charges bidimensionnelles, principalement par des moments internes (flexion et torsion) et par un cisaillement transversal, généralement de manière similaire aux poutres (Figure II.3a).
- *Membranes* ($h/L < 1/50$) sont des plaques très fines exemptes de rigidité à la flexion, résistant aux charges par des forces internes de cisaillement axiale et centrale (Figure II.3b). Elles peuvent être représentées approximativement par un réseau de câbles sous contrainte puisque, en raison de leur extrême finesse, leur moment de rigidité est d'un ordre négligeable.
- *Les plaques modérément épaisses* ($1/10 < h/L < 1/5$) sont à bien des égards similaires aux plaques rigides à l'exception notable que les effets des forces de cisaillement

transversales sur les composantes de contraintes normales sont également pris en compte.

- *Les plaques épaisses* ($h/L > 1/5$) ont un état de contraintes internes qui ressemble à un bloc tridimensionnel (Figure II.3d).

Il existe cependant une zone "grise" considérable entre les plaques minces et les membranes ; à savoir, si nous ne limitons pas les flexions des plaques minces, nous obtenons des plaques dites flexibles, qui supportent les charges externes par l'action combinée des moments internes, des forces de cisaillement transversales et centrales et des forces axiales (Figure II.3c). Par conséquent, les théories des plaques élastiques font une nette distinction entre les plaques ayant de petites et de grandes déflexions. Les plaques ayant de grandes déflexions sont évitées, par la plupart, dans la pratique générale de l'ingénierie car elles pourraient créer certains problèmes dans leur analyse ainsi que dans leur utilisation (Szilard, 2004).

II.2.2. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

Bien qu'en réalité, un tel élément soit un corps tridimensionnel, l'analyse en utilisant la théorie de l'élasticité tridimensionnelle n'est pas essentielle si l'épaisseur est faible par rapport aux dimensions dans le plan. En supposant des variations raisonnablement réalistes dans l'épaisseur, des déplacements, des déformations et des contraintes, le problème peut être réduit à une analyse bidimensionnelle. Une telle théorie bidimensionnelle, le plus souvent utilisée pour l'analyse pratique, est la théorie classique des plaques (CPT), également appelée théorie des plaques minces (Jones, 1999; Timoshenko et Woinowsky-Krieger, 1959).

La CPT est basée sur les hypothèses de Love- Kirchhoff (Kirchhoff, 1850) comme suit:

- *Les lignes droites qui sont perpendiculaires à la surface médiane (c'est-à-dire les normales transversales) avant la déformation restent droites après la déformation;*
- *Les normales transversales ne subissent pas d'allongement (c'est-à-dire qu'elles sont inextensibles);*
- *Les normales transversales tournent de manière à rester perpendiculaires au milieu de la surface après la déformation;*
- *L'effet de l'inertie de rotation est négligeable.*

Ces hypothèses sont clairement résumées dans la figure II.4. Les deux premières hypothèses impliquent que le déplacement transversal est indépendant de la coordonnée transversale (ou de l'épaisseur) et que la déformation normale transversale ε_{zz} est nulle. La troisième hypothèse donne des contraintes de cisaillement transversales nulles ($\tau_{xz} = \tau_{yx} = 0$).

Le champ des déplacements requis par ces hypothèses est le suivant (Reddy, 2004)

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad (\text{II.1.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (\text{II.1.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.1.c})$$

Où (u_0, v_0, w_0) désignent les déplacements d'un point matériel à $(x, y, 0)$ dans les directions des coordonnées (x, y, z) . Notez que (u_0, v_0) sont associés à la déformation d'extension de la plaque tandis que (w_0) désigne la déformation de flexion.

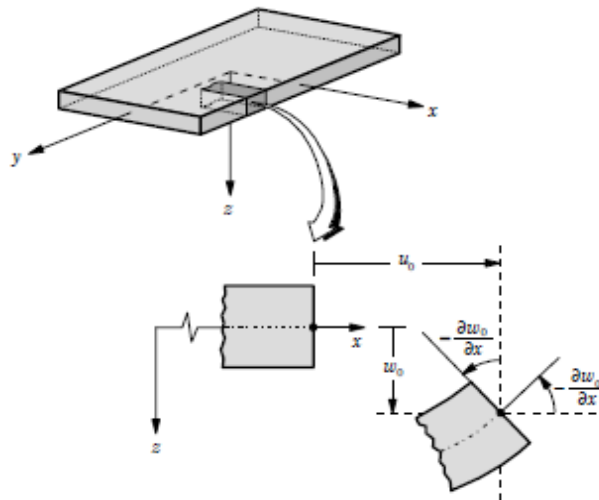


Figure II.4. Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff avant et après déformation (Reddy, 2004).

La CPT est le modèle le plus simple et il ne convient qu'aux plaques/coques FG minces où les effets de cisaillement et de déformation normale sont négligeables. Yang et Shen, (2001) ont utilisé la CPT pour étudier la réponse transitoire de plaques FG initialement sollicitées, reposant sur une fondation élastique soumise à des charges latérales impulsives. Les réponses non linéaires de flexion et de post-flambement des plaques

FG reposant sur des fondations élastiques sous des charges axiales et transversales ont été étudiées par Yanga et Shen (2003) en utilisant la CPT avec les hypothèses de Von Karman. Javaheri et Eslami (2002, 2002a) ont utilisé le CPT pour étudier le comportement au flambage des plaques FG sous quatre types de charges thermiques et de compression. Woo et al. (2006) ont étudié la vibration non linéaire des plaques FG dans des environnements thermiques. Les équations non linéaires dérivées du CPT avec les hypothèses de Von Karman ont été résolues pour les plaques FG avec des conditions aux limites arbitraires en utilisant une méthode des séries.

La CPT a été également utilisé pour analyser des plaques circulaires. Par exemple, Ma et Wang (2003) ont étudié les comportements de flexion non linéaire et de post-flambement thermique des plaques circulaires FG sous des charges mécaniques et thermiques. Li et al. (2007) ont également étudié le comportement non-linéaire de post-flexion des plaques circulaires FG sous des charges mécaniques et thermiques en utilisant la CPT avec les hypothèses de Von Karman. Allahverdizadeh et al. (2008) ont étudié la vibration en régime permanent des plaques circulaires FG dans des environnements thermiques en se basant sur la CPT et une approche semi-analytique. Du et al. (2014) ont étudié la vibration non linéaire des coques cylindriques FG sous excitation basées sur la CPT avec les hypothèses de Von Karman en combinaison avec une méthode à échelle multiple.

II.2.3. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)

Les études réalisées en utilisant la théorie classique de Love-Kirchhoff ont montré que cette théorie sous-estime les déformations et surestime les fréquences naturelles et les charges de flambage pour les plaques modérément épaisses. Ces divergences sont dues à la négligence de l'effet des contraintes de cisaillement transversales, puisque (selon la théorie des poutres) il a été supposé que les normales au plan médian restent droites et normales au plan médian déformé (Szilard, 2004).

Les principales limites de la théorie classique des plaques, évoquées ci-dessus, sont partiellement éliminées par Reissner en introduisant l'influence du cisaillement transversal et celle de la contrainte transversale σ_z . Reissner (1945, 1975) a fait deux hypothèses. Premièrement, il a supposé une variation linéaire du champ de déplacement à travers l'épaisseur de la plaque. Deuxièmement, il a supposé que, lorsque la plaque se fléchit, toute

section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée (Figure II.5).

Cette hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle mène également à la violation statique de la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, Mindlin (1951) a proposé un facteur k de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement. En outre, Mindlin a modifié la quatrième hypothèse de sorte que l'effet de l'inertie de rotation soit inclus (Wang et al., 2001).

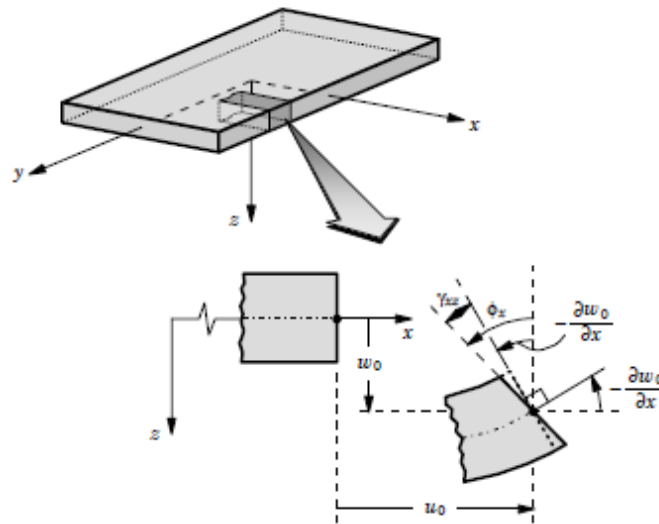


Figure II.5. Illustration d'une plaque non déformée et déformée selon les hypothèses de Reissner-Mindlin (Reddy, 2004).

La théorie du premier ordre est basée sur un champ des déplacements comportant cinq inconnues (il y en avait que trois dans le cas de la CPT) comme suivant (Mindlin, 1951)

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\theta_x(x, y), \quad (\text{II.2a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\theta_y(x, y), \quad (\text{II.2b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{II.2c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) et (θ_x, θ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations d'une normale autour des axes x et y , respectivement. Dans le cas de la CPT, les rotations

coïncident avec les dérivés $\theta_x = -\partial w_0 / \partial x$ et $\theta_y = -\partial w_0 / \partial y$. Seule la contrainte σ_{zz} est nulle, par contre les contraintes τ_{xz} et τ_{yx} sont différentes de zéro.

D'après l'équation (II.2), la contrainte de cisaillement vaut:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = \theta_x \quad (\text{II.3a})$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \neq 0 \Rightarrow \tau_{xz} = G \cdot \theta_x \quad (\text{II.3b})$$

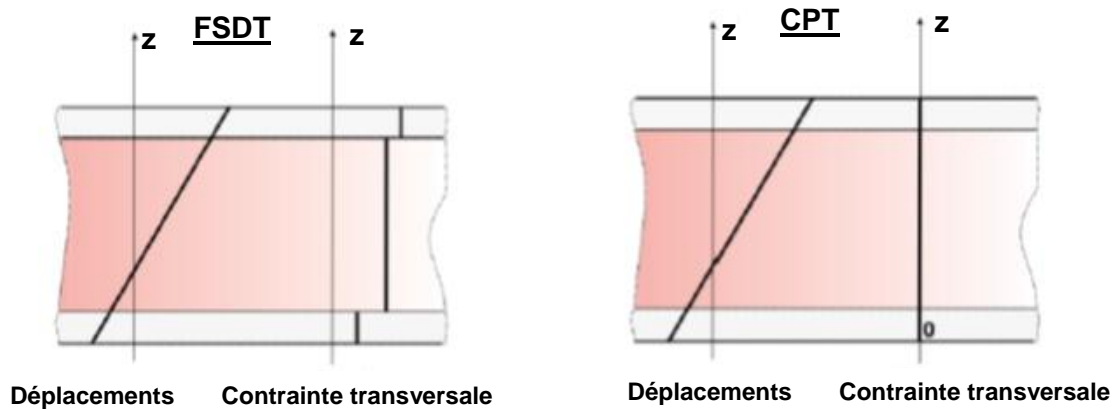


Figure II.6. Distribution du déplacement et des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans les deux théories FSDT et CPT.

Les équations (II.3a) et (II.3b) donne des valeurs constantes pour les déformations et les contraintes de cisaillement transversales correspondantes (Figure II.6). Étant donné que la distribution réelle des contraintes dans les plaques d'épaisseur moyenne est parabolique, cette hypothèse est incorrecte. En outre, elle ne satisfait pas la condition des contraintes nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, il a été nécessaire d'introduire un facteur de correction de cisaillement transverse k^2 , qui a été évalué par comparaison avec les solutions élastiques exactes. Suivant l'approche de Timoshenko - utilisée pour les poutres épaisses - la valeur $k^2 = 5/6$ a été retenue. Le facteur de correction du cisaillement ne dépend pas seulement des propriétés du matériau et de la géométrie, mais aussi de la charge et des conditions aux limites.

La FSDT est utilisé par plusieurs chercheurs pour examiner les différents comportements des structures en matériaux composites (Ardestani et al., 2014; Bellifa et al., 2016; Bouazza et al., 2010; Chen, 2005; Della Croce et Venini, 2004; Fallah et al., 2011; Golmakani et Alamatian, 2013; Hadji, Lazreg et al., 2016; Hosseini-Hashemi et al., 2010;

Nguyen et al., 2008; Pradyumna et Nanda, 2013; Praveen et Reddy, 1998; Reddy, 1979; Reddy et Chin, 1998; Wu et al., 2007). Bien que la FSDT offre une description assez précise de la réponse des plaques minces à modérément épaisses, elle n'est pas pratique à utiliser en raison de la difficulté de déterminer la valeur correcte du facteur de correction du cisaillement. Pour éviter l'utilisation du cisaillement facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.2.4. La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Afin d'atténuer les limitations rencontrées dans les deux théories précédentes (i.e., détermination des contraintes de cisaillement transverse et leurs distributions au sens de l'épaisseur de la plaque), des théories raffinées dites "théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur" (HSDT), ont été développées par plusieurs chercheurs (Abdelbari et al., 2016; Mantari et al., 2012a; Nguyen et al., 2014; Reddy, 2000; Taibi et al., 2015; Tebboune et al., 2014; Thai et al., 2013). Ces théories sont basées sur une distribution non-linéaire du champ de déplacement (Figure II.7), afin d'obtenir une meilleure représentation des déformations et des contraintes de cisaillement transverse sans recours à l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement transverse. En plus, la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur permet de prendre en compte un gauchissement éventuel de la section droite de la plaque lors de la déformation (Belarbi, 2015; Berthelot, 2012).

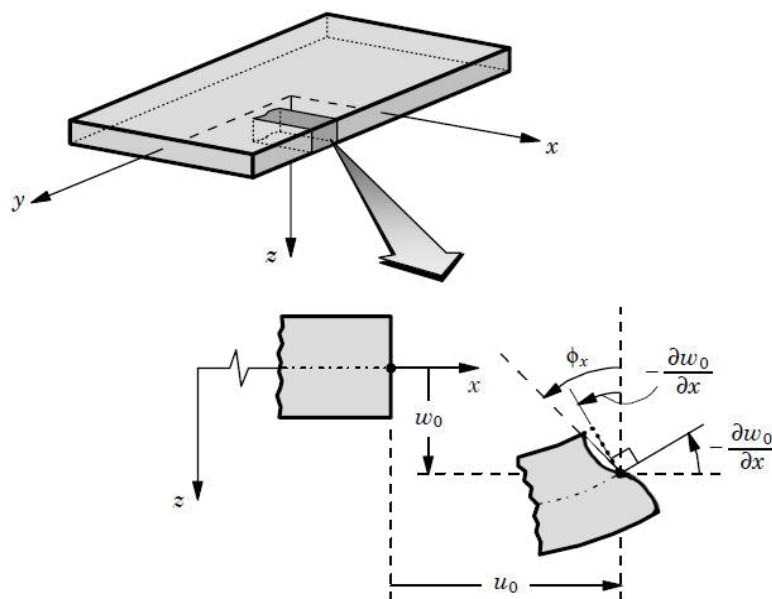


Figure II.7. Illustration de la cinématique de la plaque d'ordre élevé (Reddy, 1997).

Le champ des déplacements est généralement formulé comme suit

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y), \quad (\text{II.4a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y), \quad (\text{II.4b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.4c})$$

On trouve les mêmes parties : le déplacement dû à l'effet de membrane, le déplacement dû à la flexion et le déplacement dû au cisaillement. Mais cette fois, le déplacement axial dû au cisaillement n'est plus linéaire. Donc, on remplace le « z » pour la théorie précédente par une fonction $f(z)$ qu'on l'appelle «fonction de gauchissement» ou «fonction de forme». Cette dernière représente l'allure de la déformation de la section transversale, c'est ce qu'on appelle «le gauchissement», donc elle doit être impaire pour prendre la forme de « S » aplatie qui est remarquée lors de la déformation de la plaque. La fonction de gauchissement doit aussi satisfaire les conditions aux limites de la nullité des contraintes tangentielles aux surfaces supérieur et inférieur de la plaque. Donc :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{\partial w_0}{\partial x} + f'(z) \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = f'(z) \theta_x \quad (\text{II.5a})$$

Et $\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \neq 0 \Rightarrow \tau_{xz} = G \cdot f'(z) \theta_x \Rightarrow f'(\pm h/2) = 0$ (II.5b)

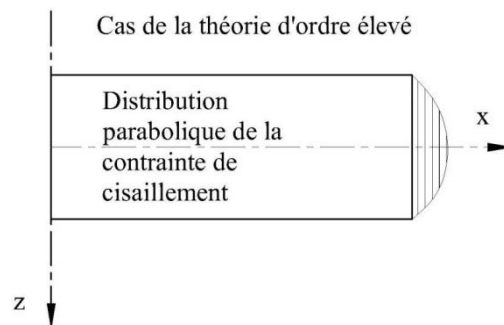


Figure II.8. Distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie HSDT.

Plusieurs auteurs ont contribué au développement de différents modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $f(z)$ (Tableau II.1). Ces modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de

déplacement dans l'épaisseur et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la structure déformée (Figure II.8).

Tableau II.1. Quelques modèles de fonction de forme $f(z)$ et de déplacement transversal correspondant (w) pour différentes théories de déformation par cisaillement.

Théorie	Fonction de gauchissement $f(z)$	Dérivée $f'(z)$	Déplacement transversal w
Reddy (2000)	$z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	$\left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right)$	w_0
Carrera et al. (2011)	$z^i, \quad i = 1, N$	-	$w_0 + zw_1 + z^2w_2 + \dots + z^Nw_n$
Neves et al. (2012a)	$\sin \frac{\pi z}{h}$	$\frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h}$	$w_0 + zw_1 + z^2w_2$
Neves et al. (2012b)	$\sinh \frac{\pi z}{h}$	$\frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h}$	$w_0 + zw_1 + z^2w_2$
Touratier (1991)	$\frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h}$	$\cos \frac{\pi z}{h}$	w_0
Zenkour (2007)	$h \sinh \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{4z^3}{3h^2} \cosh \left(\frac{1}{2} \right)$	$\cosh \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{4z^2}{h^2} \cosh \left(\frac{1}{2} \right)$	$w_0 + \frac{1}{12} f'(z) \theta_z$
Soldatos (1992)	$h \sinh \left(\frac{z}{h} \right) - z \cosh \left(\frac{1}{2} \right)$	$\cosh \left(\frac{z}{h} \right) - \cosh \left(\frac{1}{2} \right)$	w
Grover et al. (2013), Meftah et al. (2017)	$\sinh^{-1} \left(\frac{3z}{h} \right) - z \frac{6}{h\sqrt{13}}$	$\frac{3}{h\sqrt{\frac{9z^2}{h^2} + 1}} - \frac{6\sqrt{13}}{13h}$	w_0
Karama et al. (2003)	$z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$	$e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} - \frac{4e^{-\frac{2z^2}{h^2}} z^2}{h^2}$	w_0
Aydogdu (2009)	$z \alpha^{\frac{-2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}}, \alpha > 0$	$\alpha^{\frac{-2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}} \left(1 - 4\left(\frac{z}{h}\right)^2 \right)$	w
Hebali et al. (2014)	$\frac{(h/\pi) \sinh \frac{\pi z}{h} - z}{\cosh(\pi/2) - 1}$	$\frac{\cosh \frac{\pi z}{h} - 1}{\cosh(\pi/2) - 1}$	$w_b + w_s + (1 - f'(z)) \theta_z$

II.2.4.1. Les théories basées sur des fonctions polynomiales

Plusieurs modèles basés sur des fonctions polynomiales ont été développés. Patel et al. (2005) ont étudié les caractéristiques de vibration libre des coques cylindriques FG en utilisant une théorie quasi-3D basée sur le développement en série de Taylor du champ des déplacements. Le champ des déplacements de la théorie quasi-3D présenté par Lo et al. (1977a; 1977b) comporte 11 inconnues et considère une variation cubique des déplacements

axiaux et une variation quadratique du déplacement transversal à travers l'épaisseur. Roque et al. (2007) ont étudié le comportement en flexion des plaques FG en utilisant une approche de fonction multi-quadrique. La formulation était basée sur le HSDT de Pandya et Kant (1988) avec 7 inconnues et tenant compte d'une variation cubique des déplacements dans le plan et d'un déplacement transversal constant à travers l'épaisseur. Dans le modèle de Reddy (2000), le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

Xiang et al. (2011) ont proposé une théorie de déformation par cisaillement du nième ordre pour l'analyse des vibrations libres des plaques sandwich FG et composites. Le champ des déplacements de leur théorie a été obtenu en modifiant le champ des déplacements de la TSDT pour tenir en compte des termes polynomiaux d'ordre n . Cette théorie a été ensuite appliquée aux problèmes de flexion des plaques FG (Xiang et Kang, 2013a) et de vibration libre des plaques isotropes et des plaques sandwich FG (Xiang et al., 2013) et des plaques FG reposant sur une fondation élastique (Xiang et al., 2014). Xiang et Kang (2013b) ont proposé diverses théories de déformation par cisaillement à cinq inconnues pour la flexion des plaques FG en utilisant une méthode sans maille avec des RBF à cannelures, tandis que Sobhy (2013) a évalué diverses théories de déformation par cisaillement à cinq inconnues pour le flambage et la vibration libre des plaques sandwich FG reposant sur une fondation élastique avec diverses conditions limites en utilisant une méthode en série. Wattanasakulpong et al. 2013 ont utilisé la théorie TSDT raffinée de Shi (2007) et la méthode Ritz pour analyser les problèmes de vibration libre et forcée des plaques FG encadrées sous des charges thermiques. Nguyen-Xuan et al. (2013) ont présenté une formulation simple et efficace pour les plaques sandwich composites en utilisant une théorie de déformation de cisaillement du cinquième ordre en combinaison avec l'analyse isogéométrique par éléments finis. Les comportements de flexion statique, de flambage et de vibration libre des plaques rectangulaires et circulaires dans différentes conditions aux limites ont été étudiés.

II.2.4.2. Les théories basées sur des fonctions non-polynomiales

- *La fonction sinusoidale*: La fonction non polynomiale a été utilisée pour la première fois par Levy (1877) avec une fonction sinusoidale pour développer une théorie raffinée pour les plaques isotropes épaisses. La fonction sinusoidale a ensuite été adoptée par

Stein (1986) et Touratier (1991) pour développer une théorie de la déformation par cisaillement sinusoïdale (SSDT) à cinq inconnues pour les plaques isotropes et les plaques composites laminées, respectivement. La SSDT a été largement utilisée pour étudier la flexion thermique des plaques composites (Ferreira et al., 2005a; Zenkour, 2004b), le flambage des plaques composites (Zenkour, 2004a), la flexion des plaques sandwich FG (Zenkour, 2005b; Zenkour et Alghamdi, 2010), le flambage et la vibration des plaques sandwich FG (Zenkour, 2005c; Zenkour et Sobhy, 2010), vibration des plaques FG (Zenkour, 2005a), flexion des plaques FG (Zenkour, 2006), flexion et flambage thermiques des plaques FG reposant sur une fondation élastique (Zenkour et Sobhy, 2011; Zenkour, 2009), nanopoutres (Thai et Vo, 2012) et nanoplaques (Thai et al., 2014).

- *La fonction hyperbolique*: Soldatos (1992) était le premier qui a développé une fonction hyperbolique pour étudier les plaques composites laminées. Akavci a proposé une nouvelle fonction hyperbolique pour développer une HSDT afin d'analyser la flexion des plaques composites (Akavci, 2010) et étudier les vibrations libres des plaques FG reposant sur une fondation élastique (Akavci, 2014). Une fonction hyperbolique inverse a été utilisée par Grover et al. (2013) pour développer une HSDT pour les plaques composites et les plaques sandwich. Mahi et al. (2015) a récemment développé une HSDT pour les plaques sandwich et composites FG basée sur une nouvelle fonction hyperbolique.

- *La fonction exponentielle*: Karama et al., (2003) ont développé une HSDT pour les poutres composites en utilisant une fonction exponentielle. (Aydogdu, 2009) a étendu les travaux de Karama et al., (2003) aux plaques composites. Mantari et al. (2011) ont également utilisé la fonction exponentielle pour développer une HSDT pour les coques sandwich et composites. Cette HSDT a été adoptée par Mantari et Guedes Soares (2014b) pour étudier le comportement de flexion des plaques FG. Sur la base d'une nouvelle fonction exponentielle, Mantari (2014a) ont proposé une HSDT afin d'investiguer les vibrations des plaques FG sur des bases élastiques.

En se basant sur une fonction tangentielle, Mantari et ses collaborateurs ont proposé une HSDT pour les plaques isotropes, composites et sandwich (Mantari et al., 2012a) et les plaques FG (Mantari et Guedes Soares, 2012a). Ils ont aussi combiné des fonctions exponentielles et trigonométriques pour développer une HSDT pour les plaques sandwich et composites (Mantari et al., 2012c), les plaques FG (Mantari et al., 2012b) et les coques doublement courbées FG (Mantari et al., 2012d). Mantari et Guedes Soares (2012b, 2013b)

ont combiné des fonctions exponentielles et hyperboliques pour développer une HSDT pour les plaques isotropes, multicouches/coquilles et les plaques FG. Une combinaison de fonctions tangentielles et exponentielles a été proposée par Mantari et al., (2014b) pour développer une HSDT pour les plaques FG. Nguyen et al. (2014) ont combiné des fonctions tangentielles et cubiques inverses pour les plaques sandwich FG, tandis que Thai et al. (2014a) ont combiné des fonctions tangentielles et linéaires inverses pour les plaques composites et sandwich. Cette étude a été poursuivie par Thai et al. (2014b) pour développer un HSDT pour l'analyse Isogéométrique des plaques sandwich FG en utilisant deux nouvelles fonctions trigonométriques.

Il faut noter que les théories mentionnées ci-dessus négligent l'effet d'étirement de l'épaisseur (c'est-à-dire $\varepsilon_z = 0$) en supposant un déplacement transversal constant à travers l'épaisseur de la plaque. Cette hypothèse est appropriée pour les plaques FG minces ou modérément épaisses, mais elle est inadéquate pour les plaques FG épaisses (E. Carrera et al., 2011; H.-T. Thai & Choi, 2014b).

II.2.5. Les théories tridimensionnelles (3D et quasi-3D)

Pour les plaques épaisses où l'effet de l'étirement de l'épaisseur est plus prononcé, les théories bidimensionnelles de déformation de cisaillement (HSDT 2D) ne sont pas adoptées à ce type de plaques. Pour cela, de nouvelles théories 3D et quasi-3D ont été développées pour pouvoir introduire l'effet de déformation normale et cela en modifiant le champ de déplacement dans l'équation (II.6), en ajoutant des termes d'ordre supérieur au déplacement transversal comme il est représenté dans le champ des déplacements suivant

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y), \quad (\text{II.6a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y), \quad (\text{II.6b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z) \theta(x, y) \quad (\text{II.6c})$$

Où $\theta(x, y)$ est une fonction de déplacement qui tient compte de l'effet d'étirement de l'épaisseur; et $g(z)$ est une fonction de forme qui est déterminée à partir des conditions limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

Ces théories ont été utilisées par plusieurs chercheurs pour étudier et analyser les différents comportements mécaniques et dynamiques des structures fonctionnellement

graduées. Par exemple, Zenkour (2007) a utilisé la fonction sinusoïdale pour développer une théorie quasi-3D qui tient en compte à la fois les effets de cisaillement et de déformation normale pour les plaques FG. Mantari et Guedes Soares (2012c) ont présenté une formulation généralisée dans laquelle de nombreuses théories quasi-3D peuvent être déduites en utilisant les fonctions polynomiales, hybrides ou trigonométriques. Mantari et Guedes Soares (2014a) a optimisé la théorie sinusoïdale quasi 3D pour l'analyse de la flexion des plaques et coques FG.

II.3. Analyse de la réponse dynamique des structures FGM : Revue de la littérature

La modélisation et l'analyse théorique des plaques en FGM sont désormais un sujet de discussion important. L'analyse numérique des vibrations des plaques rectangulaires FGM a été effectuée par un grand nombre de chercheurs.

En se basant sur la théorie classique des plaques (CPT), les réponses vibratoires des structures FGM ont été largement étudiées par différents chercheurs. Cheng et Kitipornchai (1999) ont utilisé la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) pour étudier le comportement de flambement et de vibration des plaques FGM par analogie avec les vibrations membranaires. He et al. (2001) ont rapporté la formulation d'éléments finis basée sur la théorie des plaques minces (CPT) pour contrôler la forme et la vibration de la plaque FGM avec des capteurs piézo-électriques intégrés et des actionneurs sous charge mécanique. Yuda et Xiaoguang (2011) a également adopté le CPT avec les hypothèses de Von Karman pour effectuer des analyses de vibration et de stabilité des plaques FG sous des excitations axiales. Ruan et Wang (2016) ont étudié aussi les vibrations et la stabilité des plaques FG obliques en utilisant le CPT et la méthode de quadrature différentielle (DQM).

En plus des plaques FG, la CPT était également utilisé pour l'étude des coques FG en raison de sa simplicité. Loy et al. (1999) ont étudié la vibration des coques cylindriques FG avec des conditions aux limites simplement appuyées en utilisant la CPT et la méthode de Rayleigh-Ritz. Une approche similaire a été adoptée par Arshad et al. (2007) et Pradhan et al. (2000) pour étudier les caractéristiques de vibration des enveloppes cylindriques de FG sous différentes conditions aux limites et pour différents types de lois de fraction volumique, respectivement. Ce problème a été réexaminé par Naeem et al. (2010) en utilisant la méthode

Ritz. Les vibrations forcées non linéaires des coques FG doublement courbés ont été évaluées par Alijani et al. (2011) en utilisant le CPT avec les hypothèses de Von Karman et la discrétisation multimodale de Galerkin. La vibration libre d'une coquille cylindrique circulaire bidimensionnelle fonctionnellement graduée a été analysée par Ebrahimi et Najafizadeh, (2014) en se basant sur la théorie classique des coques de Love. Les dérivées spatiales des équations du mouvement et des conditions aux limites sont discrétisées par les méthodes de quadrature différentielle généralisée (GDQ) et de quadrature intégrale généralisée (GIQ).

Sur la base de la théorie de déformation du premier ordre (FSDT), Liew et al. (2003) ont analysé les vibrations des plaques stratifiées symétriquement. Shufrin et Eisenberger (2005) ont étudié la vibration libre et la stabilité des plaques déformables FG, en utilisant des théories de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) et d'ordre élevé. Ferreira et al. (2005b) ont prédit les fréquences naturelles des plaques composites stratifiées basée sur la théorie du premier ordre avec la méthode de collocation globale avec des fonctions de base radiales multi-quadratiques. En utilisant la méthode du maillage de Galerkin, Liew et al. (2009) ont rapporté une analyse des vibrations des plaques ondulées. Peng et al. (2007) ont également fait état d'une analyse des vibrations libres des plaques pliées par la méthode sans maillage en utilisant la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre. Liew et al. (2004), Dai et al. (2004) ont utilisé la technique de maillage (Mesh-Free Method) pour l'analyse des vibrations libres des plaques composites laminées en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre. Analyse des vibrations libres des plaques composites stratifiées symétriquement avec la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) par la méthode de convolution singulière discrète a été présentée par Civalek (2008). Zhao et al. (2009) ont présenté une analyse des vibrations libres pour les plaques FG carrées et obliques avec différentes conditions aux limites en utilisant la méthode d'élément libre kp-Ritz sur la base de FSDT. La technique de collocation globale avec de nouvelles fonctions de base radiales multi-quadratiques pour examiner les vibrations libres des plaques composites stratifiées en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) est développée par Ngo-Cong et al. (2010, 2011). Hosseini-Hashemi et al. (2011) ont proposé une solution analytique exacte pour étudier la vibration transversale des plaques rectangulaires de type Lévy. Une simple théorie de déformation de cisaillement du premier ordre avec seulement quatre variables a été présentée par Thai et Choi (2013a, 2013b) pour la flexion et la vibration libre des plaques FGM et composites laminées, respectivement. Contrairement à la FSDT existante à cinq variables, Mantari et Granados (2015a, 2015b,

2016) ont analysé la flexion et la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées en utilisant une nouvelle théorie déformation de cisaillement de première ordre (FSDT) avec une nouvelle cinématique contenant des termes indéterminés avec seulement quatre inconnus. Madani et al. (2016) ont étudié la vibration libre d'une coque cylindrique piézoélectrique renforcée par des nanotubes de carbone (FG-CNT) soumise à des distributions de température uniformes et non uniformes basées sur le FSDT en utilisant la Méthode Différentielle Cubique.

Afin d'introduire les effets de déformation de cisaillement, plusieurs théories de déformation de cisaillement polynomiales et non polynomiales d'ordre élevé (HSDT) ont été développées. Ces théories satisfont les conditions de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques dont le facteur de correction de cisaillement n'est donc pas pris en considération. Matsunaga (2008) a analysé la vibration libre et la stabilité des plaques FG en se basant sur une théorie bidimensionnelle d'ordre supérieur (2D). Xiang et al. (2011) ont suggéré une théorie de plaque de déformation de cisaillement d'ordre n pour étudier la réponse de vibration libre des plaques sandwich composites à gradations fonctionnelles. Le champ de déplacement est représenté par un terme polynomial d'ordre n où les conditions de contrainte de cisaillement transversale nulle sont satisfaites aux faces supérieure et inférieure de la plaque. En utilisant une théorie des plaques raffinées à quatre variables, Benachour et al. (2011) ont analysé la réponse dynamique des plaques FG avec une gradation aléatoire des matériaux. Cette théorie considère les effets de cisaillement transverse avec une distribution parabolique des déformations transversales de cisaillement dans l'épaisseur de la plaque, de sorte que les facteurs de correction de cisaillement ne sont pas nécessaires. Draiche et al. (2014) ont présenté une théorie des plaques trigonométrique à quatre variables pour l'analyse des vibrations libres d'une plaque rectangulaire laminée supportant une masse de pièce localisée.

Plusieurs études ont été réalisées sur la vibration des structures en utilisant les théories quasi-3D et 3D afin d'introduire les effets des déformations de cisaillement et d'étirement d'épaisseur. Reddy et Cheng (2003) ont développé des analyses vibratoires tridimensionnelles pour les plaques rectangulaires FGM en utilisant une formulation asymptotique et une méthode de matrice de transfert. Une solution tridimensionnelle exacte pour la vibration des plaques rectangulaires fonctionnellement graduées a été présentée par Vel et Batra (2004). Qian et al. (2004) ont réalisé une étude sur le comportement statique et dynamique des

plaques élastiques épaisses à gradient de propriétés en utilisant la théorie du cisaillement d'ordre supérieur, la déformation normale des plaques et la méthode locale de Petrov-Galerkin où les propriétés mécaniques ont été obtenues à partir du modèle de Mori-Tanaka. L'effet de l'étirement de l'épaisseur sur la vibration libre des plaques FG a été évalué par Mantari et Guedes Soares (2013a), Carrera et al., (2011) et Thai et Choi (2014b). Une solution 3D exacte pour les vibrations libres des plaques FG épaisses avec des conditions aux limites générales a été proposée par Jin et al. (2014). Les effets du cisaillement transverse et des déformations normales pour l'analyse des vibrations libres des plaques sandwich FG ont été pris en compte par Bessaim et al. (2013). Hebali et al. (2014) ont présenté une nouvelle théorie quasi-3D pour l'étude de la flexion statique et la vibration libre des plaques FGM. Neves et al. (2012a; 2012b; 2013) ont proposé des théories de déformation par cisaillement hyperbolique de type sinusoidal et hybride quasi-3D pour étudier les réponses des plaques FG à la flexion, aux vibrations libres et au flambage. Une théorie de la déformation normale et du cisaillement d'ordre supérieur simple et efficace pour la vibration statique et libre des plaques FG a été développée par Belabed et al. (2014) en utilisant le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka. Le comportement statique et dynamique de plaques à fonctionnellement graduées basées sur des théories de déformation de cisaillement quasi-3D et 2D a été étudié Akavci et Tanrikulu (2015). La vibration libre des plaques sandwich a été analysée par une nouvelle théorie de plaque quasi-3D par Bennoun et al. (2016).

En se basant sur la méthode de quadrature différentielle généralisée (GDQ), (Tornabene et al., 2016, 2017, 2018) ont étudié les vibrations libres et des plaques et des coquilles stratifiés et en matériaux à gradient fonctionnel. En utilisant une théorie non-local quasi-3D où les effets de déformation de cisaillement et d'étirement d'épaisseur sont introduits, Bouafia et al. (2017) ont investigués le comportement dynamique et statique des nano-poutres en FGM. Sekkal et al. (2017) ont réalisés une étude numérique détaillée pour examiner le flambement et vibration des plaques FGM avec une nouvelle théorie quasi-3D HSDT. L'effet de la porosité sur la vibration libre des plaques piézoélectriques à gradient fonctionnel (FGP) a été étudié par Barati et al. (2017) sur la base de la théorie des quatre plaques inconnues. Younsi et al. (2018) ont présenté des théories 2D et quasi-3D de déformation de cisaillement pour l'analyse de la flexion et la vibration libre des plaques FG à l'aide d'une nouvelle forme de fonction hyperbolique. Une nouvelle théorie quasi-3D de déformation de cisaillement hyperbolique pour les plaques fonctionnellement graduées est proposée par Ait Sidhoum et al. (2018). Cette théorie considère à la fois la déformation de cisaillement et les influences

d'étirement de l'épaisseur par une distribution hyperbolique de tous les déplacements dans l'épaisseur et respecte les conditions aux limites de contraintes libres sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque sans employer n'importe quel coefficient de correction de cisaillement. Abualnour et al. (2018) ont développé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement trigonométrique en tenant compte l'effet d'étirement « stretching » pour l'analyse de la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées. Bouhadra et al. (2018) ont amélioré une théorie HSDT de telle façon que l'effet de l'étirement soit pris en compte afin d'analyser la flexion et la vibration libre des plaques FGM. Une théorie efficace et originale de déformation de cisaillement d'ordre élevé incluant la déformation normale a été présentée par Khiloun et al. (2020) pour l'analyse statique et dynamique des plaques FGM. Meksi et al. (2019) a proposé une nouvelle théorie d'ordre élevé en utilisant une cinématique avec seulement quatre variables pour étudier le flambement, la flexion et la vibration libre des plaques sandwich en matériaux FGM. Zaoui et al. (2020) ont étudié le comportement statique et vibratoire des plaques FGM en utilisant une théorie d'ordre élevé raffinée. Les études comparatives et de validation montrent que les théories avec moins d'inconnues peuvent atteindre la même précision du HSDT conventionnelle qui a plus de variables inconnues.

II.3.1. Analyses de l'influence des fondations élastiques

Les plaques basant sur des fondations élastiques sont très courantes dans l'ingénierie des structures. De nombreuses études de flexion linéaire et de vibration pour des plaques épaisses soumises à des charges transversales avec des fondations élastiques sont disponibles dans la littérature. Dans certaines analyses des plaques sur fondations élastiques, un seul paramètre est utilisé pour décrire le comportement des fondations selon le modèle de Winkler (Bezine, 1988; El-Zafrany et al., 1995; Liu, 2000). Cette fondation est modélisée par des ressorts verticaux discrets et ne prend pas en compte la déformation transversale de cisaillement. D'autres chercheurs ont modélisé la fondation avec deux paramètres selon le modèle de Pasternak (Pasternak, 1954). Ce modèle à deux paramètres prend en compte l'effet de l'interaction du cisaillement entre les points de la fondation (Shen, 1999, 2000; Sladek et al., 2002).

Akavci (2007) a analysé le comportement en flambage et en vibration libre des plaques composites laminées antisymétriques sur des appuis élastiques. Baferani et al. (2011) ont étudié la réponse dynamique d'une plaque rectangulaire FG reposant sur des fondations à deux paramètres élastiques en se basant sur la théorie de la plaque de déformation en

cisaillement du troisième ordre. Une théorie raffinée de la déformation par cisaillement est présentée pour l'analyse de la vibration libre de la plaque FG reposant sur la fondation de Pasternak par Thai et Choi (2012). Sur la base d'une théorie de déformations normales et de cisaillement d'ordre supérieur des plaques, Sheikholeslami et Saidi (2013) ont analysé la réponse aux vibrations libres des plaques FG posées sur des fondations élastiques à deux paramètres. Thai et Choi (2014a) ont développé une théorie de déformation de cisaillement d'ordre zéro pour analyser les réponses en flexion et en vibration des plaques FG. La vibration libre des plaques rectangulaires à gradation fonctionnelle (FG) soumises à différentes conditions aux limites en utilisant la théorie classique des plaques a été étudiée par Chakraverty et Pradhan (2014) où la méthode de Rayleigh-Ritz a été utilisée pour obtenir le problème généralisé des valeurs propres. Akavci (2014) a examiné l'effet des déformations de cisaillement transversales lors de la réponse vibratoire d'une plaque de FGM reposant sur une fondation élastique de type Pasternak en se basant sur la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique d'ordre supérieur. Mantari (2015a) a analysé l'effet d'étirement sur le comportement en vibration libre des plaques FG reposant sur une fondation élastique en utilisant une théorie de la déformation en cisaillement d'ordre supérieur raffinée. Meksi et al. (2015) ont proposé une théorie de déformation de cisaillement de premier ordre simple et efficace basée sur la position de surface neutre afin de calculer les fréquences naturelles des plaques FG reposant sur des fondations élastiques type Winkler-Pasternak. Akavci (2016) a présenté un nouveau modèle de cisaillement hyperbolique pour étudier l'état statique, les vibrations libres et le flambage des plaques sandwich FG sur fondations élastiques. Une théorie de la déformation de cisaillement non locale d'ordre zéro pour la vibration libre des nanoplaques FG reposant sur une fondation élastique a été donnée par Bounouara et al. (2016).

Récemment, l'effet de la fondation élastique de type Winkler-Pasternak sur les fréquences naturelles des plaques et coques composites laminées renforcées de nanotubes de carbone (CNT) a été étudié par Banić et al. (2017). Benahmed, et al. (2017) a proposé une nouvelle théorie quasi-3D pour analyser les interactions mécaniques des plaques souples avec différentes distributions des propriétés matérielles. Meftah et al. (2017) ont développé une théorie non polynomiale de déformation de cisaillement à quatre variables pour l'analyse des vibrations libres des plaques FG sur des appuis élastique. Barati et Shahverdi (2018) ont présenté de nouvelles solutions pour examiner les vibrations à grande amplitude d'une nanoplaque poreuse reposant sur une fondation élastique à durcissement non linéaire modélisée par une théorie des plaques non linéaire à quatre variables. L'effet des modèles micromécaniques

sur la vibration libre des plaques rectangulaires de FGM reposant sur des fondations élastiques a été étudié par Mahmoudi et al. (2018). Guerroudj et al. (2018) ont développé une théorie des plaques quasi-3D hybride afin d'investiguer les vibrations libres des plaques FG appuyant sur des fondations élastiques. L'influence de la porosité sur le comportement dynamique des plaques FGM reposant sur différentes fondations élastiques a été investiguée par Shahsavari et al. (2018) en développant une théorie quasi-3D hyperbolique où le déplacement transversale a été divisé en termes de flexion, cisaillement et d'étirement de l'épaisseur. Ghasemi et Meskini (2019) présentent des recherches sur la vibration libre de coquilles cylindriques poreuses laminées, basées sur la théorie des coques de Love avec des conditions aux limites simplement supportées. Les vibrations libres linéaires et non linéaires des poutres de Timoshenko composites rotatives fonctionnellement graduées renforcées par des nanotubes de carbone ont été étudiées par Heidari et Arvin (2019). Sur la base du modèle des poutres d'Euler-Bernoulli et de la théorie de déformation à gradient modifié, la vibration forcée dépendant de la taille des micropoutres en sandwich avec un noyau fonctionnellement gradué (FG) a été présentée par Taati et Fallah (2019). Addou et al. (2019) ont établi une étude paramétrique détaillée pour évaluer les influences de l'indice de gradient, du paramètre de porosité, de la rigidité des paramètres de fondation, du nombre de modes et de la géométrie sur les fréquences naturelles des plaques FG en utilisant une théorie quasi-3D simple. L'influence des différents types de conditions aux limites sur le comportement en flexion et en vibration libre de plaques sandwichs fonctionnellement graduées reposant sur des fondations élastiques à deux paramètres a été examinée à l'aide d'une nouvelle théorie originale du cisaillement d'ordre élevé a été analysée par Rahmani et al. (2020).

II.3.2. Etudes reportées sur l'effet thermique

Les FGM sont fabriqués de céramique et de métal de telle sorte que la céramique puisse résister aux charges thermiques dans des environnements à haute température. Les propriétés des matériaux des FGM varient continuellement d'une surface à l'autre, ce qui permet d'éliminer les problèmes d'interfaces des matériaux composites et d'obtenir une répartition uniforme des contraintes. La plupart des chercheurs se sont penchés à l'analyse des vibrations libres et forcées et du flambage des plaques de FGM dont les propriétés sont indépendantes de la température, en utilisant différentes théories. En raison de l'utilisation accrue des matériaux FG dans les différents domaines, il est important de découvrir les caractéristiques de vibration des plaques FG dans des environnements thermiques.

Yang et Shen (2002) ont étudié la réponse dynamique des plaques de FGM soumises à des charges latérales impulsives combinées à des actions initiales dans le plan dans un environnement thermique. Huang et Shen (2004) ont analysé la vibration non linéaire et la réponse dynamique des plaques FG dépendantes de la température en se basant sur la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Kim (2005) a utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz basée sur la théorie de la plaque de déformation de cisaillement du troisième ordre pour étudier les caractéristiques de vibration dépendantes de la température des plaques rectangulaires FG. Chen et al. (2006) ont dérivé des équations différentielles partielles non-linéaires pour le comportement vibratoire d'une plaque FGP initialement soumise à des contraintes indépendantes de la température. Li et al. (2009) ont utilisé la théorie de l'élasticité tridimensionnelle avec la méthode de Ritz pour générer les fréquences propres des plaques rectangulaires FG dépendantes de la température. Une théorie d'ordre élevé généralisée pour l'étude statique et dynamique des plaques sandwich soumises à des charges thermomécaniques a été présentée par Shariyat (2010). Mahi et al. (2010) ont développé une méthode analytique afin d'analyser la vibration libre des poutres FGM avec des conditions aux limites différentes et sous l'effet des efforts thermiques. L'analyse de la vibration libre et forcée des poutres FG en tenant compte de la dépendance des propriétés des matériaux à la température a été réalisé par Azadi (2011). Natarajan et al. (2011) ont étudié la vibration de flexion libre linéaire de plaques FG fissurées dans un environnement thermique sévère. Hao et al. (2011) ont étudié la réponse vibratoire transversale non linéaire des plaques rectangulaires FGM de type cantilever qui ont été soumises à des charges transversales et thermiques combinées où les équations de mouvement non-linéaire pour la plaque FGM sont dérivées de la théorie de la plaque de déformation de cisaillement du troisième ordre de Reddy (Reddy, 2000) et du principe d'Hamilton. Shahrjerdi et al. (2011) ont étudié la vibration libre des plaques solaires fonctionnellement graduées soumises à des champs de température uniformes, linéaires, non linéaires, sinusoïdaux et de flux thermique en utilisant une théorie de déformation de cisaillement du second ordre (SSDT). Shen et Wang (2012) ont analysé les vibrations de petites et de grandes amplitudes de la plaque à gradients fonctionnels reposant sur une fondation élastique de type Pasternak dans un environnement thermique à l'aide des modèles Voigt et Mori-Tanaka basés sur une théorie d'ordre supérieur. Du et Li (2013) ont étudié la réponse vibratoire non linéaire des coques cylindriques FG dans des environnements thermiques en suivant la CPT avec les hypothèses de Von Karman en combinaison avec une méthode à échelles multiples. Sur la base du FSDT, le comportement

dynamique des plaques FG dans un environnement thermique soumises à des charges mobiles et reposant sur des fondations élastiques a été étudié par Malekzadeh et Monajjemzadeh (2013) en incluant les effets des contraintes thermiques initiales.

La formule de Ritz trigonométrique hiérarchique (HTRF) a été appliquée par Fazzolari (2015) pour étudier la vibration libre et la stabilité thermique des plaques sandwich FG. Les réponses aux vibrations libres des panneaux incurvés FG sous l'effet de la température ont été analysées par Kar et Panda (2015). Attia et al. (2015) ont présenté théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur à quatre inconnus pour analyser la vibration libre des plaques FG avec des propriétés matérielles dépendantes de la température. Analyse thermo-mécanique des vibrations des poutres FG type Euler constituées par des matériaux poreux soumises à diverses charges thermiques a été réalisée par Ebrahimi et al. (2016). L'influence de la porosité sur la vibration des plaques rectangulaires fonctionnellement graduées soumises à différents champs de température a été étudiée par Wang et Zu (2017). En développant une théorie de déformation de cisaillement trigonométrique à seulement deux variables, Mouffoki et al. (2017) ont analysé la vibration des nanopoutres dans un environnement hygrothermique. Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour l'analyse de la vibration libre des plaques à gradation fonctionnelle simplement supportées dans un environnement thermique a été développée par Taleb et al. (2018). Tu et ses collaborateurs ont analysé la vibration des plaques à gradient fonctionnel dans des environnements thermiques en utilisant la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur avec huit inconnues (Tu et al., 2019).

II.4. Conclusion

Une revue critique des différentes recherches effectuées pour prédire la réponse globale des plaques et des coques FG sous des charges mécaniques et thermiques, la modélisation et l'analyse des plaques et des coques FGM ont été examinés et discutés en détail dans ce chapitre. A cet effet, un effort a été fait pour inclure toutes les contributions importantes dans le domaine d'intérêt actuel en mettant en évidence la littérature la plus pertinente disponible pour les ingénieurs chercheurs étudiant les structures de plaques FG. Les remarques qui peuvent être constatées à partir de cette recherche bibliographique sont les suivantes:

- Dans la plupart des théories 2D développées pour prédire les réponses globales des plaques FG, seul l'effet de la déformation de cisaillement transversal a été pris

en compte et très peu de théories considèrent l'effet du cisaillement transversal et l'effet des déformations normales transversales.

- Des études très limitées ont été réalisées pour comparer la précision des diverses théories d'ordre supérieur à prédire les réponses globales des plaques FG.
- De nombreux chercheurs ont prétendu utiliser des théories 2D au lieu de la théorie 3D pour économiser le temps et le coût de calcul mais d'autres recherches devraient être effectuées pour faire des résultats basés sur la théorie 2D avec la proximité des résultats basés sur la théorie 3D.
- L'utilisation des modèles théoriques 2D améliorés qui semblent maintenant fournir une précision aussi bonne que les modèles 3D devraient être poursuivis dans l'intérêt des coûts de calcul et des analyses efficaces.
- Un grand nombre de HSDT basées sur des fonctions non polynomiales ont été développées récemment. Cependant, elles ne sont pas largement utilisées par rapport aux HSDT basées sur des fonctions polynomiales, à l'exception du cas de la théorie sinusoïdale d'ordre élevé (SSDT). En outre, la plupart des études basées sur les fonctions non polynomiales se limitent à l'analyse des problèmes linéaires. Le développement des modèles numériques basés sur les fonctions non polynomiales est donc nécessaire pour évaluer également la précision et l'efficacité des HSDT basée sur des fonctions non polynomiales.

Chapitre

III

Analyse de vibration libre des plaques FGM sur des fondations élastiques par une théorie quasi-3D hybride

Dans ce chapitre, la vibration libre des plaques isotropes et FGM simplement appuyées et reposant sur des fondations élastiques sera étudiée en utilisant une théorie de déformation de cisaillement quasi-tridimensionnelle hybride.

Sommaire

III.1. Introduction.....	56
III.2. Formulations théoriques.....	57
III.2.1. Propriétés de la plaque FGM.....	57
III.2.2. Cinématique et relations constitutives.....	58
III.2.3. Principe d'Hamilton.....	60
III.3. Solutions analytiques.....	64
III.4. Résultats numériques et discussions.....	65
III.4.1. Etude des plaques isotropes homogènes.....	65
III.4.2. Analyse des plaques FGM.....	67
III.4.3. Etude paramétrique.....	69
III.5. Conclusions.....	75

III.1. Introduction

Les plaques reposant sur des fondations élastiques sont importantes dans les structures et ont de nombreuses applications dans les domaines de l'ingénierie. On trouve de telles structures de plaques dans divers types d'applications industrielles comme les fondations type radiers, les réservoirs de stockage, les piscines et dans la plupart des constructions de génie civil. Ce type de structures rencontre plusieurs problèmes techniques dans les différentes applications. Pour cela, divers modèles de fondations élastiques ont été proposés afin de décrire les interactions entre les plaque et leurs fondations. Le plus simple est la fondation élastique à un seul paramètre ou le modèle Winkler qui considère la fondation comme une série de ressorts verticaux séparés sans effets de couplage entre eux (Winkler, 1868). Cela signifie qu'il y a une relation proportionnelle entre les forces externes et la flèche au point appliqué dans la fondation. Ce modèle a été amélioré par Pasternak en ajoutant un ressort de cisaillement pour simuler les interactions entre les ressorts séparés dans le modèle de Winkler (Pasternak, 1954). Le modèle Pasternak ou fondation à deux paramètres est le plus utilisé pour étudier le comportement mécanique des interactions structure-fondation (Arefi et Allam, 2015; Malekzadeh, 2009; Zenkour, 2009).

Les problèmes de flexion, du flambement et de vibration des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques ont attiré l'attention de nombreux chercheurs travaillant sur l'analyse et la conception des fondations structurales (Abdelbari et al., 2016; Akavci, 2016; Bakora et Tounsi, 2015; Thai et al., 2013). Dans ce chapitre, on s'est intéressé à l'analyse de vibration libre des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques par le biais d'une théorie quasi-3D hybride d'ordre élevé. La particularité de cette théorie est qu'elle emploie un champ des déplacements à 5 inconnus seulement dont l'effet de l'étirement est pris en compte. Le champ de déplacement est modélisé sur la base des fonctions de forme de déformation de cisaillement de type hybride (sinusoïdale et parabolique) tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres ce qui ne requièrent pas l'utilisation de facteur de correction de cisaillement. Les équations de mouvement des plaques FG reposant sur une base élastique sont dérivées en utilisant le principe d'Hamilton. Ces équations directrices sont ensuite résolues par la méthode de Navier. Ainsi, les fréquences fondamentales sont obtenues en résolvant le problème des valeurs propres. L'exactitude de la

présente théorie est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec ceux des solutions de HSDT disponibles dans la littérature.

III.2. Formulations théoriques

III.2.1. Propriétés de la plaque FGM

Une plaque rectangulaire en matériau FGM d'une épaisseur uniforme (h), de longueur (a) et de largeur (b) supportée sur des appuis élastiques est considérée. Les coordonnées x , y et z sont prises selon la longueur, la largeur, et l'épaisseur, respectivement, comme il est montré dans la figure III.1. La formulation est limitée au comportement élastique linéaire. Les propriétés mécaniques de la plaque sont variables dans le sens de l'épaisseur en fonction de la loi de puissance (Eq. III.1) en termes de fractions volumiques des constituants.

$$P(z) = P_b + (P_t - P_b) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{III.1})$$

Où P représente la propriété matérielle effective, P_t et P_b représentent les propriétés de la partie supérieure riche en céramique et la partie inférieure formée du métal, respectivement, et p est l'exposant signifiant le profil de distribution des matériaux constituants à travers l'épaisseur de la plaque. Les caractéristiques matérielles de la plaque, notamment le module de Young E , module de cisaillement G et la masse volumique varient suivant l'équation (III.1), et le coefficient de Poisson ν est considéré constant (Qian et al., 2004).

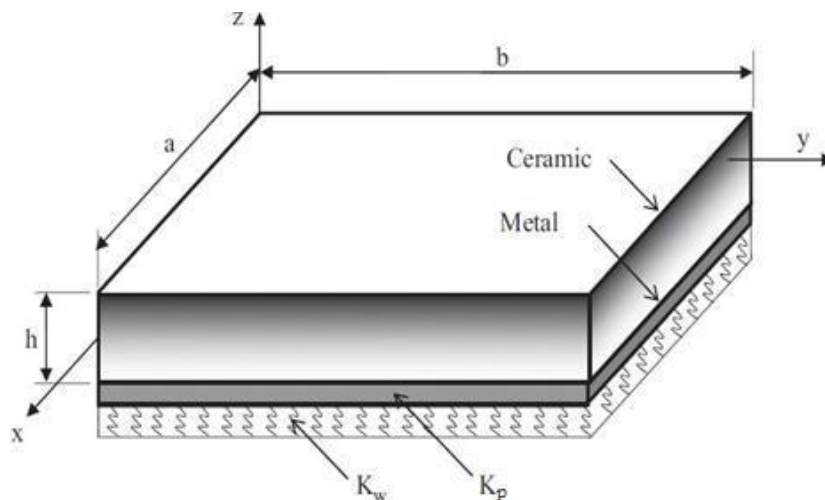


Figure III.1. Géométrie d'une plaque FG rectangulaire sur des appuis élastiques.

III.2.2. Cinématique et relations constitutives

En se basant sur la théorie des plaques quasi-tridimensionnelle avec la prise en compte de la déformation normale φ_z , le champ des déplacements en un point quelconque de coordonnées (x, y, z) dans la plaque est présenté sous la forme suivante

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y, t) \quad (\text{III.2a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y, t) \quad (\text{III.2b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + g(z) \varphi_z(x, y, t) \quad (\text{III.2c})$$

Où u_0 , v_0 , w_0 , φ_x , φ_y et φ_z sont les six déplacements inconnus du plan moyen de la plaque.

Afin de réduire le nombre d'inconnus, quelques simplifications peuvent être considérées. En mettant $\varphi_x = \int \theta(x, y) dx$ et $\varphi_y = \int \theta(x, y) dy$, la cinématique de la théorie proposée peut être exprimée dans une simple forme avec seulement cinq inconnus comme suit

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad (\text{III.3a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad (\text{III.3b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + g(z) \varphi_z(x, y, t) \quad (\text{III.3c})$$

$f(z)$ et $g(z)$ représentent les fonctions de forme qui définissent la variation des déformations transversales et des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Le fait que $f(z)$ et $g(z)$ peuvent être indépendante, cela permet de développer plusieurs HSDT. Dans ce travail, deux fonctions de formes (Eq. III.4) ont été couplé d'où vient le nom hybride de la théorie proposée. La première fonction est de type sinusoïdale, proposée par Touratier (1991) et la deuxième utilisée est celle de Reddy (1998) qui est une fonction parabolique.

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h}, \text{ et } g(z) = 1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \quad (\text{III.4})$$

Chapitre III Analyse de vibration libre des plaques FGM sur des fondations élastiques par une théorie quasi-3D hybride

En supposant que le comportement des plaques est élastique linéaire et que les déplacements et les rotations sont infinitésimales et obéissant la loi de Hooke. Les relations de contrainte-déformation linéaire dérivées à partir de la cinématique des équations (III.3a-c) qui sont valables pour les plaques minces, modérément épaisses et épaisses, sont les suivantes

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = f'(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad (III.5)$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix} \quad (III.6a)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z^0 = \varphi_z \text{ et } g'(z) = \frac{\partial g(z)}{\partial z} \quad (III.6b)$$

Les intégrales indéterminées apparaissant dans les expressions précédentes peuvent être résolues par la méthode de Navier et elles sont exprimées dans les formules suivantes

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (III.7)$$

Où les coefficients A' , B' , k_1 et k_2 sont définis selon le type de solution adoptée, dans ce cas via Navier. α et β sont exprimés dans l'expression (III.24).

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (III.8)$$

Pour les plaques FGM, les relations entre contraintes et déformations sont exprimées comme suit

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Tels que $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$ sont les vecteurs de contraintes et de déformations, respectivement. En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation (III.1), les coefficients de rigidité Q_{ij} peuvent être donnés comme suit

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = \frac{E(z)(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (\text{III.10a})$$

$$Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (\text{III.10b})$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.10c})$$

III.2.3. Principe d'Hamilton

Le principe d'Hamilton a été employé pour décrocher les équations de mouvement appropriées au champ des déplacements et des équations constitutives. Il peut être défini sous la forme analytique suivante

$$0 = \int_0^t (\delta U + \delta V_e - \delta K) dt \quad (\text{III.11})$$

Où δU est la variation de l'énergie potentielle de la plaque; δV_e est la variation de l'énergie de déformation de la fondation élastique; et δK exhibe la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie potentielle de la plaque est définie par la formule ci-dessous

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\ &\quad + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + Q_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^1 + Q_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^1] dA \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Chapitre III Analyse de vibration libre des plaques FGM sur des fondations élastiques par une théorie quasi-3D hybride

Où A est l'aire supérieure de la plaque et les moments résultants N , M , S et Q sont déterminés par les expressions (III.13) ci-après

$$\begin{aligned} (N_i, M_i^b, M_i^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy), \quad N_z = \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz \\ (S_{xz}^s, S_{yz}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz, \quad (Q_{xz}^s, Q_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} f'(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \end{aligned} \quad (III.13)$$

La variation de l'énergie de déformation de la fondation élastique peut être exprimée par

$$\delta V_e = \int_A f_e \delta w_0 dA \quad (III.14)$$

Tel que f_e est l'intensité de la réaction de la fondation. Dans cette analyse, le modèle de fondation de Pasternak a été utilisé comme le montre la relation suivante

$$f_e = K_w w - K_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (III.15)$$

Dans laquelle K_w et K_s sont la rigidité de la fondation type Winkler et la rigidité au cisaillement de la fondation élastique, respectivement.

La variation de l'énergie cinétique peut être écrite sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\ &= \int_A \left\{ I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) + J_0 (\dot{w}_0 \delta \dot{\varphi}_z + \dot{\varphi}_z \delta \dot{w}_0) - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) + J_1 \left(k_1 A' \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + k_2 B' \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + (k_2 B')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - J_2 \left(k_1 A' \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + k_2 B' \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right) + K_0 \dot{\varphi}_z \delta \dot{\varphi}_z \right\} dA \end{aligned} \quad (III.16)$$

Où $\rho(z)$ est la masse volumique donnée par l'équation (III.1) et (I_i, J_i, K_i) sont les inerties exprimées par

$$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, J_0, K_0, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f, zf, g, g^2, f^2) \rho(z) dz \quad (\text{III.17})$$

En employant les formules généralisées des déplacements-déformations (Eq. III.5 et III.6) et les relations contraintes-déformations (Eq. III.9), en faisant l'intégration par parties, en appliquant le Lemme fondamental du calcul des variations et en rassemblant les coefficients de δu_0 , δv_0 , δw_0 , $\delta \theta$ et $\delta \varphi_z$ dans l'équation (III.11), on obtient les équations de mouvement ci-dessous

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + J_1 k_2 B' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\ \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} - f_e &= I_0 \ddot{w}_0 + J_0 \ddot{\varphi} + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla \ddot{w}_0 + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\ \delta \theta : -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} &= -J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\ &\quad + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) - K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\ \delta \varphi_z : \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - N_z &= J_0 \ddot{w}_0 + K_0 \ddot{\varphi}_z \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

En remplaçant l'équation (III.5) dans l'équation (III.9) et les résultats obtenus dans l'équation (III.13), les résultantes des efforts et de moments peuvent être exprimés en terme de déplacements ($u_0, v_0, w_0, \theta, \varphi_z$) sous forme matricielle suivante

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \\ N_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & X_{13} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & X_{23} \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & Y_{13} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & Y_{23} \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{11} & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 & Y_{13}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 & Y_{23}^s \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s & 0 \\ X_{13} & X_{23} & 0 & Y_{13} & Y_{23} & 0 & Y_{13}^s & Y_{23}^s & 0 & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \\ \varphi_z \end{Bmatrix} \quad (\text{III.19a})$$

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{44}^s & A_{44}^s \\ G_{55}^s & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} & k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{bmatrix}, \begin{Bmatrix} Q_{yz}^s \\ Q_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44}^s & G_{44}^s \\ F_{55}^s & G_{55}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} & k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{III.19b})$$

Où

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (\text{III.20a})$$

$$(A_{ij}^s, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s, F_{ij}^s, G_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(g^2(z), f(z), z f(z), f^2(z), f'(z)^2, f'(z)g(z)) dz \quad (\text{III.20b})$$

$$(X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, f(z), g'(z)) g'(z) dz \quad (\text{III.20c})$$

En substituant les expressions citées dans (III.19) dans les équations (III.18), les équations gouvernantes de la théorie proposée peuvent être écrites en termes des déplacements $(u_0, v_0, w_0, \theta, \varphi_z)$, il vient

$$A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 + (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) d_1 \theta + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s d_{122} \theta + X_{13} d_1 \varphi_z = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_0 + (k_1 A') J_1 d_1 \ddot{\theta} \quad (\text{III.21a})$$

$$(A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 + A_{66} d_{11} v_0 + A_{22} d_{22} v_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 - B_{22} d_{222} w_0 + (k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) d_2 \theta + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s d_{112} \theta + X_{23} d_2 \varphi_z = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_2 \ddot{w}_0 + J_1 k_2 B' d_2 \ddot{\theta} \quad (\text{III.21b})$$

$$B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 - D_{11} d_{1111} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 + (k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s) d_{11} \theta + (k_1 D_{12}^s + k_2 D_{22}^s) d_{22} \theta + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s d_{1122} \theta + Y_{13} d_{11} \varphi_z + Y_{23} d_{22} \varphi_z - f_e = I_0 \ddot{w}_0 + J_0 \ddot{\varphi}_z + I_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} + k_2 B' d_{22} \ddot{\theta}) \quad (\text{III.21c})$$

$$-(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) d_1 u_0 - (k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) d_2 v_0 - B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') (d_{122} u_0 + d_{112} v_0) + (k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s) d_{11} w_0 + (k_1 D_{12}^s + k_2 D_{22}^s) d_{22} w_0 + 2D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') d_{1122} w_0 - (k_1^2 H_{11}^s + k_2^2 H_{22}^s + 2k_1 k_2 H_{12}^s) \theta + (k_1 A')^2 F_{55}^s d_{11} \theta + (k_2 B')^2 F_{44}^s d_{22} \theta - H_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')^2 d_{1122} \theta - (k_1 Y_{13}^s + k_2 Y_{23}^s) \varphi_z + k_1 A' G_{55}^s d_{11} \varphi_z + k_2 B' G_{44}^s d_{22} \varphi_z = -J_1 (k_1 A' d_1 \ddot{u}_0 + k_2 B' d_2 \ddot{v}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{w}_0) - K_2 ((k_1 A')^2 d_{11} \ddot{\theta} + (k_2 B')^2 d_{22} \ddot{\theta}) \quad (\text{III.21d})$$

$$-X_{13} d_1 u_0 - X_{23} d_2 v_0 + Y_{13} d_{11} w_0 + Y_{23} d_{22} w_0 + (k_1 (G_{55}^s - Y_{13}^s) + k_2 (G_{44}^s - Y_{23}^s)) \theta + A_{55}^s d_{11} \varphi_z + A_{44}^s d_{22} \varphi_z - Z_{33} \varphi_z = J_0 \ddot{w}_0 + K_0 \ddot{\varphi}_z \quad (\text{III.21e})$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{III.22})$$

III.3. Solutions analytiques

Pour résoudre les équations différentielles (III. 21a-e), la méthode de Navier basée sur les séries doubles de Fourier est utilisée selon les conditions aux limites considérées. Ici, la plaque est supposée simplement appuyée sur des fondations élastiques. Donc, en utilisant cette procédure, les variables des déplacements satisfaisant les conditions d'appuis ci-dessus peuvent être exprimées en fonction de séries de Fourier, on écrit

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ X_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ \Phi_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

Où $(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, \Phi_{mn})$ sont des variables inconnues à évaluer et ω est la fréquence naturelle. α et β sont définis par

$$\alpha = m\pi / a \text{ et } \beta = n\pi / b \quad (\text{III.24})$$

Substituons l'équation (III.23) dans les équations de mouvement (III.21), nous obtenons le système d'équations des valeurs propres pour le problème de vibration libre des plaques FGM présenté dans l'équation (III.25)

$$\left(\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{45} \\ m_{15} & m_{25} & m_{35} & m_{45} & m_{55} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ \Phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Tel que

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}, s_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), s_{13} = -\alpha^3 B_{11} - \alpha\beta^2(B_{12} + 2B_{66}), \\
 s_{14} &= -\alpha(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) + \alpha\beta^2 B_{66}^s(k_1 A' + k_2 B'), s_{15} = \alpha X_{13}, s_{22} = \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}, \\
 s_{23} &= -\alpha^2 \beta(B_{12} + 2B_{66}) - \beta^3 B_{22}, s_{24} = -\beta(k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) + \alpha^2 \beta(k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s, \\
 s_{25} &= -\beta X_{23}, s_{33} = \alpha^4 D_{11} + \beta^4 D_{22} + 2\alpha^2 \beta^2 (D_{12} + 2D_{66}) + K_w + K_s (\alpha^2 + \beta^2), \\
 s_{34} &= \alpha^2 k_1 D_{11}^s + (k_2 \alpha^2 + k_1 \beta^2) D_{12}^s + \beta^2 k_2 D_{22}^s - 2\alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s, \\
 s_{35} &= \alpha^2 Y_{13} + \beta^2 Y_{23}, s_{45} = k_1 Y_{13}^s + k_2 Y_{23}^s + \alpha^2 k_1 A' G_{55}^s + \beta^2 k_2 B' G_{44}^s \\
 s_{44} &= k_1^2 H_{11}^s + k_2^2 H_{22}^s + 2k_1 k_2 H_{12}^s + \alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s + \alpha^2 (k_1 A')^2 F_{55}^s \\
 &+ \beta^2 (k_2 B')^2 F_{44}^s, s_{55} = \alpha^2 A_{55}^s + \beta^2 A_{44}^s + Z_{33}
 \end{aligned} \tag{III.26a}$$

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= m_{22} = I_0, m_{12} = m_{15} = m_{25} = m_{45} = 0, m_{13} = -\alpha I_1, m_{14} = \alpha k_1 A' J_1 \\
 m_{15} &= 0, m_{23} = -\beta I_1, m_{24} = \beta k_2 B' J_1, m_{33} = I_0 + I_2 (\alpha^2 + \beta^2) \\
 m_{34} &= -J_2 (k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2), m_{44} = K_2 ((k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2), \\
 m_{35} &= J_0, m_{55} = K_0
 \end{aligned} \tag{III.26b}$$

III.4. Résultats numériques et discussions

Cette étude a été établie pour vérifier l'exactitude et l'efficacité d'une nouvelle théorie quasi-3D hybride afin de prédire le comportement en vibration libre des plaques FG. Pour cela, plusieurs analyses numériques ont été établies pour des plaques homogènes et fonctionnellement graduées simplement appuyées et sur des fondations élastiques. Les caractéristiques mécaniques des matériaux constituant la plaque FGM étudiée sont citées dans le Tableau III.1 ci-dessous.

Tableau III.1. Propriétés mécaniques des matériaux utilisés pour la plaque FG.

Matériaux	Propriétés		
	Module de Young (GPa)	Coefficient de Poisson	Masse volumique (kg/m ³)
Aluminium (Al)	70	0.3	2702
Alumina (Al ₂ O ₃)	380	0.3	3800
Zirconia (ZrO ₂)	200	0.3	5700

III.4.1. Etude des plaques isotropes homogènes

Dans cette partie, la vibration libre d'une plaque homogène isotrope simplement appuyée a été analysée. Pour le calcul de fréquence naturelle et les paramètres de fondation, les expressions adimensionnelles suivantes ont été utilisées

$$\hat{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_0}, \quad k_w = K_w a^4 / D_0, \quad k_s = K_s a^2 / D_0, \quad D_0 = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)] \quad (\text{III.27})$$

Tableau III.2. Fréquences adimensionnelles des plaques isotropes carrées et simplement appuyées.

a/h	Théorie	Mode							
		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	(3,1)	(2,3)	(3,2)
1000	Leissa (1973)	19.739	49.3480	49.3480	78.9568	98.6960	98.6960	128.3021	128.3021
	Zhou et al. (2002)	19.711	49.3470	49.3470	78.9528	98.6911	98.6911	128.3048	128.3048
	Akavci (2014)	19.739	49.3476	49.3476	78.9557	98.6943	98.6943	128.3020	128.3020
	Mantari (2015b)	19.739	49.3483	49.3483	78.9568	98.6957	98.6957	128.3037	128.3037
	Présente	19.739	49.3476	49.3476	78.9557	98.6943	98.6943	128.3019	128.3019
100	Liu et Liew (1999)	19.731	49.3027	49.3027	78.8410	98.5150	98.5150	127.9993	127.9993
	Nagino et al. (2008)	19.732	49.3050	49.3050	78.8460	98.5250	98.5250	128.0100	128.0100
	Akavci (2014)	19.732	49.3045	49.3045	78.8456	98.5223	98.5223	128.0346	128.0346
	Mantari (2015b)	19.732	49.3056	49.3056	78.8477	98.5253	98.5253	128.0160	128.0160
	Présente	19.732	49.3049	49.3049	78.8466	98.5239	98.5239	128.0143	128.0143
10	Liu and Liew (1999)	19.058	45.4478	45.4478	69.7167	84.9264	84.9264	106.5154	106.5154
	Nagino et al. (2008)	19.065	45.4869	45.4869	69.8093	85.0646	85.0646	106.7350	106.7350
	Akavci (2014)	19.085	45.5957	45.5957	70.0595	85.4315	85.4315	107.3040	107.3040
	Mantari (2015b)	19.090	45.6242	45.6242	70.1176	85.5096	85.5096	107.4092	107.4092
	Présente	19.090	45.6251	45.6251	70.1214	85.5164	85.5164	107.4222	107.4222
5	Shufrin et Eisenberger (2005)	17.452	38.1884	38.1884	55.2539	65.3130	65.3130	78.9864	78.9864
	Hosseini-Hashemi et al. (2011)	17.452	38.1883	38.1883	55.2543	65.3135	65.3135	78.9865	78.9865
	Akavci (2014)	17.514	38.4722	38.4722	55.8358	66.1207	66.1207	80.1637	80.1637
	Mantari (2015b)	17.529	38.5079	38.5079	55.8561	66.1060	66.1060	80.0589	80.0589
	Présente	17.530	38.5169	38.5169	55.8817	66.1471	66.1471	80.1296	80.1296

Les huit premières fréquences naturelles adimensionnelles pour différents rapports de géométrie ont été calculées et présentées dans le Tableau III.2. Ces valeurs ont été comparées avec les solutions des différents chercheurs : les solutions exactes 3D de (Leissa, 1973), (Zhou et al., 2002), (Nagino et al., 2008), les résultats de la théorie FSDT obtenus par (Liu et Liew, 1999) et les solutions des théories d'ordre élevé présentées par Shufrin et Eisenberger (2005), Hosseini-Hashemi et al. (2011), Akavci (2014) et Mantari (2015b). Il est bien clair que les résultats trouvés par la théorie proposée sont en excellent accord avec ceux de la littérature dans le cas des plaques minces ($a/h > 5$). La différence constatée dans le cas des plaques épaisses ($a/h = 5$) est dû à l'effet de l'étirement qui n'a pas été pris en compte dans les théories présentées par Shufrin et Eisenberger (2005), Hosseini-Hashemi et al. (2011), Akavci (2014).

III.4.2. Analyse des plaques FGM

Dans les exemples suivants, deux types de plaques FGM ont été étudiées Al/Al_2O_3 et Al/ZrO_2 où les propriétés du matériau sont indiquées dans le tableau III.1. Pour des raisons de simplicité, les formes adimensionnelles des fréquences fondamentales et des paramètres des fondations utilisés sont comme suit

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}, \quad \beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}, \quad \tilde{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_m / E_m}, \quad (III.28a)$$

$$\bar{\beta} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_c / E_c}, \quad k_w = K_w a^4 / \bar{D}, \quad k_s = K_s a^2 / \bar{D}$$

où $\bar{D} = h^3 / 12(1 - \nu^2) [p(8 + 3p + p^2)E_m + 3(2 + p + p^2)E_c] / [(1 + p)(2 + p)(3 + p)]$ (III.28b)

Tableau III.3. Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles des plaques FG type Al/Al_2O_3 .

b/a	a/h	p	Théorie		
			Jin et al. (2014)	Mantari (2015b)	Présente
1	10	0	0.1135	0.1135	0.1135
		1	0.0870	0.0882	0.0882
		2	0.0789	0.0806	0.0806
		5	0.0741	0.0755	0.0755
	5	0	0.4169	0.4169	0.4196
		1	0.3222	0.3261	0.3261
		2	0.2905	0.2962	0.2961
		5	0.2676	0.2722	0.2720
	2	0	1.8470	1.8510	1.8526
		1	1.4687	1.4778	1.4789
		2	1.3095	1.3223	1.3230
		5	1.1450	1.1557	1.1547
2	10	0	0.0719	0.0718	0.0718
		1	0.0550	0.0557	0.0557
		2	0.0499	0.0510	0.0509
		5	0.0471	0.0479	0.0479
	5	0	0.2713	0.2713	0.2713
		1	0.2088	0.2115	0.2115
		2	0.1888	0.1926	0.1926
		5	0.1754	0.1786	0.1785
	2	0	0.9570	1.3044	1.3049
		1	0.7937	1.0348	1.0352
		2	0.7149	0.9296	0.9297
		5	0.6168	0.8241	0.8231

Dans le tableau III.3, les fréquences naturelles adimensionnelles d'une plaque FG simplement appuyée ont été présentées pour différentes valeurs d'indice matériel et de rapports géométriques. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux de Jin et al. (2014) et

Chapitre III Analyse de vibration libre des plaques FGM sur des fondations élastiques par une théorie quasi-3D hybride

Mantari (2015b). Une bonne corrélation est constatée entre les résultats de la présente théorie et ceux de Mantari (2015b), ce qui confirme l'efficacité de cette présente théorie.

Tableau III.4. Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m} \text{ des plaques FG carrées type Al/ZrO}_2 \text{ (} a/h = 5 \text{)}.$$

Théorie	$p = 2$	$p = 3$	$p = 5$
Vel et Batra (2004)	0.2197	0.2211	0.2225
Neves et al., (2012a) $\varepsilon_z = 0$	0.2189	0.2202	0.2215
Neves et al. (2012a) $\varepsilon_z \neq 0$	0.2198	0.2212	0.2225
Neves et al. (2012b) $\varepsilon_z = 0$	0.2191	0.2205	0.2220
Neves et al. (2012b) $\varepsilon_z \neq 0$	0.2201	0.2216	0.2230
Matsunaga (2008)	0.2264	0.2270	0.2280
Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.2264	0.2276	0.2291
Akavci (2014)	0.2264	0.2269	0.2278
Mantari (2015b)	0.2285	0.2290	0.2295
Présente	0.2285	0.2290	0.2295

Les fréquences fondamentales des plaques FG type Al/ZrO₂ sont montrées dans le tableau III.4 pour différentes valeurs du gradient matériel et elles sont comparées avec les résultats de Vel et Batra (2004) qui ont utilisé une solution 3D exacte, les résultats des théories quasi-3D sinusoidale et hyperbolique obtenues par Neves et al. (2012a; 2012b) et des théories de déformation d'ordre élevé proposées par Akavci (2014), Hosseini-Hashemi et al. (2011), Mantari (2015b) et Matsunaga (2008). Il est à remarquer que les résultats trouvés sont en bon accord.

Le tableau III.5 illustre les fréquences fondamentales des plaques FG reposant sur des fondations élastiques type Winkler- Pasternak pour différents rapports géométriques et indice de loi de puissance. Afin de vérifier l'exactitude du modèle proposé, les valeurs trouvées ont été comparées à celles de Hosseini-Hashemi et al. (2010), Akavci (2014) et (Mantari, 2015b). Un bon accord est observé quelles que soit les valeurs considérées de l'indice de loi p et des paramètres de fondation élastique.

Après cette étude comparative, on peut conclure que la présente théorie est non seulement précise mais aussi simple dans la prédiction de la réponse vibratoire des plaques

Chapitre III Analyse de vibration libre des plaques FGM sur des fondations élastiques par une théorie quasi-3D hybride

FG reposant sur des fondations élastiques. La présente théorie prend en compte l'effet d'étirement dû à sa nature quasi-3D avec un nombre minimum d'inconnues réduit à cinq.

Tableau III.5. Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ des plaques FG rectangulaire type Al/ZrO₂ sur des fondations élastiques ($a/b = 1.5$).

(k_w, k_s)	a/h	p	Théorie			
			Akavci (2014)	Hosseini-Hashemi et al. (2010)	Mantari (2015b)	Présente
(0, 0)	20	0	0.02393	0.02392	0.02393	0.02397
		0.25	0.02309	0.02269	0.02312	0.02315
		1	0.02202	0.02156	0.02217	0.02220
		5	0.02244	0.02180	0.02260	0.02262
		∞	0.02056	0.02046	0.02057	0.02060
	10	0	0.09203	0.09188	0.09207	0.09224
		0.25	0.08895	0.08603	0.08909	0.08925
		1	0.08489	0.08155	0.08549	0.08564
		5	0.08576	0.08171	0.08638	0.08651
		∞	0.07908	0.07895	0.07911	0.07927
	5	0	0.32471	0.32284	0.32498	0.32583
		0.25	0.31531	0.31003	0.31591	0.31670
		1	0.30152	0.29399	0.30349	0.30425
		5	0.31860	0.29099	0.29990	0.30053
		∞	0.27902	0.27788	0.27925	0.28001
(250, 25)	20	0	0.03422	0.03421	0.03417	0.03419
		0.25	0.03312	0.03285	0.03309	0.03311
		1	0.03213	0.03184	0.03220	0.03222
		5	0.03277	0.03235	0.03283	0.03285
		∞	0.02940	0.02937	0.02936	0.02939
	10	0	0.13375	0.13365	0.13302	0.13315
		0.25	0.12959	0.12771	0.12895	0.12907
		1	0.12585	0.12381	0.12557	0.12568
		5	0.12778	0.12533	0.12755	0.12764
		∞	0.11492	0.11484	0.11430	0.11443
	5	0	0.50044	0.49945	0.48945	0.49020
		0.25	0.48594	0.48327	0.47535	0.47610
		1	0.47298	0.46997	0.46401	0.46468
		5	0.47637	0.47400	0.46838	0.46880
		∞	0.43000	0.43001	0.42057	0.42129

III.4.3. Etude paramétrique

Dans les illustrations suivantes, une étude paramétrique a été établie afin d'analyser l'influence des différents paramètres sur les fréquences naturelles des plaques FGM. La figure III.2 présente la variation de la fréquence naturelle adimensionnelle d'une plaque FG à simplement appuyées en fonction de l'indice de gradient (p) pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur (a/h). On peut remarquer sur cette figure que la fréquence naturelle diminue avec l'augmentation de l'indice matériel et augmente avec l'augmentation du rapport

d'épaisseur (a/h). Pour des valeurs élevées de l'indice de gradient (p) et le même rapport d'épaisseur (a/h), la fréquence naturelle ne varie pas considérablement.

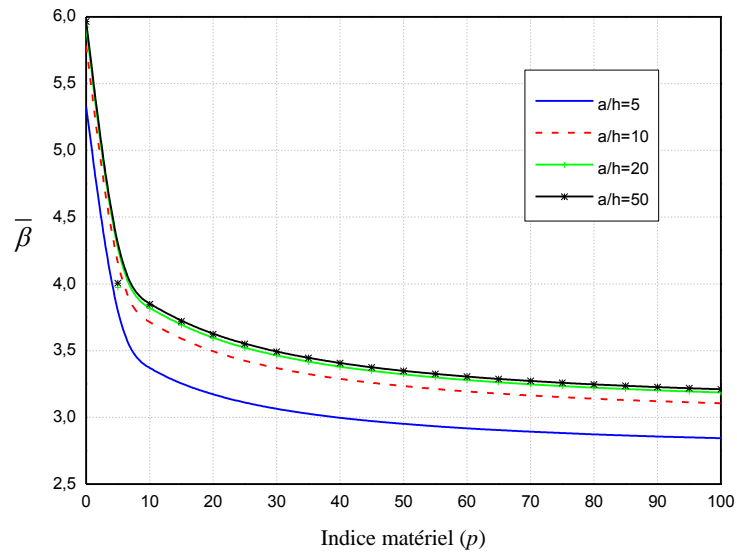


Figure III.2. Variation de la fréquence naturelle adimensionnelle $\bar{\beta} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque FGM carrée type Al/Al_2O_3 par rapport à l'indice du gradient.

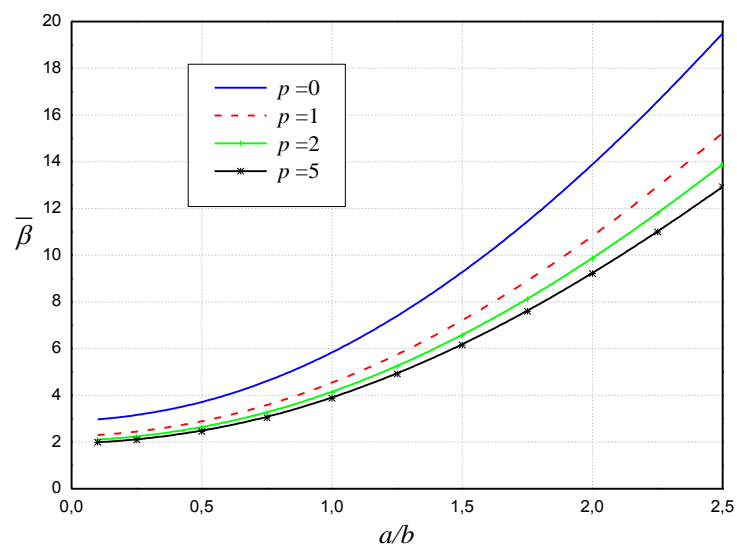


Figure III.3. Variation de la fréquence naturelle adimensionnelle $\bar{\beta} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque FGM type Al/Al_2O_3 en fonction du rapport de forme a/b ($a/h = 10$).

La variation de la fréquence naturelle des plaques FGM en fonction du rapport géométrique de forme (a/b) pour différentes valeurs de l'indice de gradient (p) est montrée dans la figure III.3. A partir de ces résultats, on peut observer que plus l'indice de gradient (p) augmente, plus la fréquence naturelle diminue et cela est dû à la diminution de la rigidité de la plaque. On peut également constater que pour une valeur fixe de l'indice de gradient (p) , à mesure que le rapport de forme (a/b) augmente, la fréquence nominale augmente.

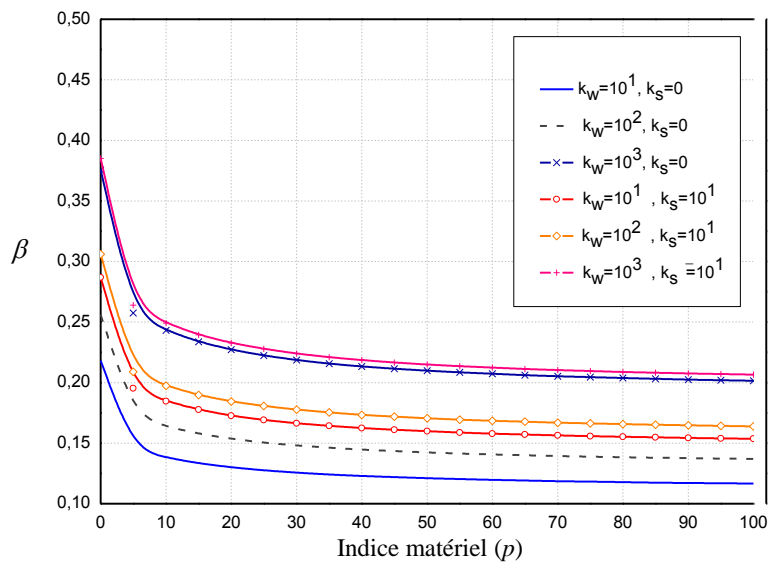


Figure III.4. Variation de la fréquence naturelle adimensionnelle $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque FGM carrée type Al/Al_2O_3 par rapport aux paramètres de la fondation élastique et l'indice matériel ($a/h = 5$).

L'impact des paramètres de la fondation élastique est présenté dans les figures III.4 à III.7. La figure III.4 indique l'effet des paramètres de fondation élastique sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles de la plaque carrée Al/Al_2O_3 simplement appuyées en fonction de l'indice de loi de puissance (p) . A partir de cette figure, on peut observer que pour une valeur donnée de (p) et un coefficient de Pasternak (\bar{k}_s) , à mesure que l'autre coefficient (\bar{k}_w) augmente, la fréquence naturelle augmente. Aussi, on peut remarquer que pour des valeurs élevées de l'indice de gradient (p) , la fréquence naturelle ne varie pas significativement.

Chapitre III Analyse de vibration libre des plaques FGM sur des fondations élastiques par une théorie quasi-3D hybride

La figure III.5 présente la variation de la fréquence naturelle en fonction du rapport de forme (a/b) de la plaque FG ($p = 1$) pour différentes valeurs des paramètres de fondation (\bar{k}_w, \bar{k}_s). On peut observer que pour une valeur donnée du rapport de forme (a/b) et du coefficient de Winkler (\bar{k}_w), plus le coefficient du Pasternak (\bar{k}_s) augmente, plus la fréquence naturelle augmente. On observe également que pour de petites valeurs des paramètres (a/b) et (\bar{k}_w), les courbes ont tendance à se rapprocher de la même valeur, ce qui est plus évident pour les grandes valeurs de (\bar{k}_s). Lorsque (\bar{k}_s) est constant et pour une valeur donnée de (a/b), plus la valeur du coefficient de Winkler (\bar{k}_w) augmente, plus la valeur de la fréquence naturelle est importante. On remarque également que les courbes se rapprochent l'une de l'autre à mesure que le rapport (a/b) augmente.

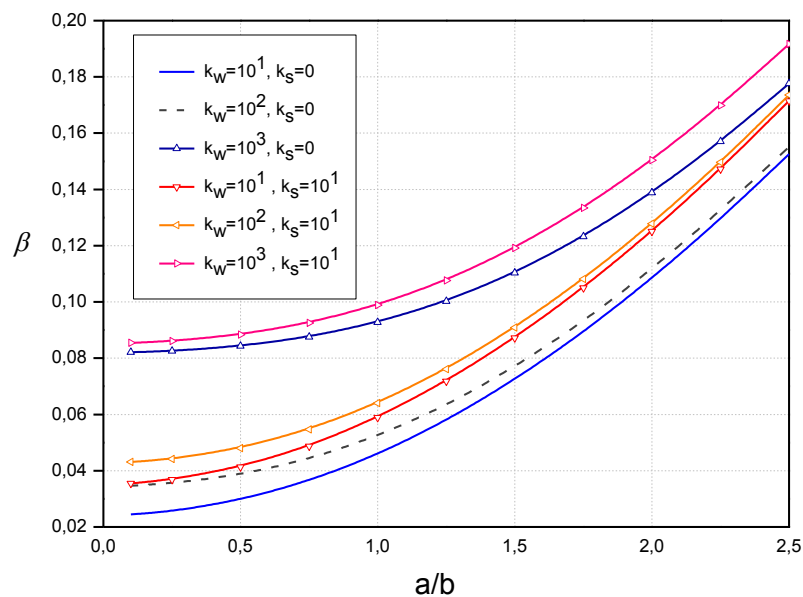
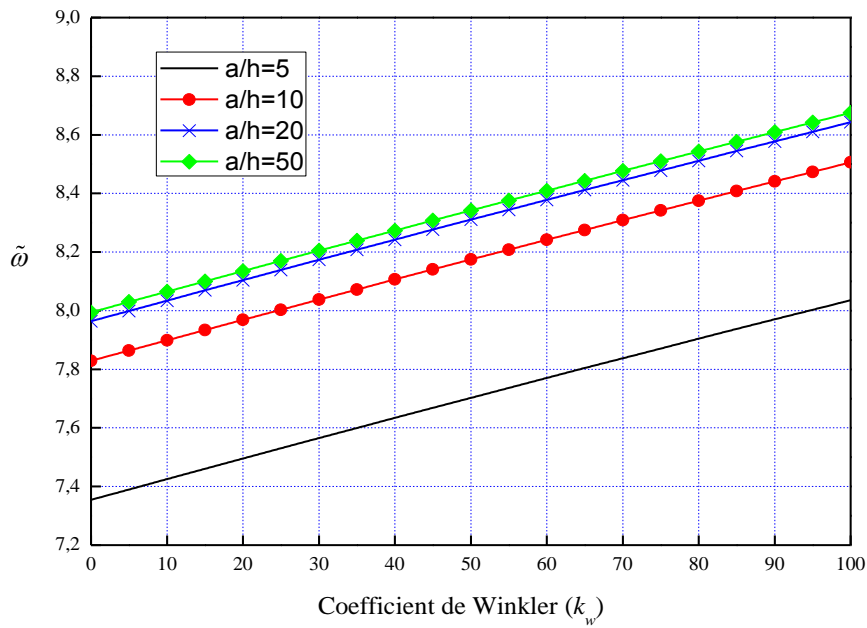
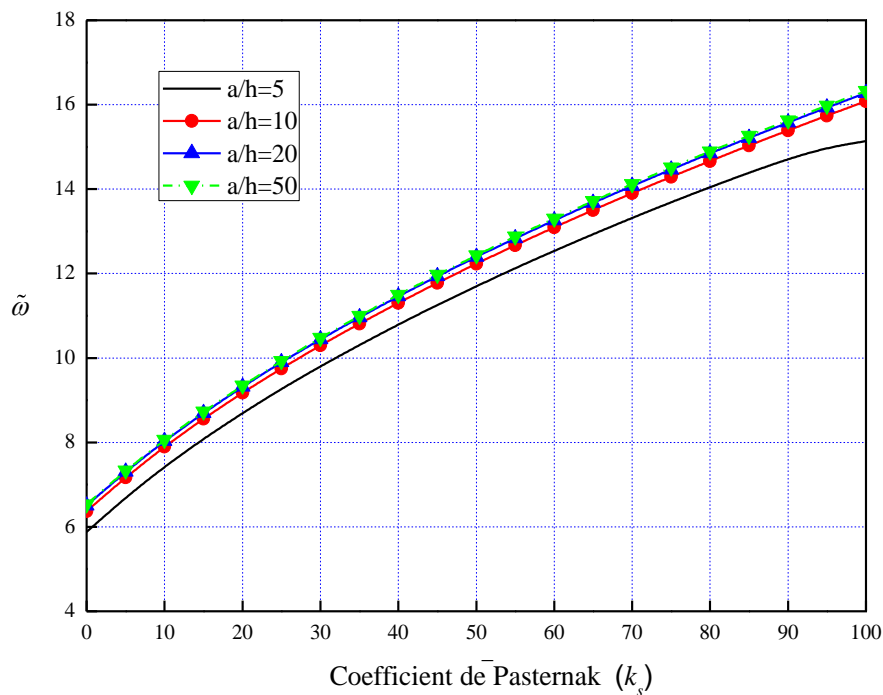


Figure III.5. Variation de la fréquence naturelle adimensionnelle $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque FGM carrée type Al/Al_2O_3 par rapport aux paramètres de la fondation élastique et au rapport de forme ($a/h = 10, p = 1$).

Les figures III.6a et b présentent la variation de la fréquence naturelle en fonction des paramètres de Winkler (\bar{k}_w) et de Pasternak (\bar{k}_s), respectivement. Dans la figure III.6a, on peut observer que la fréquence naturelle varie de manière linéaire avec le paramètre de



(a) $\bar{k}_s = 10$



(b) $\bar{k}_w = 10$

Figure III.6. Influence des paramètres de la fondation élastique (\bar{k}_w, \bar{k}_s) sur la variation de la fréquence naturelle adimensionnelle $\tilde{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque FGM carrée type Al/ZrO_2 pour différents rapports de forme ($a/h = 10, p = 1$).

Winkler (\bar{k}_w). Les courbes présentées dans la figure III.6b ont une pente plus grande que les courbes de la figure III.6a, c'est-à-dire que le paramètre de Pasternak (\bar{k}_s) a un effet plus grand sur la fréquence naturelle que le paramètre de Winkler (\bar{k}_w).

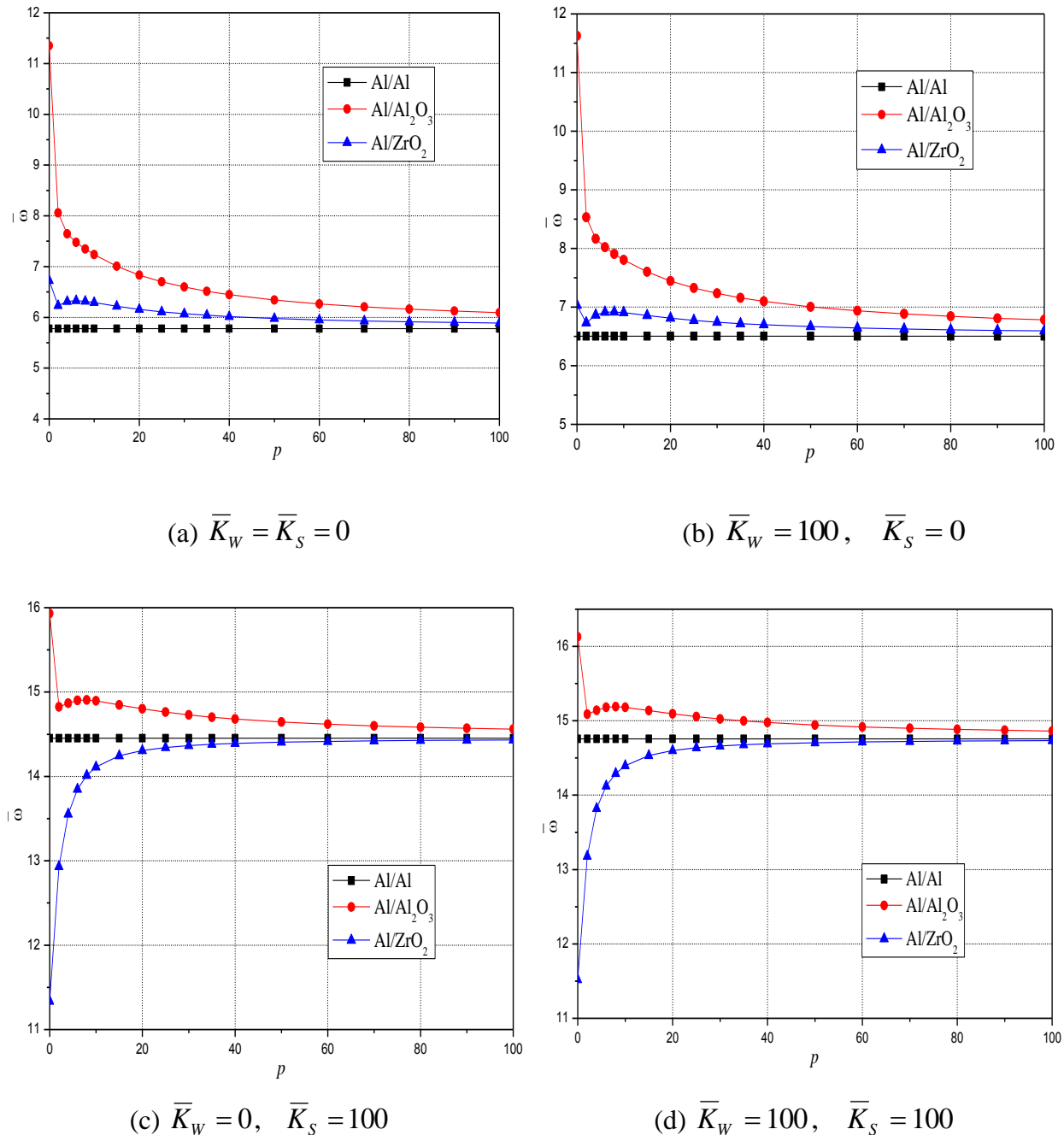


Figure III.7. Variation de la fréquence naturelle $\bar{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_M / E_M}$ des différentes plaques FGM en fonction du gradient matériel p ($a / h = 10$).

Les graphes ci-dessus montrent la variation fréquence non dimensionnelle en fonction de gradient matériel pour différents types de plaques FG. On peut voir que les coefficients de fondation ont un grand effet sur la réponse aux vibrations des plaques FG.

III.5. Conclusion

Dans le présent travail, des solutions analytiques pour les études de vibrations libres des plaques FGM sont développées en faisant d'autres hypothèses simplificatrices au HSDT existant, avec l'inclusion d'un terme d'intégrale indéterminée. Le nombre d'inconnus et les équations de mouvement du présent modèle HSDT sont réduits d'un seul, et donc, rendre cette théorie simple et efficace à utiliser. Les études comparatives démontrent que les prédictions de la théorie hybride proposée et celle de Mantari (2015b) pour les plaques FGM sont proches les unes des autres. Les résultats obtenus par la théorie actuelle peuvent être résumés comme suit:

- Le modèle analytique actuel peut prédire avec précision les fréquences fondamentales des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques à deux paramètres.
- Les fréquences fondamentales de la plaque FGM diminuent avec l'augmentation de l'exposant de la fraction volumique.
- En présence de fondations élastiques, la valeur croissante des coefficients Winkler et Pasternak entraîne une augmentation de la fréquence fondamentale de la plaque FGM.
- Le paramètre de modèle Pasternak (cisaillement) a une influence plus importante sur l'augmentation de la fréquence naturelle de la plaque FGM que le paramètre du modèle Winkler. L'augmentation de la valeur de l'exposant de la fraction volumique augmente l'influence de la fondation élastique sur la fréquence naturelle.

Chapitre

IV

Etude Analytique de l'influence de la déformation normale sur la vibration libre des plaques FGM

Dans ce chapitre, deux théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (2D et quasi-3D) seront présentées pour analyser l'influence de la déformation normale (stretching effect) sur le comportement vibratoire des plaques FGM reposant sur des appuis élastiques.

Sommaire

IV.1. Introduction.....	76
IV.2. Modèles mathématiques.....	76
IV.2.1. Géométrie de la plaque FGM.....	76
IV.2.2. Cinématique de la théorie.....	77
IV.2.3. Les équations de mouvement.....	80
IV.3. Procédure analytique de Navier.....	84
IV.4. Analyse vibratoire des différents types de plaques.....	85
IV.4.1. Analyse des plaques isotropes.....	86
IV.4.2. Investigation sur des plaques FGM simplement appuyées.....	87
IV.4.3. Analyse des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques.....	92
IV.5. Conclusion.....	98

IV.1. Introduction

Dans ce chapitre, deux théories 2D et quasi-3D de déformation de cisaillement ont été développées pour pouvoir étudier l'influence de la déformation normale sur la vibration libre des plaques FGM reposant sur des appuis élastiques. La nouveauté de cette théorie est l'utilisation d'une nouvelle fonction de forme des déformations de cisaillement qui considère une distribution adéquate des déformations de cisaillement transversales sur l'épaisseur de la plaque et satisfait les conditions aux limites en assurant la nullité des contraintes tangentielles dans les bords supérieur et inférieur de la plaque et cela sans introduire un facteur de correction de cisaillement. Des termes intégraux indéterminés sont utilisés dans le champ des déplacements proposé dans lequel les effets des contraintes normales sont pris en compte dans la théorie de la déformation de cisaillement quasi-3D et omis dans la théorie 2D. Les caractéristiques mécaniques des plaques varient régulièrement dans le sens de l'épaisseur en fonction d'une variation de la loi de puissance. Les équations de mouvement des plaques FG reposant sur une fondation élastique sont obtenues à partir du principe d'Hamilton et résolues par la procédure de Navier. En conséquence, les fréquences fondamentales sont déduites en résolvant le problème des valeurs propres. L'exactitude et la validité de la présente théorie est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec d'autres résultats publiés dans la littérature. Enfin, les influences des différents matériaux, de l'indice de loi de puissance, des paramètres géométriques et des coefficients de fondation élastique sur la fréquence propre des plaques ont été examinées et comparées pour les deux théories.

IV.2. Modèle mathématique

IV.2.1. Géométrie de la plaque FGM

Considérons une plaque rectangulaire en matériau FGM d'un comportement linéaire élastique, d'une épaisseur uniforme (h), longueur (a) et d'une largeur (b). Supposons que la plaque est posée sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak avec les rigidités de Winkler (K_w) et de cisaillement (K_s). Les coordonnées du système cartésien x , y et z coïncident avec le plan médian de plaque (Figure IV.1). Les propriétés mécaniques de la plaque sont considérées variables selon l'épaisseur en fonction de la loi de puissance comme suit

$$P(z) = P_b + (P_t - P_b) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{IV.1})$$

Où P représente la propriété matérielle effective, P_t et P_b représentent les propriétés de la partie supérieure riche en céramique et la partie inférieure formée du métal, respectivement, et p est l'exposant signifiant le profil de distribution des matériaux constituants à travers l'épaisseur de la plaque. Les caractéristiques matérielles de la plaque, notamment le module de Young E , module de cisaillement G et la masse volumique ρ varient suivant l'équation (IV.1), et le coefficient de Poisson ν est considéré constant.

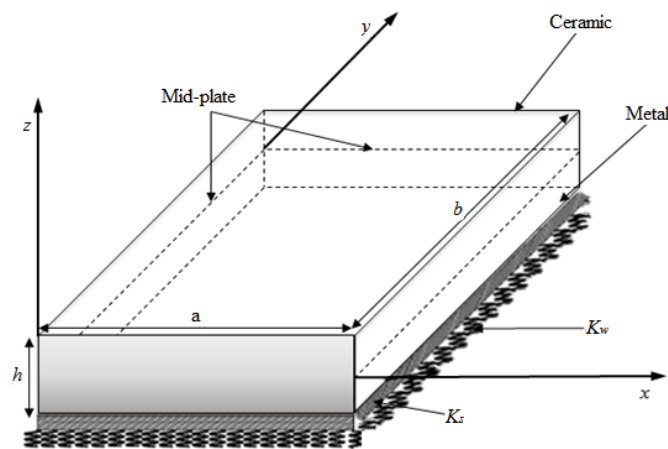


Figure IV.1. Géométrie d'une plaque FG rectangulaire sur des fondations élastiques à deux paramètres.

IV.2.2. Cinématique de la théorie

En se basant sur le modèle proposé par Zaoui et al. (2017b), le champ des déplacements est exprimé par les équations suivantes

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad (\text{IV.2a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad (\text{IV.2b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + g(z) \varphi_z(x, y, t) \quad (\text{IV.2c})$$

Où u_0 , v_0 et w_0 sont les déplacements du plan moyen de la plaque, θ et φ_z sont les rotations de la normale au plan médian de la plaque.

Dans cette étude, une nouvelle fonction de forme de déformation de cisaillement est développée comme indiqué dans l'équation (IV.3) et illustré dans la figure IV.2 avec d'autres modèles qui sont résumés dans le tableau II.1. Ce nouveau modèle assure une bonne distribution de la déformation de cisaillement en fonction de l'épaisseur de la plaque et considère des contraintes de cisaillement transversales paraboliques sur l'épaisseur en satisfaisant les conditions de surface sans contrainte de cisaillement sans inclure un facteur de correction de cisaillement.

$$f(z) = \frac{\pi h}{\pi^4 + h^4} e^{(hz/\pi)} \left(\pi^2 \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) + h^2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) - \frac{\pi h^3}{\pi^4 + h^4} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{df}{dz} \quad (\text{IV.3})$$

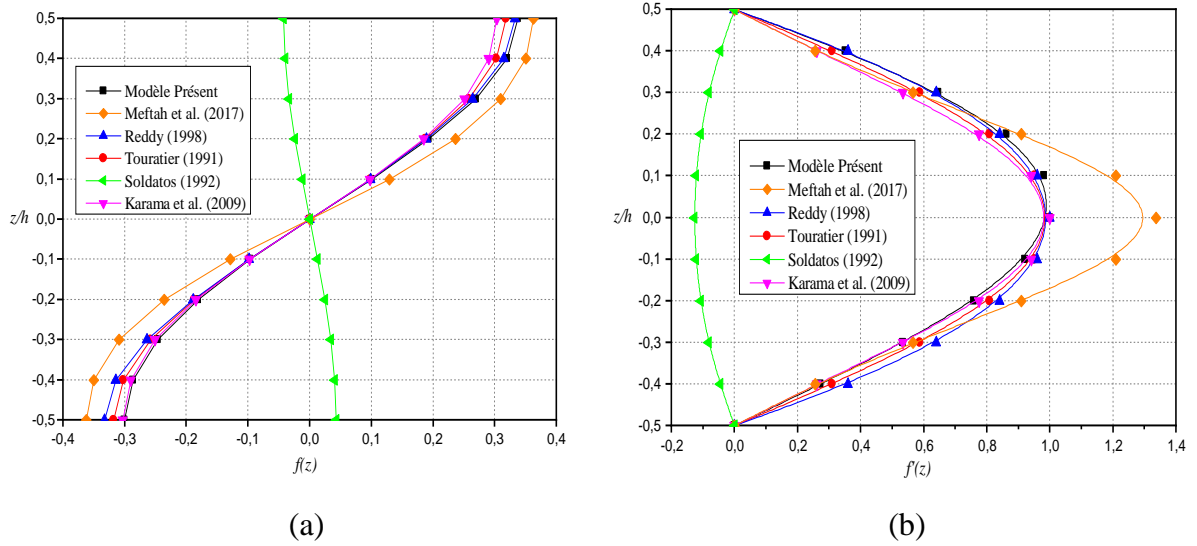


Figure IV.2. Comparaison des fonctions de forme $f(z)$ (a) et leurs dérivées $f'(z)$ (b) pour différentes théories de déformation d'ordre élevé

Les expressions des déformations linéaires obtenues à partir des équations (IV.2a–c), en appliquant la théorie d'élasticité linéaire sont les suivantes

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad (\text{IV.4})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.5a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 \int \theta dx + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z^0 = \varphi_z \quad \text{et} \quad g'(z) = \frac{\partial g(z)}{\partial z} \quad (\text{IV.5b})$$

Les relations déformations-contraintes sont comme suit

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

Tels que $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$ sont les vecteurs de contraintes et de déformations, respectivement. Les coefficients de rigidités sont dépendantes de déformation normale ε_z tel que

- Si la théorie de déformation de cisaillement 2D est utilisée, la déformation normale $\varepsilon_z = 0$, alors les coefficients Q_{ij} sont

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{(1-\nu^2)}, \quad (\text{IV.7a})$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{(1-\nu^2)}, \quad (\text{IV.7b})$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV.7c})$$

- Si la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D est utilisée, la déformation normale $\varepsilon_z \neq 0$, alors les coefficients Q_{ij} s'écrivent

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = \frac{E(z)(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (IV.8a)$$

$$Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (IV.8b)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (IV.8c)$$

IV.2.3. Les équations de mouvement

Les équations de mouvement appropriées au champ des déplacements et aux équations constitutives ont été établies à partir de la version dynamique du principe des travaux virtuels dont sa forme analytique peut être énoncée comme suit

$$0 = \int_0^t (\delta U + \delta V_e - \delta K) dt \quad (IV.9)$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation de la plaque; δV_e est la variation de l'énergie de déformation de la fondation élastique; et δK présente la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est définie par la formule ci-dessous

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\ &\quad + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + Q_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 + Q_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0] dA \end{aligned} \quad (IV.10)$$

Où A est l'aire supérieure de la plaque et les moments résultants N , M , S et Q sont déterminés par

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy), \quad (IV.11a)$$

$$N_z = \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz, \quad (Q_{xz}^s, Q_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (IV.11b)$$

Chapitre IV Etude Analytique de l'influence de la déformation normale sur la vibration libre des plaques FGM

La variation de l'énergie de déformation de la fondation élastique peut être énoncée par

$$\delta V_e = \int_A f_e \delta w_0 dA \quad (IV.12)$$

Tel que f_e est l'intensité de la réaction de la fondation. Dans cette analyse, le modèle de fondation de Pasternak (Pasternak, 1954) a été utilisé comme le montre l'expression suivante:

$$f_e = K_w w_0 - K_s \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \quad (IV.13)$$

Dans laquelle K_w et K_s sont la rigidité de la fondation type Winkler et la rigidité au cisaillement de la fondation élastique, respectivement.

La variation de l'énergie cinétique peut être écrite sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \delta K = & \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\ = & \int_A \left\{ I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) + J_0 (\dot{w}_0 \delta \dot{\varphi}_z + \dot{\varphi}_z \delta \dot{w}_0) - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right. \right. \\ & + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \left. \right) + J_1 \left(k_1 A' \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + k_2 B' \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right) \\ & + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + (k_2 B')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \\ & \left. - J_2 \left(k_1 A' \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + k_2 B' \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right) + K_0 \dot{\varphi}_z \delta \dot{\varphi}_z \right\} dA \end{aligned} \quad (IV.14)$$

Où $\rho(z)$ est la masse volumique donnée par l'équation (IV.1) et (I_i, J_i, K_i) sont les inerties de masse exprimées par

$$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, J_0, K_0, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f, zf, g, g^2, f^2) \rho(z) dz \quad (IV.15)$$

En employant les formules généralisées des déplacements-déformations (Eq. IV.4 et IV.5) et les relations contraintes-déformations (Eq. IV.6), en intégrant par parties et en

Chapitre IV Etude Analytique de l'influence de la déformation normale sur la vibration libre des plaques FGM

rassemblant les coefficients de δu_0 , δv_0 , δw_0 , $\delta \theta$ et $\delta \varphi_z$ dans l'équation (IV. 9), les équations de mouvement obtenues s'écrivent

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
 \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + J_1 k_2 B' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
 \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} - f_e = I_0 \ddot{w}_0 + J_0 \ddot{\phi} + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla \ddot{w}_0 \\
 & + J_2 (k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2}) \\
 \delta \theta : \quad & -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} = \\
 & -J_1 (k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}) + J_2 (k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2}) - K_2 ((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2}) \\
 \delta \varphi_z : \quad & \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} - N_z = J_0 \ddot{w}_0 + K_0 \ddot{\phi}_z
 \end{aligned} \tag{IV.16}$$

En remplaçant l'équation (IV.4) dans l'équation (IV.6) et les résultats obtenus dans l'équation (III.11), les résultantes des efforts et de moments sont déterminés par le système suivant

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \\ N_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & X_{13} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & X_{23} \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & Y_{13} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & Y_{23} \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{11} & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 & Y_{13}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 & Y_{23}^s \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s & 0 \\ X_{13} & X_{23} & 0 & Y_{13} & Y_{23} & 0 & Y_{13}^s & Y_{23}^s & 0 & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \\ \varphi_z \end{Bmatrix} \tag{IV.17a}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz}^s \\ Q_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.18b})$$

Où A_{ij} , A_{ij}^s sont les rigidités de la plaques définies par

$$(A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, g^2(z), z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (\text{IV.19a})$$

$$(X_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^s, Z_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, z, f(z), g'(z)) g'(z) dz \quad (\text{IV.19b})$$

Les équations gouvernantes de la théorie proposée peuvent être écrites en termes des déplacements ($u_0, v_0, w_0, \theta, \varphi_z$) comme suit

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 + (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) d_1 \theta \\ & + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s d_{122} \theta + X_{13} d_1 \varphi_z = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_0 + (k_1 A') J_1 d_1 \ddot{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta v_0 : & (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 + A_{66} d_{11} v_0 + A_{22} d_{22} v_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 - B_{22} d_{222} w_0 + (k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) d_2 \theta \\ & + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s d_{112} \theta + X_{23} d_2 \varphi_z = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_2 \ddot{w}_0 + J_1 k_2 B' d_2 \ddot{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 - D_{11} d_{1111} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 \\ & - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 + (k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s) d_{11} \theta + (k_1 D_{12}^s + k_2 D_{22}^s) d_{22} \theta + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s d_{1122} \theta \\ & + Y_{13} d_{11} \varphi_z + Y_{23} d_{22} \varphi_z - K_w w_0 + K_s \nabla^2 w_0 = I_0 \ddot{w}_0 + J_0 \ddot{\varphi}_z + I_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 \\ & + J_2 (k_1 A' d_1 \ddot{\theta} + k_2 B' d_2 \ddot{\theta}) \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

$$\begin{aligned} \delta \theta : & - (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) d_1 u_0 - (k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) d_2 v_0 - B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') (d_{122} u_0 + d_{112} v_0) + (k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s) d_{11} w_0 \\ & + (k_1 D_{12}^s + k_2 D_{22}^s) d_{22} w_0 + 2D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') d_{1122} w_0 - (k_1^2 H_{11}^s + k_2^2 H_{22}^s + 2k_1 k_2 H_{12}^s) \theta + (k_1 A')^2 A_{55}^s d_{11} \theta \\ & + (k_2 B')^2 A_{44}^s d_{22} \theta - H_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')^2 d_{1122} \theta - (k_1 Y_{13}^s + k_2 Y_{23}^s) \varphi_z + k_1 A' A_{55}^s d_{11} \varphi_z + k_2 B' A_{44}^s d_{22} \varphi \\ & = -J_1 (k_1 A' d_1 \ddot{u}_0 + k_2 B' d_2 \ddot{v}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{w}_0) - K_2 ((k_1 A')^2 d_{11} \ddot{\theta} + (k_2 B')^2 d_{22} \ddot{\theta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi : & - X_{13} d_1 u_0 - X_{23} d_2 v_0 + Y_{13} d_{11} w_0 + Y_{23} d_{22} w_0 + (k_1 (A_{55}^s - Y_{13}^s) + k_2 (A_{44}^s - Y_{23}^s)) \theta + A_{55}^s d_{11} \varphi_z + A_{44}^s d_{22} \varphi_z \\ & - Z_{33} \varphi_z = J_0 \ddot{w}_0 + K_0 \ddot{\varphi}_z \end{aligned}$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{IV.21})$$

IV.3. Procédure analytique de Navier

La procédure de Navier est utilisée pour définir les solutions analytiques des équations différentielles (Eq. IV.20) pour laquelle les variables de déplacement satisfaisant les conditions aux limites peuvent être supposées sur la base de séries de Fourier comme suit

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ X_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ \Phi_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (IV.22)$$

Où $(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, \Phi_{mn})$ sont des paramètres inconnues à déterminer et ω est la fréquence fondamentale. α et β sont exprimés par

$$\alpha = m\pi/a \text{ et } \beta = n\pi/b \quad (IV.23)$$

Après substitution de l'équation (IV.22) dans les équations de mouvement (IV.20), le système d'équations des valeurs propres suivant est obtenu pour le problème de vibration libre des plaques FGM

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & 0 \\ 0 & 0 & m_{35} & 0 & m_{55} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ \Phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (IV.24)$$

Pour lequel

$$\begin{aligned} s_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}, \quad s_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \quad s_{13} = -\alpha^3 B_{11} - \alpha\beta^2(B_{12} + 2B_{66}) \\ s_{14} &= -\alpha(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) + \alpha\beta^2 B_{66}^s(k_1 A' + k_2 B'), \quad s_{15} = \alpha X_{13}, \quad s_{22} = \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22} \\ s_{23} &= -\alpha^2 \beta(B_{12} + 2B_{66}) - \beta^3 B_{22}, \quad s_{24} = -\beta(k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) + \alpha^2 \beta(k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \\ s_{25} &= -\beta X_{23}, \quad s_{33} = \alpha^4 D_{11} + \beta^4 D_{22} + 2\alpha^2 \beta^2 (D_{12} + 2D_{66}) + K_w + K_s (\alpha^2 + \beta^2) \\ s_{34} &= \alpha^2 k_1 D_{11}^s + (k_2 \alpha^2 + k_1 \beta^2) D_{12}^s + \beta^2 k_2 D_{22}^s - 2\alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \\ s_{35} &= \alpha^2 Y_{13} + \beta^2 Y_{23} \\ s_{44} &= k_1^2 H_{11}^s + k_2^2 H_{22}^s + 2k_1 k_2 H_{12}^s + \alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s + \alpha^2 (k_1 A')^2 A_{55}^s + \beta^2 (k_2 B')^2 A_{44}^s \\ s_{45} &= k_1 Y_{13}^s + k_2 Y_{23}^s + \alpha^2 k_1 A' A_{55}^s + \beta^2 k_2 B' A_{44}^s, \quad s_{55} = \alpha^2 A_{55}^s + \beta^2 A_{44}^s + Z_{33} \\ m_{11} &= m_{22} = I_0, \quad m_{12} = m_{15} = m_{25} = m_{45} = 0 \quad m_{13} = -\alpha I_1, \quad m_{14} = \alpha k_1 A' J_1, \end{aligned} \quad (IV.25)$$

Chapitre IV Etude Analytique de l'influence de la déformation normale sur la vibration libre des plaques FGM

$$m_{23} = -\beta I_1, \quad m_{24} = \beta k_2 B' J_1, \quad m_{33} = I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2), \quad m_{34} = -J_2(k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2)$$

$$m_{44} = K_2((k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2), \quad m_{35} = J_0, \quad m_{55} = K_0$$

IV.4. Analyse vibratoire des différents types de plaques

Afin de vérifier l'exactitude de la théorie proposée dans l'étude de la vibration libre des plaques FG simplement appuyées et des plaques reposant sur une fondation élastique, plusieurs exemples numériques sont proposés et comparés aux résultats de diverses théories de déformation par cisaillement en 2D, 3D et quasi-3D. Les caractéristiques mécaniques du métal et de la céramique utilisées dans les plaques FG sont énumérées dans le tableau IV.1.

Tableau IV.1. Propriétés des matériaux utilisées dans les plaques FGM

Matériaux	Propriétés		
	Module de Young (GPa)	Coefficient de Poisson	Masse volumique (kg/m ³)
Aluminium (Al)	70	0.3	2702
Alumine (Al ₂ O ₃)	380	0.3	3800
Zirconium (ZrO ₂)	200	0.3	5700

Pour avoir des résultats plus simples, les expressions adimensionnelles suivantes ont été utilisées pour calculer les différentes fréquences naturelles et les paramètres de fondation

- Pour les plaques isotropes

$$\hat{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_0} \quad \text{où} \quad D_0 = E_c h^3 / [12(1 - \nu^2)] \quad (\text{IV.26a})$$

- Pour les plaques FGM

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}, \quad \beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}, \quad \tilde{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_m / E_m},$$

$$\bar{\beta} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_c / E_c} \quad (\text{IV.26b})$$

- Pour les paramètres de fondation

$$\bar{k}_w = k_w a^4 / \bar{D}, \quad \bar{k}_s = k_s a^2 / \bar{D}, \quad \text{avec} \quad (\text{IV.26c})$$

$$\bar{D} = h^3 / 12(1 - \nu^2) [p(8 + 3p + p^2)E_m + 3(2 + p + p^2)E_c] / [(1 + p)(2 + p)(3 + p)]$$

Chapitre IV Etude Analytique de l'influence de la déformation normale sur la vibration libre des plaques FGM

Tableau IV.2. Fréquences fondamentales adimensionnelles $\hat{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h/D_0}$ des plaques carrées isotropes simplement appuyées.

a/h	Théorie	Mode							
		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	(3,1)	(2,3)	(3,2)
1000	Leissa (1973)	19.7392	49.3480	49.3480	78.9568	98.6960	98.6960	128.3021	128.3021
	Zhou et al. (2002)	19.7115	49.3470	49.3470	78.9528	98.6911	98.6911	128.3048	128.3048
	Mantari (2015a)	19.7405	49.3486	49.3486	78.9580	98.6967	98.6967	128.3049	128.3049
	Meftah et al. (2017)	19.7391	49.3476	49.3476	78.9557	98.6943	98.6943	128.3019	128.3019
	Présente (2D)	19.7391	49.3476	49.3476	78.9557	98.6942	98.6942	128.3018	128.3018
	Présente (quasi-3D)	19.7712	49.4278	49.4278	79.0841	98.8548	98.8548	128.5106	128.5106
100	Liu et Liew (1999)	19.7319	49.3027	49.3027	78.8410	98.5150	98.5150	127.9993	127.9993
	Nagino et al. (2008)	19.7320	49.3050	49.3050	78.8460	98.5250	98.5250	128.0100	128.0100
	Mantari (2015a)	19.7332	49.3086	49.3086	78.8550	98.5365	98.5365	128.0346	128.0346
	Meftah et al. (2017)	19.7321	49.3040	49.3040	78.8442	98.5202	98.5202	128.0080	128.0080
	Présente (2D)	19.7320	49.3032	49.3032	78.8422	98.5171	98.5171	128.0028	128.0028
	Présente (quasi-3D)	19.7644	49.3853	49.3853	78.9754	98.6850	98.6850	128.2239	128.2239
10	Liu et Liew (1999)	19.0584	45.4478	45.4478	69.7167	84.9264	84.9264	106.5154	106.5154
	Nagino et al. (2008)	19.0653	45.4869	45.4869	69.8093	85.0646	85.0646	106.7350	106.7350
	Mantari (2015a)	19.1190	45.7339	45.7339	70.3148	85.7622	85.7622	107.7376	107.7376
	Meftah et al. (2017)	19.0775	45.5548	45.5548	69.9664	85.2958	85.2958	107.0953	107.0953
	Présente (2D)	19.0661	45.4917	45.4917	69.8213	85.0829	85.0829	106.7652	106.7652
	Présente (quasi-3D)	19.1248	45.7152	45.7152	70.2709	85.7067	85.7067	107.6744	107.6744
5	Shufrin et Eisenberger (2005)	17.4524	38.1884	38.1884	55.2539	65.313	65.3130	78.9864	78.9864
	Hosseini et al. (2011)	17.4523	38.1883	38.1883	55.2543	65.3135	65.3135	78.9865	78.9865
	Mantari (2015a)	17.5899	38.6582	38.6582	56.0674	66.3474	66.3474	80.3365	80.3365
	Meftah et al. (2017)	17.4916	38.3701	38.3701	55.6322	65.8425	65.8425	79.7662	79.7662
	Présente (2D)	17.4553	38.2052	38.2052	55.2943	65.3731	65.3731	79.0812	79.0812
	Présente (quasi-3D)	17.5677	38.6161	38.6161	56.0407	66.3436	66.3436	80.3785	80.3785

IV.4.1. Analyse des plaques isotropes

Dans cette partie de l'étude, des plaques isotropes homogènes simplement supportées sont choisies pour étudier l'efficacité du modèle actuel. Comme indiqué dans le tableau IV.2, les huit premières fréquences fondamentales adimensionnelles sont calculées et comparées aux résultats rapportés par les solutions 3D exactes de Leissa (1973), Zhou et al. (2002), Nagino et al. (2008), les résultats de la FSDT obtenus par la méthode différentielle des éléments en quadrature (DQM) de Liu et Liew (1999) et les HSDT de Shufrin et Eisenberger (2005), Hosseini-Hashemi et al. (2011), Mantari (2015a) et Meftah et al. (2017). Il ressort de ces résultats que les calculs basés sur la théorie 2D actuelle présentent une excellente concordance avec ceux prévus par les autres théories de Leissa (1973) et Meftah et al. (2017) pour le rapport d'épaisseur $a/h = 1000$ et présentent une bonne corrélation avec ceux prévus par Nagino et al. (2008), Liu et Liew (1999) et Meftah et al. (2017) pour le rapport géométrique $a/h = 100$. Pour les résultats de la présente théorie quasi-3D, ils sont très

Chapitre IV Etude Analytique de l'influence de la déformation normale sur la vibration libre des plaques FGM

proches des résultats donnés par Mantari (2015a) basés sur un HSDT quasi-3D pour tous les modes de vibration.

Tableau IV.3. Fréquences fondamentales adimensionnelles $\hat{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_0}$ des plaques carrées isotropes sur des fondations élastiques ($h/b = 0.2$).

\bar{k}_w^a	\bar{k}_s^a	$\hat{\omega}_{11}$			$\hat{\omega}_{12}$			$\hat{\omega}_{13}$		
		Thai et Choi (2012)	Présente (2D)	Présente (Quasi-3D)	Thai et Choi (2012)	Présente (2D)	Présente (Quasi-3D)	Thai et Choi (2012)	Présente (2D)	Présente (Quasi-3D)
0	0	17.4523	17.4553	17.5677	38.1883	38.2052	38.6161	65.3135	65.3731	66.3436
10		17.7248	17.7274	17.8261	38.3098	38.3270	38.7262	65.3841	65.4434	66.4043
10^2		20.0076	20.0098	19.9988	39.3895	39.4058	39.7020	66.0138	66.0725	66.9471
10^3		35.5039	35.5050	34.8113	48.8772	48.8888	48.2800	72.0036	72.0541	72.0778
10^4		45.5255	45.5260	45.5260	71.9829	71.9829	71.9829	101.7990	101.7992	101.7992
10^5		45.5255	45.5260	45.5260	71.9829	71.9829	71.9829	101.7990	101.7992	101.7992
0	10	22.2145	22.2166	22.1062	43.7943	43.8085	43.6871	71.9198	71.9711	72.0070
10		22.4286	22.4309	22.3111	43.9009	43.9146	43.7831	71.9839	72.0347	72.0613
10^2		24.2723	24.2741	24.0743	44.8445	24.2741	44.6367	72.5554	72.6052	72.5474
10^3		38.0650	38.0656	37.2488	53.3580	53.3681	52.3134	78.0290	78.07295	77.1736
10^4		45.5255	45.5260	45.5260	71.9829	71.9829	71.9829	101.7990	101.799	101.799
10^5		45.5255	45.5260	45.5260	71.9829	71.9829	71.9829	101.7990	101.799	101.799

$${}^a \bar{k}_w = k_w a^4 / D_0, \bar{k}_s = k_s a^2 / D_0 \text{ où } D_0 = E_t h^3 / 12 (1 - \nu^2)$$

Une autre comparaison qui a été faite pour évaluer l'efficacité des résultats actuels est présentée dans le tableau IV.3 pour une plaque carrée isotrope reposant sur une fondation élastique. Les trois premières fréquences naturelles adimensionnelles d'une plaque carrée pour différentes valeurs de paramètres de fondation sont calculées et comparées avec des solutions bidimensionnelles obtenues par Thai et Choi (2012). On peut conclure du tableau qu'un bon accord est obtenu entre les résultats de la théorie 2D actuelle et ceux de la HSDT 2D de Thai et Choi (2012).

IV.4.2. Investigation sur des plaques FGM simplement appuyées

Dans cette section, deux types de plaques FG (Al/Al_2O_3 et Al/ZrO_2) sont examinés (voir les propriétés mécaniques dans le tableau IV.1) pour discuter de la précision de la théorie proposée dans la prévision de vibration libre des plaques FG simplement appuyées.

Les résultats présentés dans les tableaux IV.4 et IV.5 sont établis pour des plaques FG type Al/Al_2O_3 sur des appuis simples. Dans le tableau IV.4, les fréquences fondamentales adimensionnelles pour différentes valeurs de rapport de forme (b/a), de rapport géométrique

Chapitre IV Etude Analytique de l'influence de la déformation normale sur la vibration libre des plaques FGM

(a/h) et d'exposant matériel (p) sont calculées et comparées à la solution 3D exacte proposée par Jin et al. (2014) et à la théorie raffinée présentée par Mantari (2015a). Un bon accord est trouvé pour tous les cas en allant des plaques minces aux plaques épaisses.

Tableau IV.4. Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m} \text{ des plaques FGM } Al / Al_2O_3.$$

b/a	a/h	p	Théorie			
			Jin et al. (2014)	Mantari (2015a)	Présente (2D)	Présente (Quasi-3D)
1	10	0	0.1135	0.1137	0.1134	0.1137
		1	0.0870	0.0883	0.0868	0.0883
		2	0.0789	0.0806	0.0788	0.0807
		5	0.0741	0.0756	0.0740	0.0756
	5	0	0.4169	0.4183	0.4151	0.4178
		1	0.3222	0.3271	0.3205	0.3267
		2	0.2905	0.2965	0.2892	0.2968
		5	0.2676	0.2726	0.2665	0.2725
	2	0	1.8470	1.8543	1.8287	1.8583
		1	1.4687	1.4803	1.4467	1.4830
		2	1.3095	1.3224	1.2901	1.3269
		5	1.1450	1.1565	1.1310	1.1576
2	10	0	0.0719	0.0719	0.0717	0.0719
		1	0.0550	0.0558	0.0549	0.0558
		2	0.0499	0.0510	0.0498	0.0511
		5	0.0471	0.0480	0.0470	0.0480
	5	0	0.2713	0.2721	0.2705	0.2718
		1	0.2088	0.2121	0.2081	0.2119
		2	0.1888	0.1928	0.1882	0.1930
		5	0.1754	0.1789	0.1749	0.1788
	2	0	0.9570	1.3075	1.2914	1.3086
		1	0.7937	1.0371	1.0140	1.0378
		2	0.7149	0.9297	0.9069	0.9322
		5	0.6168	0.8248	0.8062	0.8250

Dans le tableau IV.5, une comparaison des trois premières fréquences naturelles adimensionnelles des plaques FG pour différentes valeurs du paramètre (p) est réalisée, avec la HSDT trigonométrique 2D présentée par Hosseini-Hashemi et al. (2010) et les HSDT quasi-3D données par Belabed et al. (2014) et Abulnour et al. (2018). On peut voir que la théorie quasi-3D proposée donne des résultats identiques à ceux de la théorie de la déformation sinusoidale en cisaillement Quasi-3D développée par Abulnour et al. (2018) et les résultats de la HSDT 2D proposée concordent très bien avec ceux rapportés par Hosseini-Hashemi et al. (2010) basant sur une HSDT trigonométrique 2D. Il est également remarquable que les résultats montrent que les HSDT 2D et quasi-3D ont des résultats presque identiques pour les plaques minces. Cependant, pour les plaques épaisses et modérément épaisses, les études comparatives ont montré que les théories quasi-3D, qui tiennent en compte des effets

Chapitre IV Etude Analytique de l'influence de la déformation normale sur la vibration libre des plaques FGM

d'étirement, peuvent prédire les fréquences naturelles avec plus de précision que les autres HSDT. Il est donc pertinent de conclure que l'étirement de l'épaisseur joue un rôle important sur le comportement des plaques FG modérément épaisses et épaisses.

Tableau IV.5. Trois premières fréquences fondamentales adimensionnelles $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ des plaques FGM Al / Al_2O_3 carrées simplement appuyées.

a/h	Mode N°. (m, n)	Source	ε_z	p				
				0	0.5	1	4	10
5	1 (1,1)	Hosseini et al. (2010)	= 0	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Belabed et al. (2014)	≠ 0	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
		Abulnour et al. (2018)	≠ 0	0.2126	0.1829	0.1663	0.1411	0.1320
		Présente (2D)	= 0	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1300
		Présente (quasi-3D)	≠ 0	0.2126	0.1829	0.1663	0.1411	0.1320
	2 (1,2)	Hosseini et al. (2010)	= 0	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		Belabed et al. (2014)	≠ 0	0.4659	0.4041	0.3676	0.3047	0.2811
		Abulnour et al. (2018)	≠ 0	0.4674	0.4052	0.3687	0.3052	0.2817
		Présente (2D)	= 0	0.4624	0.3990	0.3608	0.2977	0.2770
		Présente (quasi-3D)	≠ 0	0.4674	0.4052	0.3687	0.3052	0.2817
	3 (2,2)	Hosseini et al. (2010)	= 0	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		Belabed et al. (2014)	≠ 0	0.6757	0.5890	0.5362	0.4381	0.4008
		Abulnour et al. (2018)	≠ 0	0.6783	0.5911	0.5381	0.4389	0.4018
		Présente (2D)	= 0	0.6693	0.5806	0.5257	0.4280	0.3948
		Présente (quasi-3D)	≠ 0	0.6783	0.5911	0.5381	0.4389	0.4018
10	1 (1,1)	Hosseini et al. (2010)	= 0	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		Belabed et al. (2014)	≠ 0	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
		Abulnour et al. (2018)	≠ 0	0.0579	0.0495	0.0450	0.0390	0.0369
		Présente (2D)	= 0	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		Présente (quasi-3D)	≠ 0	0.0579	0.0495	0.0450	0.0390	0.0369
	2 (1,2)	Hosseini et al. (2010)	= 0	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		Belabed et al. (2014)	≠ 0	0.1381	0.1184	0.1077	0.0923	0.0868
		Abulnour et al. (2018)	≠ 0	0.1383	0.1186	0.1078	0.0924	0.0868
		Présente (2D)	= 0	0.1377	0.1174	0.1059	0.0902	0.0856
		Présente (quasi-3D)	≠ 0	0.1383	0.1186	0.1078	0.0924	0.0868
	3 (2,2)	Hosseini et al. (2010)	= 0	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Belabed et al. (2014)	≠ 0	0.2121	0.1825	0.1659	0.1409	0.1318
		Abulnour et al. (2018)	≠ 0	0.2126	0.1829	0.1663	0.1411	0.1320
		Présente (2D)	= 0	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1300
		Présente (quasi-3D)	≠ 0	0.2126	0.1829	0.1663	0.1411	0.1320
20	1 (1,1)	Hosseini et al. (2010)	= 0	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Belabed et al. (2014)	≠ 0	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095
		Abulnour et al. (2018)	≠ 0	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095
		Présente (2D)	= 0	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Présente (quasi-3D)	≠ 0	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095

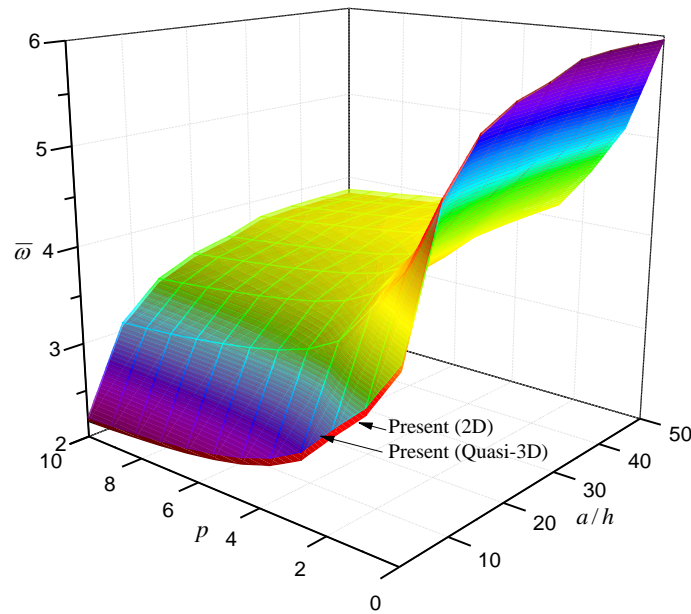


Figure IV.3. Effet de l'indice de puissance (p) et du rapport géométrique (a/h) sur la variation des fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\beta} = (\omega a^2/h) \sqrt{\rho_c/E_c}$ des plaques FG Al/Al_2O_3 simplement appuyées.

La figure IV.3 présente un diagramme d'interaction 3D de l'indice de puissance (p), du rapport géométrique (a/h) et de la fréquence fondamentale en utilisant les théories 2D et quasi-3D proposées. On peut voir sur cette figure que les fréquences naturelles diminuent avec l'augmentation de l'indice de puissance. Cela est dû au fait qu'une valeur plus élevée de correspond à une valeur plus faible de la fraction volumique de la phase céramique, et fait donc que les plaques deviennent plus fragiles. Il a été également observé que pour une valeur donnée de (p), la fréquence propre augmente avec l'augmentation du rapport (a/h). Pour des valeurs élevées de l'indice de gradient et le même rapport (a/h), la fréquence propre ne change pas trop. Les fréquences naturelles calculées à partir de la théorie 2D sont inférieures à celles calculées à partir de la théorie quasi-3D.

D'autres exemples sont réalisés pour des plaques FG Al/ZrO_2 simplement appuyées. Le tableau IV.6 montre les fréquences naturelles adimensionnelles pour différents indices de gradient (p) qui sont comparées aux théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur en deux dimensions de Matsunaga (2008), Akavci (2014), Meftah et al. (2017), la

Chapitre IV Etude Analytique de l'influence de la déformation normale sur la vibration libre des plaques FGM

solution tridimensionnelle exacte de Vel et Batra (2004), les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur sinusoïdal et hyperbolique quasi-3D de Neves et al. (2012a, 2012b), les théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur hybride quasi-3D de Mantari et al. (2014b) et Zaoui et al. (2017b). Le tableau confirme que les résultats des modèles 2D et quasi-3D présentés sont en accord avec les résultats des autres théories de déformation en deux et trois dimensions.

Tableau IV.6. Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles

$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ des plaques FGM carrées type Al / ZrO_2 ($a / h = 5$).

Source	ε_z	$p = 2$	$p = 3$	$p = 5$
Vel and Batra (2004)	$\neq 0$	0.2197	0.2211	0.2225
Neves et al. (2012a)	$= 0$	0.2189	0.2202	0.2215
Neves et al. (2012a)	$\neq 0$	0.2198	0.2212	0.2225
Neves et al. (2012b)	$= 0$	0.2191	0.2205	0.2220
Neves et al. (2012b)	$\neq 0$	0.2201	0.2216	0.2230
Matsunaga (2008)	$= 0$	0.2264	0.2270	0.2280
Akavci (2014)	$= 0$	0.2264	0.2269	0.2278
Mantari et al. (2014b)	$\neq 0$	0.2285	0.2290	0.2295
Meftah et al. (2017)	$= 0$	0.2261	0.2266	0.2275
Zaoui et al. (2017b)	$\neq 0$	0.2285	0.2290	0.2295
Présente (2D)	$= 0$	0.2257	0.2262	0.2271
Présente (quasi-3D)	$\neq 0$	0.2290	0.2295	0.2299

Dans le tableau IV.7, les fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques FG sont calculées et comparées avec la théorie tridimensionnelle exacte de Vel et Batra (2004), la théorie de la déformation de cisaillement quasi-3D de Mantari et al. (2014b) et la théorie de la déformation en cisaillement d'ordre supérieur en deux dimensions de Matsunaga (2008), Akavci (2014) et Meftah et al. (2017). Comme il est montré dans le tableau IV.7, les résultats calculés par la théorie proposée sont en bon accord avec les résultats d'autres théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur.

IV.4.3. Analyse des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques

Dans cette section, l'effet des paramètres de fondation élastique sur la réponse en vibratoire libre des plaques FG Al / Al_2O_3 a été étudiée comme il est montré dans les tableaux IV.8 et IV.9. Dans le tableau IV.8, les fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques FG sont présentées pour plusieurs valeurs des paramètres de fondation élastique (\bar{k}_w, \bar{k}_x) , de

Chapitre IV Etude Analytique de l'influence de la déformation normale sur la vibration libre des plaques FGM

rapport épaisseur/longueur (h/a) et la constante de la loi de puissance (p). Les fréquences calculées sont comparées à celles réalisées par Baferani et al. (2011) en utilisant une théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre et celles trouvées par Thai et Choi (2014a) qui ont utilisé une théorie de déformation en cisaillement d'ordre zéro. Ce tableau révèle que les résultats obtenus présentent une excellente concordance avec ceux prédits par Baferani et al. (2011) et Thai et Choi (2014a).

Tableau IV.7. Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles

$$\tilde{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m} \text{ des plaques carrées FGM } Al/ZrO_2 \text{ (m=n=1).}$$

Mode	Source	$p = 0^*$		$p = 1$			$a/h=5$		
		$a/h = \sqrt{10}$	$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 5$
1	Vel and Batra (2004)	4.6582	5.7769	5.4806	5.9609	6.1076	5.4923	5.5285	5.5632
	Matsunaga (2008)	4.6582	5.7769	5.7123	6.1932	6.3390	5.6599	5.6757	5.7020
	Akavci (2014)	4.6569	5.7754	5.7110	6.1924	6.3388	5.6593	5.6718	5.6941
	Mantari et al. (2014b)	4.6601	5.7769	5.7501	6.2365	6.3842	5.7115	5.7246	5.7376
	Meftah et al. (2017)	4.6445	5.7731	5.7039	6.1901	6.3381	5.6522	5.6647	5.6866
	Présente (2D)	4.6246	5.7697	5.6928	6.1867	6.3372	5.6424	5.6564	5.6784
	Présente (quasi-3D)	4.6743	5.7874	5.7626	6.2471	6.3941	5.7242	5.7364	5.7481
2	Vel and Batra (2004)	8.7132	27.5540	14.5580	29.1230	58.2500	14.2780	14.1500	14.0260
	Matsunaga (2008)	8.7132	27.5540	15.3390	30.6850	61.3740	14.9700	14.7420	14.4760
	Akavci (2014)	8.7132	27.5536	15.3408	30.6861	61.3744	14.9718	14.7436	14.4772
	Meftah et al. (2017)	8.7132	27.5536	15.3438	30.6876	61.3751	14.9776	14.7502	14.4830
	Présente (2D)	8.7132	27.5536	15.3438	30.6876	61.3751	14.9776	14.7503	14.4830
	Présente (quasi-3D)	8.7132	27.5536	15.3438	30.6876	61.3751	14.9776	14.7503	14.4830
3	Vel and Batra (2004)	14.4630	46.5030	24.3810	49.0130	98.1450	23.9090	23.6960	23.4940
	Matsunaga (2008)	14.4630	46.5030	25.7760	51.7950	103.7100	25.1400	24.7410	24.2780
	Akavci (2014)	14.7280	46.5741	25.9255	51.8664	103.7404	25.2966	24.9091	24.4606
	Meftah et al. (2017)	14.7280	46.5741	25.9253	51.8662	103.7404	25.2962	24.9087	24.4601
	Présente (2D)	14.7280	46.5741	25.9250	51.8661	103.7402	25.2959	24.9084	24.4595
	Présente (quasi-3D)	16.3009	51.5480	28.5005	57.0066	114.0159	27.7496	27.3429	26.9117
4	Vel and Batra (2004)	24.8300	201.3400	57.6200	212.2200	828.7800	54.6850	53.1790	52.0680
	Matsunaga (2008)	24.8300	201.3400	61.5090	227.2900	888.6000	57.5760	55.2370	53.2880
	Akavci (2014)	25.4268	203.9805	62.8857	231.5235	904.2521	58.9929	56.3726	54.0672
	Meftah et al. (2017)	25.3381	202.9566	62.6150	230.3785	899.5930	58.7874	56.2176	53.9320
	Présente (2D)	25.2396	201.7712	62.3142	229.0867	894.3124	58.6674	56.2318	53.9841
	Présente (quasi-3D)	24.8568	201.3523	61.9209	228.6852	893.9078	58.2909	55.8532	53.5945

$$^* \bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$$

Tableau IV.8. Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m} \text{ des plaques carrées FGM } Al / Al_2O_3 .$$

$(\bar{k}_w, \bar{k}_s)^p$	h/a	Méthode	p				
			0	0.5	1	2	5
(0,0)	0.05	Baferani et al. (2011)	0.0291	0.0249	0.0227	0.0209	0.0197
		Thai et Choi (2014a)	0.0291	0.0246	0.0222	0.0202	0.0191
		Présente (2D)	0.0291	0.0246	0.0222	0.0202	0.0191
		Présente (quasi-3D)	0.0291	0.0248	0.0226	0.0207	0.0195
	0.1	Baferani et al. (2011)	0.1134	0.0975	0.0891	0.0819	0.0767
		Thai et Choi (2014a)	0.1134	0.0963	0.0868	0.0788	0.0740
		Présente (2D)	0.1134	0.0963	0.0868	0.0788	0.0740
		Présente (quasi-3D)	0.1137	0.0972	0.0883	0.0807	0.0756
	0.2	Baferani et al. (2011)	0.4154	0.3606	0.3299	0.3016	0.2765
		Thai et Choi (2014a)	0.4150	0.3551	0.3205	0.2892	0.2667
		Présente (2D)	0.4151	0.3551	0.3205	0.2892	0.2665
		Présente (quasi-3D)	0.4178	0.3593	0.3267	0.2968	0.2725
(0,100)	0.05	Baferani et al. (2011)	0.0406	0.0389	0.0382	0.0380	0.0381
		Thai et Choi (2014a)	0.0406	0.0386	0.0378	0.0374	0.0377
		Présente (2D)	0.0406	0.0386	0.0378	0.0374	0.0377
		Présente (quasi-3D)	0.0406	0.0387	0.0380	0.0376	0.0378
	0.1	Baferani et al. (2011)	0.1599	0.1540	0.1517	0.1508	0.1515
		Thai et Choi (2014a)	0.1597	0.1526	0.1494	0.1478	0.1487
		Présente (2D)	0.1597	0.1526	0.1494	0.1478	0.1487
		Présente (quasi-3D)	0.1594	0.1525	0.1497	0.1483	0.1489
	0.2	Baferani et al. (2011)	0.6080	0.5932	0.5876	0.5861	0.5879
		Thai et Choi (2014a)	0.6075	0.5857	0.5753	0.5694	0.5722
		Présente (2D)	0.6075	0.5857	0.5753	0.5694	0.5722
		Présente (quasi-3D)	0.6015	0.5795	0.5701	0.5652	0.5662
(100,0)	0.05	Baferani et al. (2011)	0.0298	0.0258	0.0238	0.0221	0.0210
		Thai et Choi (2014a)	0.0298	0.0255	0.0233	0.0214	0.0204
		Présente (2D)	0.0298	0.0255	0.0233	0.0214	0.0204
		Présente (quasi-3D)	0.0298	0.0257	0.0236	0.0219	0.0208
	0.1	Baferani et al. (2011)	0.1162	0.1012	0.0933	0.0867	0.0821
		Thai et Choi (2014a)	0.1161	0.0999	0.0910	0.0836	0.0795
		Présente (2D)	0.1162	0.0999	0.0910	0.0836	0.0795
		Présente (quasi-3D)	0.1164	0.1007	0.0924	0.0854	0.0809
	0.2	Baferani et al. (2011)	0.4273	0.3758	0.3476	0.3219	0.2999
		Thai et Choi (2014a)	0.4269	0.3702	0.3381	0.3097	0.2901
		Présente (2D)	0.4269	0.3702	0.3381	0.3097	0.2900
		Présente (quasi-3D)	0.4290	0.3737	0.3433	0.3161	0.2948
(100,100)	0.05	Baferani et al. (2011)	0.0411	0.0395	0.0388	0.0386	0.0388
		Thai et Choi (2014a)	0.0411	0.0392	0.0384	0.0381	0.0384
		Présente (2D)	0.0411	0.0392	0.0384	0.0381	0.0384
		Présente (quasi-3D)	0.0411	0.0393	0.0386	0.0383	0.0385
	0.1	Baferani et al. (2011)	0.1619	0.1563	0.1542	0.1535	0.1543
		Thai et Choi (2014a)	0.1617	0.1549	0.1519	0.1505	0.1515
		Présente (2D)	0.1617	0.1549	0.1519	0.1505	0.1515
		Présente (quasi-3D)	0.1614	0.1548	0.1522	0.1509	0.1517
	0.2	Baferani et al. (2011)	0.6162	0.6026	0.5978	0.5970	0.5993
		Thai et Choi (2014a)	0.6156	0.5950	0.5852	0.5800	0.5834
		Présente (2D)	0.6156	0.5950	0.5852	0.5800	0.5833
		Présente (quasi-3D)	0.6093	0.5884	0.5797	0.5754	0.5770

Chapitre IV Etude Analytique de l'influence de la déformation normale sur la vibration libre des plaques FGM

Le tableau IV.9 montre les fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques rectangulaires avec un rapport de forme (a/b) variant de 0,5 à 2, un indice matériel variant de 0 à 5 et différentes valeurs de (\bar{k}_w, \bar{k}_s) qui sont comparées aux résultats de Hosseini-Hashemi et al. (2010), Akavci (2014), Mantari et al. (2014) et Meftah et al. (2017). A partir de ce tableau, on peut noter qu'une très bonne concordance entre les solutions est observée confirmant la précision de la théorie actuelle dans la prédiction du comportement en vibration libre des plaques FG reposant sur des fondations élastiques.

Tableau IV.9. Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ des plaques carrées FGM Al / Al_2O_3 sur des fondations élastiques ($h/a = 0.15$).

$(\bar{k}_w, \bar{k}_s)^c$	a/b	p	Source						
			Hosseini et al. (2010)	Akavci (2014)	Mantari et al. (2014)	Meftah et al. (2017)	Présente (2D)	Présente (quasi-3D)	
(0,0)	0.5	0	0.08006	0.08018	0.08021	0.08014	0.08007	0.08036	
		0.25	0.07320	0.07335	0.07354	0.07331	0.07326	0.07366	
		1	0.06335	0.06148	0.06238	0.06145	0.06141	0.06248	
		5	0.05379	0.05215	0.05321	0.05213	0.05213	0.05327	
	1	0	0.12480	0.12508	0.12514	0.12497	0.12482	0.12539	
		0.25	0.11354	0.11457	0.11488	0.11449	0.11436	0.11510	
		1	0.09644	0.09613	0.09753	0.09606	0.09596	0.09770	
		5	0.08027	0.08089	0.08253	0.08084	0.08084	0.08262	
	2	0	0.28513	0.28660	0.28682	0.28610	0.28531	0.28755	
		0.25	0.25555	0.26356	0.26437	0.26314	0.26248	0.26499	
		1	0.20592	0.22190	0.22498	0.22157	0.22104	0.22548	
		5	0.16315	0.18232	0.18592	0.18208	0.18202	0.18614	
	(100,10)	0.5	0	0.12870	0.12876	0.12804	0.12874	0.12870	0.12814
			0.25	0.11842	0.11847	0.11790	0.11845	0.11842	0.11800
			1	0.10519	0.10388	0.10388	0.10386	0.10384	0.10395
			5	0.09223	0.09098	0.09118	0.09096	0.09097	0.09121
1		0	0.17020	0.17039	0.16931	0.17032	0.17021	0.16952	
		0.25	0.15599	0.15665	0.15584	0.15659	0.15650	0.15602	
		1	0.13652	0.13592	0.13610	0.13587	0.13581	0.13624	
		5	0.11786	0.11774	0.11825	0.11772	0.11771	0.11831	
2		0	0.32768	0.32890	0.32670	0.32848	0.32782	0.32738	
		0.25	0.29612	0.30270	0.30120	0.30235	0.30180	0.30180	
		1	0.24674	0.25901	0.25992	0.25874	0.25832	0.26038	
		5	0.20359	0.21785	0.21953	0.21766	0.21760	0.21971	

$$^c \bar{k}_w = k_w a^4 / \bar{D}, \bar{k}_s = k_s a^2 / \bar{D}$$

L'effet des paramètres de fondation de Winkler et de Pasternak sur la fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques FG épaisses pour les théories 2D et quasi-3D proposées est également illustré dans la figure IV.4. On peut observer sur cette figure, que la fréquence naturelle augmente lorsque les paramètres de fondation augmentent, et que le coefficient de fondation de Pasternak (\bar{k}_s) a un effet plus significatif sur l'augmentation de la

fréquence naturelle des plaques FG que le coefficient de fondation de Winkler (\bar{k}_w). La faible différence constaté entre les résultats de la théorie de la déformation en cisaillement 2D et quasi-3D proposée est due au fait que la théorie 2D néglige l'effet d'étirement de l'épaisseur.

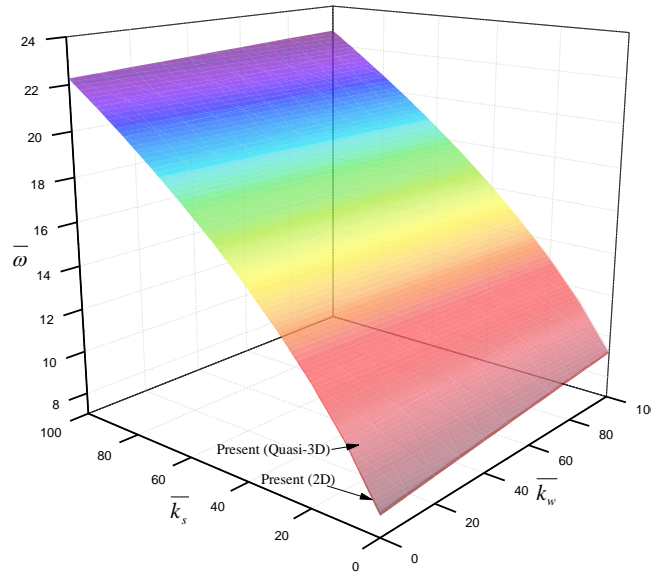


Figure IV.4. Variation des fréquences fondamentales adimensionnelles

$\tilde{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_m / E_m}$ des plaques carrées FG Al / Al_2O_3 en fonction des paramètres de la fondation élastique ($p = 2, a / h = 10$).

Pour illustrer davantage la précision de la présente théorie pour une large gamme de rapports d'épaisseur, différentes valeurs d'indice de gradient et différents cas de paramètres de fondation, la comparaison des variations des fréquences fondamentales adimensionnelles ω calculées par la présente théorie, la théorie 2D de Meftah et al. (2017) et la théorie quasi-3D de Zaoui et al. (2017b) est tracée dans la figure IV.5. Là encore, les résultats obtenus sont presque identiques à ceux de Meftah et al. (2017) et de Zaoui et al. (2017b). Cette figure montre également l'effet décroissant de l'indice matériel et l'effet croissant du rapport géométrique (a/h) et des coefficients de fondation élastique sur les fréquences naturelles.

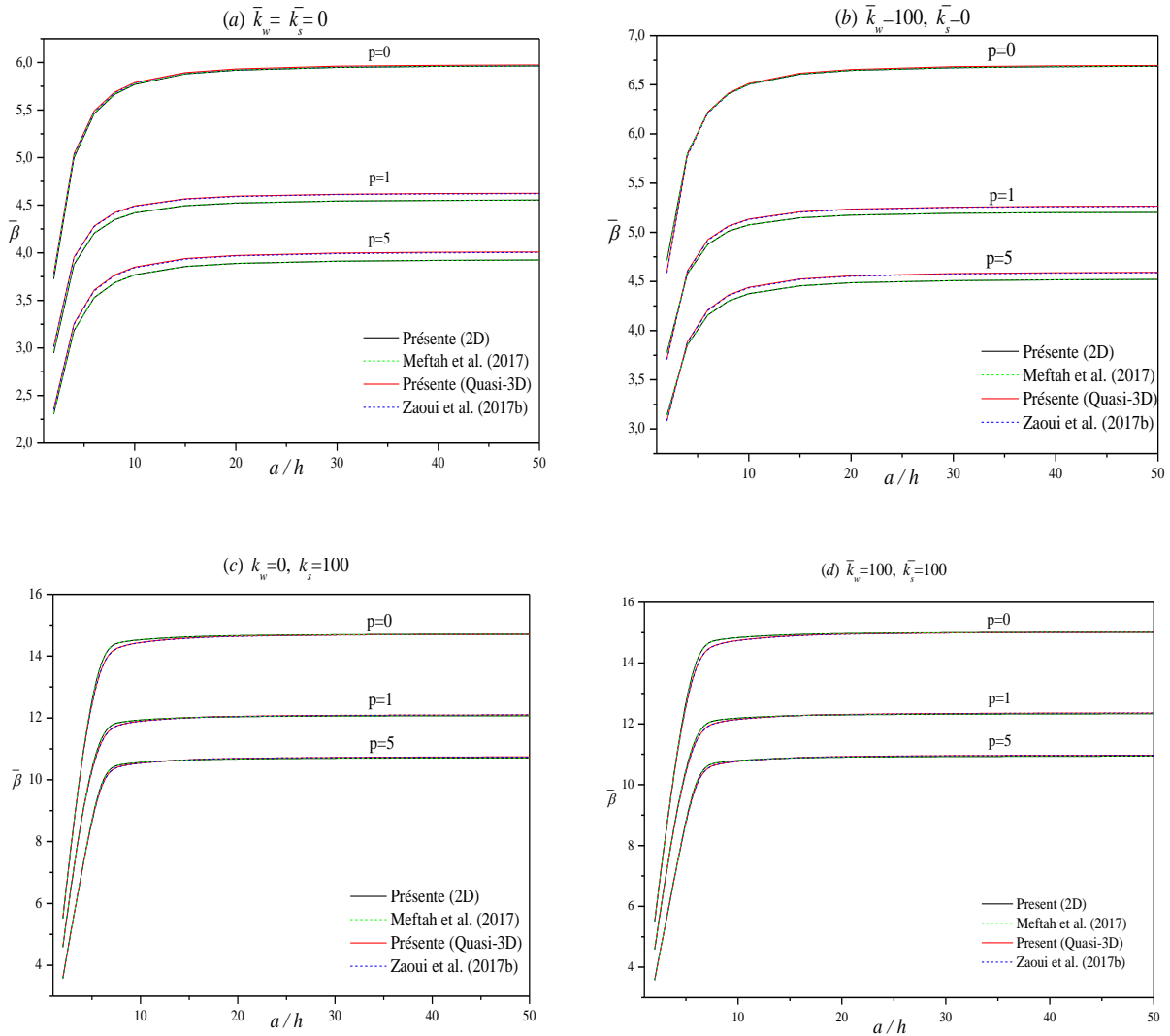


Figure IV.5. Influence de l'indice de puissance (p) et du rapport géométrique (a/h) sur la variation des fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\beta} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_c / E_c}$ des plaques

FG Al / Al_2O_3 sur des fondations élastiques (\bar{k}_w, \bar{k}_s) .

Une vérification supplémentaire a été faite pour des plaques rectangulaires type Al / ZrO_2 comme indiqué dans le tableau IV.10. Dans ce tableau, les fréquences naturelles adimensionnelles prédites par la présente théorie sont calculées pour différentes valeurs de coefficients de fondation élastique (\bar{k}_w, \bar{k}_s) , de rapport (h/a) et d'indice matériel (p). Les résultats obtenus sont comparés avec la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre générée par Hosseini-Hashemi et al. (2010), les théories de déformation de cisaillement 2D proposées par Akavci (2014) et Meftah et al. (2017) et la théorie de déformation de

Chapitre IV Etude Analytique de l'influence de la déformation normale sur la vibration libre des plaques FGM

cisaillement quasi-3D hybride donnée par Zaoui et al. (2017b). Une excellente corrélation entre les résultats est observée dans tous les cas.

Tableau IV.10. Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles

$\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ des plaques rectangulaires FGM Al / ZrO_2 sur des fondations élastiques
($a/b = 1.5$).

$(\bar{k}_w, \bar{k}_s)^c$	h/a	p	Source						
			Hosseini et al. (2010)	Akavci (2014)	Meftah et al. (2017)	Zaoui et al. (2017b)	Présente (2D)	Présente (quasi-3D)	
(0,0)	0.05	0	0.02392	0.02393	0.02392	0.02397	0.02392	0.02397	
		0.25	0.02269	0.02309	0.02308	0.02315	0.02308	0.02315	
		1	0.02156	0.02202	0.02201	0.02220	0.02201	0.02221	
		5	0.02180	0.02244	0.02243	0.02262	0.02243	0.02263	
	0.1	0	0.09188	0.09203	0.09197	0.09224	0.09189	0.09224	
		0.25	0.08603	0.08895	0.08889	0.08925	0.08882	0.08925	
		1	0.08155	0.08489	0.08484	0.08564	0.08477	0.08564	
		5	0.08171	0.08576	0.08570	0.08651	0.08565	0.08652	
	0.2	0	0.32284	0.32472	0.32408	0.32583	0.32309	0.32584	
		0.25	0.31003	0.31531	0.31473	0.31670	0.31381	0.31670	
		1	0.29399	0.30152	0.30097	0.30425	0.30010	0.30425	
		5	0.29099	0.29762	0.29704	0.30053	0.29638	0.30053	
	(250,25)	0.05	0	0.03421	0.03422	0.03421	0.03419	0.03421	0.03420
			0.25	0.03285	0.03312	0.03312	0.03311	0.03312	0.03312
			1	0.03184	0.03214	0.03213	0.03222	0.032137	0.03222
			5	0.03235	0.03277	0.03276	0.03285	0.03277	0.03285
0.1		0	0.13365	0.13375	0.13371	0.13315	0.13372	0.13315	
		0.25	0.12771	0.12959	0.12955	0.12907	0.12957	0.12907	
		1	0.12381	0.12585	0.12581	0.12568	0.12585	0.12568	
		5	0.12533	0.12778	0.12775	0.12764	0.12782	0.12764	
0.2		0	0.49945	0.50044	0.50061	0.49020	0.49957	0.49020	
		0.25	0.48327	0.48594	0.48581	0.47610	0.48514	0.47610	
		1	0.46997	0.47298	0.47208	0.46468	0.47224	0.46468	
		5	0.47400	0.47637	0.47561	0.46880	0.47575	0.46880	

$$^c \bar{k}_w = k_w a^4 / \bar{D}, \bar{k}_s = k_s a^2 / \bar{D}$$

Une autre étude comparative entre la vibration libre des plaques reposant sur une fondation élastique pour différents types FGM est montrée dans la figure IV.6. Un matériau homogène (Al) et deux matériaux fonctionnellement gradués ($Al / Al_2O_3, Al / ZrO_2$) ont été utilisés. Cette figure montre que les plaques fabriquées avec Al / Al_2O_3 ont des valeurs de fréquences naturelles plus élevées que les plaques fabriquées avec Al / ZrO_2 ou un matériau homogène. On remarque également que le paramètre de Pasternak (\bar{k}_s) a un effet plus important sur la fréquence naturelle que le paramètre de Winkler (\bar{k}_w).

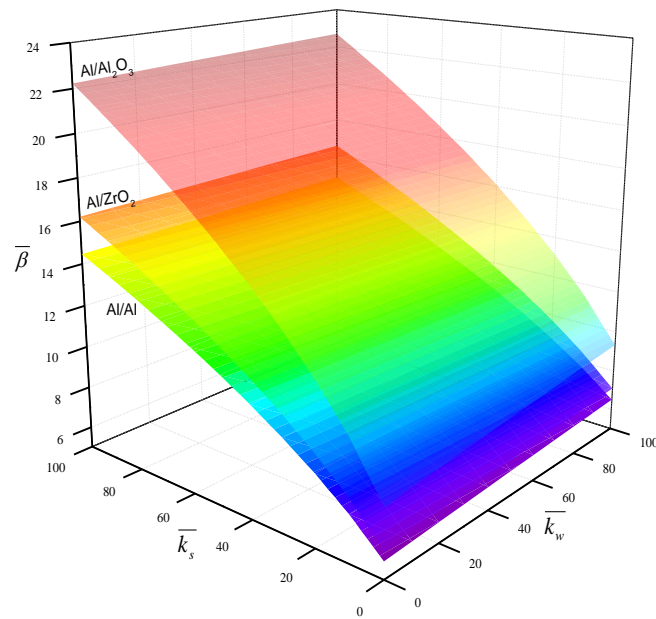


Figure IV.6. Influence des paramètres de la fondation élastique sur l'évolution des fréquences naturelles adimensionnelles $\tilde{\omega} = \omega(a^2/h)\sqrt{\rho_m/E_m}$ pour différentes plaques FG ($p=2, a/h=10$).

IV.5. Conclusion

Le présent travail est concentré sur l'analyse des vibrations libres des plaques FG reposant sur une base élastique en utilisant les nouveaux modèles HSDT 2D et quasi-3D. La théorie est développée en simplifiant davantage les hypothèses des HSDT existantes, avec l'utilisation d'un terme d'intégrale indéterminée. Les équations de mouvement sont obtenues par le principe d'Hamilton. Ces équations sont résolues en utilisant la procédure de Navier, puis les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant le problème des valeurs propres. Pour la nouvelle fonction de forme de contrainte de cisaillement utilisée, les résultats obtenus ont été comparés à ceux rapportés par diverses théories de plaques. Ainsi, la HSDT développée, produit des résultats avec une bonne précision en comparaison avec la FSDT et aux autres HSDT avec un nombre plus élevé d'inconnues. Par conséquent, le présent modèle peut être utilisé comme référence pour vérifier l'efficacité des méthodes numériques approximatives. L'extension de cette étude est également envisagée pour les conditions aux limites générales et les différents types de plaques FG soumises à des charges différentes (mécaniques, thermiques, de flambage, etc.).

Chapitre



Analyse de la réponse dynamique des plaques FGM sous l'effet thermique

Ce chapitre s'intéresse à l'analyse des plaques FGM soumises à des chargements thermiques où les propriétés mécaniques des matériaux constituant la plaque sont dépendantes de la température en utilisant une théorie de déformation d'ordre élevé de second degré.

Sommaire

V.1. Introduction	100
V.2. Développement analytique	100
V.2.1. Géométrie de la plaque FGM	100
V.2.2. Propriétés des matériaux	100
V.2.3. Champs thermiques	101
V.2.3.1. Température uniforme.....	102
V.2.3.2. Température linéaire	102
V.2.3.3. Température non linéaire.....	102
V.2.3.4. Température sinusoïdale	103
V.2.4. Champs des déplacements.....	103
V.2.5. Les équations gouvernantes de la plaque	105
V.2.6. Solutions de Navier.....	107
V.3. Résultats numériques et discussion	108
V.3.1. L'influence des conditions thermiques sur les propriétés matérielles	109
V.3.2. Validation analytique du modèle proposé.....	112
V.3.3. Etude paramétrique	117
V.4. Conclusion	121

V.1. Introduction

L'avantage de l'utilisation de matériaux avancés à gradient fonctionnel (FGM) est qu'ils peuvent survivre dans un environnement à gradient thermique élevé, tout en conservant leur intégrité structurelle. La plupart des études sur les FGM ont été limitées à l'analyse des contraintes thermiques, au flambage thermique, à la mécanique de rupture et à l'optimisation. La structure en FGM les rend appropriée pour certaines applications telles que les coques de réacteurs, les turbines, les structures de bâtiments et de nombreuses autres applications d'ingénierie. Le sujet de l'analyse thermo-élastique des plaques et des coques FGM a continuellement attiré l'attention des chercheurs (Zenkour et Sobhy, 2010).

Dans ce chapitre, le problème concerne l'influence de la température sur le comportement vibratoire des plaques FGM. Une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé à quatre variables seulement va être utilisée pour étudier ce problème. Bien plus important encore, puisque les structures les FGM sont généralement soumises à des conditions de thermiques élevées (20°C-800°C), la dépendance des propriétés des matériaux à la température est prise en compte dans cette étude, ce qui permettra de produire des simulations et des analyses plus concrètes des structures étudiées.

V.2. Développement analytique

V.2.1. Géométrie de la plaque FGM

Considérons une plaque FGM rectangulaire simplement appuyée de longueur (a), de largeur (b), et d'épaisseur (h), comme il est montré dans la figure V.1. La formulation est limitée au comportement élastique linéaire.

V.2.2. Propriétés des matériaux

Dans cette analyse, les propriétés mécaniques des matériaux constituant la plaque FGM sont considérées dépendantes de la température et varient d'une façon continue à travers l'épaisseur selon la loi de puissance (Kim, 2005; Shahrjerdi et al., 2011) exprimées par la formule suivante

$$\Gamma(z, T) = (P_c(T) - P_m(T))V_c + P_m(T) \quad (\text{V.1a})$$

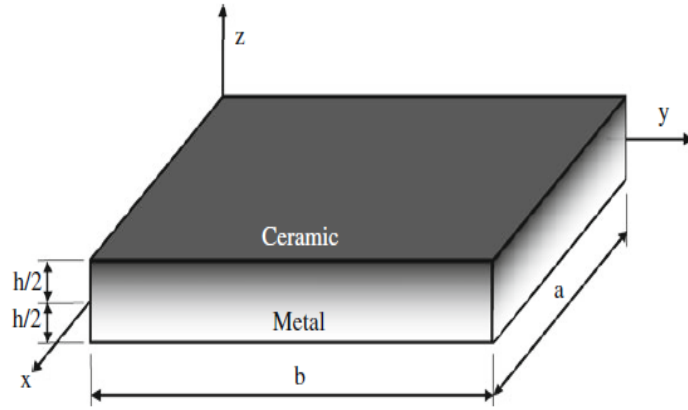


Figure V.1. Géométrie d'une plaque FG rectangulaire.

$$V_c(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (\text{V.1b})$$

Où Γ indique la propriété matérielle effective comme le module de Young E , le coefficient de Poisson ν , la masse volumique ρ et le coefficient de dilatation thermique α de la plaque FG ; de plus les indices m et c renvoient aux plaques entièrement en métal et en céramique, respectivement. V_c présente la fraction volumique de la céramique, où $p \geq 0$ est un indice matériel qui détermine le mélange de la céramique et du métal. Comme on le suppose, les matériaux constitutifs possèdent des propriétés dépendantes de la température qui peuvent être exprimées en fonction de la température comme suit (Reddy et Chin, 1998; Touloukian, 1966)

$$P(T) = P_0 \left(P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right) \quad (\text{V.2})$$

Tel que P indique la propriété matérielle et $T = T_0 + \Delta T(z)$ présente la température de l'environnement; $T_0 = 300(K)$ est la température ambiante ; P_{-1} , P_0 , P_1 , P_2 et P_3 sont les coefficients des propriétés matérielles qui dépendent de la température et ils sont uniques à chaque constituant, et $\Delta T(z)$ est la variation de la température selon la direction de l'épaisseur seulement ; tandis que la conductivité thermique k et le coefficient de poisson ν sont indépendante de la température.

V.2.3. Champs thermiques

Dans ce travail, quatre cas de variation thermique à travers l'épaisseur avec $T = T(z)$ ont été pris en compte.

V.2.3.1. Température uniforme

Dans ce cas, le champ de température uniforme utilisé est donné par

$$T(z) = T_0 + \Delta T(z) \quad (\text{V.3})$$

Où $\Delta T(z)$ montre le changement de la température et $T_0 = 300 \text{ K}$ est la température ambiante.

V.2.3.2. Température linéaire

En supposant que les températures T_b et T_t sont appliquées au niveau des surfaces inférieure et supérieure de la plaque, le champ de température dû à une variation linéaire de la température à travers l'épaisseur est obtenu comme suit

$$T(z) = T_0 + \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{V.4})$$

Où $\Delta T = T_t - T_b$ est le gradient de la température et $T_0 = 300 \text{ K}$ est la température ambiante.

V.2.3.3. Température non linéaire

L'influence de l'évolution non linéaire de la température est prise en compte sur toute l'épaisseur de la plaque. Ce champ de température est défini en résolvant l'équation unidimensionnelle de conduction thermique en régime permanent donnée par l'expression suivante

$$-\frac{d}{dz} \left(k(z) \frac{dT}{dz} \right) = 0 \quad (\text{V.5})$$

Avec les conditions aux limites $T(h/2) = T_t$ et $T(-h/2) = T_b = T_0$. Dans ce cas, un état libre de contrainte est supposé existant à $T_0 = 300 \text{ K}$. Le coefficient de conductivité thermique $k(z)$ est supposé être variable selon la loi de puissance citée dans l'équation (V.1). La solution analytique de l'Eq. (V.5) ci-dessus est donnée par

$$T(z) = T_b - (T_t - T_b) \frac{\int_{-h/2}^z \frac{1}{k(z)} dz}{\int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{k(z)} dz} \quad (\text{V.6})$$

Dans le cas d'une plaque fonctionnellement graduée selon une loi de puissance, la solution de l'équation (V.6) peut être obtenue par le moyen de séries polynomiales (Ebrahimi & Barati, 2016; Javaheri et Eslami, 2002b) comme suit

$$T(z) = T_b + \frac{(T_t - T_b)}{C_{tb}} \left[\left(\frac{2z+h}{2h} \right) - \frac{k_{tb}}{(p+1)k_b} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{p+1} + \frac{k_{tb}^2}{(2p+1)k_b^2} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{2p+1} - \frac{k_{tb}^3}{(3p+1)k_b^3} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{3p+1} + \frac{k_{tb}^4}{(4p+1)k_b^4} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{4p+1} - \frac{k_{tb}^5}{(5p+1)k_b^5} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{5p+1} \right] \quad (V.7)$$

Avec

$$C_{tb} = 1 - \frac{k_{tb}}{(p+1)k_b} + \frac{k_{tb}^2}{(2p+1)k_b^2} - \frac{k_{tb}^3}{(3p+1)k_b^3} + \frac{k_{tb}^4}{(4p+1)k_b^4} - \frac{k_{tb}^5}{(5p+1)k_b^5} \quad (V.8)$$

Où $k_{tb} = k_t - k_b$, avec k_t et k_b sont les conductivités thermiques aux faces supérieure et inférieure de la plaque, respectivement.

V.2.3.4. Température sinusoïdale

Le champ de température sous une variation sinusoïdale à travers l'épaisseur est exprimé par l'équation suivante (Bouazza et al., 2009; Shahrjerdi et al., 2011)

$$T(z) = (T_t - T_b) \left[1 - \cos \left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right] + T_b \quad (V.9)$$

V.2.4. Champs des déplacements

En se basant sur la théorie des plaques d'ordre élevé bidimensionnelle, le champ des déplacements d'un point quelconque de coordonnées (x, y, z) dans la plaque FG s'exprime par

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad (V.10a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad (V.10b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (V.10c)$$

Où u, v et w sont les déplacements dans les directions (x, y, z) . u_0, v_0 et w_0 sont les déplacements d'un point du plan moyen $(x, y, z = 0)$. θ est la rotation de la normale au plan moyen. $f(z)$ qui représente la fonction de forme déterminant la distribution des contraintes et des déformations transversales suivant l'épaisseur est donnée par (Zaoui et al., 2019)

$$f(z) = \frac{\pi h}{\pi^4 + h^4} e^{(hz/\pi)} \left(\pi^2 \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) + h^2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) - \frac{\pi h^3}{\pi^4 + h^4} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{df}{dz} \quad (\text{V.11})$$

Les relations générales des déformations déduites à partir du champ des déplacements de l'équation (V.10) sont comme suit

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{V.12})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix} \quad (\text{V.13a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix}, \quad g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{V.13b})$$

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes en fonction des déformations s'écrivent sous la forme suivante

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{V.14})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$ sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. En utilisant les propriétés matérielles montrées dans l'équation (V.1), les coefficients de rigidité Q_{ij} sont exprimées par

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z, T)}{1 - \nu^2(z, T)}, \quad (\text{V.15a})$$

$$Q_{12} = \nu(z, T)Q_{11}, \quad (\text{V.15b})$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z, T)}{2(1 + \nu(z, T))} \quad (\text{V.15c})$$

V.2.5. Les équations gouvernantes de la plaque

Afin d'obtenir les équations différentielles d'équilibre de la plaque, le principe d'Hamilton (Esmaeilzadeh et Kadkhodayan, 2019; Ghasemi et Meskini, 2019) est utilisé

$$\delta \int_0^t (U_M + U_T - K) dt = 0 \quad (\text{V.16})$$

Où U_M et U_T sont les énergies de déformation dues aux effets mécaniques et thermiques, respectivement. K est l'énergie cinétique.

Les énergies de déformation U_M et U_T sont exprimées par (Li et al., 2009; Reddy, 2004)

$$U_M = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}] dV \quad (\text{V.17})$$

$$U_T = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \sigma_x^T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \sigma_y^T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dV \quad (\text{V.18})$$

Avec

$$\sigma_x^T = -(C_{11} + C_{12})\alpha(z, T)\Delta T(z) \quad \text{et} \quad \sigma_y^T = -(C_{22} + C_{12})\alpha(z, T)\Delta T(z) \quad (\text{V.19})$$

L'énergie cinétique de la plaque est donnée par l'équation ci-dessous

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho(z, T) [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] dV \quad (\text{V.20})$$

En utilisant les équations (V.10), (V.12) et (V.14) et en substituant les équations (V.17), (V.18), (V.20) dans l'Eq. (V.16), les équations de mouvement de la plaque FG sont obtenues comme suit

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & (A_{11} + A_{11}^T)d_{11}u_0 + (A_{66} + A_{22}^T)d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 \\ & - (B_{11} + B_{11}^T)d_{111}w_0 - (B_{12} + 2B_{66} + B_{22}^T)d_{122}w_0 + k_1A'(B_{11}^s + B_{11}^{sT})d_{111}\theta \\ & + (k_2B'B_{12}^s + (k_1A' + k_2B')B_{66}^s + k_1A'B_{22}^{sT})d_{122}\theta = I_0\ddot{u}_0 - I_1d_1\ddot{w}_0 + (k_1A')J_1d_1\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (V.21a)$$

$$\begin{aligned} \delta v_0 : & (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 + (A_{66} + A_{11}^T)d_{11}v_0 + (A_{22} + A_{22}^T)d_{22}v_0 \\ & - (B_{12} + 2B_{66} + B_{11}^T)d_{112}w_0 - (B_{22} + B_{22}^T)d_{222}w_0 + k_2B'(B_{22}^s + B_{22}^{sT})d_{222}\theta \\ & + (k_1A'B_{12}^s + (k_1A' + k_2B')B_{66}^s + k_2B'B_{11}^{sT})d_{112}\theta = I_0\ddot{v}_0 - I_1d_2\ddot{w}_0 + J_1k_2B'd_2\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (V.21b)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & (B_{11} + B_{11}^T)d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66} + B_{22}^T)d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66} + B_{11}^T)d_{112}v_0 \\ & + (B_{22} + B_{22}^T)d_{222}v_0 - (D_{11} + D_{11}^T)d_{1111}w_0 - (2D_{12} + 4D_{66} + D_{11}^T + D_{22}^T)d_{1122}w_0 \\ & - (D_{22} + D_{22}^T)d_{2222}w_0 + A_{11}^Td_{11}w_0 + A_{22}^Td_{22}w_0 + k_1A'(D_{11}^s + D_{11}^{sT})d_{1111}\theta \\ & - (k_1A' + k_2B')(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}\theta + (k_2B'D_{11}^{sT} + k_1A'D_{22}^{sT})d_{1122}\theta \\ & + k_2B'(D_{22}^s + D_{22}^{sT})d_{2222}\theta = I_0\ddot{w}_0 + J_0\ddot{\phi}_z + I_1(d_1\ddot{u}_0 + d_2\ddot{v}_0) - I_2\nabla^2\ddot{w}_0 \\ & + J_2(k_1A'd_{11}\ddot{\theta} + k_2B'd_{22}\ddot{\theta}) \end{aligned} \quad (V.21c)$$

$$\begin{aligned} \delta \theta : & k_1A'(B_{11}^s + B_{11}^{sT})d_{111}u_0 + (k_2B'B_{12}^s + (k_1A' + k_2B')B_{66}^s + k_1A'B_{22}^{sT})d_{122}u_0 \\ & + (k_1A'B_{12}^s + (k_1A' + k_2B')B_{66}^s + k_2B'B_{11}^{sT})d_{112}v_0 + k_2B'(B_{22}^s + B_{22}^{sT})d_{222}v_0 \\ & - k_1A'(D_{11}^s + D_{11}^{sT})d_{1111}w_0 - (k_1A' + k_2B')(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_0 \\ & - (k_2B'D_{11}^{sT} + k_1A'D_{22}^{sT})d_{1122}w_0 - k_2B'(D_{22}^s + D_{22}^{sT})d_{2222}w_0 \\ & - (k_1A')^2(H_{11}^s + H_{11}^{sT})d_{1111}\theta - (2k_1A'k_2B'H_{12}^s + (k_1A' + k_2B')^2H_{66}^s)d_{1122}\theta \\ & - ((k_2B')^2H_{11}^{sT} + (k_1A')^2H_{22}^{sT})d_{1122}\theta - (k_2B')^2(H_{22}^s + H_{22}^{sT})d_{2222}\theta \\ & + (k_1A')^2A_{55}^sd_{11}\theta + (k_2B')^2A_{44}^sd_{22}\theta = -J_1(k_1A'd_1\ddot{u}_0 + k_2B'd_2\ddot{v}_0) \\ & + J_2(k_1A'd_{11}\ddot{w}_0 + k_2B'd_{22}\ddot{w}_0) - K_2((k_1A')^2d_{11}\ddot{\theta} + (k_2B')^2d_{22}\ddot{\theta}) \end{aligned} \quad (V.21d)$$

Où d_{ij} et d_{ijlm} sont des opérateurs différentielles

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (V.22)$$

et les composantes de rigidité sont données par

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} \left(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{V.23a})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (\text{V.23b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{44} [g(z)]^2 dz, \quad (\text{V.23c})$$

$$\begin{Bmatrix} A_{11}^T & B_{11}^T & D_{11}^T & B_{11}^{sT} & D_{11}^{sT} & H_{11}^{sT} \\ A_{22}^T & B_{22}^T & D_{22}^T & B_{22}^{sT} & D_{22}^{sT} & H_{22}^{sT} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(1, z, z^2, f(z), z f(z), f(z)^2 \right) \begin{Bmatrix} \sigma_x^T \\ \sigma_y^T \end{Bmatrix} dz \quad (\text{V.23d})$$

Les inerties sont données par

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(1, z, f, z^2, z f, f^2 \right) \rho(z) dz \quad (\text{V.24})$$

V.2.6. Solutions de Navier

Afin de résoudre le système d'équations (V.21), la méthode de Navier est adoptée pour satisfaire les conditions d'appuis. Ainsi, les solutions analytiques sont exprimées sur la base des séries doubles de Fourier comme présenté ci-dessous

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ \theta_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{V.25})$$

Où U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} et θ_{mn} sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est la fréquence associée au mode (m, n) . λ et μ sont donné par

$$\lambda = m\pi / a \text{ et } \mu = n\pi / b. \quad (\text{V.26})$$

Substituant le champ de déplacement (V.25) dans les équations d'équilibre (V.21), le système d'équations linéaire suivant est obtenu

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.27})$$

Avec

$$\begin{aligned} s_{11} &= -\alpha^2(A_{11} + A_{11}^T) - \lambda^2(A_{66} + A_{22}^T), & s_{12} &= -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}) \\ s_{13} &= \alpha[\alpha^2(B_{11} + B_{11}^T) + \beta^2(B_{12} + 2B_{66} + B_{22}^T)] \\ s_{14} &= -k_1 A' \alpha^3 (B_{11}^s + B_{11}^{sT}) - \alpha\beta^2 (k_2 B' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s + k_1 A' B_{22}^{sT}) \\ s_{22} &= -\alpha^2(A_{66} + A_{11}^T) - \beta^2(A_{22} + A_{22}^T) \\ s_{23} &= \beta [\alpha^2(B_{12} + 2B_{66} + B_{11}^T) + \beta^2(B_{22} + B_{22}^T)] \\ s_{24} &= -\beta [\beta^2 k_2 B' (B_{22}^s + B_{22}^{sT}) + \alpha^2 (k_1 A' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s + k_2 B' B_{11}^{sT})] \\ s_{33} &= -[(D_{11} + D_{11}^T)\alpha^4 + (D_{22} + D_{22}^T)\beta^4 + (2D_{12} + 4D_{66} + D_{22}^T + D_{11}^T)\alpha^2\beta^2 + A_{11}^T\alpha^2 + A_{22}^T\beta^2] \\ s_{34} &= k_1 A' (D_{11}^s + D_{11}^{sT})\alpha^4 - (k_1 A' + k_2 B') (D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + (k_1 A' D_{11}^{sT} + k_2 B' D_{22}^{sT})\alpha^2\beta^2 \\ &\quad + k_2 B' (D_{22}^s + D_{22}^{sT})\beta^4 \\ s_{44} &= -(k_1 A')^2 (H_{11}^s + H_{11}^{sT})\alpha^4 - (2k_1 A' k_2 B' H_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s + (k_2 B')^2 H_{11}^{sT})\alpha^2\beta^2 \\ &\quad - (k_1 A')^2 H_{22}^{sT}\alpha^2\beta^2 - (k_2 B')^2 (H_{22}^s + H_{22}^{sT})\beta^4 - (k_1 A')^2 \alpha^2 A_{55}^s - (k_2 B')^2 \beta^2 A_{44}^s \end{aligned} \quad (\text{V.28})$$

$$m_{11} = m_{22} = I_0, \quad m_{12} = 0, \quad m_{13} = -\alpha I_1, \quad m_{14} = \alpha k_1 A' J_1, \quad m_{23} = -\beta I_1$$

$$m_{24} = \beta k_2 B' J_1, \quad m_{33} = I_0 + I_2 (\alpha^2 + \beta^2), \quad m_{34} = -J_2 (k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2)$$

$$m_{44} = K_2 ((k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2)$$

V.3. Résultats numériques et discussion

Afin d'étudier l'influence du chargement thermique sur le comportement vibratoire des plaques FG simplement appuyées tout en étudiant l'évolution de la fréquence, plusieurs applications numériques ont été réalisés en utilisant la théorie proposée. Deux types de plaques FGM (ZrO₂/Ti-6Al-4V et Si₃N₄/SUS₃₀₄) ont été considéré dans cette étude où leur propriétés mécaniques sont présentées dans le tableau V.1. Les fréquences naturelles ont été calculées par la formule adimensionnelle suivante (Shahrjerdi et al., 2011)

$$\bar{\omega} = \omega(a^2/h) [\rho_b(1-\nu^2)/E_b]^{1/2} \quad (\text{V.29})$$

Où E_b et ρ_b sont à $T_0 = 300(K)$ (Huang et Shen, 2004).

Tableau V.1. Coefficients mécaniques dépendants de la température pour $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ et Si_3N_4/SUS_{304} (Reddy et Chin, 1998)

Matériaux	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3	
E	SUS ₃₀₄	0	201.04e+9	3.079e-3	-6.534e-7	0
	Si ₃ N ₄	0	348.43e+9	-3.070e-4	2.160e-7	-8.946e-11
	Ti-6Al-4V	0	122.56e+9	-4.586e-4	0	0
	ZrO ₂	0	244.27e+9	-1.371e-3	1.214e-6	-3.681e-10
ν	SUS ₃₀₄	0	0.3262	-2.002e-4	3.797e-7	0
	Si ₃ N ₄	0	0.2400	0	0	0
	Ti-6Al-4V	0	0.2888	1.108e-4	0	0
	ZrO ₂	0	0.3330	0	0	0
ρ	SUS ₃₀₄	0	8166	0	0	0
	Si ₃ N ₄	0	2370	0	0	0
	Ti-6Al-4V	0	4429	0	0	0
	ZrO ₂	0	3000	0	0	0
α	SUS ₃₀₄	0	12.330e-6	8.086e-6	0	0
	Si ₃ N ₄	0	5.8723e-6	9.095e-6	0	0
	Ti-6Al-4V	0	7.5788e-6	6.638e-4	-3.147e-6	0
	ZrO ₂	0	12.766e-6	-1.491e-3	1.006e-5	-6.778e-11
k	SUS ₃₀₄	0	12.04	0	0	0
	Si ₃ N ₄	0	9.19	0	0	0
	Ti-6Al-4V	0	7.82	0	0	0
	ZrO ₂	0	1.80	0	0	0

V.3.1. Influence des conditions thermiques sur les propriétés matérielles

Dans cette section, le changement des propriétés mécaniques sous l'influence de différents champs thermiques a été analysé. La température ambiante a été fixée à $T_0 = 300(K)$ pour toute les conditions thermiques. Les conditions thermiques dans le cas d'une température linéaire sont $T_b = T_t = 600(K)$, dans le cas d'une température non linéaire sont $T_b = 0(K)$ et $T_t = 600(K)$, et dans le cas d'une température sinusoïdale sont $T_b = 300(K)$ et $T_t = 500(K)$.

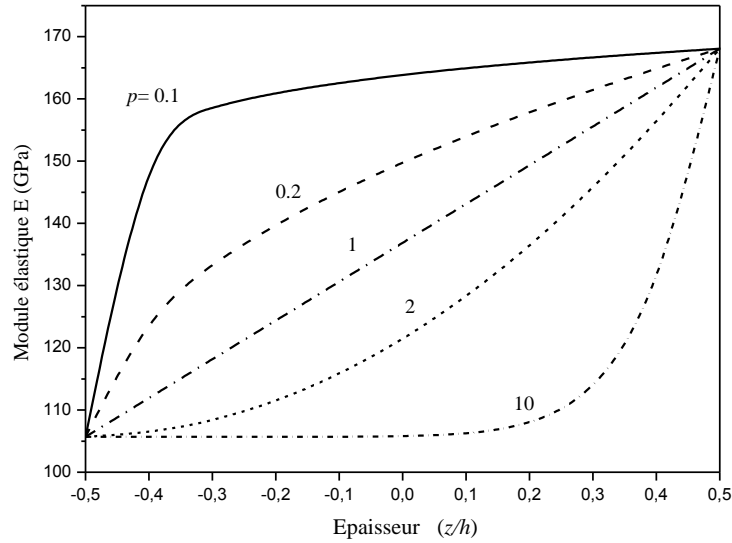


Figure V.2. Variation du module élastique à travers l'épaisseur (z/h) de la plaque FG dans un champ thermique uniforme pour différentes valeurs d'indice de puissance (p).

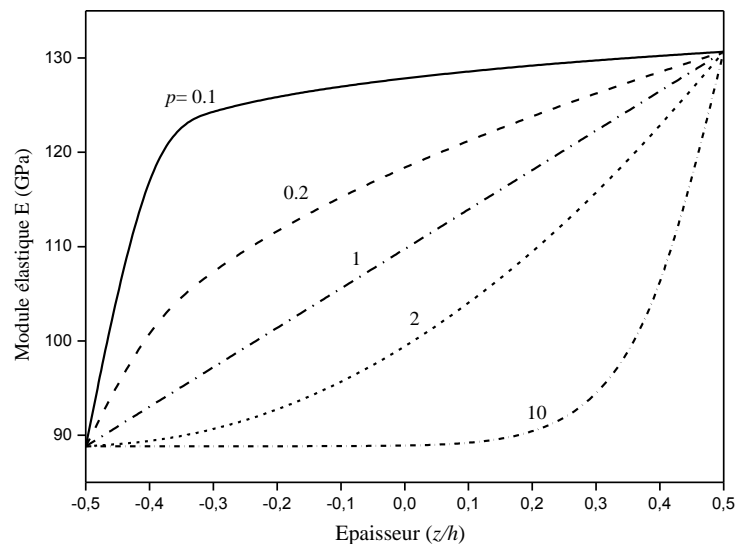


Figure V.3. Variation du module élastique à travers l'épaisseur (z/h) de la plaque FG dans un champ thermique linéaire pour différentes valeurs d'indice de puissance (p).

Les figures V.2 et V.3 montrent la variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque pour différentes valeurs d'indice matériel et sous l'application d'un champ thermique uniforme et linéaire, respectivement. On peut voir que le comportement du module de Young est similaire pour les deux types de température, mais il varie légèrement dans le cas d'une température linéaire. Il est clair aussi que l'augmentation de l'indice matériel p conduit à une réduction du module de Young.

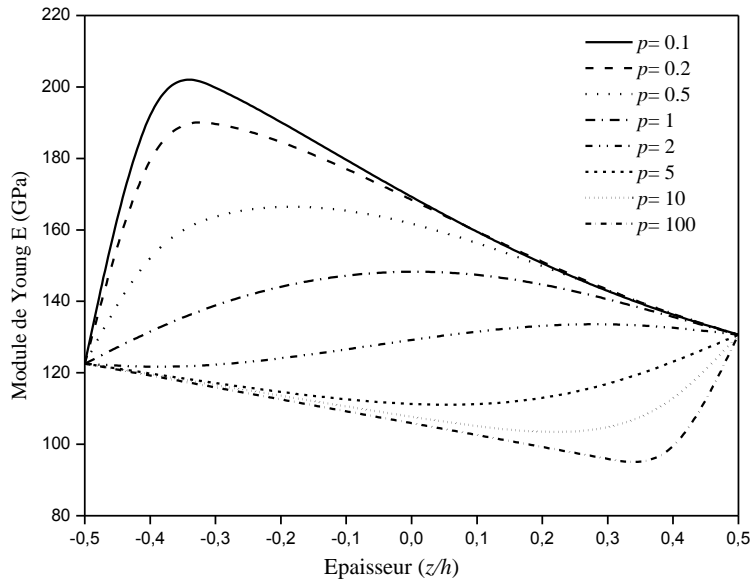


Figure V.4. Variation du module élastique à travers l'épaisseur (z/h) de la plaque FG dans un champ thermique non-linéaire pour différentes valeurs d'indice de puissance (p).

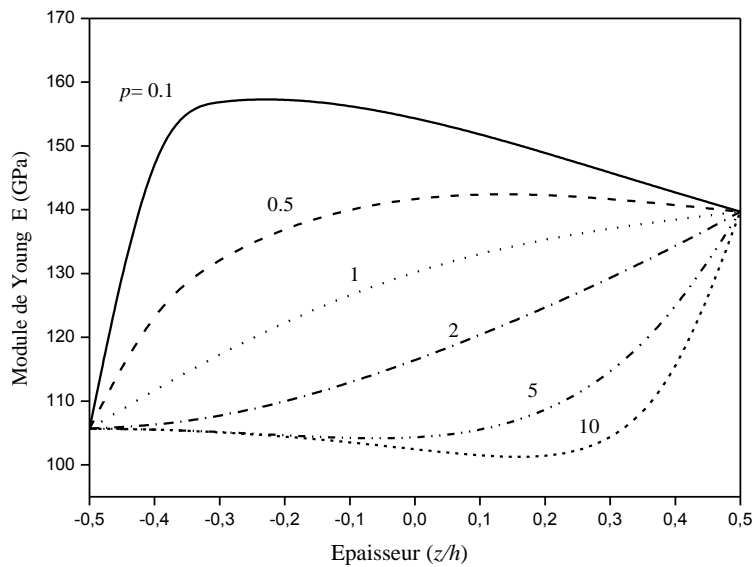


Figure V.5. Variation du module élastique à travers l'épaisseur (z/h) de la plaque FG dans un champ thermique sinusoïdal pour différentes valeurs d'indice de puissance (p).

Pour les chargements thermiques non-linéaire et sinusoïdal, la variation des valeurs du module de Young comme indiqué dans les figures V.4 et V.5 augmente au voisinage de la surface inférieure de plaque FGM puis diminue quand $p \leq 1$. En revanche, elle diminue puis elle s'accroît à proximité de la surface supérieure de la plaque FGM pour les valeurs de $p > 1$. De plus, on peut observer sur les figures V.2 à V.5 que le comportement du module de Young sous une température non linéaire et sinusoïdale est complètement différent comparativement aux autres charges thermiques.

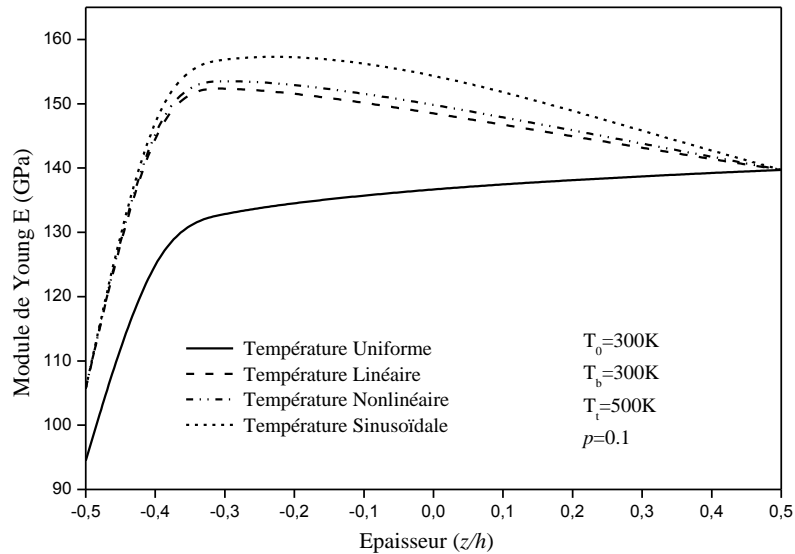


Figure V.6. Comparaison de la variation du module élastique à travers l'épaisseur (z/h) de la plaque FG sous différents chargements thermiques

Dans la figure V.6, une comparaison de la variation du module de Young est réalisée pour les différentes conditions thermiques uniformes, linéaires, non linéaires et sinusoïdales. On peut voir que le module de Young augmente au voisinage de la surface inférieure pour toutes les conditions thermiques puis diminue à travers l'épaisseur sauf dans le cas de la température uniforme. À partir de ces figures, on peut conclure que le comportement du module de Young dans des conditions thermiques uniformes et linéaires est complètement différent à celui dans les cas de température non linéaire et sinusoïdale, ce qui signifie que le type de conditions environnementales affecte considérablement la variation du module d'élasticité.

V.3.2. Validation analytique du modèle proposé

Pour démontrer l'efficacité de la théorie proposée à prévoir la réponse vibratoire des plaques FGM ayant des propriétés matérielles dépendantes et indépendantes de la température, les fréquences naturelles adimensionnelles sont calculées et comparées à celles obtenues à partir de la théorie de déformation de cisaillement du second degré de Shahrjerdi et al. (2011), la théorie d'ordre élevé proposée par Huang et Shen (2004) et de la théorie de déformation de cisaillement à quatre variables présentée par Attia et al. (2015) comme indiqué dans les tableaux V.2 et V.3, respectivement. Les vérifications sont implémentés en supposant les paramètres de conditions suivants: $h = 0.025$ m, $a = b = 0.2$ m.

Tableau V.2. Fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques FG (ZrO₂/Ti-6Al-4V) simplement appuyées sous chargement thermique non linéaire.

Mode (1,1)		$T_b = 300(K)$				
		$T_i = 300(K)$	$T_i = 400(K)$		$T_i = 600(K)$	
			Dépendante de Température	Indépendante de Température	Dépendante de Température	Indépendante de Température
ZrO ₂	SSDT ⁽¹⁾	8.333	7.614	7.892	5.469	6.924
	TSDT ⁽²⁾	8.273	7.868	8.122	6.685	7.686
	SPT ⁽³⁾	8.278	7.808	8.131	6.534	7.826
	EPT ⁽³⁾	8.280	7.809	8.132	6.536	7.828
	Présente	8.281	7.810	8.061	6.536	7.604
$p = 0.5$	SSDT ⁽¹⁾	7.156	6.651	6.844	5.255	6.175
	TSDT ⁽²⁾	7.139	6.876	7.154	6.123	6.776
	SPT ⁽³⁾	7.112	6.782	7.006	5.931	6.789
	EPT ⁽³⁾	7.113	6.783	7.001	5.993	6.772
	Présente	7.113	6.784	6.962	5.933	6.648
$p = 1$	SSDT ⁽¹⁾	6.700	6.281	6.446	5.167	5.904
	TSDT ⁽²⁾	6.657	6.437	6.592	5.819	6.362
	SPT ⁽³⁾	6.657	6.375	6.565	5.665	6.378
	EPT ⁽³⁾	6.658	6.376	6.556	5.668	6.350
	Présente	6.659	6.377	6.531	5.667	6.267
$p = 2$	SSDT ⁽¹⁾	6.333	5.992	6.132	5.139	5.711
	TSDT ⁽²⁾	6.286	6.101	6.238	5.612	6.056
	SPT ⁽³⁾	6.287	6.047	6.208	5.467	6.049
	EPT ⁽³⁾	6.288	6.049	6.194	5.469	6.003
	Présente	6.289	6.049	6.184	5.469	5.968
Ti-6Al-4V	SSDT ⁽¹⁾	5.439	5.103	5.333	4.836	5.115
	TSDT ⁽²⁾	5.400	5.322	5.389	5.118	5.284
	SPT ⁽³⁾	5.403	5.303	5.361	5.132	5.275
	EPT ⁽³⁾	5.404	5.304	5.300	5.133	5.091
	Présente	5.405	5.303	5.362	5.130	5.274

Dans le tableau V.2, une plaque FG en ZrO₂/Ti-6Al-4V a été analysée. Dans cet exemple, le module de Young et le coefficient de dilatation thermique de ces matériaux sont considérés comme dépendant de la température (Shahrjerdi et al. 2011; Huang et Shen, 2004). Cependant, le coefficient de Poisson est supposé constant pour la céramique et le métal. Ce tableau montre que la comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles est effectuée pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance et des charges de conditions thermiques (dépendantes et indépendantes de la température) des plaques FG. Ainsi, les résultats obtenus à l'aide de la présente théorie concordent très bien avec les résultats d'Attia et al. (2015) utilisant diverses théories efficaces de déformation de cisaillement d'ordre

¹ Shahrjerdi et al. (2011)
² Huang and Shen (2004)
³ Attia et al. (2015)

supérieur (TPT, SPT, HPT et EPT), de Shahrjerdi et al. (2011) et de Huang et Shen (2014). Il est à noter que les fréquences adimensionnelles de la plaque FG ayant des propriétés matérielles dépendantes de la température sont supérieures à celle ayant des propriétés matérielles indépendantes de la température.

Tableau V.3. Fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques FG ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS}_3\text{O}_4$) simplement appuyées sous chargement thermique non linéaire.

Mode (1,1)		$T_b = 300(K)$				
		$T_i = 300(K)$	$T_i = 400(K)$		$T_i = 600(K)$	
			Dépendante de Température	Indépendante de Température	Dépendante de Température	Indépendante de Température
Si_3N_4	SSDT ⁽¹⁾	12.506	12.175	12.248	11.461	11.716
	TSDT ⁽²⁾	12.495	12.397	12.382	11.984	12.213
	SPT ⁽³⁾	12.507	12.307	12.378	11.887	12.114
	EPT ⁽³⁾	12.509	12.309	12.380	11.889	12.116
	Présente	12.508	12.308	12.378	11.887	12.114
$p = 0.5$	SSDT ⁽¹⁾	8.652	8.361	8.405	7.708	7.887
	TSDT ⁽²⁾	8.675	8.615	8.641	8.269	8.425
	SPT ⁽³⁾	8.609	8.453	8.499	8.118	8.273
	EPT ⁽³⁾	8.611	8.455	8.500	8.120	8.274
	Présente	8.610	8.454	8.499	8.119	8.273
$p = 1$	SSDT ⁽¹⁾	7.584	7.306	7.342	6.674	6.834
	TSDT ⁽²⁾	7.555	7.474	7.514	7.171	7.305
	SPT ⁽³⁾	7.544	7.399	7.437	7.082	7.218
	EPT ⁽³⁾	7.546	7.401	7.439	7.083	7.219
	Présente	7.545	7.399	7.437	7.082	7.218
$p = 2$	SSDT ⁽¹⁾	6.811	6.545	6.575	5.929	6.077
	TSDT ⁽²⁾	6.777	6.693	6.728	6.398	6.523
	SPT ⁽³⁾	6.770	6.631	6.665	6.323	6.447
	EPT ⁽³⁾	6.772	6.633	6.665	6.324	6.448
	Présente	6.771	6.632	6.665	6.323	6.447
SUS_3O_4	SSDT ⁽¹⁾	5.410	5.161	5.178	4.526	4.682
	TSDT ⁽²⁾	5.405	5.311	5.335	4.971	5.104
	SPT ⁽³⁾	5.410	5.278	5.300	4.945	5.071
	EPT ⁽³⁾	5.411	5.279	5.301	4.946	5.073
	Présente	5.411	5.279	5.300	4.945	5.072

Dans le tableau V.3, les comparaisons ont été réalisées pour une plaque FG type $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS}_3\text{O}_4$. Pour ces matériaux, le coefficient de Poisson est pris égal à 0.28. Les fréquences fondamentales adimensionnelles calculées sont comparées à celles données par Attia et al. (2015), Shahrjerdi et al. (2011) et Huang et Shen (2004) pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance. En conséquence, cette comparaison montre que les résultats

¹ Shahrjerdi et al. (2011)
² Huang and Shen (2004)
³ Attia et al. (2015)

actuels concordent bien avec les résultats existants pour toutes les valeurs de l'indice de la loi de puissance, que ce soit pour les plaques FG dépendantes ou indépendantes de la température (FGP).

Tableau V.4. Cinq premières fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques FG (ZrO₂/Ti-6Al-4V) simplement appuyées sous chargement thermique ($p = 2$) .

Modes (m, n) (ZrO ₂ /Ti-6Al-4V)		$T_b = 300(K)$				
		$T_i = 300(K)$	$T_i = 400(K)$		$T_i = 600(K)$	
			Dépendante de Température	Indépendante de Température	Dépendante de Température	Indépendante de Température
(1,1)	SSDT ⁽¹⁾	6.333	5.992	6.132	5.139	5.711
	TSDT ⁽²⁾	6.286	6.101	6.238	5.612	6.056
	SPT ⁽³⁾	6.287	6.047	6.208	5.467	6.049
	EPT ⁽³⁾	6.288	6.049	6.194	5.469	6.003
	Présente	6.289	6.049	6.184	5.469	5.968
(1,2)	SSDT ⁽¹⁾	14.896	14.383	14.684	13.260	14.253
	TSDT ⁽²⁾	14.625	14.372	14.655	13.611	14.474
	SPT ⁽³⁾	14.666	14.267	14.583	13.416	14.414
	EPT ⁽³⁾	14.672	14.273	14.589	13.421	14.420
	Présente	14.670	14.271	14.558	13.419	14.331
(2,2)	SSDT ⁽¹⁾	22.608	21.942	22.386	20.557	21.935
	TSDT ⁽²⁾	21.978	21.653	22.078	20.652	21.896
	SPT ⁽³⁾	22.127	21.589	22.038	20.494	21.860
	EPT ⁽³⁾	22.140	21.602	22.052	20.507	21.873
	Présente	22.133	21.595	22.014	20.499	21.774
(1,3)	SSDT ⁽¹⁾	27.392	26.630	27.163	25.077	26.700
	TSDT ⁽²⁾	26.454	26.113	26.605	24.961	26.435
	SPT ⁽³⁾	26.711	26.089	26.619	24.845	26.435
	EPT ⁽³⁾	26.731	26.108	26.639	24.865	26.454
	Présente	26.718	26.096	26.595	24.852	26.346
(2,3)	SSDT ⁽¹⁾	34.106	33.211	33.867	31.425	33.384
	TSDT ⁽²⁾	32.659	32.239	32.840	30.904	32.664
	SPT ⁽³⁾	33.121	32.384	33.025	30.933	32.831
	EPT ⁽³⁾	33.151	32.413	33.055	30.964	32.862
	Présente	33.130	32.392	33.000	31.941	32.740

Dans les exemples suivants, les fréquences adimensionnelles pour les cinq premiers modes sont calculées pour des plaques FG ZrO₂/Ti-6Al-4V et Si₃N₄/SUS₃O₄ soumises à un champ de température non-linéaire comme présenté dans les tableaux V.4 et V.5, respectivement. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux donnés par Shahrjerdi et al. (2011), Huang et Shen (2004) et Attia et al. (2015). Il est à constater que les résultats obtenus par la présente théorie sont en bon concordance avec les autres résultats pour différents modes de vibration.

Tableau V.5. Cinq premières fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques FG ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS}_3\text{O}_4$) simplement appuyées sous chargement thermique ($p = 2$).

Modes (m, n) ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS}_3\text{O}_4$)	$T_b = 300(K)$					
	$T_i = 300(K)$	$T_i = 400(K)$		$T_i = 600(K)$		
		Dépendante de Température	Indépendante de Température	Dépendante de Température	Indépendante de Température	
(1,1)	SSDT ⁽¹⁾	6.811	6.445	6.575	5.929	6.077
	TSDT ⁽²⁾	6.777	6.693	6.728	6.398	6.523
	SPT ⁽³⁾	6.770	6.631	6.664	6.323	6.447
	EPT ⁽³⁾	6.770	6.631	6.665	6.325	6.448
	Présente	6.771	6.632	6.665	6.323	6.447
(1,2)	SSDT ⁽¹⁾	16.017	15.708	15.769	15.002	15.262
	TSDT ⁽²⁾	15.809	15.762	15.836	15.384	15.632
	SPT ⁽³⁾	15.814	15.631	15.702	15.231	15.474
	EPT ⁽³⁾	15.820	15.636	15.707	15.237	15.480
	Présente	15.814	15.631	15.702	15.231	15.474
(2,2)	SSDT ⁽¹⁾	24.307	23.958	24.047	23.154	23.517
	TSDT ⁽²⁾	23.806	23.786	23.893	23.327	23.685
	SPT ⁽³⁾	23.879	23.657	23.760	23.173	23.522
	EPT ⁽³⁾	23.893	23.671	23.774	23.187	23.536
	Présente	23.879	23.657	23.761	23.173	23.522
(1,3)	SSDT ⁽¹⁾	29.446	29.071	29.177	28.204	28.632
	TSDT ⁽²⁾	28.687	28.686	28.816	28.185	28.609
	SPT ⁽³⁾	28.839	28.594	28.717	28.057	28.471
	EPT ⁽³⁾	28.860	28.614	28.738	28.078	28.491
	Présente	28.839	28.594	28.717	28.058	28.471
(2,3)	SSDT ⁽¹⁾	36.657	36.247	36.376	35.290	35.809
	TSDT ⁽²⁾	35.466	35.491	35.648	34.918	35.436
	SPT ⁽³⁾	35.782	35.503	35.654	34.893	35.397
	EPT ⁽³⁾	35.814	35.535	35.686	34.925	35.429
	Présente	35.782	35.503	35.654	34.893	35.397

Ainsi, il est clair que le comportement vibratoire de la plaque FG $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS}_3\text{O}_4$ est similaire au comportement de la plaque FG $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$ mais les fréquences naturelles des plaques $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS}_3\text{O}_4$ sont supérieures à celles données par $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$, et cela est expliqué par le fait que le module de Young de Si_3N_4 est supérieur au module de ZrO_2 . Il faut noter aussi que la différence entre les fréquences de $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS}_3\text{O}_4$ et $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$ qui sont obtenues pour la même température et le même mode diminue avec l'augmentation de l'indice matériel (p) car le module de Young de SUS_3O_4 est proche du module de Young de Ti-6Al-4V .

V.3.3. Etude paramétrique

Dans cette partie, l'influence des différents paramètres tels que l'indice matériel, la géométrie de la plaque, le type du champ de la température appliqué et le degré du mode sur la variation des fréquences fondamentales des plaques FGM a été investiguée.

Tableau V.6. Fréquences naturelles adimensionnelles dépendantes de la température d'une plaque FG (ZrO₂/Ti-6Al-4V) simplement appuyée pour différents modes de vibration dans un champ thermique non linéaire.

Mode (m, n) b = a = 0.2, h = 0.025, ν = 0.3		$T_b = 300(K)$				
		$T_i = 300(K)$	$T_i = 400(K)$		$T_i = 600(K)$	
			Dépendante de Température	Indépendante de Température	Dépendante de Température	Indépendante de Température
ZrO ₂	(1,1)	8.281	7.810	8.061	6.536	7.604
	(1,2)	19.348	18.582	19.116	16.847	18.641
	(2,2)	29.225	28.192	28.978	26.009	28.479
	(1,3)	35.301	34.104	34.046	31.640	34.531
p = 0.5	(1,1)	7.118	6.784	6.962	5.933	6.648
	(1,2)	16.635	16.097	16.474	14.906	16.148
	(2,2)	25.144	24.421	24.974	22.913	24.630
	(1,3)	30.383	29.547	30.208	27.844	29.853
p = 1	(1,1)	6.659	6.377	6.531	5.667	6.267
	(1,2)	15.562	15.098	15.426	14.087	15.150
	(2,2)	23.510	22.888	23.366	21.601	23.076
	(1,3)	28.402	27.683	28.253	26.227	27.953
p = 2	(1,1)	6.289	6.049	6.184	5.469	5.968
	(1,2)	14.670	14.271	14.558	13.419	14.331
	(2,2)	22.133	21.595	22.014	20.499	21.774
	(1,3)	26.718	26.096	26.595	24.852	26.346
Ti-6Al-4V	(1,1)	5.405	5.303	5.362	5.130	5.274
	(1,2)	12.628	12.441	12.582	12.093	12.490
	(2,2)	19.074	18.812	19.026	18.309	18.927
	(1,3)	23.040	22.731	22.989	22.134	22.888

Les tableaux V.6 et V.7 présentent les fréquences adimensionnelles calculées pour différents modes de vibration des plaques FGM ZrO₂/Ti-6Al-4V et Si₃N₄/SUS₃O₄ ayant des propriétés matérielles dépendantes de la température, respectivement. L'effet de l'indice de la loi de puissance (p) sur les fréquences peut être constaté en considérant la même valeur de la charge thermique et le même mode. A partir des résultats, on constate que les fréquences réduisent avec l'accroissement de l'indice matériel (p) car le module de Young diminue en allant de la céramique vers le métal. Il est à remarquer aussi que les fréquences aient diminuées en augmentant la différence de température entre les surfaces supérieure et

inférieure pour une même ν et du mode de forme et cela représente l'influence des ch

La comparaison entre les plaques FG dépendantes et indépendantes de la température dans les tableaux V.6 et V.7 révèle que les plus petites fréquences sont trouvées dans les plaques FG dépendantes de la température, ce qui prouve l'importance des propriétés matérielles en fonction de la température.

Tableau V.7. Fréquences naturelles adimensionnelles dépendantes de la température d'une plaque FG ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS}_3\text{O}_4$) simplement appuyée pour différents modes de vibration dans un champ thermique non linéaire.

Mode (m, n)	$T_b = 300 (K)$					
	$T_i = 300(K)$	$T_i = 400 (K)$		$T_i = 600 (K)$		
		Dépendante de Température	Indépendante de Température	Dépendante de Température	Indépendante de Température	
Si_3N_4	(1,1)	12.507	12.307	12.377	11.887	12.114
	(1,2)	29.260	28.964	29.121	28.371	28.843
	(2,2)	44.236	43.853	44.090	43.103	43.796
	(1,3)	53.460	53.024	53.309	52.176	53.005
	(2,3)	66.382	65.310	66.240	64.886	65.906
$p = 0.5$	(1,1)	8.609	8.453	8.498	8.118	8.272
	(1,2)	20.137	19.921	20.020	19.473	19.784
	(2,2)	30.441	30.172	30.318	29.621	30.070
	(1,3)	36.788	36.485	36.661	35.871	36.405
	(2,3)	45.680	45.331	45.547	44.627	45.281
$p = 1$	(1,1)	7.544	7.399	7.437	7.082	7.217
	(1,2)	17.641	17.444	17.528	17.029	17.298
	(2,2)	26.661	26.420	26.542	25.913	26.301
	(1,3)	32.215	31.946	32.092	31.384	31.970
	(2,3)	39.995	39.688	39.867	39.046	39.608
$p = 2$	(1,1)	6.770	6.631	6.664	6.323	6.447
	(1,2)	15.814	15.631	15.702	15.231	15.474
	(2,2)	23.879	23.657	23.760	23.173	23.522
	(1,3)	28.839	28.594	28.717	28.057	28.471
	(2,3)	35.782	35.503	35.654	34.893	35.397
SUS_3O_4	(1,1)	5.410	5.278	5.300	4.945	5.071
	(1,2)	12.657	12.495	12.539	12.054	12.301
	(2,2)	19.135	18.947	19.012	18.407	18.760
	(1,3)	23.126	22.920	22.908	22.320	22.738
	(2,3)	28.715	28.487	28.581	27.803	28.310

Dans l'exemple suivant, les fréquences naturelles sont calculées par la formule adimensionnelle suivante :

$$\bar{\omega} = \omega(b^2 / \pi^2) [I_0 / D_0]^{1/2} \tag{V.30}$$

Tel que $I_0 = \rho h$ et $D_0 = Eh^3/12(1-\nu^2)$

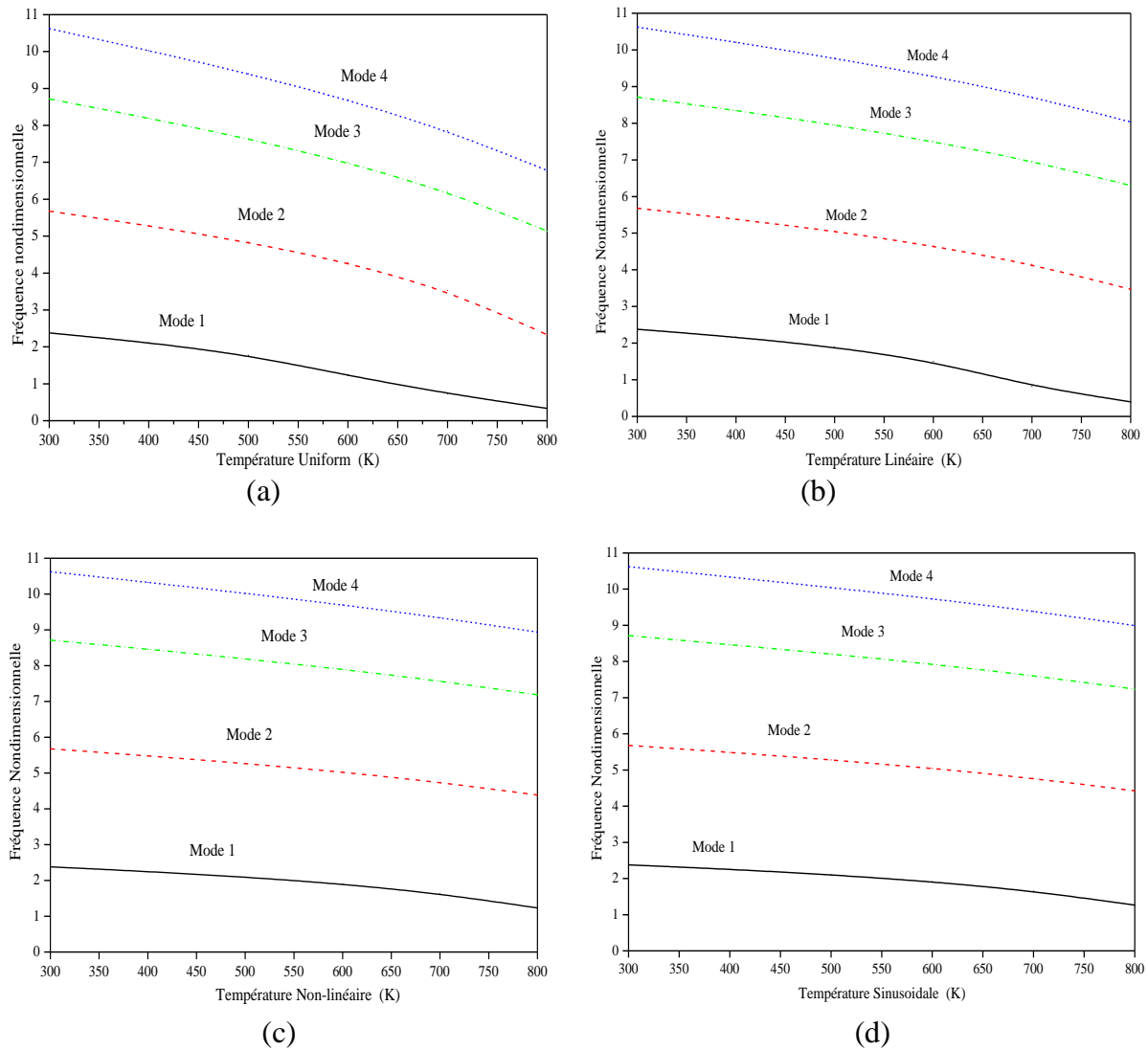


Figure V.7. Fréquences naturelles adimensionnelles des quatre premiers modes pour des plaques FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyées soumises à différents chargements thermiques $a/h = 10$, $a = 0.2$, $p = 1$.

La variation des quatre premières fréquences adimensionnelles des plaques FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) carrées à appuis simples soumises à des charges thermiques uniforme (température ambiante), linéaire, non linéaire et sinusoïdale est représentée sur la figure (V.7 a-d). Les résultats montrent que les fréquences naturelles diminuent avec l'augmentation de la température, ce qui est dû à la diminution du module élastique avec l'augmentation de la température. De plus, la diminution des fréquences dans les modes supérieurs est importante par rapport à celle des modes inférieurs. Pour un même champ de température, la différence entre deux modes supérieurs consécutifs est inférieure à celle de deux modes inférieurs

successifs. Il est évident que l'effet de la distribution de la température dans le cas d'un champ thermique uniforme est plus significatif par rapport aux autres conditions thermiques, ceci peut s'expliquer par le fait que la diminution de la fréquence sous des charges thermiques linéaires, non linéaires et sinusoïdales est presque identique, alors que la diminution de la fréquence est importante dans le cas d'une charge thermique uniforme.

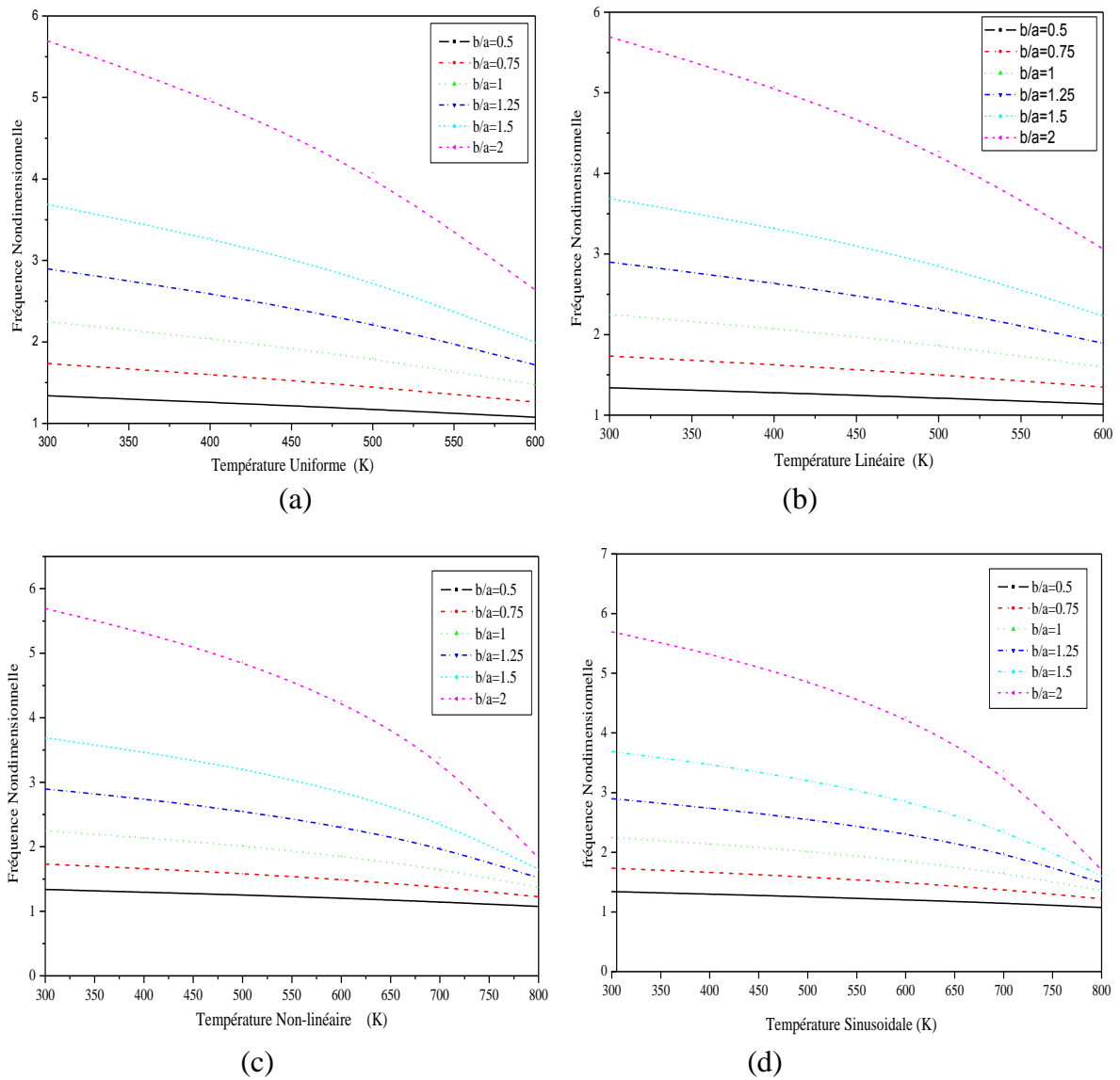


Figure V.8. Variation des fréquences naturelles adimensionnelles des quatre premiers modes pour des plaques FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyées sous l'influence des différents chargements thermiques et du rapport géométrique (b/a). $a/h = 10$, $a = 0.2$, $p = 2$.

La figure (V.8a–b) montre l'effet du rapport géométrique (b/a) sur la variation des fréquences adimensionnelles par rapport à la variation des différents champs de température d'une plaque FG $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ simplement supportée. A partir de ces graphes, il est à

observer que les fréquences augmentent avec l'augmentation du rapport (b/a). On note également que les fréquences diminuent avec l'augmentation des changements de température pour tous les types de champs de température; ceci est dû à la diminution du module de Young avec l'augmentation de la température. On constate également que la diminution des fréquences dans le cas où $b/a = 2$ est importante par rapport aux autres rapports (b/a) lorsque le rapport $a/h = 10$. Les champs de température uniformes affectent les fréquences de manière plus significative que les champs de température linéaires, non linéaires et sinusoïdaux.

V.4. Conclusion

Dans ce chapitre, une théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur bidimensionnelle a été présentée pour l'analyse dynamique des plaques FG soumises à des champs de température uniformes, linéaires, non linéaires et sinusoïdaux. Le champ des déplacements de la théorie proposée est choisi sur la base d'une distribution parabolique des déformations transversales de cisaillement à travers l'épaisseur et satisfait les conditions aux limites. Les plaques FG sont supposées être simplement supportées avec des propriétés de matérielles dépendantes et indépendantes de la température selon une variation de la loi de puissance. Les résultats numériques sont présentés pour les plaques FG dépendantes et indépendantes de la température et comparés aux résultats disponibles dans la littérature pour vérifier l'exactitude de la théorie proposée. On peut constater que la présente théorie est efficace et simple dans l'étude de la réponse aux vibrations libres des plaques FG exposées à des chargements thermiques. Ce travail peut donc être utilisé comme référence pour évaluer la validité et établir la précision de diverses théories approximatives.



CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Les matériaux à gradient de propriétés ont prouvé leur valeurs parmi les matériaux modernes avancés. Ils sont devenus un concurrent sérieux dans de nombreux domaines d'application, notamment l'énergie, la défense, l'aviation et la médecine. L'intérêt croissant des FGM dans les milieux de la recherche et de l'industrie rend nécessaire le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles. Celles-ci permettent de mieux comprendre le comportement des FGM et leur réponses vis à vis les différentes sollicitations.

A travers ce travail, la vibration libre des structures en matériaux fonctionnellement gradués reposant sur des appuis simples ou élastiques a été étudiée. Pour ce faire trois formulations en se basant sur les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé ont été développées.

La première formulation consiste à la proposition d'un modèle quasi-3D hybride de la théorie de déformation de cisaillement permettant l'analyse de la vibration libre des plaques FGM sur des fondations élastiques. Ce modèle utilise deux fonctions de gauchissement différentes qui décrivent une variation adéquate des déformations et des contraintes de cisaillement et respectent les conditions aux limites aux surfaces inférieures et supérieures des plaques FGM.

En outre les deux autres formulations ont été consacrées à l'établissement d'une théorie 2D et quasi-3D de déformation de cisaillement afin de pouvoir étudier l'influence de la déformation normale et du chargement thermique sur la réponse en vibration libre des plaques FGM. Dans cette étude, une nouvelle fonction de forme a été développée en combinant deux fonctions exponentielle et trigonométrique tout en assurant une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur permettant leur nullité aux bords libres de la plaque.

Dans tous les modèles établis, le principe d'Hamilton a été utilisé afin de déterminer les équations de mouvement qui ont été résolues en se basant sur la méthode de Navier. L'efficacité de ces modèles a été validée en faisant une étude comparative avec d'autres modèles issus de la littérature. L'influence des différents paramètres tels que : le rapport

géométrique, la composition matérielle, l'effet de l'étirement, les paramètres des appuis élastiques et l'effet thermique sur la réponse vibratoire des plaques fonctionnellement graduées ont été discuté. Les conclusions tirées de ces différentes études sont comme suit:

- L'effet des fondations élastiques joue un rôle considérable sur la vibration des plaques fonctionnellement graduées.
- La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé 2D sous-estime les fréquences par rapport aux deux autres modèles (hybride et quasi-3D) pour les plaques modérément épaisses et épaisses.
- l'effet de la déformation normale transversale à travers l'épaisseur est plus prononcé pour les plaques épaisses ou avec forte épaisseur et il doit être pris en considération dans la plupart des simulations mécaniques réelles.
- L'augmentation de la température réduit les deux premières fréquences naturelles des plaques FGM sous des champs de température uniformes, linéaires et non linéaires.
- L'instabilité dynamique des plaques FGM est renforcée par une augmentation de la valeur de l'indice de la loi de puissance.

Ce travail constitue donc une étape dans l'étude et la modélisation de la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées. Il a permis de fournir des éléments de réponse sur l'influence des paramètres de la fondation élastique, de la déformation normale et de la température sur la réponse dynamique. D'où il est recommandé que:

- Le concepteur doit examiner les caractéristiques de distribution de la loi de puissance le long de l'épaisseur. Des valeurs petites de l'indice de la loi de puissance doivent être choisies pour avoir une bonne stabilité dynamique des plaques FGM.
- Pour les plaques FGM dont la distribution des propriétés de la loi de puissance est utilisée à des températures plus élevées, on peut supposer qu'une distribution uniforme de la température a une conception plus sûre.
- Pour les plaques FGM reposant sur une fondation élastique, le paramètre de fondation Pasternak à des valeurs plus élevées doit être préféré au détriment de la constante de fondation Winkler, afin d'assurer une meilleure stabilité dynamique.

En perspective, il est prévu d'appliquer les modèles d'ordre élevé proposés à quatre et cinq variables pour l'analyse des différentes formes de structures FGM sous la combinaison des différents types de chargement (thermique, mécanique, électrique, hygrothermique) et en

tenant compte les changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives en utilisant les différents modèles micromécaniques d'homogénéisation.

Les effets de l'environnement à haute température sur la stabilité dynamique des plaques ont été étudiés dans le cadre du présent travail. Mais dans les applications spatiales, les FGM sont soumises à un environnement à basse température. Ainsi, les vibrations et la stabilité dynamique des plaques FGM soumises à un environnement thermique à basse température peuvent être étudiées à l'avenir.

En plus, il serait très intéressant d'étudier l'influence des défauts de fabrication à savoir la porosité sur la réponse globale des plaques en FGM sous différentes sollicitations et différentes conditions d'appuis.

En outre, les résultats doivent être confirmés par des résultats expérimentaux. Par conséquent, l'étude expérimentale de la stabilité dynamique des plaques de matériaux gradués fonctionnellement peut être considérée comme un futur travail pour approuver la méthode de calcul utilisée et valider expérimentalement les résultats théoriques obtenus.

En fin, on souhaite que ce travail reflète la modeste participation de notre laboratoire dans le domaine de recherche des matériaux composites en matériaux à gradient de propriétés (*FGM*) et précisément leurs comportement vis-à-vis la vibration libre dans différentes conditions environnementales.



REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Abdelbari, S., Fekrar, A., Heireche, H., Saidi, H., Tounsi, A., & Bedia, E. A. A. (2016). An efficient and simple shear deformation theory for free vibration of functionally graded rectangular plates on Winkler-Pasternak elastic foundations. *Wind and Structures*, 22(3), 329-348. <https://doi.org/10.12989/was.2016.22.3.329>
- Abdizadeh, H. (1997). *Elaboration et caractérisation de composites duplex « composites laminaires tri-couches à base d'alumine* [Thèse de Doctorat, Institut national des sciences appliquées de Lyon]. <http://theses.insa-lyon.fr/publication/1997ISAL0076/these.pdf>
- Abualnour, M., Houari, M. S. A., Tounsi, A., Bedia, E. A. A., & Mahmoud, S. R. (2018). A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates. *Composite Structures*, 184, 688-697. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.047>
- Addou, F. Y., Meradjah, M., Bousahla, A. A., Benachour, A., Bourada, F., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2019). Influences of porosity on dynamic response of FG plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation using quasi 3D HSDT. *Computers and Concrete*, 24(4), 347-367. <https://doi.org/10.12989/cac.2019.24.4.347>
- Ait Sidhoum, I., Boutchicha, D., Benyoucef, S., & Tounsi, A. (2018). A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for vibration analysis of simply supported functionally graded plates. *Smart Structures and Systems*, 22(3), 303-314. <https://doi.org/10.12989/sss.2018.22.3.303>
- Akavci, S. S. (2007). Buckling and free vibration analysis of symmetric and antisymmetric laminated composite plates on an elastic foundation. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 26(18), 1907-1919. <https://doi.org/10.1177/0731684407081766>
- Akavci, S. S. (2010). Two new hyperbolic shear displacement models for orthotropic laminated composite plates. *Mechanics of Composite Materials*, 46(2), 215-226. <https://doi.org/10.1007/s11029-010-9140-3>
- Akavci, S. S. (2014). An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Composite Structures*, 108, 667-676. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.10.019>
- Akavci, S. S. (2016). Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation. *Composites Part B: Engineering*, 96, 136-152. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.04.035>
- Akavci, S. S., & Tanrikulu, A. H. (2015). Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories. *Composites Part B: Engineering*, 83, 203-215. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.08.043>
- Alijani, F., Amabili, M., Karagiozis, K., & Bakhtiari-Nejad, F. (2011). Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells. *Journal of Sound and Vibration*, 330(7), 1432-1454. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.10.003>

- Allahverdizadeh, A., Naei, M., & Bahrami, M. N. (2008). Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates. *Journal of sound and vibration*, 310(4-5), 966-984. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.08.011>
- Almasi, D., Sadeghi, M., Lau, W. J., Roozbahani, F., & Iqbal, N. (2016). Functionally graded polymeric materials : A brief review of current fabrication methods and introduction of a novel fabrication method. *Materials Science and Engineering: C*, 64, 102-107. <https://doi.org/10.1016/j.msec.2016.03.053>
- Ardestani, M. M., Soltani, B., & Shams, S. (2014). Analysis of functionally graded stiffened plates based on FSDT utilizing reproducing kernel particle method. *Composite Structures*, 112, 231-240. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.01.032>
- Arefi, M., & Allam, M. (2015). Nonlinear responses of an arbitrary FGP circular plate resting on the Winkler-Pasternak foundation. *Smart Structures and Systems*, 16(1), 81-100. <http://dx.doi.org/10.12989/sss.2015.16.1.081>
- Arshad, S., Naeem, M., & Sultana, N. (2007). Frequency analysis of functionally graded material cylindrical shells with various volume fraction laws. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 221(12), 1483-1495. <https://doi.org/doi.org/10.1243/09544062JMES738>
- Attia, A. (2015). *Contribution à l'étude de la vibration libre des plaques FGM dans un champ thermique* [Thèse de Doctorat]. Université Djillali Liabes.
- Attia, A., Tounsi, A., Bedia, E. A. A., & Mahmoud, S. R. (2015). Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories. *Steel and composite structures*, 18(1), 187-212. <https://doi.org/10.12989/scs.2015.18.1.187>
- Aydogdu, M. (2009). A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Composite structures*, 89(1), 94-101. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.07.008>
- Azadi, M. (2011). Free and forced vibration analysis of FG beam considering temperature dependency of material properties. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 25(1), 69-80. <https://doi.org/10.1007/s12206-010-1015-y>
- Baferani, A. H., Saidi, A., & Ehteshami, H. (2011). Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. *Composite Structures*, 93(7), 1842-1853. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.01.020>
- Bakora, A. (2016). *Contribution à l'analyse du post-flambement des plaques FGM épaisses soumises à un chargement thermo-mécanique* [Thèse de Doctorat]. Université Djillali Liabes .
- Bakora, A., & Tounsi, A. (2015). Thermo-mechanical post-buckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations. *Structural Engineering and Mechanics*, 56(1), 85-106. <https://doi.org/10.12989/SEM.2015.56.1.085>
- Banić, D., Baccocchi, M., Tornabene, F., & Ferreira, A. J. (2017). Influence of Winkler-Pasternak foundation on the vibrational behavior of plates and shells reinforced by agglomerated carbon nanotubes. *Applied Sciences*, 7(12), 1228. <https://doi.org/10.3390/app7121228>

- Bao, G., & Wang, L. (1995). Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *International Journal of Solids and Structures*, 32(19), 2853-2871. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)00267-Z](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)00267-Z)
- Barati, M. R., & Shahverdi, H. (2018). Nonlinear vibration of nonlocal four-variable graded plates with porosities implementing homotopy perturbation and Hamiltonian methods. *Acta Mechanica*, 229(1), 343-362. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1952-y>
- Barati, M. R., Shahverdi, H., & Zenkour, A. M. (2017). Electro-mechanical vibration of smart piezoelectric FG plates with porosities according to a refined four-variable theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 24(12), 987-998. <https://doi.org/10.1080/15376494.2016.1196799>
- Becker, B. S., & Bolton, J. D. (1997). Corrosion behaviour and mechanical properties of functionally gradient materials developed for possible hard-tissue applications. *Journal of Materials Science: Materials in Medicine*, 8(12), 793-797. <https://doi.org/10.1023/A:1018525015421>
- Belabed, Z., Ahmed Houari, M. S., Tounsi, A., Mahmoud, S. R., & Anwar Bég, O. (2014). An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates. *Composites Part B: Engineering*, 60, 274-283. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.12.057>
- Belarbi, M. O. (2015). *Éléments Finis pour l'Analyse des Structures Sandwichs* [Thèse de Doctorat]. Université de Mohamed khider.
- Beldjelili, Youcef, Tounsi, Abdelouahed, & Mahmoud, S.R. (2016). Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory. *Smart Structures and Systems*, 18(4), 755-786. <https://doi.org/10.12989/SSS.2016.18.4.755>
- Bellifa, H., Benrahou, K. H., Hadji, L., Houari, M. S. A., & Tounsi, A. (2016). Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 38(1), 265-275. <https://doi.org/10.1007/s40430-015-0354-0>
- Benachour, A., Tahar, H. D., Atmane, H. A., Tounsi, A., & Ahmed, M. S. (2011). A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient. *Composites Part B: Engineering*, 42(6), 1386-1394. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.05.032>
- Benadouda, M. (2019). *Etude du comportement mécanique des structures épaisses en tenant compte de l'effet de la microstructure fonctionnellement gradué* [Thèse de Doctorat]. Université Djillali Liabes.
- Benahmed, A., Houari, M. S. A., Benyoucef, S., Belakhdar, K., & Tounsi, A. (2017). A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Geomechanics and Engineering*, 12(1), 9-34. <https://doi.org/10.12989/gae.2017.12.1.009>
- Bennoun, M., Houari, M. S. A., & Tounsi, A. (2016). A novel five-variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(4), 423-431. <https://doi.org/10.1080/15376494.2014.984088>

- Berthelot, J. M. (2012). *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures* (5^e éd.). Lavoisier.
- Bessaim, A., Houari, M. S., Tounsi, A., Mahmoud, S., & Bedia, E. A. A. (2013). A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 15(6), 671-703. <https://doi.org/10.1177/1099636213498888>
- Bezine, G. (1988). A new boundary element method for bending of plates on elastic foundations. *International Journal of Solids and Structures*, 24(6), 557-565. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(88\)90057-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(88)90057-1)
- Bishop, A., Lin, C. Y., Navaratnam, M., Rawlings, R. D., & McShane, H. B. (1993). A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process. *Journal of Materials Science Letters*, 12(19), 1516-1518. <https://doi.org/10.1007/BF00277083>
- Boch, P., Chartier, T., & Huttepain, M. (1986). Tape Casting of Al₂O₃/ZrO₂ Laminated Composites. *Journal of the American Ceramic Society*, 69(8), C-191-C-192. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1986.tb04836.x>
- Bouafia, K., Kaci, A., Houari, M. S. A., Benzair, A., & Tounsi, A. (2017). A nonlocal quasi-3D theory for bending and free flexural vibration behaviors of functionally graded nanobeams. *Smart Structures and Systems*, 19(2), 115-126. <https://doi.org/10.12989/SSS.2017.19.2.115>
- Bouazza, M., Tounsi, A., Adda Bedia, E. A., & Megueni, A. (2010). Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach. *Computational Materials Science*, 49(4), 865-870. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2010.06.038>
- Bouazza, M., Tounsi, A., Adda Bedia, E. A., & Megueni, A. (2009). Buckling analysis of functionally graded plates with simply supported edges. *Leonardo Journal of sciences*, 16, 21-32.
- Bouhadra, A., Tounsi, A., Bousahla, A. A., Benyoucef, S., & Mahmoud, S. R. (2018). Improved HSDT accounting for effect of thickness stretching in advanced composite plates. *Structural Engineering and Mechanics*, 66(1), 61-73. <https://doi.org/10.12989/SEM.2018.66.1.061>
- Bounouara, F., Benrahou, K. H., Belkorissat, I., & Tounsi, A. (2016). A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation. *Steel and Composite Structures*, 20(2), 227-249. <https://doi.org/10.12989/SCS.2016.20.2.227>
- Carrera, E., Brischetto, S., Cinefra, M., & Soave, M. (2011). Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Composites Part B: Engineering*, 42(2), 123-133. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2010.10.005>
- Carrera, Erasmo, Brischetto, S., & Nali, P. (2011). *Plates and shells for smart structures : Classical and advanced theories for modeling and analysis* (1st ed). Wiley.
- Chakraverty, S., & Pradhan, K. K. (2014). Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh–Ritz method. *International Journal of Applied Mechanics*, 06(04), 1450043. <https://doi.org/10.1142/S1758825114500434>

- Chen, C. S. (2005). Nonlinear vibration of a shear deformable functionally graded plate. *Composite Structures*, 68(3), 295-302. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.03.022>
- Chen, C. S., Chen, T. J., & Chien, R. D. (2006). Nonlinear vibration of initially stressed functionally graded plates. *Thin-Walled Structures*, 44(8), 844-851. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2006.08.007>
- Cheng, Z. Q., & Kitipornchai, S. (1999). Membrane Analogy of Buckling and Vibration of Inhomogeneous Plates. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(11), 1293-1297. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1999\)125:11\(1293\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:11(1293))
- Chikh, A. (2016). *Etude et analyse de la stabilité thermique des plaques épaisses en utilisant les théories non linéaires* [Thèse de Doctorat]. Université Djillali Liabes.
- Chikh, A., Bakora, A., Heireche, H., Houari, M. S. A., Tounsi, A., & Adda Bedia, E. A. (2016). Thermo-mechanical postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on Pasternak elastic foundations using hyperbolic shear deformation theory. *Structural Engineering and Mechanics*, 57(4), 617-639. <https://doi.org/10.12989/SEM.2016.57.4.617>
- Civalek, Ö. (2008). Free vibration analysis of symmetrically laminated composite plates with first-order shear deformation theory (FSDT) by discrete singular convolution method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44(12-13), 725-731. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2008.04.001>
- Craveiro, F., Bártolo, H., & Bártolo, P. J. (2013). Functionally Graded Structures through Building Manufacturing. *Advanced Materials Research*, 683, 775-778. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.683.775>
- Dai, K. Y., Liu, G. R., Lim, K. M., & Chen, X. L. (2004). A mesh-free method for static and free vibration analysis of shear deformable laminated composite plates. *Journal of Sound and Vibration*, 269(3-5), 633-652. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00089-0](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00089-0)
- Delale, F., & Erdogan, F. (1983). The Crack Problem for a Nonhomogeneous Plane. *Journal of Applied Mechanics*, 50(3), 609-614. <https://doi.org/10.1115/1.3167098>
- Della Croce, L., & Venini, P. (2004). Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(9-11), 705-725. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2003.09.014>
- Domack, M. S., & Baughman, J. M. (2005). Development of nickel-titanium graded composition components. *Rapid Prototyping Journal*, 11(1), 41-51. <https://doi.org/10.1108/13552540510573383>
- Draiche, K., Tounsi, A., & Khalfi, Y. (2014). A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass. *Steel and Composite Structures*, 17(1), 69-81. <https://doi.org/10.12989/SCS.2014.17.1.069>
- Du, C., & Li, Y. (2013). Nonlinear resonance behavior of functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Composite Structures*, 102, 164-174. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.02.028>

- Du, C., Li, Y., & Jin, X. (2014). Nonlinear forced vibration of functionally graded cylindrical thin shells. *Thin-Walled Structures*, 78, 26-36. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2013.12.010>
- Ebrahimi, F., & Barati, M. R. (2016). Temperature distribution effects on buckling behavior of smart heterogeneous nanosize plates based on nonlocal four-variable refined plate theory. *International Journal of Smart and Nano Materials*, 7(3), 119-143. <https://doi.org/10.1080/19475411.2016.1223203>
- Ebrahimi, F., Ghasemi, F., & Salari, E. (2016). Investigating thermal effects on vibration behavior of temperature-dependent compositionally graded Euler beams with porosities. *Meccanica*, 51(1), 223-249. <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0208-y>
- Ebrahimi, M. J., & Najafizadeh, M. M. (2014). Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded cylindrical shells. *Applied Mathematical Modelling*, 38(1), 308-324. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.06.015>
- El-Galy, I. M., Saleh, B. I., & Ahmed, M. H. (2019). Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. *SN Applied Sciences*, 1(11), 1378. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-1413-4>
- Elishakoff, I., Pentaras, D., & Gentilini, C. (2016). *Mechanics of functionally graded material structures*. World Scientific Publishing Company.
- El-Zafrany, A., Fadhil, S., & Al-Hosani, K. (1995). A new fundamental solution for boundary element analysis of thin plates on Winkler foundation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(6), 887-903. <https://doi.org/10.1002/nme.1620380602>
- Esmailzadeh, M., & Kadkhodayan, M. (2019). Dynamic analysis of stiffened bi-directional functionally graded plates with porosities under a moving load by dynamic relaxation method with kinetic damping. *Aerospace Science and Technology*, 93, 105333. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.105333>
- Faddoul, R. (2012). *Printing processes dedicated for the mass production of ceramic based microelectronic devices*. *Mechanics of the fluids* [Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00825123>
- Fallah, A., Kargarnovin, M. H., & Aghdam, M. M. (2011). Free vibration analysis of symmetrically laminated fully clamped skew plates using extended Kantorovich method. *Key Engineering Materials*, 471-472, 739-744. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.471-472.739>
- Fazzolari, F. A. (2015). Natural frequencies and critical temperatures of functionally graded sandwich plates subjected to uniform and non-uniform temperature distributions. *Composite Structures*, 121, 197-210. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.10.039>
- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C., & Jorge, R. M. N. (2005a). Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Computers & Structures*, 83(27), 2225-2237. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.04.002>
- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C., & Jorge, R. M. N. (2005b). Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by FSDT and radial basis functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(39-41), 4265-4278. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.11.004>

- Gabbrielli, R., Turner, I. G., & Bowen, C. R. (2007). Development of Modelling Methods for Materials to be Used as Bone Substitutes. *Key Engineering Materials*, 361-363, 903-906. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.361-363.903>
- Gharbi, M. (2013). *Etats de surface de pièces métalliques obtenues en Fabrication Directe par Projection Laser (FDPL) : Compréhension physique et voies d'amélioration*. [Thèse de Doctorat, l'Ecole Nationale supérieure d'Arts et Métiers]. <https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-01294641/document>
- Ghasemi, A. R., & Meskini, M. (2019). Free vibration analysis of porous laminated rotating circular cylindrical shells. *Journal of Vibration and Control*, 25(18), 2494-2508. <https://doi.org/10.1177/1077546319858227>
- Golmakani, M. E., & Alamatian, J. (2013). Large deflection analysis of shear deformable radially functionally graded sector plates on two-parameter elastic foundations. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 42, 251-265. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2013.06.006>
- Grover, N., Maiti, D. K., & Singh, B. N. (2013). A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates. *Composite Structures*, 95, 667-675. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.012>
- Groves, J. F., & Wadley, H. N. G. (1997). Functionally graded materials synthesis via low vacuum directed vapor deposition. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2), 57-69. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00023-6](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00023-6)
- Guerroudj, H. Z., Yeghnem, R., Kaci, A., Zaoui, F. Z., Benyoucef, S., & Tounsi, A. (2018). Eigenfrequencies of advanced composite plates using an efficient hybrid quasi-3D shear deformation theory. *Smart Structures and Systems*, 22(1), 121-132. <https://doi.org/10.12989/SSS.2018.22.1.121>
- Hadji, L., Daouadji, T. H., Ait Amar, M., Tlidji, Y., & Adda Bedia, E. A. (2016). Analysis of functionally graded beam using a new first-order shear deformation theory. *Structural Engineering and Mechanics*, 57(2), 315-325. <https://doi.org/10.12989/SEM.2016.57.2.315>
- Hao, Y. X., Zhang, W., & Yang, J. (2011). Nonlinear oscillation of a cantilever FGM rectangular plate based on third-order plate theory and asymptotic perturbation method. *Composites Part B: Engineering*, 42(3), 402-413. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2010.12.010>
- He, X. Q., Ng, T. Y., Sivashanker, S., & Liew, K. M. (2001). Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators. *International Journal of Solids and Structures*, 38(9), 1641-1655. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00050-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00050-0)
- Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M. S. A., Bessaim, A., & Bedia, E. A. A. (2014). New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Journal of Engineering Mechanics*, 140(2), 374-383. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000665](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000665)
- Heidari, M., & Arvin, H. (2019). Nonlinear free vibration analysis of functionally graded rotating composite Timoshenko beams reinforced by carbon nanotubes. *Journal of Vibration and Control*, 25(14), 2063-2078. <https://doi.org/10.1177/1077546319847836>

- Hopkinson, N., Hague, R. J. M., & Dickens, P. M. (Éds.). (2006). *Rapid manufacturing : An industrial revolution for the digital age*. John Wiley.
- Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., & Rokni Damavandi Taher, H. (2011). Exact solutions for free flexural vibration of Lévy-type rectangular thick plates via third-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling*, 35(2), 708-727. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.07.028>
- Hosseini-Hashemi, S. H., Rokni Damavandi Taher, H., Akhavan, H., & Omid, M. (2010). Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling*, 34(5), 1276-1291. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.08.008>
- Houari, M. S. A. (2011). *Analyse des contraintes thermo-élastiques : Lois des puissances* [Thèse de Doctorat]. Université Djillali Liabes.
- Huang, X.-L., & Shen, H.-S. (2004). Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments. *International Journal of Solids and Structures*, 41(9-10), 2403-2427. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.11.012>
- Jamaludin, S. N. S., Mustapha, F., Nuruzzaman, D. M., & Basri, S. N. (2013). A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites. *Scientific Research and Essays*, 8(21), 828-840. <https://doi.org/10.5897/SRE2012.0743>
- Javaheri, R., & Eslami, M. R. (2002a). Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 82(4), 277-283.
- Javaheri, R., & Eslami, M. R. (2002b). Thermal buckling of functionally graded plates. *AIAA Journal*, 40(1), 162-169. <https://doi.org/10.2514/2.1626>
- Javaheri, R., & Eslami, M. R. (2002c). Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory. *Journal of Thermal Stresses*, 25(7), 603-625. <https://doi.org/10.1080/01495730290074333>
- Jiang, W., Nair, R., & Molian, P. (2005). Functionally graded mold inserts by laser-based flexible fabrication: Processing modeling, structural analysis, and performance evaluation. *Journal of Materials Processing Technology*, 166(2), 286-293. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2004.08.029>
- Jin, Gang, Takeuchi, M., Honda, S., Nishikawa, T., & Awaji, H. (2005). Properties of multilayered mullite/Mo functionally graded materials fabricated by powder metallurgy processing. *Materials Chemistry and Physics*, 89(2-3), 238-243. <https://doi.org/10.1016/j.matchemphys.2004.03.031>
- Jin, Guoyong, Su, Z., Shi, S., Ye, T., & Gao, S. (2014). Three-dimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions. *Composite Structures*, 108, 565-577. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.09.051>
- Jones, R. M. (1999). *Mechanics of composite materials* (2^e éd.). Taylor & Francis.
- Kar, V. R., & Panda, S. K. (2015). Free vibration responses of temperature dependent functionally graded curved panels under thermal environment. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 12(11), 2006-2024. <https://doi.org/10.1590/1679-78251691>

- Karama, M., Afaq, K. S., & Mistou, S. (2003). Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *International Journal of Solids and Structures*, 40(6), 1525-1546. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00647-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00647-9)
- Kawasaki, A., & Watanabe, R. (1997). Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials. *Ceramics International*, 23(1), 73-83. [https://doi.org/10.1016/0272-8842\(95\)00143-3](https://doi.org/10.1016/0272-8842(95)00143-3)
- Khathun, S. (2018). *Functionally graded materials—An overview*. <https://www.slideshare.net/sabihakhathun/overview-of-functionally-graded-materials-97027240/24>.
- Khiloun, M., Bousahla, A. A., Kaci, A., Bessaim, A., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2020). Analytical modeling of bending and vibration of thick advanced composite plates using a four-variable quasi 3D HSDT. *Engineering with Computers*, 36(3), 807-821. <https://doi.org/10.1007/s00366-019-00732-1>
- Kim, Y. W. (2005). Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 284(3-5), 531-549. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.06.043>
- Kirchhoff, G. (1850). Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1850(40), 51-88. <https://doi.org/10.1515/crll.1850.40.51>
- Koizumi, A. (1994). Recent progress of functionally gradient materials in Japan. In J. B. Wachtman (Éd.), *Ceramic Engineering and Science Proceedings* (Vol. 13, p. 332-347). John Wiley & Sons, Inc. <https://doi.org/10.1002/9780470313954.ch33>
- Koizumi, M. (1997). FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2), 1-4. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00016-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00016-9)
- Lee, P. H. (2013). *Characterization and Modeling of Functionally Graded Materials* [Thèse de Doctorat, Université de Columbia]. <https://doi.org/10.7916/D85H7PGZ>
- Lee, W. H., Han, S. C., & Park, W. T. (2015). A refined higher order shear and normal deformation theory for E-, P-, and S-FGM plates on Pasternak elastic foundation. *Composite Structures*, 122, 330-342. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.11.047>
- Leissa, A. W. (1973). The free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 31(3), 257-293. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(73\)80371-2](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80371-2)
- Levy, M. (1877). Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 219-306.
- Li, Q., Iu, V. P., & Kou, K. P. (2009). Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment. *Journal of Sound and Vibration*, 324(3-5), 733-750. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.02.036>
- Li, S. R., Zhang, J. H., & Zhao, Y. G. (2007). Nonlinear thermomechanical post-buckling of circular FGM plate with geometric imperfection. *Thin-Walled Structures*, 45(5), 528-536. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2007.04.002>
- Liew, K. M., Huang, Y. Q., & Reddy, J. N. (2003). Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature

- method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(19), 2203-2222. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(03\)00238-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(03)00238-X)
- Liew, K. M., Peng, L. X., & Kitipornchai, S. (2009). Vibration analysis of corrugated Reissner–Mindlin plates using a mesh-free Galerkin method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 51(9-10), 642-652. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2009.06.005>
- Liew, K. M., Wang, J., Ng, T. Y., & Tan, M. J. (2004). Free vibration and buckling analyses of shear-deformable plates based on FSDT meshfree method. *Journal of Sound and Vibration*, 276(3-5), 997-1017. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.08.026>
- Liu, F. L. (2000). Rectangular thick plates on winkler foundation : Differential quadrature element solution. *International Journal of Solids and Structures*, 37(12), 1743-1763. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(98\)00306-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00306-0)
- Liu, F.-L., & Liew, K. M. (1999). ANALYSIS OF VIBRATING THICK RECTANGULAR PLATES WITH MIXED BOUNDARY CONSTRAINTS USING DIFFERENTIAL QUADRATURE ELEMENT METHOD. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5), 915-934. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2262>
- Lo, K. H., Christensen, R. M., & Wu, E. M. (1977). A high-order theory of plate deformation—Part 2 : Laminated plates. *Journal of Applied Mechanics*, 44(4), 669-676. <https://doi.org/10.1115/1.3424155>
- Loh, G. H., Pei, E., Harrison, D., & Monzón, M. D. (2018). An overview of functionally graded additive manufacturing. *Additive Manufacturing*, 23, 34-44. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.06.023>
- Lostec, L. (1997). *Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composites SiC-MAS-L* [Thèse de doctorat]. Université de Limoges.
- Loy, C. T., Lam, K. Y., & Reddy, J. N. (1999). Vibration of functionally graded cylindrical shells. *International Journal of Mechanical Sciences*, 41(3), 309-324. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(98\)00054-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(98)00054-X)
- Lu, L., Chekroun, M., Abraham, O., Maupin, V., & Villain, G. (2011). Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer. *NDT & E International*, 44(2), 169-177. <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2010.11.007>
- Ma, L. S., & Wang, T. J. (2003). Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13-14), 3311-3330. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00118-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00118-5)
- Madani, H., Hosseini, H., & Shokravi, M. (2016). Differential cubature method for vibration analysis of embedded FG-CNT-reinforced piezoelectric cylindrical shells subjected to uniform and non-uniform temperature distributions. *Steel and Composite Structures*, 22(4), 889-913. <https://doi.org/10.12989/SCS.2016.22.4.889>
- Mahamood, R. M., & Akinlabi, E. T. (2017). *Functionally Graded Materials*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-53756-6>
- Mahi, A., Adda Bedia, E. A., Tounsi, A., & Mechab, I. (2010). An analytical method for temperature-dependent free vibration analysis of functionally graded beams with

- general boundary conditions. *Composite Structures*, 92(8), 1877-1887. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.01.010>
- Mahi, Amale, Adda Bedia, E. A., & Tounsi, A. (2015). A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates. *Applied Mathematical Modelling*, 39(9), 2489-2508. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.045>
- Mahmoud, D., & Elbestawi, M. (2017). Lattice structures and functionally graded materials applications in additive manufacturing of orthopedic implants : A review. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*, 1(2), 13. <https://doi.org/10.3390/jmmp1020013>
- Mahmoudi, A. (2018). *Etude de l'influence des modèles micromécaniques sur la réponse globale des structures FGM*. Université Djillali Liabes.
- Mahmoudi, Abdelkader, Benyoucef, S., Tounsi, A., Benachour, A., & Bedia, E. A. A. (2018). On the effect of the micromechanical models on the free vibration of rectangular FGM plate resting on elastic foundation. *Earthquakes and Structures*, 14(2), 117-128. <https://doi.org/10.12989/EAS.2018.14.2.117>
- Malekzadeh, P. (2009). Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations. *Composite Structures*, 89(3), 367-373. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.08.007>
- Malekzadeh, P., & Monajjemzadeh, S. M. (2013). Dynamic response of functionally graded plates in thermal environment under moving load. *Composites Part B: Engineering*, 45(1), 1521-1533. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.09.022>
- Mantari, J. L. (2015a). A refined theory with stretching effect for the dynamics analysis of advanced composites on elastic foundation. *Mechanics of Materials*, 86, 31-43. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2015.02.010>
- Mantari, J. L. (2015b). Free vibration of advanced composite plates resting on elastic foundations based on refined non-polynomial theory. *Meccanica*, 50(9), 2369-2390. <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0160-x>
- Mantari, J. L., & Granados, E. V. (2015a). A refined FSDT for the static analysis of functionally graded sandwich plates. *Thin-Walled Structures*, 90, 150-158. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.01.015>
- Mantari, J. L., & Granados, E. V. (2015b). Dynamic analysis of functionally graded plates using a novel FSDT. *Composites Part B: Engineering*, 75, 148-155. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.01.028>
- Mantari, J. L., & Granados, E. V. (2016). An original FSDT to study advanced composites on elastic foundation. *Thin-Walled Structures*, 107, 80-89. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.05.024>
- Mantari, J. L., Granados, E. V., & Guedes Soares, C. (2014). Vibrational analysis of advanced composite plates resting on elastic foundation. *Composites Part B: Engineering*, 66, 407-419. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.05.026>
- Mantari, J. L., Granados, E. V., Hinostroza, M. A., & Guedes Soares, C. (2014). Modelling advanced composite plates resting on elastic foundation by using a quasi-3D hybrid type

- HSDT. *Composite Structures*, 118, 455-471.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.07.039>
- Mantari, J. L., & Guedes Soares, C. (2012a). Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory. *Composite Structures*, 94(6), 1991-2000. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.01.005>
- Mantari, J. L., & Guedes Soares, C. (2012b). Analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a generalized higher-order shear deformation theory. *Composite Structures*, 94(8), 2640-2656. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.03.018>
- Mantari, J. L., & Guedes Soares, C. (2012c). Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates. *Composite Structures*, 94(8), 2561-2575. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.02.019>
- Mantari, J. L., & Guedes Soares, C. (2013a). A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates. *Composites Part B: Engineering*, 45(1), 268-281. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.05.036>
- Mantari, J. L., & Guedes Soares, C. (2013b). A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates. *Composites Part B: Engineering*, 45(1), 268-281. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.05.036>
- Mantari, J. L., & Guedes Soares, C. (2014a). Optimized sinusoidal higher order shear deformation theory for the analysis of functionally graded plates and shells. *Composites Part B: Engineering*, 56, 126-136. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.07.027>
- Mantari, J. L., & Guedes Soares, C. (2014b). Static response of advanced composite plates by a new non-polynomial higher-order shear deformation theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 78, 60-71. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.10.020>
- Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Guedes Soares, C. (2011). Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher-order shear deformation theory. *Composite Structures*, 94(1), 37-49. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.07.020>
- Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Guedes Soares, C. (2012a). A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. *International Journal of Solids and Structures*, 49(1), 43-53. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.09.008>
- Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Guedes Soares, C. (2012b). Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory. *Composite Structures*, 94(2), 714-723. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.09.007>
- Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Guedes Soares, C. (2012c). A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites Part B: Engineering*, 43(3), 1489-1499. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.07.017>
- Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Guedes Soares, C. (2012d). Bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a new accurate higher-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 43(8), 3348-3360. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.01.062>

- Markworth, A. J., & Saunders, J. H. (1995). A model of structure optimization for a functionally graded material. *Materials Letters*, 22(1-2), 103-107. [https://doi.org/10.1016/0167-577X\(94\)00238-X](https://doi.org/10.1016/0167-577X(94)00238-X)
- Masmoudi, A. (2016). *Modélisation et développement expérimental du procédé de fabrication additive par fusion laser sélective d'un lit de poudre métallique : Influence de la pression de l'atmosphère*. *Matériaux*. [Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Belfort-Montbéliard]. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01871204/>
- Matsunaga, H. (2008). Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Composite Structures*, 82(4), 499-512. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.01.030>
- Meftah, A. (2018). *Construction d'un nouveau champ de déplacement pour l'analyse de la réponse mécanique des structures composites* [Thèse de doctorat]. Université Djillali Liabes.
- Meftah, A., Bakora, A., Zaoui, F. Z., Tounsi, A., & Bedia, E. A. A. (2017). A non-polynomial four variable refined plate theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Steel and Composite Structures*, 23(3), 317-330. <https://doi.org/10.12989/SCS.2017.23.3.317>
- Meksi, A., Benyoucef, S., Houari, M. S. A., & Tounsi, A. (2015). A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations. *Structural Engineering and Mechanics*, 53(6), 1215-1240. <https://doi.org/10.12989/SEM.2015.53.6.1215>
- Meksi, R., Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E. A., & Mahmoud, S. R. (2019). An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 21(2), 727-757. <https://doi.org/10.1177/1099636217698443>
- Meradjah, M., Bouakkaz, K., Zaoui, F. Z., & Tounsi, A. (2018). A refined quasi-3D hybrid-type higher order shear deformation theory for bending and Free vibration analysis of advanced composites beams. *Wind and Structures*, 27(4), 269-282. <https://doi.org/10.12989/WAS.2018.27.4.269>
- Mindlin, R. D. (1951). Influence of rotatory inertia and shear flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of applied mechanics*, 18, 31-38.
- Mistler, R. E. (1973). High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique. *American Ceramic Society Bulletin*, 52(11), 850-854.
- Miyamoto, Y., Kaysser, W., Rabin, B., Kawasaki, A., & Ford, R. (1999). *Functionally graded materials : Design, processing and applications* (1^{re} éd.). Kluwer Academic Publishers.
- Mota, A. F., & Loja, M. A. R. (2019). Mechanical behavior of porous functionally graded nanocomposite materials. *C*, 5(2), 34. <https://doi.org/10.3390/c5020034>
- Mouffoki, A., Houari, M. S. A., & Tounsi, A. (2017). Vibration analysis of nonlocal advanced nanobeams in hygro-thermal environment using a new two-unknown trigonometric shear deformation beam theory. *Smart Structures and Systems*, 20(3), 369-383. <https://doi.org/10.12989/SSS.2017.20.3.369>

- Moya, J. S., Sánchez-Herencia, A. J., Requena, J., & Moreno, R. (1992). Functionally gradient ceramics by sequential slip casting. *Materials Letters*, 14(5), 333-335. [https://doi.org/10.1016/0167-577X\(92\)90048-O](https://doi.org/10.1016/0167-577X(92)90048-O)
- Müller, E., Drašar, Č., Schilz, J., & Kaysser, W. A. (2003). Functionally graded materials for sensor and energy applications. *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2), 17-39. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00581-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00581-1)
- Muller, P. (2013). *Fabrication additive de pièces multi matériaux*. Génie mécanique [Thèse de Doctorat]. Ecole Centrale de Nantes.
- Muller, P., Mognol, P., & Hascoet, J. Y. (2012). *Functionally graded material (FGM) parts : From design to the manufacturing simulation*. 123-131. <https://doi.org/10.1115/ESDA2012-82586>
- Naeem, M. N., Arshad, S. H., & Sharma, C. B. (2010). The Ritz formulation applied to the study of the vibration frequency characteristics of functionally graded circular cylindrical shells. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 224(1), 43-54. <https://doi.org/10.1243/09544062JMES1548>
- Nagino, H., Mikami, T., & Mizusawa, T. (2008). Three-dimensional free vibration analysis of isotropic rectangular plates using the B-spline Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 317(1-2), 329-353. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.03.021>
- Natarajan, S., Baiz, P. M., Ganapathi, M., Kerfriden, P., & Bordas, S. (2011). Linear free flexural vibration of cracked functionally graded plates in thermal environment. *Computers & Structures*, 89(15), 1535-1546. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2011.04.002>
- Neubrand, A., & Rödel, J. (1997). Gradient materials : An overview of a novel concept. *Zeitschrift für Metallkunde*, 88(5), 358-371.
- Neves, A. M. A., Ferreira, A. J. M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C. M. C., Jorge, R. M. N., & Soares, C. M. M. (2012). A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 94(5), 1814-1825. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.12.005>
- Neves, A. M. A., Ferreira, A. J. M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C. M. C., Jorge, R. M. N., & Soares, C. M. M. (2013). Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Composites Part B: Engineering*, 44(1), 657-674. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.01.089>
- Neves, A. M. A., Ferreira, A. J. M., Carrera, E., Roque, C. M. C., Cinefra, M., Jorge, R. M. N., & Soares, C. M. M. (2012). A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composites Part B: Engineering*, 43(2), 711-725. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.08.009>
- Ngo-Cong, D., Mai-Duy, N., Karunasena, W., & Tran-Cong, T. (2010). Integrated-RBF network method for free vibration analysis of laminated composite plates. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 10, 012236. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/10/1/012236>

- Ngo-Cong, D., Mai-Duy, N., Karunasena, W., & Tran-Cong, T. (2011). Free vibration analysis of laminated composite plates based on FSDT using one-dimensional IRBFN method. *Computers & Structures*, 89(1-2), 1-13. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2010.07.012>
- Nguyen, T. K., Sab, K., & Bonnet, G. (2007). Shear correction factors for functionally graded plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 14(8), 567-575. <https://doi.org/10.1080/15376490701672575>
- Nguyen, Trung Kien, Sab, K., & Bonnet, G. (2008). First-order shear deformation plate models for functionally graded materials. *Composite Structures*, 83(1), 25-36. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.03.004>
- Nguyen, V. H., Nguyen, T. K., Thai, H. T., & Vo, T. P. (2014). A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates. *Composites Part B: Engineering*, 66, 233-246. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.05.012>
- Nguyen, V.-H., Nguyen, T.-K., Thai, H.-T., & Vo, T. P. (2014). A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates. *Composites Part B: Engineering*, 66, 233-246. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.05.012>
- Nguyen-Xuan, H., Thai, C. H., & Nguyen-Thoi, T. (2013). Isogeometric finite element analysis of composite sandwich plates using a higher order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 55, 558-574. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.06.044>
- Okamura, H. (1991). State of the art of material design projects for severe service applications. *Materials Science and Engineering: A*, 143(1-2), 3-9. [https://doi.org/10.1016/0921-5093\(91\)90720-8](https://doi.org/10.1016/0921-5093(91)90720-8)
- Pandya, B. N., & Kant, T. (1988). Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates—Finite element evaluations. *International Journal of Solids and Structures*, 24(12), 1267-1286. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(88\)90090-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(88)90090-X)
- Parihar, R. S., Setti, S. G., & Sahu, R. K. (2018). Recent advances in the manufacturing processes of functionally graded materials : A Review. *Science and Engineering of Composite Materials*, 25(2), 309-336. <https://doi.org/10.1515/secm-2015-0395>
- Pasternak, P. L. (1954). On a new method of an elastic foundation by means of two foundation constants. *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstve i Arkhitekture*, 1-56.
- Patel, B. P., Gupta, S. S., Loknath, M. S., & Kadu, C. P. (2005). Free vibration analysis of functionally graded elliptical cylindrical shells using higher-order theory. *Composite Structures*, 69(3), 259-270. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.07.002>
- Petit, C., Montanaro, L., & Palmero, P. (2018). Functionally graded ceramics for biomedical application : Concept, manufacturing, and properties. *International Journal of Applied Ceramic Technology*, 15(4), 820-840. <https://doi.org/10.1111/ijac.12878>
- Peyman, B. (2017). *Functionally graded materials (FGM)—An overview* [Engineering]. <https://www.slideshare.net/peymanbi1/functionally-graded-materials-fgm-an-overview>

- Pompe, W., Worch, H., Epple, M., Friess, W., Gelinsky, M., Greil, P., Hempel, U., Scharnweber, D., & Schulte, K. (2003). Functionally graded materials for biomedical applications. *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2), 40-60. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00580-X](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00580-X)
- Popoola, P., Farotade, G., Fatoba, O., & Popoola, O. (2016). Laser engineering net shaping method in the area of development of functionally graded materials (FGMs) for aero engine applications—A Review. *Fiber Laser*, 383-399. <https://doi.org/10.5772/61711>
- Popovich, V. A., Borisov, E. V., Popovich, A. A., Sufiiarov, V. Sh., Masaylo, D. V., & Alzina, L. (2017). Functionally graded Inconel 718 processed by additive manufacturing : Crystallographic texture, anisotropy of microstructure and mechanical properties. *Materials & Design*, 114, 441-449. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2016.10.075>
- Pradhan, S. C., Loy, C. T., Lam, K. Y., & Reddy, J. N. (2000). Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions. *Applied Acoustics*, 61(1), 111-129. [https://doi.org/10.1016/S0003-682X\(99\)00063-8](https://doi.org/10.1016/S0003-682X(99)00063-8)
- Pradyumna, S., & Nanda, N. (2013). Geometrically nonlinear transient response of functionally graded shell panels with initial geometric imperfection. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 20(3), 217-226. <https://doi.org/10.1080/15376494.2011.584148>
- Praveen, G. N., & Reddy, J. N. (1998). Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *International Journal of Solids and Structures*, 35(33), 4457-4476. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00253-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00253-9)
- Put, S., Vleugels, J., Anné, G., & Van der Biest, O. (2003). Functionally graded ceramic and ceramic-metal composites shaped by electrophoretic deposition. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 222(1-3), 223-232. [https://doi.org/10.1016/S0927-7757\(03\)00227-9](https://doi.org/10.1016/S0927-7757(03)00227-9)
- Qian, L. F., Batra, R. C., & Chen, L. M. (2004). Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov-Galerkin method. *Composites Part B: Engineering*, 35(6-8), 685-697. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2004.02.004>
- Qian, X., & Dutta, D. (2003). Design of heterogeneous turbine blade. *Computer-Aided Design*, 35(3), 319-329. [https://doi.org/10.1016/S0010-4485\(01\)00219-6](https://doi.org/10.1016/S0010-4485(01)00219-6)
- Qu, H. P., Li, P., Zhang, S. Q., Li, A., & Wang, H. M. (2010). Microstructure and mechanical property of laser melting deposition (LMD) Ti/TiAl structural gradient material. *Materials & Design*, 31(1), 574-582. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2009.07.004>
- Rahmani, M. C., Kaci, A., Bousahla, A. A., Bourada, F., Tounsi, A., Bedia, E. A. A., Mahmoud, S. R., Benrahou, K. H., & Tounsi, A. (2020). Influence of boundary conditions on the bending and free vibration behavior of FGM sandwich plates using a four-unknown refined integral plate theory. *Computers and Concrete*, 25(3), 225-244. <https://doi.org/10.12989/cac.2020.25.3.225>
- Rajan, T. P. D., & Pai, B. C. (2014). Developments in processing of functionally gradient metals and metal-ceramic composites : A Review. *Acta Metallurgica Sinica (English Letters)*, 5(27), 825-838. <https://doi.org/10.1007/s40195-014-0142-3>

- Reddy, J. N. (1979). Free vibration of antisymmetric, angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 66(4), 565-576. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(79\)90700-4](https://doi.org/10.1016/0022-460X(79)90700-4)
- Reddy, J. N. (2000). Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3), 663-684. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(20000110/30\)47:1/3<663::AID-NME787>3.0.CO;2-8](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000110/30)47:1/3<663::AID-NME787>3.0.CO;2-8)
- Reddy, J. N. (2004). *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis* (2nd ed). CRC Press.
- Reddy, J. N., & Cheng, Z. Q. (2003). Frequency of functionally graded plates with three-dimensional asymptotic approach. *Journal of Engineering Mechanics*, 129(8), 896-900. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2003\)129:8\(896\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:8(896))
- Reddy, J. N., & Chin, C. D. (1998). Thermo-mechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *Journal of Thermal Stresses*, 21(6), 593-626. <https://doi.org/10.1080/01495739808956165>
- Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J Appl Mech-TASME*, 12(2), 69-77.
- Reissner, E. (1975). On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 11(5), 569-573. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(75\)90030-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(75)90030-X)
- Roque, C. M. C., Ferreira, A. J. M., & Jorge, R. M. N. (2007). A radial basis function approach for the free vibration analysis of functionally graded plates using a refined theory. *Journal of Sound and Vibration*, 300(3-5), 1048-1070. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.08.037>
- Ruan, M., & Wang, Z. M. (2016). Transverse vibrations of moving skew plates made of functionally graded material. *Journal of Vibration and Control*, 22(16), 3504-3517. <https://doi.org/10.1177/1077546314563967>
- Saiyathibrahim, A., Mohamed, N. S. S., & Dhanapal, P. (2015). Processing techniques of functionally graded materials—A Review. *International Conference on Systems, Science, Control, Communication, Engineering and Technology*, 1, 98-105.
- Saleh, B., Jiang, J., Ma, A., Song, D., & Yang, D. (2019). Effect of main parameters on the mechanical and wear behaviour of functionally graded materials by centrifugal casting : A review. *Metals and Materials International*, 25(6), 1395-1409.
- Sekkal, M., Fahsi, B., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2017). A novel and simple higher order shear deformation theory for stability and vibration of functionally graded sandwich plate. *Steel and Composite Structures*, 25(4), 389-401.
- Shahrjerdi, A., Mustapha, F., Bayat, M., & Majid, D. L. A. (2011). Free vibration analysis of solar functionally graded plates with temperature-dependent material properties using second order shear deformation theory. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 25(9), 2195-2209. <https://doi.org/10.1007/s12206-011-0610-x>
- Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., & Karami, B. (2018). A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr

- foundation. *Aerospace Science and Technology*, 72, 134-149. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.11.004>
- Shariyat, M. (2010). A generalized global–local high-order theory for bending and vibration analyses of sandwich plates subjected to thermo-mechanical loads. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(3), 495-514. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2009.11.010>
- Sheikholeslami, S. A., & Saidi, A. R. (2013). Vibration analysis of functionally graded rectangular plates resting on elastic foundation using higher-order shear and normal deformable plate theory. *Composite Structures*, 106, 350-361. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.06.016>
- Shen, H. S. (1999). Nonlinear bending of Reissner–Mindlin plates with free edges under transverse and in-plane loads and resting on elastic foundations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 41(7), 845-864. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(98\)00060-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(98)00060-5)
- Shen, H. S. (2000). Nonlinear bending of simply supported rectangular Reissner–Mindlin plates under transverse and in-plane loads and resting on elastic foundations. *Engineering Structures*, 22(7), 847-856. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(99\)00044-9](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(99)00044-9)
- Shen, H. S. (2009). *Functionally graded materials : Nonlinear analysis of plates and shells* (0 éd.). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781420092578>
- Shen, H. S., & Wang, Z. X. (2012). Assessment of Voigt and Mori–Tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 94(7), 2197-2208. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.02.018>
- Shi, G. (2007). A new simple third-order shear deformation theory of plates. *International Journal of Solids and Structures*, 44(13), 4399-4417. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.11.031>
- Shinohara, Y. (2013). Functionally Graded Materials. In *Handbook of Advanced Ceramics* (2^e éd., p. 1179-1187). Academic press. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385469-8.00061-7>
- Shufrin, I., & Eisenberger, M. (2005). Stability and vibration of shear deformable plates—first order and higher order analyses. *International Journal of Solids and Structures*, 42(3-4), 1225-1251. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.06.067>
- Sladek, J., Sladek, V., & Mang, H. A. (2002). Meshless local boundary integral equation method for simply supported and clamped plates resting on elastic foundation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(51-52), 5943-5959. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(02\)00505-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00505-4)
- Sobhy, M. (2013). Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions. *Composite Structures*, 99, 76-87. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.018>
- Soldatos, K. P. (1992). A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mechanica*, 94(3-4), 195-220. <https://doi.org/10.1007/BF01176650>

- Steffens, D. H., Dvorak, M., & Wewel, M. (1990). *Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications*. 139-143.
- Stein, M. (1986). Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing. *AIAA Journal*, 24(9), 1537-1544. <https://doi.org/10.2514/3.9477>
- Szilard, R. (2004). *Theories and Applications of Plate Analysis*. John Wiley & Sons, Inc. <https://doi.org/10.1002/9780470172872>
- Taati, E., & Fallah, F. (2019). Exact solution for frequency response of sandwich microbeams with functionally graded cores. *Journal of Vibration and Control*, 25(19-20), 2641-2655. <https://doi.org/10.1177/1077546319864645>
- Taibi, F. Z., Benyoucef, S., Tounsi, A., Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E. A., & Mahmoud, S. (2015). A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 17(2), 99-129. <https://doi.org/10.1177/1099636214554904>
- Takahashi, M., Itoh, Y., & Kashiwaya, H. (1990). Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique. In *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90* (p. 129-134).
- Taleb, O., Houari, M. S. A., Bessaim, A., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2018). A new plate model for vibration response of advanced composite plates in thermal environment. *Structural Engineering and Mechanics*, 67(4), 369-383. <https://doi.org/10.12989/SEM.2018.67.4.369>
- Tan, C., Wang, C., Wang, S., Wang, G., Ji, L., Tong, Y., & Duan, X.-M. (2017). Investigation on 316L/316L-50W/W plate functionally graded materials fabricated by spark plasma sintering. *Fusion Engineering and Design*, 125, 171-177. <https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2017.08.001>
- Tebboune, W., Merdjah, M., Benrahou, K. H., & Tounsi, A. (2014). Thermoelastic buckling response of thick functionally graded plates. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 55(5), 857-869. <https://doi.org/10.1134/S0021894414050150>
- Thai, C. H., Ferreira, A. J. M., Bordas, S. P. A., Rabczuk, T., & Nguyen-Xuan, H. (2014). Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 43, 89-108. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2013.09.001>
- Thai, C. H., Kulasegaram, S., Tran, L. V., & Nguyen-Xuan, H. (2014). Generalized shear deformation theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric approach. *Computers & Structures*, 141, 94-112. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.04.003>
- Thai, H.-T., & Choi, D.-H. (2012). A refined shear deformation theory for free vibration of functionally graded plates on elastic foundation. *Composites Part B: Engineering*, 43(5), 2335-2347. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.11.062>
- Thai, H.-T., & Choi, D.-H. (2013a). A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 101, 332-340. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.02.019>

- Thai, H.-T., & Choi, D.-H. (2013b). A simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates. *Composite Structures*, 106, 754-763. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.06.013>
- Thai, H.-T., & Choi, D.-H. (2014a). Zeroth-order shear deformation theory for functionally graded plates resting on elastic foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 78, 35-43.
- Thai, H.-T., & Choi, D.-H. (2014b). Improved refined plate theory accounting for effect of thickness stretching in functionally graded plates. *Composites Part B: Engineering*, 56, 705-716. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.09.008>
- Thai, H.-T., Park, M., & Choi, D.-H. (2013). A simple refined theory for bending, buckling, and vibration of thick plates resting on elastic foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 73, 40-52. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.03.017>
- Thai, H.-T., & Vo, T. P. (2012). A nonlocal sinusoidal shear deformation beam theory with application to bending, buckling, and vibration of nanobeams. *International Journal of Engineering Science*, 54, 58-66. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2012.01.009>
- Thai, H.-T., Vo, T. P., Nguyen, T.-K., & Lee, J. (2014). A nonlocal sinusoidal plate model for micro/nanoscale plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 228(14), 2652-2660. <https://doi.org/10.1177/0954406214521391>
- Timoshenko, S. P., & Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells* (2^e éd.). McGraw-Hill.
- Tornabene, F., Fantuzzi, N., & Baccocchi, M. (2016). The GDQ method for the free vibration analysis of arbitrarily shaped laminated composite shells using a NURBS-based isogeometric approach. *Composite Structures*, 154, 190-218. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.041>
- Tornabene, F., Fantuzzi, N., & Baccocchi, M. (2018). Strong and weak formulations based on differential and integral quadrature methods for the free vibration analysis of composite plates and shells: Convergence and accuracy. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 92, 3-37. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2017.08.020>
- Tornabene, F., Fantuzzi, N., Baccocchi, M., & Reddy, J. N. (2017). An equivalent layer-wise approach for the free vibration analysis of thick and thin laminated and sandwich shells. *Applied Sciences*, 7(1), 17. <https://doi.org/10.3390/app7010017>
- Touloukian, Y. S. (1966). *Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials. Volume 5. Nonoxides and their Solutions and Mixtures, Including Miscellaneous Ceramic Materials*. Thermophysical and Electronic Properties Information Analysis Center Lafayette.
- Touratier, M. (1991). An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science*, 29(8), 901-916. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(91\)90165-Y](https://doi.org/10.1016/0020-7225(91)90165-Y)
- Tu, T. M., Quoc, T. H., & Van Long, N. (2019). Vibration analysis of functionally graded plates using the eight-unknown higher order shear deformation theory in thermal environments. *Aerospace Science and Technology*, 84, 698-711. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.11.010>

- Udupa, G., Rao, S. S., & Gangadharan, K. V. (2014). Functionally Graded Composite Materials: An Overview. *Procedia Materials Science*, 5, 1291-1299. <https://doi.org/10.1016/j.mspro.2014.07.442>
- Vel, S. S., & Batra, R. C. (2004). Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 272(3-5), 703-730. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00412-7](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00412-7)
- Wang, C. M., Lim, G. T., Reddy, J. N., & Lee, K. H. (2001). Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories. *Engineering Structures*, 23(7), 838-849. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(00\)00092-4](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(00)00092-4)
- Wang, Q., Wang, Q., & Wan, C. (2012). Preparation and evaluation of a biomimetic scaffold with porosity gradients in vitro. *Anais Da Academia Brasileira de Ciências*, 84(1), 9-16. <https://doi.org/10.1590/S0001-37652012005000003>
- Wang, Y. Q., & Zu, J. W. (2017). Vibration behaviors of functionally graded rectangular plates with porosities and moving in thermal environment. *Aerospace Science and Technology*, 69, 550-562. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.07.023>
- Watari, F., Yokoyama, A., Saso, F., Uo, M., & Kawasaki, T. (1997). Fabrication and properties of functionally graded dental implant. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2), 5-11. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00021-2](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00021-2)
- Wattanasakulpong, N., Prusty, G. B., & Kelly, D. W. (2013). Free and forced vibration analysis using improved third-order shear deformation theory for functionally graded plates under high temperature loading. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 15(5), 583-606. <https://doi.org/10.1177/1099636213495751>
- Winkler, E. (1868). *Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit : Mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik, für polytechnische Schulen, Bauakademien, Ingenieure, Maschinenbauer, Architekten, etc.* H. Dominicus.
- Woo, J., Meguid, S. A., & Ong, L. S. (2006). Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates. *Journal of Sound and Vibration*, 289(3), 595-611. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.02.031>
- Wu, T.-L., Shukla, K. K., & Huang, J. H. (2007). Post-buckling analysis of functionally graded rectangular plates. *Composite Structures*, 81(1), 1-10. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.08.026>
- Xiang, S., Jin, Y., Bi, Z., Jiang, S., & Yang, M. (2011). A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates. *Composite Structures*, 93(11), 2826-2832. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.05.022>
- Xiang, S., & Kang, G. (2013a). A nth-order shear deformation theory for the bending analysis on the functionally graded plates. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 37, 336-343. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2012.08.005>
- Xiang, S., & Kang, G. (2013b). Static analysis of functionally graded plates by the various shear deformation theory. *Composite Structures*, 99, 224-230. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.021>

- Xiang, S., Kang, G., & Liu, Y. (2014). A nth-order shear deformation theory for natural frequency of the functionally graded plates on elastic foundations. *Composite Structures*, *111*, 224-231. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.01.004>
- Xiang, S., Kang, G., Yang, M., & Zhao, Y. (2013). Natural frequencies of sandwich plate with functionally graded face and homogeneous core. *Composite Structures*, *96*, 226-231. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.09.003>
- Xinhua, X., Jingchuan, Z., Zhongda, Y., & Zhonghong, L. (1997). Fabrication and microstructure of ZrO₂/NiCrCoAlY graded coating by plasma spraying. *Surface and Coatings Technology*, *88*(1-3), 66-69. [https://doi.org/10.1016/S0257-8972\(95\)02723-8](https://doi.org/10.1016/S0257-8972(95)02723-8)
- Yadroitsev, I., Bertrand, Ph., Laget, B., & Smurov, I. (2007). Application of laser assisted technologies for fabrication of functionally graded coatings and objects for the International Thermonuclear Experimental Reactor components. *Journal of Nuclear Materials*, *362*(2-3), 189-196. <https://doi.org/10.1016/j.jnucmat.2007.01.078>
- Yang, J., & Shen, H.-S. (2001). Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates. *Composite Structures*, *54*(4), 497-508. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(01\)00122-2](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(01)00122-2)
- Yang, J., & Shen, H.-S. (2002). VIBRATION CHARACTERISTICS AND TRANSIENT RESPONSE OF SHEAR-DEFORMABLE FUNCTIONALLY GRADED PLATES IN THERMAL ENVIRONMENTS. *Journal of Sound and Vibration*, *255*(3), 579-602. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.4161>
- Yanga, J., & Shen, H.-S. (2003). Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, *38*(4), 467-482. [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(01\)00070-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(01)00070-1)
- Younsi, A., Tounsi, A., Zaoui, F. Z., Bousahla, A. A., & Mahmoud, S. R. (2018). Novel quasi-3D and 2D shear deformation theories for bending and free vibration analysis of FGM plates. *Geomechanics and Engineering*, *14*(6), 519-532. <https://doi.org/10.12989/GAE.2018.14.6.519>
- Yuda, H., & Xiaoguang, Z. (2011). Parametric Vibrations and Stability of a Functionally Graded Plate. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, *39*(3), 367-377. <https://doi.org/10.1080/15397734.2011.557970>
- Zaoui, F. Z., Hanifi, L., Younsi, A., Meradjah, M., Tounsi, A., & Ouinas, D. (2017). Free vibration analysis of functionally graded beams using a higher-order shear deformation theory. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, *4*(1), 7-12. <https://doi.org/10.18280/mmep.040102>
- Zaoui, F. Z., Ouinas, D., & Tounsi, A. (2019). New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations. *Composites Part B: Engineering*, *159*, 231-247. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.051>
- Zaoui, F. Z., Tounsi, A., & Ouinas, D. (2017). Free vibration of functionally graded plates resting on elastic foundations based on quasi-3D hybrid-type higher order shear deformation theory. *Smart Structures and Systems*, *20*(4), 509-524. <https://doi.org/10.12989/SSS.2017.20.4.509>

- Zaoui, F. Z., Tounsi, A., Ouinas, D., & Vina Olay, J. A. (2020). A refined HSDT for bending and dynamic analysis of FGM plates. *Structural Engineering and Mechanics*, 74(1), 105-119. <https://doi.org/10.12989/SEM.2020.74.1.105>
- Zenkour, A. M. (2004a). Buckling of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using various plate theories. *Journal of Engineering Mathematics*, 50(1), 75-93. <https://doi.org/10.1023/B:ENGI.0000042123.94111.35>
- Zenkour, A. M. (2004b). Thermal effects on the bending response of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using a sinusoidal shear deformation theory. *Acta Mechanica*, 171(3-4), 171-187. <https://doi.org/10.1007/s00707-004-0145-7>
- Zenkour, A. M. (2005a). On vibration of functionally graded plates according to a refined trigonometric plate theory. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 05(02), 279-297. <https://doi.org/10.1142/S0219455405001581>
- Zenkour, A. M. (2005b). A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates : Part 1—Deflection and stresses. *International Journal of Solids and Structures*, 42(18-19), 5224-5242. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.015>
- Zenkour, A. M. (2005c). A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates : Part 2—Buckling and free vibration. *International Journal of Solids and Structures*, 42(18-19), 5243-5258. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.016>
- Zenkour, A. M. (2006). Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling*, 30(1), 67-84. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.03.009>
- Zenkour, A. M. (2007). Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. *Archive of Applied Mechanics*, 77(4), 197-214. <https://doi.org/10.1007/s00419-006-0084-y>
- Zenkour, A. M. (2009). The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 51(11-12), 869-880. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2009.09.026>
- Zenkour, A. M., & Alghamdi, N. A. (2010). Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates Under the Effect of Mechanical and Thermal Loads. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 17(6), 419-432. <https://doi.org/10.1080/15376494.2010.483323>
- Zenkour, A. M., & Sobhy, M. (2010). Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates. *Composite Structures*, 93(1), 93-102. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.06.012>
- Zenkour, A. M., & Sobhy, M. (2011). Thermal Buckling of Functionally Graded Plates Resting On Elastic Foundations Using the Trigonometric Theory. *Journal of Thermal Stresses*, 34(11), 1119-1138. <https://doi.org/10.1080/01495739.2011.606017>
- Zhang, C., Chen, F., Huang, Z., Jia, M., Chen, G., Ye, Y., Lin, Y., Liu, W., Chen, B., Shen, Q., Zhang, L., & Lavernia, E. J. (2019). Additive manufacturing of functionally graded materials: A review. *Materials Science and Engineering: A*, 764, 138209. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2019.138209>

- Zhao, X., Lee, Y. Y., & Liew, K. M. (2009). Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 319(3-5), 918-939. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.06.025>
- Zhou, D., Cheung, Y. K., Au, F. T. K., & Lo, S. H. (2002). Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method. *International Journal of Solids and Structures*, 39(26), 6339-6353. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00460-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00460-2)



ANNEXE



Publications Internationales

- Zaoui, F. Z.**, Hanifi Hachemi Amar, L., Younsi, A., Meradjah, M., Tounsi, A., Ouinas, D. (2017), "Free vibration analysis of functionally graded beams using a higher-order shear deformation theory" *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 4(1), 7-12. <https://doi.org/10.18280/mmep.040102>
- Zaoui, F. Z.**, Tounsi, A., Ouinas, D. (2017), "Free vibration of functionally graded plates resting on elastic foundations based on quasi-3D hybrid-type higher order shear deformation theory", *Smart structures and systems, An Int'l J*, 20(4), 509-524. <https://doi.org/10.12989/sss.2017.20.4.509>
- Meftah, A., Bakora, A., **Zaoui, F. Z.**, Tounsi, A., Adda Bedia, E. A. (2017), "A non-polynomial four variable refined plate theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation", *Steel and Composite Structures, An Int'l Journal*, 23(3), 317-330. <https://doi.org/10.12989/scs.2017.23.3.317>
- Younsi, A., Tounsi, A., **Zaoui, F. Z.**, Bousahla, A.A., Mahmoud, S.R. (2018), "Novel quasi-3D and 2D shear deformation theories for bending and free vibration analysis of FGM plates", *Geomechanics and Engineering, An Int'l Journal*, 14(6):519-532. <https://doi.org/10.12989/gae.2018.14.6.519>
- Guerroudj, H.Z., Yeghnem, R., Kaci, A., **Zaoui, F.Z.**, Benyoucef, S. Tounsi, A. (2018), "Eigenfrequencies of advanced composite plates using an efficient hybrid quasi-3D shear deformation theory", *Smart Structures and Systems Int J*, 22(1):121-132. <https://doi.org/10.12989/sss.2018.22.1.121>
- Meradjah, M., Bouakkaz, K., **Zaoui, F.Z.**, Tounsi, A. (2018), "A refined quasi-3D hybrid-type higher order shear deformation theory for bending and Free vibration analysis of advanced composites beams", *Wind and Structures, An Int'l J*, 27(4):269-282. <https://doi.org/10.12989/was.2018.27.4.269>
- Zaoui, F. Z.**, Ouinas, D., Tounsi, A. (2019), "New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations", *Composites Part B Engineering*, 159, 231-247. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.051>
- Chaabane, L.A., Bourada, F., Sekkal, M., Zerouati, S., **Zaoui, F.Z.**, Tounsi, A., Derras, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. (2019), "Analytical study of bending and free vibration responses of functionally graded beams resting on elastic foundation", *Structural Engineering and Mechanics Int J*, 71(2):185-196. <https://doi.org/10.12989/sem.2019.71.2.185>
- Belkhodja, Y., Ouinas, D., **Zaoui, F.Z.**, Fekirini, H. (2019), "An exponential-trigonometric

higher order shear deformation theory for bending, free vibration, and buckling analysis of functionally graded materials (FGMs) plates”, *advanced Composites Letters*, 28,1-19. <https://doi.org/10.1177/0963 69 3519875739>

Zaoui, F.Z., Tounsi, A. Ouinas, D., Viña Olay, J.A. (2020), “A refined HSDT for bending and dynamic analysis of FGM plates”, *Structural Engineering and Mechanics Int J.* 74(1):105-119. <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2020.74.1.105>

Zaoui, F.Z., Ouinas, D., Tounsi, A. Viña Olay, J.A., Achour B., & Touahmia, M. (2020), “Fundamental frequency analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties based on improved exponential-trigonometric two-dimensional higher shear deformation theory”, *Archive of Applied Mechanics*. <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01793-1>

Communications Nationales et Internationales

Zaoui, F.Z., Hanifi Hachemi Amar, L., Younsi, A., Tounsi, A., Ouinas, D. “Analyse dynamique des plaques composites en utilisant une théorie de déformation d’ordre élevé”, *Les 3èmes Journées d’Etudes sur La Mécanique des Structures et des Matériaux : Approches Expérimentales & Simulations Numériques*, Avril 11-12, 2017, Sidi Bel Abbes, Algérie.

Hanifi Hachemi Amar, L., Adda Bedia, E.A., **Zaoui, F.Z.**, Kaci, A., Redha, Y., Tounsi, A. “Analyse du comportement statique des plaques épaisses non-homogène reposant sur des fondations élastiques”, *Les 3èmes Journées d’Etudes sur La Mécanique des Structures et des Matériaux : Approches Expérimentales & Simulations Numériques*, Avril 11-12, 2017, Sidi Bel Abbes, Algérie.

Hanifi Hachemi Amar, L., **Zaoui, F.Z.**, Benchohra, M., Kaci, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. “Comportement non-linéaire d’une plaque non homogène en flexion cylindrique sous chargement uniforme”, *The 1st Students Symposium on Engineering Application of Mechanics*, Avril 19-20, 2017, Mascara, Algérie.

Hanifi Hachemi Amar, L., **Zaoui, F.Z.**, Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. “dynamic response of functionally graded microbeam based on modified couple stresses”, *The First Students Symposium on Engineering Application of Mechanics*, Avril 19-20, 2017, Mascara, Algérie.

Younsi, A., **Zaoui, F.Z.**, Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Kheroubi, B. “Etude du comportement dynamique des plaques FGM en utilisant une théorie de déformation d’ordre élevé”, *The international Conference on Mechanics and Aeronautics*, Octobre 29-30, 2017, Khenchla, Algérie.

Zaoui, F.Z., Hanifi Hachemi Amar, L., Younsi, A., Tounsi, A., Ouinas, D. “Analysis of mechanical behavior of functionally graded plates resting on two parameters elastic foundation”, *3rd International Symposium on Materials and Sustainable Development*, Novembre 07-08, 2017, Boumerdes, Algérie.

Zaoui, F.Z., Hanifi Hachemi Amar, L., Abualnour, M., Younsi, A., Tounsi, A., Ouinas, D. “Analyse dynamique des plaques FGM reposant sur fondations élastiques”, *4ème Séminaire sur les Technologies Mécaniques Avancées*, Novembre 14-15, 2017, Tlemcen, Algérie.

Zaoui, F.Z., Hanifi Hachemi Amar, L., Tounsi, A., Younsi, A., Ouinas, D. “Analyse de l’effet des propriétés matérielles sur la vibration libre des plaques FGM ”, *International symposium on construction, Management and Civil Engineering*, Novembre 15-16, 2017, Skikda, Algérie.

Zaoui, F.Z., Hanifi Hachemi Amar, L., Tounsi, A., Younsi, A., Ouinas, D. “Analyse du comportement dynamique des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques”, *Ières Journées Nationales sur les Structures et les Matériaux Nano-Composites*, Novembre 29-30, 2017, Sidi Bel Abbes, Algérie.

Hanifi Hachemi Amar, L., Klouche, F., **Zaoui, F.Z.**, Kaci, A., Tounsi, A. “Analyse des micro-poutres poreuses fonctionnellement graduées”, *Ières Journées Nationales sur les Structures et les Matériaux Nano-Composites*, Novembre 29-30, 2017, Sidi Bel Abbes, Algérie.

Zaoui, F.Z., Naim, I.M., Ahoual, M., Abualnour, M., Tounsi, A., Ouinas, D. “A Higher-Order Shear Deformation Theory for Dynamic Behavior Analysis of Advanced Composite Beams”, *The Second Students Symposium on Engineering Application of Mechanics (SSEAM’2)*, December 13-14, 2017, Chlef, Algérie.

Hanifi Hachemi Amar, L., **Zaoui, F.Z.**, Kaci, A., Tounsi, A. “Analysis of thick beams”, *The Second Students Symposium on Engineering Application of Mechanics (SSEAM’2)*, December 13-14, 2017, Chlef, Algérie.

Ahoual, M., Bourada, F., **Zaoui, F.Z.**, Tounsi, A. “Study of the mechanical stability of nano-beams in heterogenous material”, *The Second Students Symposium on Engineering Application of Mechanics (SSEAM’2)*, December 13-14, 2017, Chlef, Algérie.

UNIVERSITE DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE



UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

Thèse de Doctorat

Fatima Zohra ZAOUI

Contribution à l'étude de la vibration libre des structures fonctionnellement graduées (FGM) par l'intermédiaire des théories de déformation de cisaillement avancées.

Contribution to the study of the free vibration of functionally graded structures (FGMs) based on advanced shear strain theories.

Résumé

Dans ce travail, trois théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (2D, quasi-3D, quasi-3D hybride) sont présentées pour analyser le comportement des vibrations libres des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées et reposantes sur des fondations élastiques. Ces théories considèrent des distributions paraboliques des déformations de cisaillement à travers l'épaisseur tout en assurant la nullité des contraintes de cisaillement sur les bords libres de la plaque sans utiliser des facteurs de correction de cisaillement. Les propriétés matérielles sont supposées variables dans le sens à l'épaisseur de la plaque d'une façon continue selon une loi de puissance. Les équations de mouvement ont été dérivées à partir du principe d'Hamilton. Les solutions analytiques de la réponse dynamique des plaques sont obtenues en se basant sur la méthode afin de satisfaire les conditions d'appui. Les investigations numériques sont présentées pour montrer l'effet de la composition matérielle, la géométrie de la plaque et les coefficients de rigidité des fondations élastiques sur les caractéristiques vibratoires des plaques FG. L'influence des propriétés matérielles dépendantes et indépendante de la température sur les fréquences naturelles des plaques FGM simplement appuyées dans un environnement thermique a été aussi examinée. On peut conclure que les présentes théories sont non seulement précises et efficaces mais aussi simples pour la prédiction des réponses vibratoires des plaques FG reposant sur des appuis simples ou élastiques.

Mots clés : Plaques Fonctionnellement Graduées, Théories de Déformation de Cisaillement, Propriétés Matérielles, Vibration, Fréquence Naturelle, Fondation Elastique, Environnement Thermique, Propriétés Dépendantes de la Température.

Abstract

In this work, three high order shear strain theories (2D, quasi-3D, quasi-3D hybrid) are presented to analyze the free vibration of simply supported functionally graded plates and resting on elastic foundations. These theories consider parabolic distributions of shear strain across the thickness satisfying the nullity of shear stresses at the free edges of the plate without using shear correction factors. The material properties are assumed to vary continuously and smoothly across the thickness of the plate according to a power law function. The equations of motion are derived from Hamilton's principle. Analytical solutions of the dynamic response of FG plates are obtained based on the Navier's method in order to satisfy the boundary conditions. Numerical investigations are carried out to study thoroughly the effect of material composition, plate geometry, and foundation stiffness coefficients on the vibration characteristics of FG plates. The influence of temperature-dependent and temperature-independent material properties on the natural frequencies of simply supported FG plates in a thermal environment has also been discussed. It can be concluded that the present theories are not only accurate and efficient but also simple for predicting the vibration responses of simply supported FG plates on elastic foundations.

Key Words: Functionally Graded Plates; Higher Order Shear Deformation Theory; Material Properties; Vibration; Natural Frequency; Elastic Foundation; Thermal Environment; Temperature-dependent Material Properties.

