



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



POLYCOPIE DE COURS AVEC EXERCICES CORRIGES

électromagnétisme

Préparé par :

Dr. ABBES Charef

Ce cours est rédigé à l'intention des étudiants de 2^{ème} Année Licence
physique LMD

Année universitaire 2020-2021

Avant-propos

Ce cours d'électromagnétisme est destiné aux étudiants qui préparent, une licence dans le domaine des Sciences de la Matière « SM ». Cette matière enseignée en deuxième année Licence physique LMD (L2-S4).

Electromagnétisme est une des grandes branches de la physique dont le domaine d'application est considérable. Vu que c'est un champ très vaste j'ai préféré la méthode de simplifier le cours le plus possible en me basant surtout sur les notions qui sont très simples.

Ce polycopié est structuré en trois chapitres.

Dans le cadre du premier chapitre, nous allons rapporter quelques notions de bases, liées au calcul vectoriel qui sont nécessaires pour chaque étudiant pour entamer le cours de l'électromagnétisme

Le deuxième chapitre est consacré aux lois fondamentales de l'électromagnétisme qui sont décrites par les équations de Maxwell. L'objectif de ce chapitre est de rappeler les lois de l'électrostatique et de la magnétostatique puis le passage en régime variable afin d'établir les équations de Maxwell.

Le troisième chapitre traite la propagation des ondes électromagnétiques. Le champ électromagnétique décrit par la théorie de Maxwell présente, quelle que soit son origine, une série de propriétés caractéristiques qu'il importe de mettre en évidence.

Toutefois, dans ce polycopié, quelques exercices résolus dont plusieurs livres font référence, sont introduit après chaque chapitre.

Les calculs de ce travail ont été effectués en utilisant Maple TM

TABLE DES MATIERES

Avant-propos

CHAPITRE I : CALCUL VECTORIEL ET OUTILS MATHÉMATIQUES	4
1. REPRÉSENTATION D'UN POINT DANS L'ESPACE	5
2. CIRCULATION ET FLUX D'UN VECTEUR	7
3. OPÉRATEURS VECTORIELS	9
4. THÉOREME DE LA DIVERGENCE (THÉOREME DE GREEN-OSTROGRADSKY)	13
5. THÉOREME DE STOKES	14
Exercices	14
Corrigés	15
CHAPITRE II : ÉQUATIONS DE MAXWELL	20
1. LES LOIS DE L'ELECTROSTATIQUE	22
2. RAPPELS D'ELECTRODYNAMIQUE	30
3. LES LOIS DE LA MAGNETOSTATIQUE	35
4. LES PHÉNOMÈNES DÉPENDANT DU TEMPS	43
5. INTERPRÉTATION PHYSIQUE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL	47
Exercices	49
Corrigés	52
CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES	61
1. ÉQUATION D'ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE :	62

2. POLARISATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES	73
3. ONDES PLANES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS UN MILIEU MATÉRIEL LINÉAIRE.	79
4. VITESSE DE PHASE ET VITESSE DE GROUPE	82
5. CONSERVATION DE L'ÉNERGIE ELECTROMAGNETIQUE, LE VECTEUR DE POYNTING :	83
6. REFLEXION ET REFRACTION	85
Exercices	95
Corrigés	96
BIBLIOGRAPHIE	101

Chapitre 1

CALCUL VECTORIEL ET OUTILS MATHÉMATIQUES

Introduction

La physique étudie les phénomènes et exprime leur description à travers les relations mathématiques entre les grandeurs physiques. Les quantités impliquées ont des caractéristiques différentes, certaines peuvent être représentées par des scalaires et d'autres sont des quantités orientées qui sont représentées par des vecteurs.

Dans ce chapitre, nous allons étudier les éléments du calcul vectoriel nécessaires pour pouvoir exprimer et mieux comprendre les lois de l'électromagnétisme, nous traitons des grandeurs scalaires telles que la charge électrique et le courant et des grandeurs vectorielles telles que le champ électrique ou magnétique.

Ce chapitre ne sert que de résumé des éléments de calcul vectoriel utilisés tout au long de ce cours. Par conséquent, il ne prétend pas un développement rigoureux de l'ensemble des propriétés, théorèmes, etc. qui sont énoncés.

Objectifs

- Utilisation des opérateurs vectoriels de base, utilisés dans les lois fondamentales de l'électromagnétisme : le gradient, la divergence, le rotationnel et Laplacien au moins en coordonnées cartésiennes.
- Maîtriser le calcul de la circulation et le flux d'un vecteur.
- Se familiariser avec le théorème de la divergence (théorème de Green-Ostrogradsky) et le Théorème de Stokes.

Plan

1. REPRÉSENTATION D'UN POINT DANS L'ESPACE.
2. CIRCULATION ET FLUX D'UN VECTEUR
3. OPÉRATEURS VECTORIELS
4. THEOREME DE LA DIVERGENCE (THEOREME DE GREEN-OSTROGRADSKY).
5. THEOREME DE STOKES

1. REPRÉSENTATION D'UN POINT DANS L'ESPACE :

On se placera toujours dans un repère orthonormé $Oxyz$, de vecteurs unitaires $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Un point M de R^3 en mouvement dans ce référentiel, peut être repéré à l'instant t par ses trois coordonnées cartésiennes, x, y, z .

1.1. Coordonnées cartésiennes :

On appelle vecteur position le vecteur \overrightarrow{OM} et on écrit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\text{avec } \overrightarrow{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

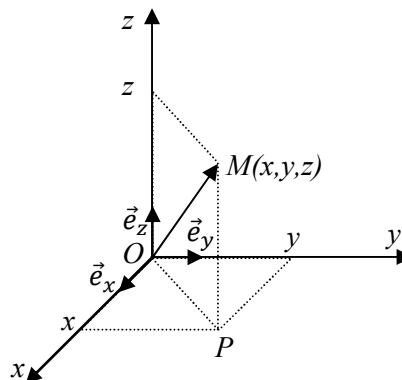


Figure 1.1 : Le système de coordonnées cartésiennes

Le déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ du point M entre les instants t et $t + dt$, n'est rien d'autre que le vecteur :

$$d\vec{r} = d\overrightarrow{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

Ce déplacement élémentaire permet de définir un volume élémentaire :

$$d\tau = dx dy dz$$

1.2. Coordonnées cylindriques :

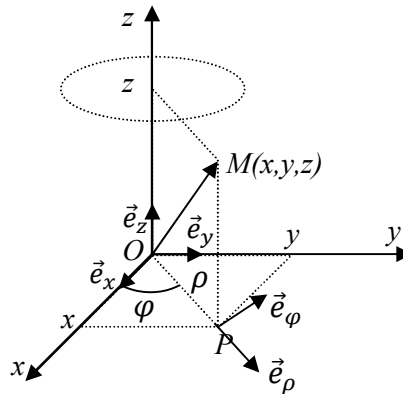


Figure 1.2 : Le système de coordonnées cylindriques

Le point M est parfaitement repéré par sa coordonnée z et les coordonnées polaires ρ , φ du point P , le projeté de M sur le plan xoy . La base associée est composée des vecteurs unitaires \vec{e}_ρ , \vec{e}_φ et \vec{e}_z .

Le vecteur position s'écrit alors :

$$\vec{r} = \overline{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

tel que : $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$

Le déplacement élémentaire $d\overline{OM}$ s'écrit :

$$d\vec{r} = d\overline{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z$$

Le volume élémentaire s'écrit alors : $d\tau = \rho d\rho d\varphi dz$.

Remarque :

- ✓ **Les coordonnées polaires** sont un système de coordonnées permettant le repérage de chaque point P dans un plan par rapport à un point fixe O (l'origine) par les deux coordonnées ρ et φ . ρ est la distance de l'origine au point P et φ est l'angle formé par le vecteur \overline{OP} et généralement l'axe des x .

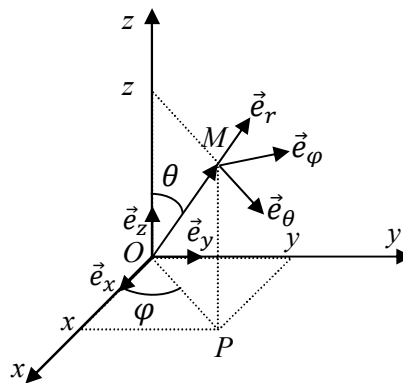


Figure 1.3 : Le système de coordonnées sphériques

1.3. Coordonnées sphériques :

Le point M est localisé par le triplet (r, φ, θ) . Le repère est défini par la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$. La position du point M qui est donnée par :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

Telque :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

l'expression du déplacement élémentaire devient :

$$d\vec{r} = d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + r \sin \theta d\varphi\vec{e}_\varphi + r d\theta\vec{e}_\theta$$

On en déduit alors l'expression du volume élémentaire :

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$$

2. CIRCULATION ET FLUX D'UN VECTEUR :

2.1. Définition d'un Champ de vecteurs et d'un champ scalaire :

Le champ d'une grandeur physique U correspond à un espace où, cette grandeur peut être mesurée ou exprimée en tous points. Si U est une grandeur scalaire, on parle de champ scalaire (champ de température, champ de pression, potentiel électrique). Si U peut être modélisée par vecteur on parle de champ vectoriel (champ électrique, champ magnétique, champ des vitesses d'un fluide en écoulement).

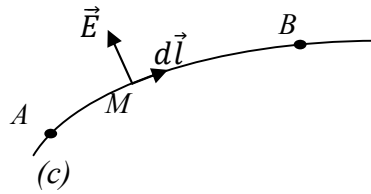


Figure 1.4 : Circulation de \vec{E} le long du chemin (AB)

Remarque :

- ✓ Un champ scalaire ou vectoriel, exprime une particularité locale à chaque point de l'espace considéré.
- ✓ Les champs peuvent dépendre du temps.
- ✓ Un champ est dit uniforme s'il est constant en tout point M du domaine sur lequel il est défini.

2.2. Circulation d'un vecteur

Soit un champ de vecteurs $\vec{E}(M)$ et une courbe orientée (c) .

La circulation élémentaire de $\vec{E}(M)$ est donnée par :

$$dC = \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}$$

Avec $d\vec{l}$ est le déplacement élémentaire.

La circulation de $\vec{E}(M)$ le long du chemin (AB) est :

$$C_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} \quad (1.1)$$

Sur un chemin fermé la circulation s'écrit :

$$C = \oint \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} \quad (1.2)$$

Propriétés :

- ✓ La circulation d'une somme de champs est égale la somme des circulations des champs

$$\int_{(c)} \sum_i \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = \sum_i \left(\int_{(c)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} \right)$$

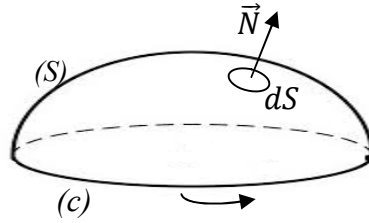


Figure 1.5 : Flux de \vec{E} à travers une surface ouverte

- ✓ la circulation sur un chemin fermé ($C = \oint \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}$) est nulle seulement si le Champ dérive d'un potentiel.
- ✓ En coordonnées cartésiennes dC est donnée par : $dC = E_x dx + E_y dy + E_z dz$,
 En coordonnées cylindriques : $dC = E_r dr + rE_\theta d\theta + E_z dz$
 Et en coordonnées sphériques : $dC = E_r dr + rE_\theta d\theta + rE_\varphi \sin \theta d\varphi$

2.3. Flux d'un vecteur

Soit un champ de vecteurs $\vec{E}(M)$ et une surface élémentaire dS .

Le flux élémentaire :

$$d\phi = \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \vec{E}(M) \cdot \vec{N} \cdot dS$$

Le flux à travers une surface ouverte :

$$\phi = \iint_S \vec{E}(M) \cdot \vec{N} \cdot dS \quad (1.3)$$

Le vecteur unitaire \vec{N} , est normal à la surface dS . Son sens est défini par l'orientation du contour (c) , sur lequel s'appuie la surface S .

Dans le cas d'une surface fermée, il est impossible de définir le contour (c) . Par convention \vec{N} est orienté de l'intérieur vers l'extérieur.

Exemple : soit $\vec{E}(M) = f(r)\vec{e}_r$. Calculer le flux de $\vec{E}(M)$ à travers une sphère de centre O et de rayon r .

$$\phi = \iint_S \vec{E}(M) \cdot \vec{N} \cdot dS = \iint_S f(r)\vec{e}_r \cdot \vec{N} \cdot dS = 4\pi r^2 f(r)$$

Car \vec{e}_r et \vec{N} sont parallèles et $f(r)$ est constant quand on se déplace sur la sphère.

3. OPÉRATEURS VECTORIELS

3.1. Définition

On appelle opérateur une application linéaire agissant sur un champ scalaire ou un champ de vecteurs.

3.2. Opérateur nabla

L'opérateur nabla est un vecteur noté $\vec{\nabla}$, qui est défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

3.3. Opérateur gradient

Soit une fonction scalaire f dépendant des trois coordonnées x, y, z . La différentielle df définit l'accroissement de la fonction.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Cette différentielle peut être écrite comme le produit scalaire des vecteurs \vec{A} et $d\vec{r}$:

$$\vec{A} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

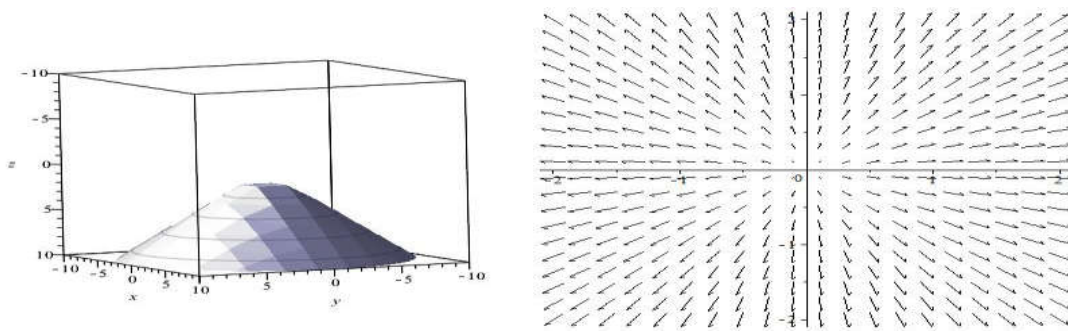
Le vecteur \vec{A} est appelé gradient de la fonction f et on le note :

$$\vec{\nabla} f = \overrightarrow{\text{grad} f}$$

La différentielle df peut s'écrire alors :

$$df = (\overrightarrow{\text{grad} f}) \cdot d\vec{r} \quad (1.4)$$

L'accroissement df est donc maximum quand $d\vec{r}$ a la même direction que le gradient. *Le gradient d'une fonction f est un vecteur dont la direction pointe vers la variation maximum de f en fonction des coordonnées d'espace.*



Surface en 3D

gradient de f

Figure 1.6 : Représentation du gradient de la fonction f .

Propriétés :

- ✓ Le gradient transforme un champ scalaire en un champ de vecteurs.
- ✓ On appelle surface de niveau β de la fonction $f(x,y,z)$ l'ensemble des points pour lesquels $f(x,y,z) = \beta = Cte$.
- ✓ le vecteur $\overrightarrow{grad}f$ normal à la surface de niveau.
- ✓ le vecteur $\overrightarrow{grad}f$ est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f .
- ✓ Circulation d'un gradient :

$$C_{AB} = \int_{\overline{AB}} \overrightarrow{grad}f \cdot d\vec{l} = \int_{f(A)}^{f(B)} df = f(B) - f(A)$$

- Elle est égale à la variation de f et ne dépend pas du chemin parcouru.
- Dans le cas d'un parcours fermé on a :

$$C_{AB} = 0$$

Exemple : La figure 1.6 représente le gradient de la fonction: $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$

3.4. Opérateur divergence

La divergence est un opérateur utilisé pour caractériser un champ de vecteurs. La divergence d'un champ de vecteurs \vec{E} mesure combien le champ s'étend en un point donné. La divergence d'un vecteur \vec{E} est définie par le produit scalaire de l'opérateur « nabra » avec ce vecteur. Le résultat est un scalaire :

$$div\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Exemple : Calculer la divergence du champ de vecteurs : $\vec{E} = xy\vec{e}_x + (y^2 - z^2)\vec{e}_y + yz\vec{e}_z$

Remarques :

- ✓ Un champ à flux conservatif est un champ dont le flux à travers toute surface fermée est nul.
- ✓ \vec{E} est à flux conservatif $\Rightarrow \exists \vec{A}, \vec{E} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$.

3.5. Opérateur Rotationnel :

Un autre opérateur utilisé pour caractériser un champ de vecteurs est le rotationnel. Le rotationnel permet de déterminer la position où le champ tourne autour d'une de ces sources. Autrement dit, le rotationnel exprime la tendance qu'a un champ à tourner autour d'un point P . Le rotationnel d'un vecteur \vec{E} est le résultat du produit vectoriel de l'opérateur « nabra » et ce vecteur.

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

Remarques :

- ✓ Si la circulation d'un champ de vecteur est nulle le long de tout contour fermé, on dit que ce champ est à circulation conservative.
- ✓ \vec{E} est à circulation conservative $\Rightarrow \overrightarrow{rot} \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \exists U, \vec{E} = \overrightarrow{grad} U$

3.6. Opérateur Laplacien

L'opérateur Laplacien (noté Δ) est défini par :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Remarques :

- ✓ Laplacien peut s'appliquer à une fonction scalaire : $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \overrightarrow{div}(\overrightarrow{grad}(V))$

Cet opérateur permet de relier le potentiel à ses sources.

✓ Il peut s'appliquer également à un champ de vecteurs :

$$\Delta \vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = \overrightarrow{grad}(\operatorname{div}(\vec{A})) - \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \Delta A_x \vec{e}_x + \Delta A_y \vec{e}_y + \Delta A_z \vec{e}_z$$

La aussi le Laplacien permet de relier le champ à ses sources.

4. THEOREME DE LA DIVERGENCE (THEOREME DE GREEN-OSTROGRADSKY) :

Le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface *fermée est* équivalent à l'intégrale de sa divergence étendue au volume délimité par cette surface fermée :

$$\oiint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \iiint_\tau \operatorname{div} \vec{E} \, d\tau \quad (1.5)$$

5. THEOREME DE STOKES

La circulation d'un champ de vecteurs sur un contour fermé orienté (c) est équivalent au flux de son rotationnel à travers toute surface (S) s'appuyant sur ce contour.

$$\oint_c \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = \iint_S (\overrightarrow{rot}\vec{E}) \cdot d\vec{S} \quad (1.6)$$

Remarque : Les opérateurs vectoriels présentent un intérêt particulier, En effet, ils permettent d'une part une écriture concise des équations locales (exemple : équations de Maxwell), et d'autre part, de simplifier les calculs.

Exercices

Exercice 01 :

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}$ est normal à la surface de niveau.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}f$ est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f .
3. Calculer $\overrightarrow{\text{grad}}(r)$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)$.
4. Calculer $\text{div}(\vec{r})$ et en déduire que pour un champ coulombien : $\vec{E} = k \frac{\vec{r}}{r^3}$ on a $\text{div}(\vec{E}) = 0$.
5. Montrer que : $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0, (r \neq 0)$.
6. Calculer $\text{rot}(\vec{r})$ et $\text{rot}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$ et en déduire qu'un champ coulombien est un champ de gradient.

Exercice 02 :

Soit f un champ scalaire et soient \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} des champs vectoriels. On demande de vérifier les relations suivantes :

$$\text{div}(f\vec{A}) = f\text{div}\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot \vec{A} \qquad \text{rot}(f\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}f \times \vec{A} + f\text{rot}\vec{A}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \qquad \text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

$$\text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}}f) = \vec{0} \text{ et } \text{div}(\text{rot}\vec{A}) = 0 \qquad \text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot}\vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot}\vec{B}$$

Exercice 03 :

Un champ de vecteurs \vec{E} , dans l'espace orthonormé $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ est caractérisé par ses composantes :

$$\vec{E} \begin{cases} yz \\ zx \\ f(x, y) \end{cases}$$

Déterminer f pour que \vec{E} dérive d'un potentiel V . déterminer alors le potentiel V . Quelle est la circulation du champ \vec{E} entre les points $A(0,0,0)$ et $B(1,1,1)$?

Exercice 04 :

Vérifier le théorème de Stokes pour le champ de vecteurs :

$$\vec{V}(M) = 2y\vec{e}_x + 3x\vec{e}_y - z^2\vec{e}_z$$

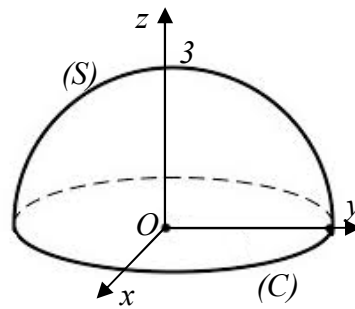


Figure 1.7

dans le cas où S est la surface de l'hémisphère supérieure (figure 1.7) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, et (C) le contour sur lequel s'appuie cet hémisphère.

Exercice 05 :

On considère le champ vectoriel à symétrie sphérique : $\vec{V} = a\vec{r}$ et la sphère de rayon r centrée en O. Vérifier le théorème d'Ostrogradsky en calculant le flux de \vec{V} à travers la surface de la sphère (figure 1.8).

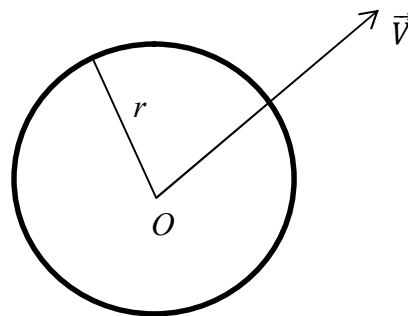


Figure 1.8

Corrigés

Exercice 01 :

1. Soit une surface de niveau $f(x, y, z) = \alpha$.

Pour un point M se déplaçant sur cette surface, on a :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}f} \cdot d\overrightarrow{OM} = 0$$

⇒ Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}f}$ est normal à la surface de niveau.

2. Soit deux points M_1 et M_2 sur deux surfaces de niveau $f_1 = \alpha_1$ et $f_2 = \alpha_2 > \alpha_1$

On a :

$$df = \alpha_2 - \alpha_1 = \overrightarrow{\text{grad}f} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} > 0$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}f$ est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f .

3. Calcul de $\overrightarrow{\text{grad}}(r)$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)$.

$$\text{On a : } r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(r)|_x = \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{x}{r} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(r) = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)|_x = \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{-x}{r^3} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

4. Calcul de $\text{div}(\vec{r})$ et $\text{div}(\vec{E}) = 0$

$$\text{div}(\vec{r}) = 3$$

$$\text{div}\vec{E} = \text{div}\left(k \frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{k}{r^3} \text{div}\vec{r} + \vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{k}{r^3}\right) = \frac{3k}{r^3} + \vec{r} \cdot \left(-\frac{3k}{r^4}\right) \frac{\vec{r}}{r} = 0$$

5. $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0, (r \neq 0)$

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \text{div}\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$$

6. Calcul de $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{r})$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$ et en déduire qu'un champ coulombien est un champ de gradient.

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{r}) = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right) \times \vec{r} + \frac{1}{r^3} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{r}) = \vec{0}$$

$$\vec{E} = k \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

Exercice 02 : Soit f un champ scalaire et soient \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} des champs vectoriels :

1. $\text{div}(f\vec{A}) = f \text{div}\vec{A} + \overrightarrow{\text{Agrad}}f$

$$\text{div}(f\vec{A}) = \frac{\partial f A_x}{\partial x} + \frac{\partial f A_y}{\partial y} + \frac{\partial f A_z}{\partial z} = f \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + A_x \frac{\partial f}{\partial x} + A_y \frac{\partial f}{\partial y} + A_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \text{div}(f\vec{A}) = f \text{div}\vec{A} + \overrightarrow{\text{Agrad}}f$$

2. $\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}f \times \vec{A} + f \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{A})|_x &= \frac{\partial f A_z}{\partial y} - \frac{\partial f A_y}{\partial z} = f \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \left(A_z \frac{\partial f}{\partial y} - A_y \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &\Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{A})|_x = \overrightarrow{\text{grad}}f \times \vec{A}|_x + f \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}|_x\end{aligned}$$

d'où : $\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}f \times \vec{A} + f \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$

3. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

$$\begin{aligned}\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})|_x &= A_y(B_x C_y - B_y C_x) - A_z(B_z C_x - B_x C_z) + A_x B_x C_x - A_x B_x C_x \\ &\Rightarrow \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})|_x = B_x(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_x(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\ &= B_x(\vec{A} \cdot \vec{C}) - C_x(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}|_x\end{aligned}$$

d'où : $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

4. $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A})|_x &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_x}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) A_x \\ &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A})|_x - \Delta\vec{A}|_x\end{aligned}$$

d'où : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

5. $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}f) = \vec{0}$ et $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = 0$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}f) = \vec{V} \times \vec{V}f = \vec{0} \text{ car } \vec{V} \times \alpha\vec{V} = \vec{0}$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \vec{V} \cdot (\vec{V} \times \vec{A}) = 0 \text{ car } \vec{V} \cdot (\vec{V} \times \vec{W}) = 0$$

6. $\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}$

$$\begin{aligned}\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \frac{\partial}{\partial x} (A_y B_z - A_z B_y) + \frac{\partial}{\partial y} (A_z B_x - A_x B_z) + \frac{\partial}{\partial z} (A_x B_y - A_y B_x) \\ &= B_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + B_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + B_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &\quad - A_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - A_y \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) - A_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \\ &\Rightarrow \text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}\end{aligned}$$

Exercice 03 : Un champ de vecteurs \vec{E} , dans l'espace orthonormé $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ est caractérisé par ses composantes :

$$\vec{E} = yz\vec{e}_x + zx\vec{e}_y + f(x, y)\vec{e}_z$$

Pour que \vec{E} soit un gradient il faut que son rotationnel soit nul :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = x \\ \frac{\partial f}{\partial x} = y \\ z = z \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \Rightarrow f(x, y) = xy + g(x)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = y + \frac{dg(x)}{dx} = y \Rightarrow \frac{dg(x)}{dx} = 0 \Rightarrow g(x) = C \text{ (C est une constante)}$$

La fonction f doit donc être de la forme :

$$f(x, y) = xy + C$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \Rightarrow \begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = yz \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = xz \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = xy + C \end{cases}$$

d'où :

$$V(x, y, z) = -xyz + Cz + cte$$

La circulation du champ \vec{E} entre les points $A(0,0,0)$ et $B(1,1,1)$:

$$\begin{aligned} C_{AB} &= \int_{\overline{AB}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\overline{AB}} -\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = - \int_{V_A}^{V_B} dV \\ &\Rightarrow C_{AB} = V(0,0,0) - V(1,1,1) = 1 + C \end{aligned}$$

Exercice 04 :

$$\vec{V}(M) = 2y\vec{e}_x + 3x\vec{e}_y - z^2\vec{e}_z$$

a. Le théorème de Stokes :

$$C = \oint_C \vec{V}(M) \cdot d\vec{l} = \iint_S (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}) \cdot d\vec{S}$$

On a d'une part :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{dS} = dS\vec{N} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{N}$$

$$\vec{e}_z \cdot \vec{N} = \|\vec{e}_z\| \cdot \|\vec{N}\| \cos \theta$$

$$C = \iint_S (\overrightarrow{rot\vec{V}}) \cdot \vec{N} dS = \iint_S \vec{e}_z \cdot \vec{N} dS = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

d'où :

$$C = \pi R^2 = 9\pi$$

D'autre part :

$$d\vec{l} = R d\alpha \vec{e}_\alpha \text{ et } \vec{e}_\alpha = -\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y$$

d'où :

$$\vec{V}(M) \cdot d\vec{l} = -2yR \sin \alpha d\alpha + 3xR \cos \alpha d\alpha$$

$$C = \oint_C \vec{V}(M) \cdot d\vec{l} = -2R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha + 3R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha$$

$$\Rightarrow C = \pi R^2 = 9\pi$$

Exercice 05 :

Le champ vectoriel :

$$\vec{V} = a\vec{r}$$

On a d'une part :

$$\phi = \oiint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \oiint_S a\vec{r} \cdot d\vec{S} = \oiint_S a dS \vec{r} \cdot \vec{N} = ar^3 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

d'où :

$$\phi = 4\pi ar^3$$

$$\phi = \oiint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_\tau \operatorname{div}\vec{V} d\tau$$

D'autre part :

$$\phi = \iiint_\tau \operatorname{div}\vec{V} d\tau = \iiint_\tau 3a r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

d'où :

$$\phi = 4\pi ar^3$$

Chapitre 2

ÉQUATIONS DE MAXWELL

Introduction

Le 19^{ème} siècle a vu un apport considérable concernant le développement des différentes lois d'électromagnétisme et la prédiction de la propagation des ondes électromagnétiques. Des savants comme Coulomb, Laplace, Poisson, Gauss, Ampère, Ohm, Faraday, Lenz, Maxwell, Hertz, Lorentz...ont marqué par leurs travaux cette nouvelle ère de l'électricité. Les travaux de J. C. Maxwell sont particulièrement mis en relief à cause de son introduction de l'aspect purement mathématique dans l'interprétation des phénomènes électromagnétiques découverts à cette époque. La contribution de Maxwell a débuté en 1861 par sa publication intitulée « On Physical Lines of Forces » où il a introduit le concept de lignes de force, de flux, de champ...En 1864, dans son article « A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field » Maxwell a introduit un groupe d'équations dont quatre furent résumées par Heaviside en 1884 et éditées sous forme vectorielle connue de nos jours.

Objectifs

- Rappeler les lois de l'électrostatique et de la magnétostatique
- Établir les lois fondamentales de l'électromagnétisme, soit les équations de Maxwell.
- Connaitre le contenu physique des équations de Maxwell.

Plan

- 1 LES LOIS DE L'ELECTROSTATIQUE.
- 2 RAPPELS D'ELECTRODYNAMIQUE.
- 3 LES LOIS DE LA MAGNETOSTATIQUE.
- 4 LES PHENOMENES DEPENDANT DU TEMPS.
- 5 INTERPRETATION PHYSIQUE DES EQUATIONS DE MAXWELL

Introduction :

En physique, on distingue principalement quatre types de forces d'interaction pour décrire les phénomènes de la nature.

- ✓ Les forces agissantes entre différentes masses s'expliquent en termes d'interaction gravitationnelles. Ces forces sont à portée infinie mais deviennent négligeables à l'échelle microscopique.
- ✓ Les phénomènes de la désintégration (radioactivité α , β et γ) sont dus à la présence d'interactions faibles et de courtes portées.
- ✓ L'interaction forte est responsable de la stabilité du noyau. Alors que la force électrique a tendance à dissocier les protons du noyau, la force nucléaire nécessairement de courte portée, est attractive et intervient pour garantir la cohésion du noyau.
- ✓ La stabilité des atomes, des arrangements moléculaires et cristallins, l'interaction de la lumière avec la matière sont dues aux interactions électromagnétiques. L'interaction électromagnétique peut être attractive ou répulsive. Sa portée va de l'angström au mètre.

Dans le cadre de ce cours nous accorderons une attention particulière à l'interaction électromagnétique.

Les ondes électromagnétiques regroupent un large spectre de phénomènes physiques et d'applications : les ondes radio, la lumière visible, les rayons X... Toutes ces ondes sont décrites par le même formalisme : la propagation conjointe d'un champ électrique et d'un champ magnétique.

1. LES LOIS DE L'ELECTROSTATIQUE :

L'électrostatique est l'étude des systèmes de charges immobiles, donc le champ électrique ne varie pas en fonction du temps, il n'y a pas de courant électrique et par conséquent pas de champ magnétique.

- ✓ La charge est une propriété fondamentale de certaines particules. La valeur d'une charge est un multiple entier d'une constante fondamentale : la charge de l'électron $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{Coulomb}$.
- ✓ Un autre point important : la loi de la conservation de la charge, c'est un postulat fondamental physique. Les charges ne sont pas créées ou détruites, elles sont simplement redistribuées.
- ✓ Les distributions continues de charges : on définit les densités

$$\text{Linéique sur un fil } \lambda = \frac{dq}{dl} \text{ (Cm}^{-1}\text{)}$$

$$\text{Surfacique (ou superficielle) } \sigma = \frac{dq}{dS} \text{ (Cm}^{-2}\text{)}$$

$$\text{Volumique } \rho = \frac{dq}{d\tau} \text{ (Cm}^{-3}\text{)}$$

1.1. Loi de coulomb et champ électrostatique :

De la même façon que la gravité, la force s'exerçant entre deux particules stationnaires chargés électriquement, de charges q_1 et q_2 est proportionnelle au produit des charges $q_1 q_2$ et inversement proportionnelle au carré de la distance séparant les deux charges. La force est parallèle au segment joignant les deux charges et orientée, compte tenu du signe des charges. Il s'agit de la loi de Coulomb. La force de Coulomb s'écrit :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_{1 \rightarrow 2}}{r^2} \quad (2.1)$$

ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide $\left(\frac{1}{4\pi \epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{SI}\right)$

Si on place maintenant simultanément N charges q_i en P_i , une charge q placée en M subit alors la force

$$\vec{F} = q \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} = q \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_i}{r_i^2}$$

Par définition, l'intensité du champ électrique est la force par charge unitaire qu'une petite charge stationnaire de test ressentira quand elle est placée dans une région où un champ électrique existe.

Le champ électrique se mesure en Volt/mètre [V/m] où son équivalent, le Newton/Coulomb [N/C].

Le champ créé par une distribution continue s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \cdot \vec{u} \quad (2.2)$$

1.2. Première loi locale : théorème de Gauss :

Le théorème de Gauss lui aussi dérive de la loi de Coulomb. Rappelons que le flux du champ \vec{E} à travers une surface fermée (S) est égal à la somme algébrique des charges contenues dans cette surface :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\tau} \rho d\tau \quad (2.3)$$

En vertu du théorème de *Green-Ostrogradsky* il est possible d'écrire :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \text{div} \vec{E} \cdot d\tau \quad (2.4)$$

Où τ est le volume délimité par la surface (S). A partir de (1) et (2) on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante qui constitue *la forme locale du théorème de Gauss*:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.5)$$

Notons que le théorème de **Gauss** sous sa forme locale relie la densité locale des charges (qui constituent les sources du champ électrostatique) aux dérivées partielles de \vec{E} et pas à \vec{E} lui-même.

Le théorème de **Gauss** exprimé sous cette forme est une loi locale parce qu'elle relie le comportement de \vec{E} au voisinage infinitésimale d'un point donnée à la valeur de la densité de charges en ce point. Cependant, quand il est exprimé sous sa forme intégrale le théorème de **Gauss** est non local car il concerne une région finie et pas un point spécifique de l'espace.

Beaucoup de loi de la nature, en particulier les lois fondamentales de l'électromagnétisme peuvent être exprimés sous deux formes équivalentes de ce genre, l'une locale et l'autre non locale. Avec les formes locales des lois physiques, qui sont des équations différentielles, on considère les phénomènes comme le résultat de processus qui se produisent dans les environs immédiats de chaque point de l'espace.

1.3. Deuxième loi locale :

L'équation $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \right).$$

Nous disons que le champ électrostatique \vec{E} dérive d'un potentiel scalaire V qu'on appellera le potentiel électrostatique :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Le champ électrostatique obéit alors à la loi :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.6)$$

La circulation du champ \vec{E} le long d'une courbe fermée (c) est nulle :

$$C = \oint_{(c)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = \oint_{(c)} -\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = -\oint_{(c)} dV = 0$$

à l'aide du théorème de Stokes, on a la relation suivante :

$$\oint_{(c)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

avec (S) surface s'appuyant sur (c).

Ce qui implique :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0} \quad (2.7)$$

1.4. Equation de Poisson - équation de Laplace

En présence d'une distribution volumique de charge on peut écrire les deux lois locales :

$$\begin{cases} \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \\ \text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}}V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad (2.8)$$

C'est l'équation de **Poisson**. Elle relie la densité volumique de charge en un point donné aux dérivées secondes spatiales de V au voisinage de ce point.

Dans une région où la densité de charge est nulle on a : $\Delta V = 0$, l'équation de **Laplace**.

Le problème général consistant à trouver V dans le champ d'une distribution de charge donnée, revient à trouver une solution, soit à l'équation de Laplace soit à l'équation de Poisson, qui satisfait les conditions aux limites données.

1.5. Les conditions de passage à l'interface entre deux distributions de charges différentes

Soit une surface (Σ) chargée, portant une densité superficielle de charge σ et séparant deux milieux où règne un champ électrique \vec{E} . Nous allons établir les relations de passage du champ électrique du premier milieu au deuxième milieu.

1.5.1 Discontinuité de la composante normale du champ électrique

On considère le cylindre élémentaire de hauteur h représenté sur la figure 2.1, normal à la surface de séparation (Σ) et les deux surfaces de base S_1 et S_2 suffisamment petites pour considérer que le champ \vec{E} y est uniforme. D'après le théorème de *Gauss* :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \text{div} \vec{E} \cdot d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \rho d\tau$$

τ est le volume du cylindre. Lorsque $h \rightarrow 0$, la surface latérale tend vers zéro et le flux se réduit au flux à travers les deux bases, et puisque la charge est répartie en surface.

$$\oiint_{(S_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oiint_{(S_2)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \oiint_{(S_0)} \sigma dS$$

En tenant compte de l'orientation du vecteur normal à la surface vers l'extérieur de la surface.

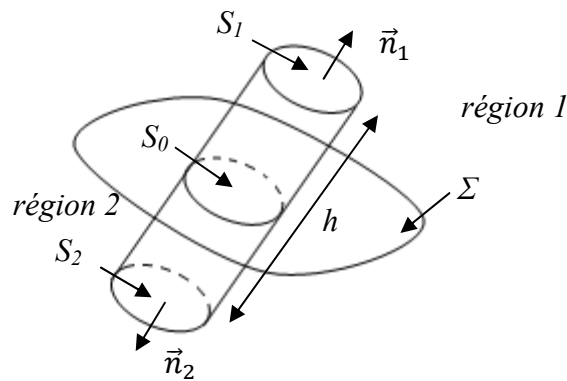


Figure 2.1

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{S}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{S}_2 = \frac{\sigma S_0}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{2N} S_2 - E_{1N} S_1 = \frac{\sigma S_0}{\epsilon_0}$$

Et comme S_1 et S_2 tendent vers S_0 on aboutit à :

$$E_{2N} - E_{1N} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.9)$$

La composante normale de \vec{E} subit une discontinuité proportionnelle à la densité surfacique σ . Elle ne se conserve que si l'interface ne porte pas de charge.

1.5.2 Continuité de la composante tangentielle du champ électrique :

Soit un contour rectangulaire élémentaire $A_1B_1B_2A_2$ représenté sur la figure 2.2, normal à (Σ) et délimitant une surface S . la circulation de \vec{E} le long du contour s'écrit :

$$\iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{A_1B_1B_2A_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}$$

$$= \oint_{A_1 B_1} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} + \oint_{B_1 B_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} + \oint_{B_2 A_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} + \oint_{A_2 A_1} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}$$

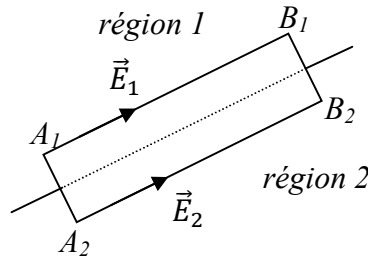


Figure 2.2

Lorsque $A_1 \rightarrow A_2$ et $B_1 \rightarrow B_2$ (la largeur tend vers 0 et S tend vers 0) de même $\oint_{B_1 B_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} \rightarrow 0$ et $\oint_{A_2 A_1} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{A_1 B_1} + \vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{B_2 A_2} = 0 \Rightarrow (E_{2T} - E_{1T}) A_1 B_1 = 0$$

$$\Rightarrow E_{2T} = E_{1T} \quad (2.10)$$

La composante tangentielle de \vec{E} se conserve, malgré la discontinuité de ρ sur la surface.

1.6. Energie électrostatique :

1.6.1. Cas d'une charge électrique q soumise à un potentiel électrique

Soit un ensemble de charges ponctuelles q_1, q_2, \dots, q_n aux repos en des points M_1, M_2, \dots, M_n . Amenons au point M une charge q . Comment définir et calculer, son énergie potentielle électrostatique dans le champ des charges (immobiles) q_i ?

Supposons que q soit amenée en M depuis l'infini (ou elle n'est plus soumise à l'action des charges q_i) et très lentement (de manière à rester, en tout instant, pratiquement dans état électrostatique. En chaque point P de sa trajectoire, la charge q est soumise au $\vec{E}(P)$ créée en P par les charges q_i , elle subit donc une force $\vec{F} = q\vec{E}(P)$, et pour que son déplacement soit effectivement très lent, il est nécessaire qu'une force extérieure \vec{f} non électrique s'oppose à l'action de \vec{F} . Le travail de cette force ($\vec{f} = -\vec{F}$) sur l'ensemble du déplacement de q entre l'infini et M , est :

$$E_P = W = \int_{\infty}^M \vec{f} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^M \vec{F} \cdot d\vec{r} = -q \int_{\infty}^M \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\begin{aligned}
 &= -q \int_{\infty}^M -\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \overrightarrow{dr} = q \int_{\infty}^M dV \\
 &\Rightarrow E_p = qV(M) \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

$V(M)$ est le potentiel crée en M par un ensemble de charges q_i .

L'énergie potentielle électrostatique d'une particule portant une charge électrique q placée en un point M entourée par un potentiel électrique V est définie comme le travail à fournir pour déplacer cette charge depuis l'infini jusqu'à la position M .

Remarque :

- ✓ Une charge ponctuelle isolée n'aura aucune énergie potentielle. En effet, elle crée un champ \vec{E} et un potentielle V , mais elle ne avoir une énergie potentielle qu'en interagissant avec un champ crée par d'autres charges, engendrant une force d'interaction.

1.6.2. Cas d'un système de charges ponctuelles :

Soit trois charges q_1, q_2, q_3 en des points M_1, M_2, M_3 . Il est naturel de définir l'énergie potentielle électrostatique de l'ensemble de cette distribution comme le travail qu'il faut fournir pour réaliser le système.

Pour ce faire, on peut imaginer qu'on a :

- Déplacer q_1 de l'infini vers M_1 : $\Rightarrow W_1 = 0$.
- Amené ensuite q_2 de l'infini vers M_2 : $W_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$, avec $r_{12} = M_1 M_2$
- Amené ensuite q_3 de l'infini vers M_3 où elle subit l'action de q_1 et q_2 :
 $W_3 = k \left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$, avec $r_{13} = M_1 M_3, r_{23} = M_2 M_3$

Le travail total pour réaliser le système est : $W = W_1 + W_2 + W_3 = E_p$

d'où : $E_p = k \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$

Pour une meilleur généralisation de cette expression, écrivons encore une fois cette même expression de E_p et ajoutons membre à membre les expressions on obtient :

$$2E_p = k \left(q_1 \left(\frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} \right) + q_2 \left(\frac{q_1}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{23}} \right) + q_3 \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right) \right)$$

$$\Rightarrow 2E_p = q_1V_1 + q_2V_2 + q_3V_3$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2 + q_3V_3)$$

Où V_1 est le potentiel créé en M_1 par (q_2 et q_3), V_2 le potentiel créé en M_2 par (q_1 et q_3) et V_3 le potentiel créé en M_3 par (q_1 et q_2).

Dans le cas général de n charges :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i \quad (2.12)$$

où V_i est le potentiel créé par l'ensemble des charges q_j différentes de q_i .

Cette énergie représente le travail réversible nécessaire pour construire le système de charges ponctuelles.

1.6.3. Cas d'une distribution continue de charge :

On peut étendre sans difficulté la sommation discontinue précédente à une sommation intégrale :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{\tau} V dq = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \rho V d\tau \quad (2.13)$$

Avec dq est la charge élémentaire soumise au potentiel V et $d\tau$ est l'élément de volume entourant le point M .

1.7. Densité d'énergie électrostatique :

En utilisant l'équation locale : $div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 div \vec{E}$

Donc l'expression de l'énergie électrostatique devient :

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \rho V d\tau = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \epsilon_0 V div \vec{E} d\tau$$

On a:

$$\begin{aligned} div(V\vec{E}) &= V div \vec{E} + \vec{E} \cdot \overrightarrow{grad} V \\ \Rightarrow V div \vec{E} &= div(V\vec{E}) - \vec{E} \cdot \overrightarrow{grad} V \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div}(V \vec{E}) - E^2$$

d'où :

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\tau} \operatorname{div}(V \vec{E}) d\tau + \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\tau} E^2 d\tau$$

La première intégrale s'écrit aussi à l'aide du théorème *Green-Ostrogradsky*

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\tau} \operatorname{div}(V \vec{E}) d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2} \iint_{(S)} V \vec{E} d\vec{S}$$

Le domaine d'intégration peut être étendu du volume (τ) à l'espace entier, ceci revient à prolonger ρ par une fonction nulle à l'extérieur de τ . Puisque \vec{E} varie comme r^{-2} , V comme r^{-1} et la surface varie comme r^2 , donc :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{(S)} V \vec{E} d\vec{S} \rightarrow 0$$

Par conséquent E_p peut s'écrire sous la forme :

$$E_p = \iiint_{\text{espace}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau$$

On peut définir la densité d'énergie électrostatique par la formule, donnée ici dans le vide :

$$\frac{dE_p}{d\tau} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad (2.14)$$

Cette équation suggère que s'il y a un champ électrique \vec{E} , il apparaît une densité d'énergie électrostatique.

2. RAPPELS D'ELECTRODYNAMIQUE

Les électrons d'un conducteur peuvent être répartis en deux catégories : charges immobiles liés fortement au noyau et les électrons moins liés aux noyaux responsables de conduction. En électrostatique on s'intéresse uniquement aux charges immobiles. Quand on veut étudier les charges mobiles, on doit introduire un autre champ, le champ magnétique \vec{B} et aussi une densité de courant \vec{j} rendant compte du déplacement des

charges. Relier cette densité de courant en un point d'un conducteur, au champ électrique \vec{E} en ce point constitue le but de l'électrocinétique.

2.1. Courant électrique :

2.1.1. Vecteur densité de courant :

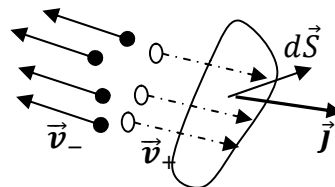


Figure 2.3

Par définition l'intensité du courant s'écrit :

$$\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{V}_i$$

ρ_i la densité volumique des porteurs de charges i et \vec{V}_i leur vitesse moyenne.

$\rho_i = n_i q_i$ avec n_i le nombre de charges par unité de volume.

Si le courant est dû exclusivement à des électrons de charges $(-e)$ de nombre n_- par unité de volume et à des ions de charges $(+e)$ de nombre n_+ , \vec{j} s'écrit :

$$\vec{j} = e(n_+ \vec{v}_+ - n_- \vec{v}_-)$$

Où \vec{v}_- et \vec{v}_+ sont respectivement les vitesses moyennes des électrons et des ions.

Par conséquent les densités de courant des charges positives et des charges négatives sont de même sens.

L'introduction du vecteur \vec{j} se justifie par son intervention dans l'ensemble des formules qui décrivent les propriétés des courants électriques.

2.1.2. Intensité du courant électrique :

Le courant correspond à un mouvement de charges électriques. On considère un volume élémentaire centré sur un point M . Soit un cylindre de base dS et de hauteur dl colinéaire au courant électrique.

Le volume élémentaire $d\tau = d\vec{S} \cdot d\vec{l}$, contient $dN = n d\tau$ porteurs de charges libres q .

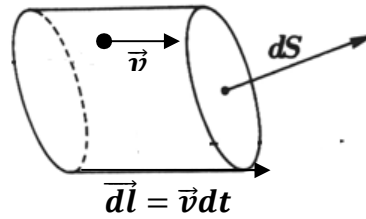


Figure 2.4

La charge du volume $d\tau$ est donc : $dq = q dN = nq d\tau = nq d\vec{S} \cdot d\vec{l}$

Les charges mobiles possédant la vitesse \vec{v} parcourant la hauteur dl pendant dt telque :

$$d\vec{l} = \vec{v} dt$$

Ainsi l'intensité élémentaire di du courant électrique qui traverse l'élément de surface dS est donnée par :

$$di = \frac{dq}{dt} = q \frac{dN}{dt} = nq \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot d\vec{S} = nq \vec{v} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow I = \oiint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (2.15)$$

2.1.3. Conservation de la charge

Parmi les principes de conservation sur quoi repose la physique (conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie etc.) figure un principe de conservation de la charge électrique.

Soit (S) une surface entièrement fermée prise à l'intérieur d'un conducteur et délimitant le volume τ , soit \vec{n} la normale à la surface en tout point. A l'instant t , la charge Q s'écrit en fonction de la charge volumique totale ρ et le volume (τ) comme :

$$Q(t) = \iiint_{\tau} \rho(r, t) d\tau$$

à l'instant $t+dt$: $Q(t+dt) = \iiint_{\tau} \rho(r, t+dt) d\tau$

La variation de la charge entre t et $t+dt$ est : $dQ = Q(t+dt) - Q(t)$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \quad (2.16)$$

Intéressons nous maintenant à la charge qui a traversé entre les instants t et $t+dt$, la surface entourant le volume τ , il s'agit des charges mobiles avec la densité \vec{j} . Puisque il ne peut y avoir dans τ ni apparition ni disparition spontanée de charge électrique dans un système isolé, la variation de Q est due aux charges qui quittent le volume τ , ou qui y pénètrent, dans le temps dt : si, dans le temps dt , une charge dQ' a traversé (S) vers l'extérieur, il y aura une charge dQ reçue par la surface (S), soit : $dQ = -dQ'$, relation dont il est évident qu'elle est algébrique.

Un courant électrique $I = \oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \text{div} \vec{j} d\tau$ est sorti de (S) (en effet, la normale à toute surface fermée est sortante et le courant est compté positivement s'il sort de S). par conséquent, l'intensité reçue par le volume est égale à :

$$I_{Reçue} = \frac{dQ}{dt} = - \iiint_{(\tau)} \text{div} \vec{j} d\tau \quad (2.17)$$

de (2.15) et (2.16) on obtient :

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.18)$$

L'équation (2.18) est l'équation de continuité. Tout phénomène de transfert de charges est gouverné par cette équation. Elle traduit l'idée que dans un circuit, il ne peut y avoir ni accumulation de charges ni de courant : c'est la formulation locale de la loi de conservation de la charge électrique.

Remarque :

- ✓ Régime stationnaire (permanant) : le régime stationnaire est un cas particulier où la distribution des charges et des courants est indépendante du temps.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{j} = 0$$

Dans ce cas on dit que le vecteur \vec{j} est à flux conservatif.

Si on considère un tube de courant délimité par deux surfaces élémentaires $d\vec{S}_1$ et $d\vec{S}_2$ le flux total sortant de ce tube de courant est nul :

$$\vec{j}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \vec{j}_2 \cdot d\vec{S}_2 = 0 \Rightarrow \vec{j}_1 \cdot d\vec{S}_1 = -\vec{j}_2 \cdot d\vec{S}_2$$

le flux entrant est égal au flux sortant.

➤ **Loi d'Ohm locale :**

Le principe fondamental de la dynamique appliquée à une charge q (>0 par exemple) soumise à un champ électrique \vec{E} permet d'exprimer la densité de courant \vec{j} dans un conducteur en fonction de \vec{E} .

Considérant une particule chargée de charge q et de masse m :

$$\sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow q\vec{E} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{qt}{m} \vec{E} + \vec{v}_0$$

- La charge q subit des chocs multiples donc $\langle \vec{v}_0 \rangle = \vec{0}$.
- Si T est le temps moyen séparant deux chocs successifs : $\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle = \frac{qT}{m} \vec{E}$

On en déduit :

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = nq\vec{v} = \frac{nq^2T}{m} \vec{E} \Rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

avec $\sigma = \frac{nq^2T}{m}$ est la conductivité électrique du matériau. La loi $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ constitue la loi d'Ohm dans sa forme locale, valable en tout point du conducteur.

➤ **Résistivité électrique :** elle est définie comme l'inverse de la conductivité :

$$R = \frac{1}{\sigma} (\Omega m)$$

➤ **Mobilité des porteurs :** elle est définie par la relation :

$$\vec{v} = \mu \vec{E} \Rightarrow \mu = \frac{qT}{m} (m^2 V^{-1} s^{-1})$$

La conductivité σ et la résistivité R permettent de classer les matériaux en trois types : isolant, semi-conducteurs et conducteurs.

3. LES LOIS DE LA MAGNETOSTATIQUE :

La magnétostatique est le deuxième phénomène de base de l'électromagnétisme, il s'agit de l'étude des champs magnétiques stationnaires. Autrefois, l'électricité et le magnétisme étaient deux phénomènes séparés. Cependant, on sait maintenant qu'ils existe un lien entre eux, le champ magnétique \vec{H} est mesuré en (Henry /mètre), tandis que la densité du flux magnétique \vec{B} est exprimé par (Tesla). On verra par la suite que beaucoup de relations de la magnétostatique ont une forme équivalente aux équations développées pour l'électrostatique.

Les champs électriques et magnétiques se produisent dans les cas suivant :

- Charge stationnaire : Une charge stationnaire crée autour d'elle qu'un champ électrique et un potentiel V. Donc,

$$\vec{v} = \vec{0}, \vec{E} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{B} = \vec{0}$$

- Charge en mouvement : Une charge en mouvement produit à la fois un champ électrique et un champ magnétique. Dans ce cas-ci,

$$\vec{v} \neq \vec{0}, \vec{E} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{B} \neq \vec{0}$$

- Charge en accélération : Une particule chargée en mouvement accéléré est à l'origine d'un champ électrique, un champ magnétique, et un champ électromagnétique radiant. Dans ce cas-ci,

$$\vec{v} \neq \vec{0}, \vec{E} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{B} \neq \vec{0}$$

3.1. Le champ magnétique : force de Lorentz

Un corps aimanté crée dans l'espace qui l'entoure un champ magnétique. Lorsqu'on place une charge électrique au repos dans un champ magnétique, aucune interaction n'est observée. Par contre si une charge se déplace dans une région où règne un champ magnétique, on observe qu'il ya une force qui agit sur la charge et qui s'ajoute à celles dues aux interactions électrique et gravitationnel. La force exercée par un champ magnétique sur une charge en mouvement est proportionnelle à sa vitesse par l'équation :

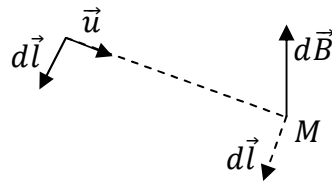


Figure 2.5

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

En peut généraliser cette équation en considérant la force causée par un éventuel champ électrique dans la même région :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Remarque :

$$\checkmark \quad \vec{F} \perp (\vec{v}, \vec{B})$$

$$\checkmark \quad |\vec{F}| = q|\vec{v}||\vec{B}| \sin \alpha$$

$$|\vec{F}| \text{ est max pour } \alpha = \frac{\pi}{2} (\vec{v} \perp \vec{B})$$

$$|\vec{F}| \text{ est min pour } \alpha = 0 (\vec{v} // \vec{B})$$

$$1 \text{ Tesla} = \frac{N}{C.m.s^{-1}} = \frac{Kg.m.s^{-2}}{C.m.s^{-1}} = Kg.s^{-2}.A^{-1}$$

$$1 T = 10^4 \text{ Gauss}$$

✓ Principe de superposition

Soit une charge dans une région où existent deux champs magnétiques \vec{B}_1 et \vec{B}_2 , donc soumise à deux force :

$$\vec{F}_1 = q\vec{v} \times \vec{B}_1 \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = q\vec{v} \times \vec{B}_2$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q(\vec{v} \times \vec{B}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_2) = q\vec{v} \times (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)$$

3.2. Loi de Biot et Savart :

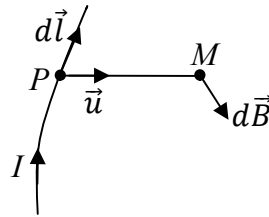


Figure 2.6

Considérons un fil métallique représenté sur la figure 2.6, formant un circuit fermé, parcouru par un courant I . l'élément de circuit $d\vec{l}$ ($\overline{PP'}$) crée au point M ($\overline{PM} = r\vec{u}$) un vecteur d'induction magnétique élémentaire $d\vec{B}$ dont :

1. le support est perpendiculaire au plan défini par $(d\vec{l}, \overline{PM})$.
2. le sens est tel que le trièdre $(d\vec{l}, \overline{PM}, d\vec{B})$ soit direct.
3. le champ magnétique est donné par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l} \times \vec{u}}{r^2}$$

Il s'agit de la loi de *Biot et Savart*. Dans le système international le champ magnétique se mesure en Tesla (T), le courant électrique s'exprime en ampères (A) et les longueurs en mètres (m). La constante μ_0 est la perméabilité magnétique du vide (exprime la capacité du vide (du matériau) à agir sur un champ magnétique), $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} SI$.

4. Le vecteur \vec{r} donne la position de l'endroit où on calcule le champ, par rapport à l'élément de circuit qui est la source de ce champ.
5. Le courant I passant à travers une section dS , peut être écrit sous la forme du produit de cette section par une densité de courant \vec{j} : $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$.
6. Ainsi pour un élément de circuit de longueur dl et de section dS , le produit $I dl$ prend la forme $(\vec{j} \cdot d\vec{S})dl = j d\tau$ où $d\tau$ représente un élément de volume du circuit générateur de champ magnétique. La forme générale de la loi de Biot et Savart

d'un circuit parcouru par un courant électrique I de densité de courant $j(r')$ dans l'espace est donnée par :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{j(r') \times \vec{r}(r)}{r^3} d^3r'$$

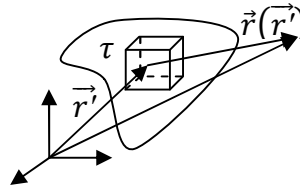


Figure 2.7

Remarques :

- ✓ Le champ magnétique n'est pas radial comme le champ électrique $\frac{\vec{u}}{r^2}$, il est normal au plan défini par \vec{v} et \vec{u} . C'est un vecteur axial ou pseudo-vecteur (vecteur dont le sens dépend de l'orientation du trièdre de référence).
- ✓ La formule de \vec{B} fait intervenir la vitesse \vec{v} de la particule qui dépend du repère choisi. Par conséquent \vec{B} dépend aussi de ce repère.

3.3. Rotationnel du champ magnétique - théorème d'Ampère

En électrostatique il y a le théorème de Gauss qui relie le flux du champ électrique à travers une surface fermée à la charge électrostatique totale contenue dans le volume délimité par cette surface.

De la même manière il existe un autre théorème - le théorème d'Ampère - qui relie la circulation du champ magnétique le long d'un contour au courant total traversant la surface s'appuyant sur ce contour. En d'autre terme le champ magnétique B créé par un courant I est donné par le théorème d'Ampère

$$C = \oint_{(c)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Cette relation est utilisée pour calculer le champ magnétique à partir d'un courant connu.

Si on reprend la loi d'Ampère, mais qu'on définit le courant autrement : $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$ et on utilisant le théorème de Stokes, on obtient *la forme locale du théorème d'Ampère* qui s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j} \quad (2.19)$$

3.4. Le flux du champ magnétique :

Le flux du champ magnétique à travers n'importe quelle surface fermée S est nul. On dit que le champ magnétostatique est à flux conservatif. L'intégrale suivant traduit cette propriété :

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

En tenant compte du théorème de Green-Ostrogradski, on obtient :

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (2.20)$$

\Rightarrow *pas de charge magnétique*

Ce qui signifie que tout le flux magnétique qui entre dans un corps (ou surface) doit en ressortir.

Remarques :

- ✓ Puisque $\text{div}\vec{B} = 0$ et la divergence du rotationnel d'un champ vectoriel est toujours nulle. De même que le champ électrique *dérive* d'un potentiel électrostatique scalaire, le champ magnétique *dérive* d'un potentiel vectoriel appelé *le potentiel vecteur* \vec{A} tel que :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} \\ \begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j} \\ \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} \end{cases} &\Rightarrow \Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j} \end{aligned}$$

Cette équation est similaire à l'équation de Poisson à laquelle obéit le potentiel V en électrostatique.

✓ Ce potentiel n'est pas défini de façon unique puisque tout vecteur : $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}f}$, (f fonction scalaire), est une solution.

En magnétostatique on adopte généralement la condition : $\begin{cases} \text{div}\vec{A} = 0 \\ \vec{A}(\infty) = 0 \end{cases}$

Ce qui permet une détermination simple de $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{l}}{r}$

3.5. Les conditions aux limites pour le champ magnétique

3.5.1. Continuité de la composante normale du champ magnétique

Soit Σ une nappe de courant superficielle de densité \vec{j}_s

$$\text{div}\vec{B} = 0 \Rightarrow \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_L} \vec{B} \cdot d\vec{S}_L$$

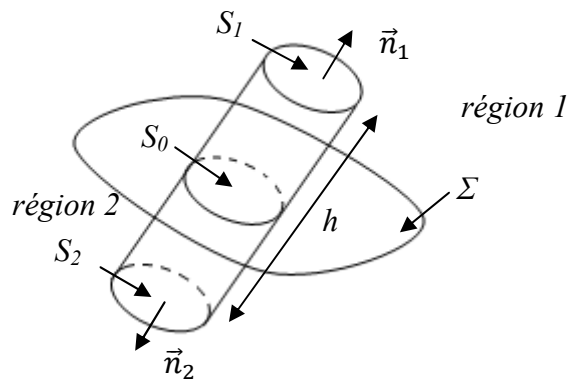


Figure 2.8

S_L est la surface latérale.

Lorsque $h \rightarrow 0$, on obtient :

$$\Rightarrow B_{2N} = B_{1N} \quad (2.21)$$

3.5.2. Discontinuité de la composante tangentielle de \vec{B}

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_{A_1 B_1 B_2 A_2 A_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

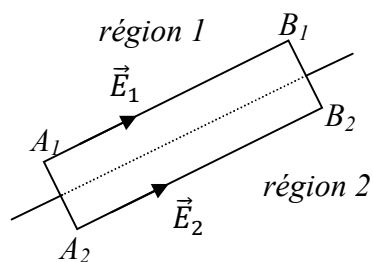


Figure 2.9

Lorsque $A_1 \rightarrow A_2$ et $B_1 \rightarrow B_2$:

$$(\vec{B}_{2T} - \vec{B}_{1T}) = \mu_0 \vec{j}_s \times \vec{n} \quad (2.22)$$

3.6. Énergie magnétique :

L'énergie magnétique d'un circuit (c) parcouru par un courant I est :

$$W = \frac{1}{2} I \Phi \quad (2.23)$$

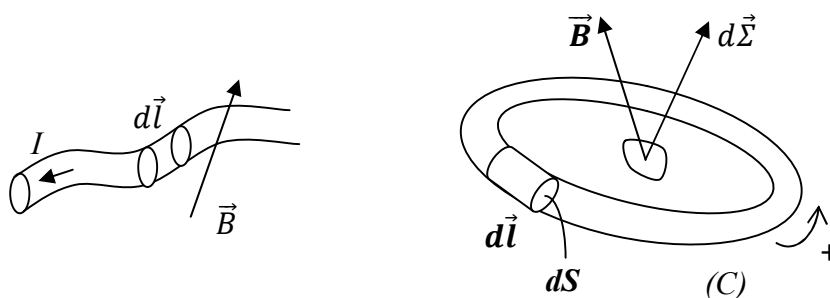


Figure 2.10

Où Φ est le flux du champ magnétique à travers la surface définie par le circuit (c) donné par :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{rot} \vec{A} \cdot d\vec{\Sigma} = \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Et puisque :

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$W = \frac{1}{2} \oint_c I \cdot \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l} \cdot \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \iiint_\tau \vec{A} \cdot \vec{j} d\tau$$

τ est le volume du conducteur.

Et enfin :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_\tau \vec{A} \cdot \vec{j} d\tau \quad (2.24)$$

3.7. Densité d'énergie magnétique

On a :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_\tau \vec{A} \cdot \vec{j} d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_\tau \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} d\tau$$

En tenant compte de la relation suivante :

$$\text{div}(\vec{B} \times \vec{A}) = \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

L'expression de l'énergie magnétique s'écrira encore :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_\tau \text{div}(\vec{B} \times \vec{A}) d\tau + \frac{1}{2\mu_0} \iiint_\tau \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} d\tau$$

Le domaine d'intégration peut être, sans inconvénient, étendu à l'espace entier (disons à une sphère Σ , de rayon r tendant vers l'infini, et qui englobe le volume τ) : il suffit de prolonger \vec{j} par un champ de vecteurs partout nul hors de τ . La première intégrale devient donc, grâce au théorème de la divergence :

$$\frac{1}{2} \oiint_\Sigma (\vec{B} \times \vec{A}) \cdot d\vec{\Sigma}$$

Puisque \vec{B} varie en $\frac{1}{r^2}$, \vec{A} varie en $\frac{1}{r}$ et $d\vec{\Sigma}$ varie en r^2 , le flux de $(\vec{B} \times \vec{A})$ à travers Σ tend vers zéro quand r tend vers l'infini. Ce qui entraîne que l'énergie magnétique s'écrit sous la forme :

$$W = \iiint_{esp} \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} d\tau$$

L'énergie magnétique comme l'énergie électrique est confinée dans l'espace avec une densité :

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad (2.25)$$

Remarque : Equations de Maxwell en régime stationnaire :

En régime stationnaire qui est le régime étudié jusqu'à présent, les équations de Maxwell qui constituent les fondements de l'électromagnétisme dans le cas général, se réduisent aux équations suivantes, déjà introduites :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \\ \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases}, \quad \begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Ce qui veut dire qu'en régime stationnaire, le champ électrique d'une part et le champ magnétique d'autre part, sont parfaitement indépendant. Dans ce cas l'unique source du champ magnétique est le courant \vec{j} , tandis que la seule source du champ électrique est l'ensemble des charges.

4. LES PHENOMEMES DEPENDANTS DU TEMPS :

4.1. Le courant de déplacement :

Dans le cas où la densité de charges et la densité de courant dépendent du temps, il en sera de même pour les champs \vec{E} et \vec{B} .

La conservation de la charge s'exprime par : $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

En prenant la divergence du théorème d'Ampère $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ on trouve :

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B}) = \mu_0 \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

Car la divergence du rotationnel est toujours nulle. Cela implique que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Ce qui limite donc le porté du théorème d'Ampère aux régimes permanents.

Pour lever cette difficulté, Maxwell eut l'idée d'ajouter un terme correctif non stationnaire portant sur le champ magnétique. Ecrivons cette relation modifiée sous la forme :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \alpha \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La constante α sera déterminée par la conservation de la charge :

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B}) = \mu_0 \operatorname{div}\vec{j} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}\vec{E}$$

mais :

$$\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{et} \quad \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

On obtient :

$$-\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \alpha = \varepsilon_0 \mu_0$$

Le principe de conservation de la charge est maintenant compatible avec une relation de *Maxwell-Ampère* écrite sous la forme :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D) \quad (2.26)$$

La densité de courant de conduction liée au mouvement des charges électriques sera notée dans la suite \vec{j} et le terme $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ homogène à un vecteur densité de courant est appelé courant de déplacement, qui correspond à un champ électrique variable sera notée \vec{j}_D . Le vecteur densité de courant total : $\vec{j}_T = \vec{j} + \vec{j}_D$

Ainsi la variation dans le temps du champ électrique conduit à la création du champ magnétique. Ce phénomène établit le lien qui existe entre le champ électrique et le champ magnétique, lien déjà défini par la loi de Faraday.

4.2. La loi de FARADAY :

4.2.1. Force électromotrice :

Considérant un circuit électrique fermé (C). On définit la force électromotrice e , comme la circulation du champ électrique électromoteur le long du circuit (C). Cette force est responsable du mouvement des porteurs de charge libre, donc d'un courant électrique, ainsi :

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

avec $d\vec{l}$ l'élément de longueur du circuit et \vec{F} la force s'exerçant sur le porteur de charge. Elle est, contrairement à ce qu'indique son nom, homogène à une tension et s'exprime en volts.

En 1831, Michael Faraday a montré que la variation dans le temps du flux d'un champ magnétique près d'un conducteur, induit une force électromotrice. Pour que le courant généré soit important il faut que la variation du champ magnétique soit importante. Le principe de cette expérience est représenté dans sa plus simple configuration sur la figure 2.11.

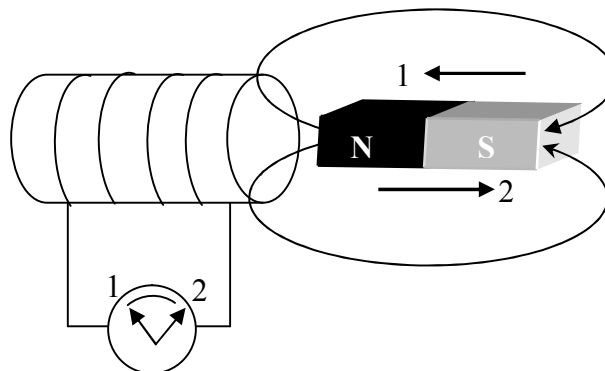


Figure 2.11 : Principe de l'induction

Le sens du courant généré dépend du sens du déplacement de l'aimant.

4.2.2. Equation de Maxwell-Faraday :

Soit un circuit (C) fermé au repos sous l'action d'un champ magnétique variable. Un champ électrique électromoteur va se produire, et une f.é.m va prendre naissance dans le circuit (C) :

$$e = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

où (S) est une surface orientée s'appuyant sur le contour orienté (C). En permutant les opérateurs d'intégration et de dérivation et compte tenu du théorème de Stokes, il en résulte:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.27)$$

Remarquons que s'il existe en plus du champ électrique induit un champ électrostatique \vec{E}_s . Le champ total $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_s$, satisfait encore la relation ci-dessus car :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_s = \vec{0}$$

et on a la relation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.28)$$

En définitive, l'étude du phénomène d'induction électromagnétique conduit à un résultat fondamental suivant : En tout point de l'espace, là où il existe une variation temporelle du champ magnétique apparaît un champ électrique induit variable dont la circulation est non conservative, c'est-à-dire qu'il ne dérive pas d'un potentiel. Les deux champs (\vec{E} , \vec{B}) constitue le champ électromagnétique.

4.3. Potentiel scalaire, potentiel vecteur : changement de jauge

Comme \vec{B} reste à flux conservatif quand on passe aux régimes non stationnaires $\text{div} \vec{B} = 0$, on peut continuer à définir un potentiel vecteur \vec{A} , avec $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$.

La loi de Faraday donne alors :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{rot}}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

Le vecteur $\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ dérive d'un potentiel scalaire V , d'où : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

Ou V s'identifie avec le potentiel électrostatique quand $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$

Un autre potentiel vecteur possible est $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}f$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}' = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{B}$$

V doit devenir V' telque : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}V' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}$

$\Rightarrow V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}$ une solution possible.

Le remplacement de \vec{A} et V respectivement par \vec{A}' et V' s'appelle une transformation de jauge. L'invariance de \vec{E} et \vec{B} dans cette transformation s'appelle l'invariance de jauge. L'invariance de jauge nous laisse libre du choix de la relation liant le potentiel scalaire et le potentiel vecteur. Cette relation est appelée la condition de jauge.

Un choix particulier commode est la condition de Lorentz :

$$\begin{cases} \text{div}\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \\ \vec{A}(\infty) = \vec{0}, V(\infty) = 0 \end{cases}$$

En partant du théorème d'Ampère en régime variable : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

Et si l'on choisit la jauge de Lorenz, nous obtenons :

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j}$$

5. INTERPRETATION PHYSIQUE DES EQUATIONS DE MAXWELL :

En régime variable (dépendant du temps), la condition d'existence d'une onde électromagnétique dans un milieu contenant des charges et des courants est donnée par les équations de Maxwell.

L'objet des équations de Maxwell consiste à relier, par des équations locales, les champs \vec{E} et \vec{B} à leurs sources: les densités de charges et de courants, ρ et \vec{J} dans le cas le plus générale, en particulier, en régime variable.

La première équation, dite équation de **Maxwell-Gauss** $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ exprime la manière dont les charges sont à l'origine du champ électrique.

La deuxième équation, dite **Maxwell-flux magnétique** $\text{div}\vec{B} = 0$, traduit le fait qu'à travers une surface fermée quelconque le flux du champ magnétique est nul. C'est-à-dire que les lignes vectorielles de l'induction ne commencent et ne se terminent nulle part. Elles sont donc, fermées sur elles-mêmes, créant ainsi des trajectoires circulaires, soit elle se ferme à l'infini. Par analogie avec l'équation précédente on déduit que cette équation exprime qu'il n'existe pas de monopoles magnétiques (pas de charge magnétique)

L'équation de **Maxwell-Ampère** $\text{rot}\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$, exprime la manière dont un courant électrique est à l'origine d'un champ magnétique. On remarque qu'un champ électrique dépendant du temps crée un champ magnétique

L'équation de **Maxwell-Faraday** $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ traduit qu'un champ magnétique variable est à l'origine d'un champ électrique. C'est le phénomène d'induction.

Les deux équations Maxwell-flux magnétique et **Maxwell-Faraday** sont des équations structurelles du champ électromagnétique. Les deux autres (**Maxwell-Ampère** et **Maxwell-Gauss**) relient ce champ aux charges fixes ou mobiles.

Exercices**Exercice 01 :**

Exprimer le champ électrique créé en tout point de l'espace par une distribution volumique de charge $\rho > 0$ répartie uniformément entre deux cylindres coaxiaux de longueur infinie et de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), (voir figure 2.12 ci-dessous)

1. En utilisant le théorème de Gauss
2. A partir de l'équation locale : $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

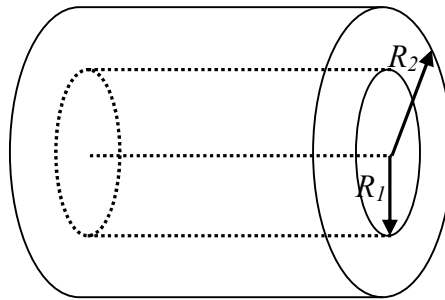


Figure 2.12

Exercice 02 :

Une sphère de centre O et de rayon R contient une charge Q répartie uniformément avec une densité volumique $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$

1. Exprimer le potentiel en tout point de l'espace en utilisant les équations locales de Laplace et de Poisson.
2. En déduire le champ électrique $\vec{E}(r)$
3. Retrouver l'expression de $\vec{E}(r)$ en appliquant le théorème de Gauss

Exercice 03 :

On considère la sphère de centre O , rayon a , portant la densité volumique uniforme de charge ρ . (La charge totale de la sphère est q .) il n'y a pas d'autres charges que celles présentes dans la sphère.

1. Calculer le champ électrique \vec{E} et le potentiel V en tout point de l'espace, intérieur et extérieur à la sphère.

2. Calculer l'énergie potentielle E_p de la sphère chargée en sommant sur la sphère l'expression $\frac{1}{2}\rho V d\tau$ (où $d\tau$ est l'élément de volume).
3. Retrouver E_p en sommant sur l'espace la densité d'énergie électrostatique exprimée en fonction de \vec{E} .

Exercice 04 :

1. La 3^e équation de Maxwell nous dit que $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}$ est égale à :

a. 0 , b. $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, c. $\frac{\rho}{\epsilon_0}$

2. L'équation de conservation de la charge s'écrit :

a. $\text{div}\vec{j} = \rho$, b. $\text{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, c. $\vec{j} - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

3. L'équation de Maxwell $\text{div}\vec{B} = 0$ signifie que :

- a. Les lignes du champ magnétique \vec{B} divergent
- b. Le champ \vec{B} est à flux conservatif
- c. Le champ \vec{B} varie en fonction du temps

4. Le terme $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ représente :

- a. Un courant de conduction
- b. Un courant de déplacement
- c. Un courant de dérive

Exercice 05 :

1. Montrer que la loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt}$ est équivalente à l'équation : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Discuter le sens physique de cette dernière équation.

2. Montrer que l'équation de discontinuité est déjà contenue dans les équations de Maxwell : $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$.

3. Montrer que l'équation : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ n'est autre que la forme locale du théorème d'Ampère établie en régime permanent.

4. On considère le schéma de charge d'un condensateur, représenté sur la figure 2.13 : la charge au niveau des armatures du condensateur croît suivant la loi : $dq = Idt$ ou I est le courant de charge.

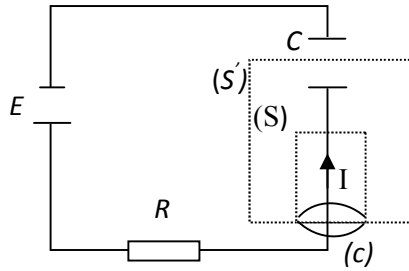


Figure 2.13

- a- En appliquant le théorème d'Ampère en considérant I quasi stationnaire, et utilisant les surfaces d'appui (S) puis (S'), montrer qu'on aboutit à une contradiction.
- b- Montrer que l'introduction du courant de déplacement $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ permet de lever ce paradoxe.

Exercice 06 :

Soit, dans le vide, un champ électrique de composantes :

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z = E_0 e^{(\alpha t - \beta x)}$$

- 1- Calculer sa divergence et son rotationnel.
- 2- En déduire les composantes du champ magnétique \vec{B} qui l'accompagne.
- 3- Calculer $div \vec{B}$ et $rot \vec{B}$.
- 4- Quelle relation doit lier α et β pour que soient satisfaites les équations de Maxwell.

Exercice 07 :

Le champ électrique d'une onde électromagnétique se propageant dans le vide a pour composantes, en notation complexe, avec E_0 réel:

$$E_x = 0$$

$$E_y = E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{i(\omega t - kz)}$$

$$E_z = \alpha E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{i(\omega t - kz)}$$

A quelle condition sur α ce champ électrique peut-il être solution des équations de Maxwell?

Corrigés

Exercice 01 :

Pour des raisons de symétrie, le champ électrique \vec{E} est radial. La charge volumique ρ étant positive, ce champ sera centrifuge.

1. En utilisant le théorème de Gauss

Le flux du champ \vec{E} à travers une surface fermée (S) est égal à la somme algébrique des charges contenues dans cette surface :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\tau} \rho d\tau$$

La surface de Gauss est un cylindre de rayon r et de hauteur h .

a. Pour $r < R_1$: $\sum_i Q_i = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

b. $R_1 < r < R_2$:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\tau} \rho d\tau$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \vec{u}_r$$

c. $r > R_2$:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r} (R_2^2 - R_1^2) \vec{u}_r$$

2. A partir de l'équation locale : $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

a. Pour $r < R_1$: $\sum_i Q_i = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

$$\sum_i Q_i = 0 \Rightarrow \rho = 0$$

En coordonnée cylindrique la divergence s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r E_r}{\partial r} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial E_z}{\partial z} \\ &\Rightarrow r E_r = C_1 \end{aligned}$$

Mais : $E_r = 0$ lorsque $r = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

b. $R_1 < r < R_2$: $\rho \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r E_r}{\partial r} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

D'où :

$$E_r = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} + \frac{B}{r}$$

Le champ électrique est continu en $r = R_1$:

D'où :

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \vec{u}_r$$

c. $r > R_2 : \rho = 0$

$$r E_r = C_2$$

Le champ électrique est continu en $r = R_2$ implique que :

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} (R_2^2 - R_1^2) \vec{u}_r$$

Exercice 02 :

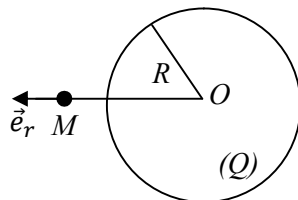
Le Laplacien scalaire d'une fonction donnée en coordonnées sphériques s'exprime ainsi :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{dV}{d\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{dV}{d\varphi}$$

La distribution étant de symétrie sphérique, le potentiel V et le champ électrique \vec{E} ne dépendront que de r . En coordonnées sphériques, le Laplacien se réduit à :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right)$$

1. Calcul du potentiel $V(r)$



a) pour $r < R : \rho = \text{Cte.}$

L'équation de Poisson s'écrit :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow r^2 \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0} + A \Rightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho r}{3\varepsilon_0} + \frac{A}{r^2}$$

En $r = 0$, par symétrie :

$$\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \left(\frac{dV}{dr} \right)_{r=0} = 0 \Rightarrow A = 0$$

Par suite :

$$V_1 = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + B$$

où la constante B sera déterminée ultérieurement.

b) pour $r > R$: $\rho = 0$.

L'équation de Laplace s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

Par suite :

$$V_2 = -\frac{C}{r}$$

La continuité du potentiel et du champ électriques pour $r = R$, nous permettra de déterminer les constantes B et C , on obtient :

$$\text{Pour } r \leq R : \quad V(r) = k \frac{Q}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$\text{Pour } r \geq R : \quad V(r) = k \frac{Q}{r}$$

Le champ électrique On obtient :

$$\text{Pour } r \leq R : \quad \vec{E}(r) = k \frac{Qr}{R^3} \vec{u}_r$$

$$\text{Pour } r \geq R : \quad \vec{E}(r) = k \frac{Q}{R^2} \vec{u}_r$$

Exercice 03 :

1. Calcul du champ électrique \vec{E} et du potentiel $V(r)$: (voir l'exercice 02)

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{a^3}, & r < a \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, & r > a \end{cases} \quad V(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3a^2 - r^2}{2a^3} \right), & r < a \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, & r > a \end{cases}$$

2. Calcul de l'énergie potentielle E_p de la sphère chargée en sommant sur la sphère

l'expression $\frac{1}{2}\rho V d\tau$:
$$E_p = \int_{\tau} \frac{1}{2}\rho V d\tau$$

$$E_p = \int_0^a \frac{\rho}{2} \frac{qr^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3a^2 - r^2}{2a^3} \right) dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \int_0^a \frac{\rho}{2} \frac{qr^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3a^2 - r^2}{2a^3} \right) dr$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{\rho q a^2}{5\epsilon_0}$$

Comme $\rho = \frac{3q}{4\pi a^3}$ $\Rightarrow E_p = \int_{\tau} \frac{1}{2}\rho V d\tau = \frac{3q^2}{20\pi a\epsilon_0}$

3. Calcul de l'énergie potentielle E_p en sommant sur l'espace la densité d'énergie électrostatique :

$$E_p = \int_{\text{espace}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau$$

a) pour $r < a$: $E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{a^3}$

$$\int_0^a \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{a^3} \right)^2 r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^3} \right)^2 \int_0^a r^4 dr$$

$$\Rightarrow 4\pi \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^3} \right)^2 \frac{a^4}{5} \quad (1)$$

b) pour $r > a$: $E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$

$$4\pi \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_0^a \frac{1}{r^2} dr \Rightarrow 4\pi \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{a} \quad (2)$$

La somme des deux expressions (1) et (2), est :

$$E_p = \int_{\text{espace}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau = \frac{3q^2}{20\pi a\epsilon_0}$$

On retrouve bien l'expression obtenue plus haut.

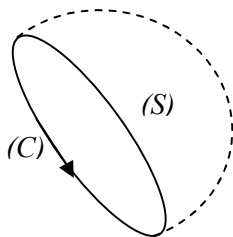
Exercice 04 :

1. La 3e équation de Maxwell nous dit que $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}$ est égale à : $b. -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
2. L'équation de conservation de la charge s'écrit : $b. \text{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
3. L'équation de Maxwell $\text{div}\vec{B} = 0$ signifie que : Le champ \vec{B} est à flux conservatif
4. Le terme $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ représente : Un courant de déplacement

Exercice 05 :

1. Soit une surface (S) s'appuyant sur un contour (C) orienté :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} d\vec{S} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$



En appliquant le théorème de Stokes On en déduit :

$$\oint_{(C)} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} \vec{B} d\vec{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

d'où :

$$e = \oint_{(C)} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

L'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ traduit le phénomène d'induction : un champ magnétique variable engendre l'apparition d'un champ électrique.

2. L'équation de discontinuité est déjà contenue dans les équations de Maxwell : $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$.

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) = 0 \Rightarrow \text{div} \left(\mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right) = 0$$

Il vient donc : $div\vec{j} + \epsilon_0 div\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow div\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} div\vec{E} = 0$

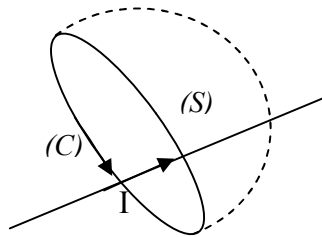
Nous retrouvons bien :

$$div\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

3. Soit une surface (S) reposant sur un contour (C) :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} \Rightarrow \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} d\vec{S}$$

on utilisant le théorème de Stokes, on obtient **le théorème d'Ampère** établie en régime permanent. qui s'écrit :



$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

4. On considère le schéma de charge d'un condensateur : la charge au niveau des armatures du condensateur croît suivant la loi : $dq = Idt$ ou I est le courant de charge.

c- En appliquant le théorème d'Ampère en considérant I quasi stationnaire

- En utilisant la surface d'appui (S) traversée par le courant I

$$\Rightarrow \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\vec{B} d\vec{S} = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Si le contour (C) est un cercle de rayon r on trouve :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B \oint_{(C)} dl = 2\pi r B = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- En utilisant la surface d'appui (S') qui passe entre les armatures et qui repose sur le même contour (C) :

$$\mu_0 I = \mu_0 \iint_{(S')} \vec{j} d\vec{S} = 0 \text{ aucun courant ne traverse (S') d'où :}$$

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = 0 \Rightarrow B = 0$$

En utilisant les surfaces d'appui (S) et (S'), on trouve un résultat déferent et on aboutit à une contradiction.

d- Introduisant maintenant le courant de déplacement \vec{j}_D

$$\vec{j}_{tot} = \vec{j} + \vec{j}_D$$

\vec{j} est le courant de conduction.

Le théorème d'Ampère devient : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

$$\Rightarrow \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\vec{B} d\vec{S} = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\iint_{(S)} \vec{j} d\vec{S} + \iint_{(S)} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} \right)$$

- En utilisant la surface d'appui (S) : $\vec{E} = \vec{0}$ et

$$\iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\vec{B} d\vec{S} = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

- En utilisant la surface d'appui (S') : $I = 0$

$$\iint_{(S')} \overrightarrow{rot}\vec{B} d\vec{S} = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{(S')} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S')} \vec{E} d\vec{S} \quad (1)$$

Construisant une surface de Gauss (SG), en fermant la surface (S') par une surface (S'') du contour (C)

$$\oiint_{(SG)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S'')} \vec{E} d\vec{S} + \iint_{(S')} \vec{E} d\vec{S} = \iint_{(S')} \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Puisque \vec{E} est nul sur la surface (S''). q est la charge portée par l'armature positive

$$I = \frac{dq}{dt} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S')} \vec{E} d\vec{S} = \iint_{(S')} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}$$

En remplaçant dans (1) on trouve :

$$\iint_{(S')} \overrightarrow{rot}\vec{B} d\vec{S} = \mu_0 I$$

La contradiction est levée par l'introduction du courant de déplacement. La généralisation du théorème d'Ampère au régime variable s'écrit :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Exercice 06 :

Soit, dans le vide, un champ électrique de composantes :

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z = E_0 e^{(\alpha t - \beta x)}$$

5- La divergence : on a immédiatement

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \text{puisque l'on est dans le vide } \rho = 0$$

Le rotationnel a pour composantes

$$\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{E}} = \begin{cases} (\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{E}})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \\ (\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{E}})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \beta E_z \\ (\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{E}})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

\vec{B} n'a de composante non nulle que B_y (\vec{E} est suivant z , la direction de propagation suivant x)

$$\text{La loi de Faraday donne: } \overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = -\beta E_z = -\beta E_0 e^{(\alpha t - \beta x)}$$

Si on élimine un champ constant qui ne se propage pas :

$$B_y = -\frac{\beta}{\alpha} E_0 e^{(\alpha t - \beta x)}$$

$$\text{D'où : } \operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$$

Il vient d'autre part :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{B}} = \begin{cases} (\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{B}})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \\ (\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{B}})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0 \\ (\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{B}})_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\beta^2}{\alpha} E_0 e^{(\alpha t - \beta x)} = \frac{\beta^2}{\alpha} E_z \end{cases}$$

Le théorème d'Ampère nous impose d'avoir :

$$(\overrightarrow{rot\vec{E}})_z = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \text{ soit } \frac{\beta^2}{\alpha} E_z = \mu_0 \varepsilon_0 \alpha E_z$$

Pour que les équations de Maxwell soient satisfaites il faut que :

$$\alpha^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \beta^2 = c^2 \beta^2 \quad \text{où } c \text{ est la vitesse de la lumière.}$$

Exercice 07 :

$$\text{Il faut que } \operatorname{div}\vec{E} = 0 \Rightarrow \alpha = i \frac{\pi}{bk}$$

Chapitre 3

PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

Introduction

Quinze ans plus tard après le chef-d'œuvre immortel de James Clerk Maxwell «A Treatise on Electricity and Magnetism» (Un traité sur l'électricité et le magnétisme), la théorie de Maxwell fut prouvée grâce aux travaux d'Heinrich Hertz. Après plusieurs calculs et expériences, Hertz a réussi à générer et à détecter des ondes radio, parfois appelées ondes hertziennes en son honneur.

Les équations de Maxwell permettent d'expliquer la propagation des ondes électromagnétiques. Des expériences décisives sur la propagation des ondes électromagnétiques avaient mis en évidence l'aspect essentiel des ondes lumineuses, lesquelles ne sont qu'un cas particulier d'ondes électromagnétiques : elles sont caractérisées par l'invariance de leur vitesse de propagation (ou célérité) par changement de référentiel galiléen, et par l'absence de support matériel pour cette propagation, ce qui les distingue fondamentalement des ondes mécaniques.

Objectifs

- Etablir l'équation d'onde électromagnétique.
- Etablir les propriétés de l'onde plane électromagnétique.
- Définir l'énergie électromagnétique et sa propagation.
- Décrire l'état de polarisation des ondes électromagnétiques.
- Comprendre la réflexion et la réfraction des ondes.

Plan

- 6 EQUATION D'ONDE ELECTROMAGNETIQUE.
- 7 POLARISATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES.
- 8 ONDES PLANES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS UN MILIEU MATÉRIEL LINÉAIRE.
- 9 VITESSE DE PHASE ET VITESSE DE GROUPE.
- 10 CONSERVATION DE L'ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE, LE VECTEUR DE POYNTING.
- 11 REFLEXION ET REFRACTION

1. EQUATION D'ONDE ELECTROMAGNETIQUE :

L'évolution du champ électromagnétique nous sera connue si nous parvenons à résoudre les équations de Maxwell, connaissant les densités de charge et de courant. A partir des équations de Maxwell il est possible d'imaginer une résolution directe des lois locales. Pour cela, il faut établir des équations liant séparément les champs \vec{E} et \vec{B} .

L'équation d'onde électromagnétique est obtenue à partir des équations de Maxwell. Prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ d'une part et de l'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \right)$ d'autre part. Et en utilisant l'identité de dérivation vectorielle.

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) &= \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B})}{\partial t} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial\vec{j}}{\partial t} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

En tenant compte de l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, Nous obtenons pour le champ électrique.

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}} \rho \quad (3.1)$$

De la même manière, pour le champ magnétique :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) &= \overrightarrow{\text{rot}} \left(\mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right) \\ \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} &= \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Sachant que $\text{div} \vec{B} = 0$. Nous obtenons :

$$\Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} \quad (3.2)$$

Les équations (3.1) et (3.2) sont les équations de propagation du champ électromagnétique. Contrairement au cas des distributions permanentes, la densité de courant électrique \vec{j} est présente dans l'équation relative au champ électrique. Plus exactement, ce sont ses variations temporelles qui contribuent à la création du champ \vec{E} . En effet, un champ magnétique variable e produit en présence d'un courant variable, qui engendre à son tour champ électrique dont le rotationnel est donné par l'équation de Maxwell-Faraday.

1.1. Equation d'onde électromagnétique dans le vide en absence de charges et de courants :

Une fois produit et indépendamment des charges et courants qui l'ont créé, le champ électromagnétique décrit par la théorie de Maxwell présente, quelle que soit son origine, une série de propriétés caractéristiques, qui nécessite une étude approfondie : essentiellement, nous serons conduits à introduire la notion d'ondes électromagnétiques. Ces ondes, nous les étudierons ici dans le vide, en supposant nulles les densités de charge et de courant.

En absence de charges et de courants $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$ les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \\ \text{div} \vec{E} = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = 0 \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

et l'équation de propagation du champ électromagnétique donnée plus haut se simplifie en :

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.3)$$

$$\Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.4)$$

Remarquons que la dimension de $(\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ est celle d'une vitesse.

$$[\Delta \vec{E}] = [\vec{E}] L^{-2} = [\varepsilon_0 \mu_0] [\vec{E}] T^{-2} \Rightarrow [\varepsilon_0 \mu_0]^{-1/2} = L T^{-1}$$

Avec :

$$(\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = \left(\frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \right)^{-1/2} \cong 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s} = c$$

Cela signifie que dans le vide l'onde électromagnétique se propage à la vitesse de la lumière c . Nous avons là l'éclatante confirmation de l'hypothèse de Maxwell selon laquelle la lumière est due à la propagation d'ondes EM à la vitesse c .

1.1.1. Equation d'onde à une dimension :

Dans un espace à trois dimensions, en coordonnées cartésiennes, les composantes des champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} satisfont à l'équation d'onde appelée également équation de d'Alembert

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (3.5)$$

f est une grandeur physique qui évolue dans le temps et dans l'espace.

A une dimension où la fonction f ne dépend que d'une seule variable d'espace, par exemple x et du temps, l'équation de d'Alembert peut donc s'écrire :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Pour chercher des solutions à cette équation, faisant intervenir deux nouvelles variables :

$$\begin{cases} X = x - ct \\ Y = x + ct \end{cases}$$

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

Il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Y}$$

et l'opérateur $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Y} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right) \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right) \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \right) \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \right) \frac{\partial Y}{\partial x} \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} \end{aligned}$$

De la même manière :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial t} = c \left(-\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Y} \right)$$

Mais, nous avons besoin de l'opérateur de dérivée seconde en t , donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= c \left[-\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right) \frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right) \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \right) \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \right) \frac{\partial Y}{\partial t} \right] \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} \right) \end{aligned}$$

L'équation de d'Alembert se simplifiée en une équation intégrable :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \right) = 0$$

Cette équation montre que $\left(\frac{\partial f}{\partial Y} \right)$ ne dépend pas de X , donc c'est une fonction quelconque de la seule variable Y ,

La solution générale est donc la somme de deux fonctions indépendantes qui ne dépendent chacune que d'une variable, X ou Y :

$$f(x, t) = F(X) + G(Y) = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (3.6)$$

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

La dernière formulation de $f(x, t)$ montre qu'il existe deux sens de propagation opposés. Le signal $F(x - ct)$ se propage au cours du temps dans la direction des x croissants avec la vitesse c , une onde telle que F est appelée une onde plane progressive. $G(x + ct)$ représente un signal qui se propage au cours du temps dans la direction des x décroissants avec la vitesse $-c$. Une onde telle que G est appelée une onde plane régressive.

On note t_1 et t_2 deux instants consécutifs ($t_2 > t_1$). A l'instant t_2 et au point d'abscisse x_2 , on peut écrire :

$$F(x_2 - ct_2) = F(x_2 - ct_2 + ct_1 - ct_1) = F(x_2 - c(t_2 - t_1) - ct_1) = F(x_1 - ct_1)$$

On en déduit : $x_2 = x_1 + c(t_2 - t_1)$

Au bout d'un temps $t = t_2 - t_1$, la fonction F retrouvera la même valeur en se déplaçant à la vitesse c dans le sens des x positifs.

De manière équivalente, on montre que G décrit un signal qui se propage à la vitesse $-c$ dans le sens des x négatifs.

Simulation de la propagation de deux ondes électromagnétiques :

Avec Maple on peut visualiser la propagation de deux ondes électromagnétiques, se propageant au cours du temps dans deux directions opposées.

On sait que la solution de l'équation de propagation à une dimension est donnée par :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}^+ \left(t - \frac{z}{c} \right) + \vec{E}^- \left(t + \frac{z}{c} \right)$$

Le champs \vec{E}^+ se propage au cours du temps dans la direction des x croissants avec la vitesse c , le champs \vec{E}^- représente un signal qui se propage au cours du temps dans la direction des x décroissants avec la vitesse $-c$.

>with(plots):

Les champs électriques $\vec{E}^+(f1)$ et $\vec{E}^-(f2)$ d'une onde électromagnétique se propageant dans le vide sont données par :

$$f1 := 50 * \cos(10^8 * t + (1/3) * x) :$$

$$f2 := 50 * \cos(10^8 * t - (1/3) * x) :$$

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

```
animate(plot,[f1,x=-4*Pi..4*Pi], t=0..4*Pi):  
animate(plot,[f2,x=-4*Pi..4*Pi], t=0..4*Pi):  
f1_anim := animate(plot, [f1, x = -4*Pi .. 4*Pi, color = blue], t = 0 .. 4*Pi):  
f2_anim := animate(plot, [f2, x = -4*Pi .. 4*Pi, color = red], t = 0 .. 4*Pi):  
display([f1_anim, f2_anim]):
```

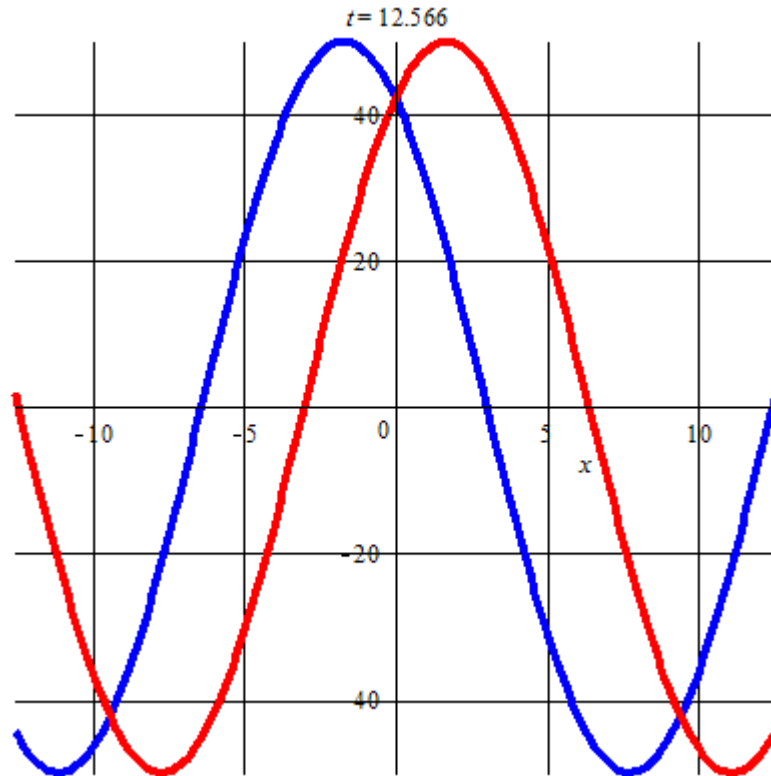


Figure 3.1 : Animation de la propagation des champs électriques $\vec{E}^+(f1)$ et $\vec{E}^-(f2)$

Remarque :

L'onde plane progressive sinusoïdale :

✓ Un cas particulier d'une onde plane progressive sinusoïdale :

Si en un point O de l'espace, on enregistre une perturbation de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos w \left(t - \frac{z}{c} \right)$

et si \vec{E} est suivant l'axe (ox) on a : $E_x = E_{0x} \cos w \left(t - \frac{z}{c} \right)$, l'écriture de l'onde plane peut se présenter de façons :

1. $E_x = E_{0x} \cos \left(wt - w \frac{z}{c} \right) = E_{0x} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)$

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

où $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la période temporelle et $\lambda = cT$ est longueur d'onde et joue le rôle de période spatiale. west la pulsation de l'onde.

$$2. E_x = E_{0x} \cos\left(\omega t - \omega \frac{z}{c}\right) = E_{0x} \cos(\omega t - kz) = E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

\vec{k} est appelé vecteur d'onde et indique la direction de propagation de l'onde, son module est : $k = \frac{\omega}{c}$ (pour chaque onde monochromatique, la relation entre k et ω représente la relation de dispersion). \vec{r} c'est le vecteur position.

Sachant que : $k_x = k_y = 0$

$$\vec{k}\vec{r} = (k_x\vec{e}_x + k_y\vec{e}_y + k_z\vec{e}_z)(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) = k_z z$$

$(\omega t - kz)$ est appelé la phase qui n'a donc pas de dimension puisque c 'est un angle.

3. Dans le cas général, où la direction de propagation est prise quelconque.

Quelle est l'expression de l'onde progressive en un point M lorsque celle-ci se propage dans une direction quelconque définie par le vecteur unitaire \vec{u} ?

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{OM}) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

En fonction des cosinus directeurs :

$$\alpha = \frac{k_x}{k}, \beta = \frac{k_y}{k}, \gamma = \frac{k_z}{k}$$

L'expression précédente devient :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_0 \cos[\omega t - k(\alpha x + \beta y + \gamma z)]$$

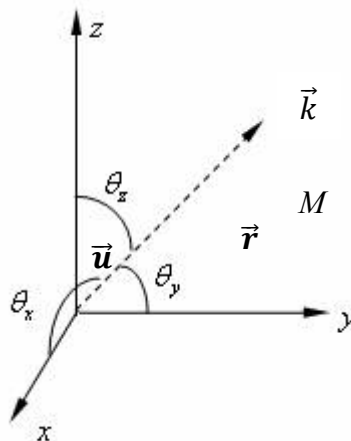


Figure 3.2

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

1.1.2. Structure de l'onde plane

Une onde plane est une onde pour laquelle la perturbation (\vec{E}, \vec{B}) , ne se propage que dans une seule direction (z par exemple). En effet, le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) a la même valeur en tout point du plan (Σ) appelé plan d'onde.

L'équation de propagation de \vec{E} se simplifie et devient :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

et a pour solution :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}^+ \left(t - \frac{z}{c} \right) + \vec{E}^- \left(t + \frac{z}{c} \right)$$

Les champs \vec{E}^+ et \vec{E}^- étant des fonctions du temps et de l'espace à déterminer compte tenu des conditions initiales.

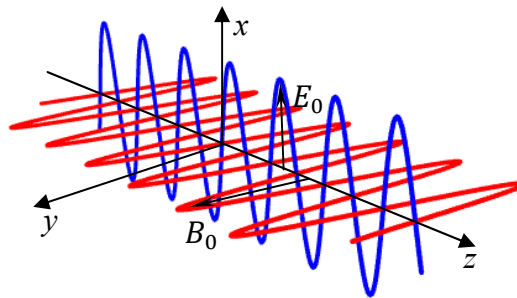


Figure 3.3 : Champs électrique et magnétique pour une onde plane avec une polarisation rectiligne.

Une propriété importante du champ \vec{E} peut être obtenue en tenant compte de la condition :

$$\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Puisque \vec{E} ne dépend que de la seule coordonnée z. Par ailleurs l'équation :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

Permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ +\frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ 0 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

La composante E_z est une grandeur indépendante de l'espace et du temps (ce qui contredit la notion de propagation selon z). Nous la poserons égale à 0 : $E_z = 0$.

Pour les mêmes raisons que nous venons d'évoquer, nous poserons aussi : $B_z = 0$.

En vertu des équations $\text{div}\vec{E} = 0$ et $\text{div}\vec{B} = 0$:

$$\vec{E} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \vec{B} \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

\vec{E} et \vec{B} sont dans un plan normal à la direction de propagation (oz). Ce plan est appelé plan d'onde. \vec{E} et \vec{B} sont dits transversaux : ils varient en fonction du temps et de l'espace perpendiculairement (transversalement) à la direction de propagation. Donc l'onde électromagnétique qui se propage dans le vide est transversale.

On peut en outre connaître la position relative des vecteurs \vec{E} et \vec{B} à partir de la relation :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Comme le champ électrique ne dépend que de la variable $u = t - \frac{z}{c}$, on peut écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$$

En annulant les constantes d'intégration qui ne se propagent pas, les relations ci-dessus se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} E_y = -cB_x \\ E_x = cB_y \end{cases} \Rightarrow \vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z = \frac{-1}{c} (E_y \vec{e}_x + E_x \vec{e}_y)$$

$$\Rightarrow \|\vec{B}\| = \frac{1}{c} \|\vec{E}\| \quad (3.8)$$

Le produit scalaire : $\vec{E} \cdot \vec{B} = E_x B_x + E_y B_y = c(B_x B_y - B_x B_y) = 0$

Ce qui montre que les champs \vec{E}, \vec{B} sont en tout point et à tout instant perpendiculaires.

La structure de l'onde plane progressive harmonique est définie par l'ensemble de propriétés qu'on a déterminé.

1.1.3. La notation complexe :

Il est souvent utile d'exprimer le champ électromagnétique sous la forme complexe.

L'onde plane progressive sinusoïdale est définie, en notation complexe, par :

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \end{cases}$$

Ainsi la dérivation par rapport au temps donne :

$$\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = i\omega \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (3.9)$$

Et :

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Il est possible d'écrire formellement :
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \equiv i\omega \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv -\omega^2 \end{cases}$$

Par ailleurs, la divergence et le rotationnel peuvent être écrite sous une forme compacte.

On a :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y + E_{0z}\vec{e}_z)e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -i(k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z})e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ &\Rightarrow \text{div} \vec{E} = (-i\vec{k}) \cdot \vec{E} \quad (3.10) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ E_{0y} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ E_{0z} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \end{pmatrix} = -ie^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \begin{cases} k_y E_{0z} - k_z E_{0y} \\ k_z E_{0x} - k_x E_{0z} \\ k_x E_{0y} - k_y E_{0x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \begin{cases} k_y E_z - k_z E_y \\ k_z E_x - k_x E_z \\ k_x E_y - k_y E_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\vec{k} \times \vec{E} \quad (3.11)$$

On montre aisément qu'il est possible d'écrire formellement :

$$\vec{\nabla} \equiv -i\vec{k} \quad (3.12)$$

Ecrivons les équations de Maxwell en notation complexe :

$$\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow -i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (3.13)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow -i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.14)$$

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -i\vec{k} \times \vec{E} = -i\omega\vec{B} \quad (3.15)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow -i\vec{k} \times \vec{B} = i\mu_0\varepsilon_0\omega\vec{E} \quad (3.16)$$

- De (3.13) et (3.14) nous retrouvons un résultat connu : le vecteur d'onde \vec{k} est normal au plan d'onde (\vec{E}, \vec{B}) . Le champ électrique \vec{E} et l'induction magnétique \vec{B} sont transversaux : la transversalité de l'onde plane
- La relation (3.15) ou (3.16), impose d'autre part que les vecteurs \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux ($\vec{E} \perp \vec{B}$) telle que le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est un trièdre direct.
- le champ magnétique est ainsi complètement déterminé en direction et en module.

Pour passer aux valeurs réelles des champs, il suffit de prendre les parties réelles des grandeurs complexes :

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}) = E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

2. POLARISATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Nous discuterons ici du concept de polarisation des ondes électromagnétiques. La direction et la trajectoire décrites par l'extrémité du vecteur champ électrique \vec{E} (dans le plan orthogonal à la direction de propagation) en un point donné de l'espace en fonction du temps, définissent l'état de polarisation de l'onde.

Dans le cas le plus général, la courbe produite par le champ électrique \vec{E} est une ellipse et, par conséquent, l'onde est appelée polarisée elliptiquement. Dans certaines conditions, l'ellipse peut être réduite à un cercle ou à un segment de ligne droite. Dans ces cas, on dit que la polarisation de l'onde est respectivement circulaire ou linéaire.

Puisque le vecteur champ magnétique \vec{B} se déduit du vecteur champ électrique \vec{E} (les deux vecteurs \vec{E} et \vec{B} sont transverses, et ils sont confinés dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation). Il suffit donc de décrire le comportement du champ électrique et d'en déduire celui de \vec{B} . Le champ magnétique ne nécessite pas une discussion séparée.

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

2.1. Polarisation elliptique :

Pour une onde plane monochromatique se propageant dans la direction Oz , le vecteur d'onde s'écrit : $\vec{k} = k\vec{e}_z$, avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Les composantes du champ électrique peuvent se mettre sous la forme :

$$\vec{E}(z, t) = \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz - \varphi_x) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi_y) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

A z fixé, par exemple $z = 0$, il reste :

$$\vec{E}(0, t) = \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - \varphi_x) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \varphi_y) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

Un choix convenable de l'origine des temps où E_x passe par sa valeur maximale, permet d'écrire :

$$\vec{E}(0, t) = \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \varphi) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

Avec : $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$

Éliminons le terme $\cos(\omega t)$:

$$\cos(\omega t) = \frac{E_x}{E_{0x}}$$

Et utilisons l'identité trigonométrique :

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \varphi + \left(1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right)^{1/2} \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \varphi\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right) \sin^2 \varphi$$

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

Enfin, l'équation ci-dessus donne :

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\cos\varphi = \sin^2\varphi \quad (3.17)$$

C'est l'équation générale d'une ellipse. Ainsi, l'extrémité de $\vec{E}(z, t)$ décrit une ellipse en un point donné de l'espace. On dit que l'onde est polarisée elliptiquement. L'ellipse est inscrite dans un rectangle de côtés $2E_{0x}$ et $2E_{0y}$

Par convention on trace l'ellipse dans un plan orthogonal au vecteur d'onde \vec{k} , en plaçant \vec{k} dirigé vers l'observateur.

Il reste à déterminer le sens de parcours de l'ellipse par le champ. Le sens de parcours de l'ellipse peut être obtenu en calculant la dérivée de $\vec{E}(0, t)$ à l'instant initial :

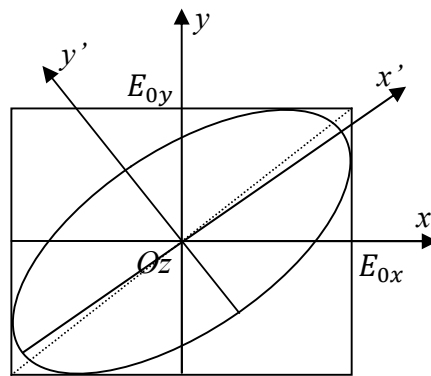


Figure 3.4 : Polarisation elliptique, L'ellipse est inscrite dans un rectangle de côtés $2E_{0x}$ et $2E_{0y}$

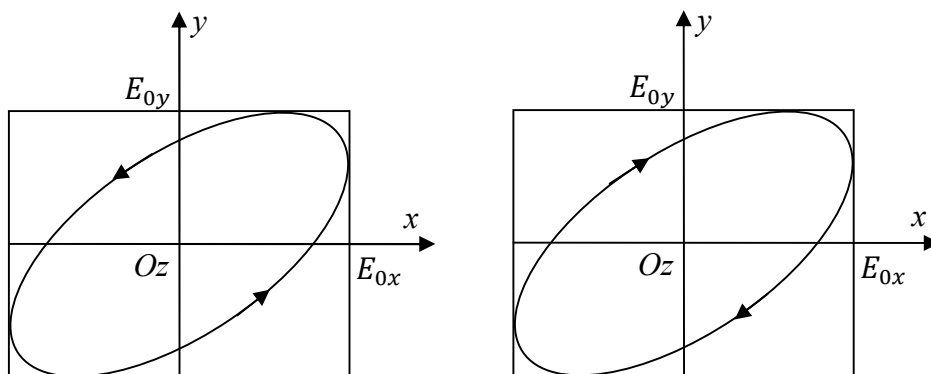


Figure 3.5 : a) Hélicité positive, l'onde est polarisée à gauche

b) Hélicité négative, l'onde est polarisée à droite

$$\left(\frac{d\vec{E}(0,t)}{dt}\right)_{z=0,t=0} = \omega E_{0y} \sin \varphi \vec{e}_y$$

- Si $\varphi \in]0, \pi[$, le sens de parcours coïncide avec le sens trigonométrique (de \vec{e}_x vers \vec{e}_y). En optique, l'onde est polarisée à gauche, car le vecteur \vec{E} tourne vers la gauche pour un observateur qui reçoit l'onde et l'hélicité est dite positive.
- Si $\varphi \in]\pi, 2\pi[$, l'hélicité est dite négative et l'onde est polarisée à droite.
- Lorsque $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ et $E_{0x} \neq E_{0y}$:

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 = 1$$

Les deux composantes du champ sont en quadrature retard si $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ et en quadrature avance si $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Les axes de l'ellipse coïncident alors avec Ox et Oy .

Simulation de la Polarisation elliptique

Ce programme sous Maple, permet de produire les différents états de polarisations des ondes électromagnétiques.

`>restart:`

`with(plots):`

`with(plottools):`

`E_x := 30*cos((2*Pi*(1/3))*z):`

`E_y := 30*cos((2*Pi*(1/3))*z+(1/3)*Pi) :`

`polarisation := plot([E_x, E_y, z = 0 .. 3], scaling = constrained, axis = [gridlines = [5, color = black]], labels = ["y", "x"], labeldirections = ["horizontal", "vertical"], labelfont = ["times", "roman", BOLD, 20], title = "Hélicité positive, l'onde est polarisée à gauche ", titlefont = ["times", "roman", 15], color = "black"):`

`V1 := arrow([-10.13425, 19.2804622], [-20.030809, 9.8767269], .2, 2, .2, color = "black"):`

`V2 := arrow([9.98156, -19.509776], [19.51393, -10.49429], .2, 2, .2, color = "black"):`

`t1 := textplot([-5, 25, ('typeset')("E_0x"), 'align' = 'above', 'font' = ["times", "roman", BOLD, 12]):`

`t2 := textplot([27, -7, ('typeset')("E_0y"), 'align' = 'above', 'font' = ["times", "roman", BOLD, 12]):`

`t3 := textplot([-4, -18, ('typeset')("E_0x = E_0y"*et*`&varphi:` = (1/3)*Pi)], 'align' = 'above', 'font' = ["times", "roman", BOLD, 12]):`

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

```
t := PLOT(POLYGONS([[19, -12], [19, -18], [11, -18], [11, -12]], COLOR(HUE, .5))):  
display(polarisation, V1, V2, t1, t2, t3)
```

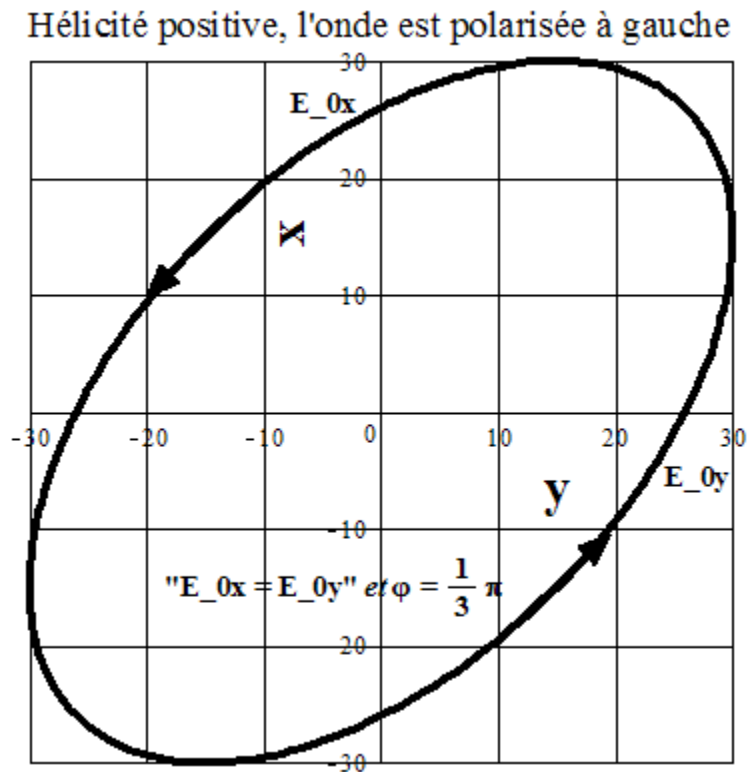


Figure 3.6 : Polarisation elliptique gauche.

Remarque : Il suffit de varier φ entre 0 et 2π et ($E_{0x} =$ ou $\neq E_{0y}$) vous visualiser tous les états de polarisation possible.

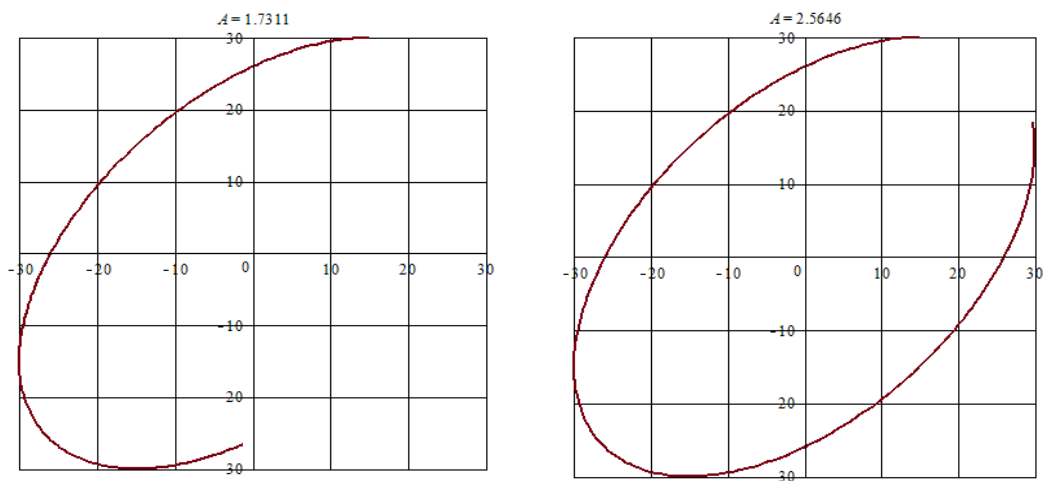


Figure 3.7 : Animation du sens de parcours de l'ellipse par le champ

Sens de parcours de l'ellipse par le champ

`>animate(plot, [[E_y, E_x, z = 0 .. A]], A = 0 .. Pi, scaling = constrained, frames = 50);`

2.2. Polarisation rectiligne

Pour $\varphi = m\pi (m = 0, 1, 2, \dots)$:

$$E_y = \pm \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x \quad (3.18)$$

Le champ électrique garde une direction constante dans l'espace. Soit $\varphi = 0$, ce qui veut dire que les deux composantes sont en phase, soit $\varphi = \pi$, c'est-à-dire que ces deux derniers sont en opposition de phase. La polarisation est dite rectiligne.

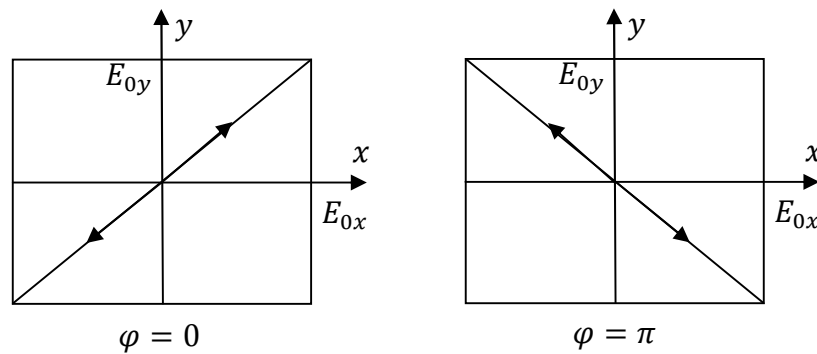


Figure 3.8 : Polarisation rectiligne.

2.3. Polarisation circulaire :

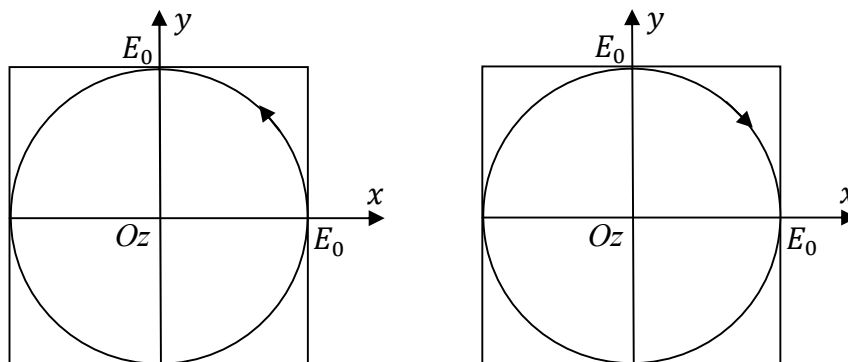


Figure 3.9 : a) Polarisation circulaire gauche $\varphi = \frac{\pi}{2}$

b) Polarisation circulaire droite $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

Lorsque $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ et $E_{0x} = E_{0y} = E_0$:

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 = 1 \quad (3.19)$$

L'extrémité du vecteur \vec{E} décrit un cercle de rayon E_0 dans l'un ou l'autre sens suivant le signe du déphasage φ . On dit que l'onde est polarisée circulairement. Si le champ électrique tourne dans le sens des aiguilles d'une montre ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$), on dit que la polarisation est circulaire droite. Si la rotation est dans le sens contraire ($\varphi = +\frac{\pi}{2}$) alors la polarisation est dite circulaire gauche.

Remarque :

Les sources lumineuses conventionnelles soleil, ampoule produisent des ondes électromagnétiques non polarisées car le champ électrique ne satisfait à aucune des conditions précédentes. Plus précisément, l'état de polarisation n'est défini que pendant une durée qui est le plus souvent faible devant la durée de détection; c'est le cas des ondes lumineuses. Mais la polarisation naturelle de la lumière existe. Certains milieux polarisent la lumière. Cependant, on peut, en sacrifiant une partie du flux lumineux, transformer ce rayonnement en une vibration polarisée, au moyen de lames cristallines convenablement taillées, c'est-à-dire des corps qui ne laissent passer que les champs électriques parallèles à une certaine direction, et absorbent les autres. De tels dispositifs constituent des polariseurs. Par des associations convenables, il est possible de produire les trois types de polarisations : rectiligne, circulaire et elliptique.

3. ONDES PLANES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS UN MILIEU MATÉRIEL LINÉAIRE.

En présence de charges libres (donc un milieu matériel globalement non neutre électriquement ($\rho \neq 0$)), l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, montre que les vecteurs \vec{E} et \vec{k} ne sont pas perpendiculaires faute, de quoi, il ne peut y avoir d'onde plane électromagnétique.

L'équation de propagation pour le champ électromagnétique, Pour un milieu neutre ($\rho = 0$) s'écrit :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

$$\Delta \vec{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \overrightarrow{rot} \vec{j}$$

Si pour une onde électromagnétique plane, de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k} les champs varient en :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(-\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(-\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

On écrit celle pour le champ électrique :

$$\Delta \vec{E} = \mu \left(\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\Delta \vec{E} = \mu \left(\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow k^2 \vec{E} = \mu \omega^2 \left(\varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E}$$

$$\Rightarrow k^2 = \mu \omega^2 \left(\varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right)$$

ou encore :

$$k^2 = \mu \omega^2 \tilde{\varepsilon} \quad (3.20)$$

Cette équation constitue l'équation de dispersion des ondes électromagnétiques dans le milieu étudié. Avec $\tilde{\varepsilon}$ une constante diélectrique généralisée, dont il est évident que les valeurs seront en général complexes.

Connaissant la conductivité σ , la permittivité complexe $\tilde{\varepsilon}$ et la perméabilité complexe $\tilde{\mu}$ du matériau, la propagation des ondes électromagnétiques pourra être déterminée.

3.1. Solutions de l'équation de dispersion.

Selon le signe et la nature du produit $\mu \tilde{\varepsilon}$, on aura à considérer différents types de nombres d'ondes, et donc trois types d'onde distincts.

3.1.1. Onde progressive sans atténuation :

Lorsque $\mu \tilde{\varepsilon}$ est réel positive, alors k prend des valeurs réelles. La relation de dispersion est simplement :

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

$$k = w\sqrt{\mu\epsilon}$$

L'onde plane se propage sans atténuation et son amplitude reste constante au cours de la propagation. Par contre il y a en général dispersion. La vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{w}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ indique que la propagation est dispersive : la vitesse de phase varie avec la pulsation.

3.1.2. Onde évanescente

Dans le cas où le produit $\mu\epsilon$ est réel négative, alors k est un imaginaire pur. Le champ électrique a donc comme écriture :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t}$$

et présente une décroissance spatiale exponentielle sans propagation : le champ oscille en phase dans tout l'espace. Il d'agit dans ce cas d'une onde évanescente.

3.1.3. Onde progressive atténuée

Dans le cas où $\mu\epsilon$ est un nombre complexe, alors le vecteur d'onde est également un nombre complexe qu'on peut le mettre sous la forme : $\vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i$ et le champs électrique aura la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\vec{k}_i\cdot\vec{r}} e^{(\vec{k}_r\cdot\vec{r} - i\omega t)}$$

Le premier terme est l'amplitude de l'onde et il présente une décroissance exponentielle. Tandis que le deuxième exponentielle décrit une propagation avec une longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k_r}$.

Ce type d'onde est appelée onde progressive atténuée.

3.2. Exemples de propagation dans un milieu matériel

3.2.1. Propagation dans un isolant parfait

Un isolant parfait a une conductivité nulle et une permittivité relative

$$\epsilon_r \geq 1 \text{ et } \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r, \mu_r = \mu_0, \sigma = 0$$

l'équation de dispersion devient :

$$k = \frac{w}{c} \sqrt{\epsilon_r(w)} \quad (3.21)$$

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

3.2.2. Propagation dans un diélectrique réel

Un diélectrique réel est défini par sa faible conductivité et sa permittivité relative complexe dont la partie imaginaire est liée à l'absorption de l'onde par le matériau. La relation de dispersion est

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r' \left[1 + i \left(\frac{\epsilon_r''}{\epsilon_r'} + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r' \omega} \right) \right] \quad (3.22)$$

3.2.3. Propagation dans les plasmas

Un plasma est un gaz ionisé. La relation de dispersion est donnée

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad (3.23)$$

Où $\omega_p = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}}$ est la pulsation plasma (m la masse d'une particule portant une charge q , N nombre de charges par unité de volume)

3.2.4. Propagation dans un conducteur :

Un bon conducteur est caractérisé par : $\sigma \cong \infty$, $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, $\mu = \mu_r \mu_0$. La relation de dispersion s'écrit :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \mu_r \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_r \epsilon_0} \right) \quad (3.24)$$

4. VITESSE DE PHASE ET VITESSE DE GROUPE

La vitesse de phase est la vitesse de propagation de la phase d'une onde plane progressive sinusoïdale. La vitesse de phase est calculée par :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \quad (3.25)$$

La propagation est dite dispersive lorsqu'il y a une dépendance entre la vitesse de phase et la fréquence de l'onde.

La vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'enveloppe d'une onde. On définit la vitesse de groupe par l'expression :

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

$$v_g = \frac{dw}{dk} \quad (3.26)$$

On voit qu'elle se distingue de la vitesse de phase dès qu'apparaît une dispersion, et dès que la relation entre w et k cesse d'être linéaire (Cette vitesse est égale à la vitesse de phase lorsque w et k sont proportionnels, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de dispersion; c'est le cas du vide pour lequel $w = kc$: $v_g = c = v_\varphi$).

5. CONSERVATION DE L'ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE, LE VECTEUR DE POYNTING :

L'équation de Maxwell-Ampère permet d'exprimer \vec{j} en fonction de \vec{E} et \vec{B} :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{rot}\vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Faisant intervenir un terme en $\vec{j} \cdot \vec{E}$:

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\overrightarrow{rot}\vec{B}) - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\overrightarrow{rot}\vec{B}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \right)$$

En outre, comme :

$$div \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \overrightarrow{rot}\vec{E} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right)$$

et, en tenant compte de : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

il vient :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -div \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$$

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

$$\Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} = -\text{div}(\vec{P}) - \frac{\partial}{\partial t}(U)$$

On a introduit ici deux nouvelles quantités, une quantité scalaire et une quantité vectorielle : la densité d'énergie électromagnétique U (mesurée en J.m^{-3}) et le vecteur de *Poynting* \vec{P} qui désigne la direction de propagation de l'énergie.

Finalement, on obtient la relation de conservation de l'énergie électromagnétique sous une forme compacte :

$$\text{div}(\vec{P}) + \frac{\partial}{\partial t}(U) = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (3.27)$$

Remarque :

Dans le vide la conservation d'énergie électromagnétique devient :

$$\text{div}(\vec{P}) + \frac{\partial}{\partial t}(U) = 0$$

À l'aide du théorème de *Green-Ostrogradsky* appliqué à la surface (S) qui délimite le volume τ , l'équation précédente se met sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \iiint_{(\tau)} \text{div}(\vec{P}) d\tau &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{(\tau)} U d\tau \right) \\ \Rightarrow \iint_{(S)} \vec{P} d\vec{S} &= -\frac{\partial W}{\partial t} \quad (3.28) \end{aligned}$$

West l'énergie électromagnétique emmagasinée dans le volume τ .

Cette équation traduit le fait que la diminution de l'énergie électromagnétique dans le temps est due à l'énergie rayonnée à travers la surface (S) . Ce résultat constitue le théorème de Poynting, et le vecteur \vec{P} représente donc en grandeur et en direction le débit d'énergie électromagnétique.

Le vecteur de *Poynting* s'écrit :

$$\vec{P} = \vec{E} \times \frac{(\vec{k} \times \vec{E})}{w\mu_0} = \vec{k} \frac{E^2}{w\mu_0} = \frac{E^2}{c\mu_0} \vec{u} = c\varepsilon_0 E^2 \vec{u} \quad (3.29)$$

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

La densité de l'énergie électromagnétique vaut :

$$U = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{E^2}{c^2} \right) = \varepsilon_0 E^2 \quad (3.30)$$

Le vecteur de *Poynting* s'écrit alors :

$$\vec{P} = cU\vec{u} \quad (3.31)$$

Dans le vide, la vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique est égale à la vitesse de la lumière. \vec{P} est parallèle au vecteur d'onde. La direction de \vec{P} indique le sens de propagation de l'énergie, elle est aussi celle du rayon lumineux.

6. REFLEXION ET REFRACTION

6.1. Conditions aux limites

Les relations entre les champs électromagnétique dans deux régions différentes de l'espace séparées par une interface d'épaisseur infinitésimale sont appelées les conditions aux limites. Les deux régions sont considérées de taille semi-infinie.

Les relations entre les composantes normales (indice N) et tangentielles (indice T) des vecteurs des champs sont données par :

- La discontinuité de la composante normale du champ électrique :

$$\varepsilon_1 E_{1N} - \varepsilon_2 E_{2N} = \sigma$$

- La continuité de la composante tangentielle du champ électrique à l'interface :

$$\vec{E}_{2T} = \vec{E}_{1T}$$

- Les composantes tangentielles du champ magnétiques sont discontinues :

$$\frac{1}{\mu_1} \vec{B}_{1T} - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_{2T} = \vec{j}_s$$

- Les composantes normales du champ magnétique sont continues à l'interface

$$B_{2N} - B_{1N} = 0$$

6.2. Lois De Snell-Descartes

Une onde électromagnétique peut être décrite sous la forme suivante

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(-\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Les ondes incidente et réfléchie sont dans le milieu 1 tandis que l'onde transmise (ou réfractée) est dans le milieu 2. Soit :

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \vec{E}_{i0} e^{i(-\omega t + \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{E}_r(\vec{r}, t) = \vec{E}_{r0} e^{i(-\omega t + \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{E}_t(\vec{r}, t) = \vec{E}_{t0} e^{i(-\omega t + \vec{k}_t \cdot \vec{r})}$$

Puisque la composante tangentielle de \vec{E} doit être continue à la frontière $z = 0$

$$\vec{E}_{i0} e^{i(-\omega_i t + \vec{k}_i \cdot \vec{r})} + \vec{E}_{r0} e^{i(-\omega_r t + \vec{k}_r \cdot \vec{r})} = \vec{E}_{t0} e^{i(-\omega_t t + \vec{k}_t \cdot \vec{r})}$$

La seule façon dont cette condition aux limites sera satisfaite pour tout x et y est que :

1. $\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega$
2. $k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} = k_x$
3. $k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} = k_y$

La condition 1 implique que les fréquences des ondes incidentes, réfléchies et transmises restent inchangées. Les conditions 2 et 3 exigent que les composantes tangentielles des vecteurs de propagation soient continues. Cela signifie que les vecteurs de propagation doivent tous se trouver dans le plan d'incidence. C'est l'énoncé de la première loi de Snell-Descartes. Ainsi,

$$\begin{cases} k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r \\ k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t \end{cases} \quad (3.32)$$

Si $k_0 = \frac{\omega}{c}$ le nombre d'onde dans le vide.

L'onde réfléchie se propage dans le même milieu de l'onde incidente. Les modules des vecteurs d'onde ont donc le même module.

$$k_i = k_r = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} = n_1 \frac{\omega}{c} = n_1 k_0$$

$$k_t = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} = n_2 \frac{\omega}{c} = n_2 k_0$$

d'où

$$\begin{aligned}k_i \sin \theta_i &= k_r \sin \theta_r \\ \Rightarrow n_1 k_0 \sin \theta_i &= n_1 k_0 \sin \theta_r\end{aligned}$$

Soit :

$$\theta_i = \theta_r$$

L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, comme en optique.

et :

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (3.33)$$

Il s'agit de la deuxième loi de Snell-Descartes.

6.3. Coefficients de Fresnel

Dans cette section, nous discutons le phénomène de réflexion-réfraction des ondes à la frontière entre deux diélectriques. Le plan d'incidence est défini comme le plan formé par la droite normale à l'interface séparant les deux milieux et le rayon incident. Nous introduirons des coefficients dits de Fresnel. Le coefficient de réflexion r (de transmission t) est défini comme le rapport entre les amplitudes du champ électrique réfléchi E_r (transmis E_t) et du champ électrique incident E_i . Ils sont exprimés en fonction de l'angle d'incidence et les indices de réfraction des deux milieux.

Le coefficient de réflexion en amplitude r et le coefficient de transmission en amplitude t du champ électrique par sont définis comme :

$$\begin{cases} r = \frac{E_r}{E_i} \\ t = \frac{E_t}{E_i} \end{cases} \quad (3.34)$$

Sur la base de ces préliminaires généraux sur l'incidence oblique, nous allons maintenant considérer les deux états possibles de la polarisation des ondes électromagnétiques. Toute autre polarisation peut être considérée comme une combinaison linéaire de ces deux cas

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

- a. Polarisation transversale électrique (TE), où le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence; cette polarisation est souvent appelé polarisation S (de senkrecht, «perpendiculaire» en allemand).Le champ électrique a une seule composante tangentielle à l'interface.
- b. Polarisation transverse magnétique (TM); où le champ magnétique est perpendiculaire au plan d'incidence, le champ électrique est compris dans le plan d'incidence; appelé aussi polarisation P. Le champ électrique a donc deux composantes une tangentielle et l'autre normale à l'interface. Ces deux composantes nécessitent des traitements distincts.

En utilisant les équations de Maxwell et en appliquant les conditions aux limites appropriées (la continuité des composantes tangentielles du champ électrique et du champ magnétique à l'interface).

6.4. Polarisation transversale électrique (TE) :

Le champ électrique incident est normal au plan d'incidence, les composantes tangentielles du champ électrique et du champ magnétique sont continues :

$$\begin{aligned} E_i + E_r &= E_t \\ -\frac{n_1 E_i}{c} \cos \theta_i + \frac{n_1 E_r}{c} \cos \theta_i &= -\frac{n_2 E_t}{c} \cos \theta_t \\ \Rightarrow n_1(-E_i + E_r) \cos \theta_i &= -n_2 E_t \cos \theta_t \end{aligned}$$

Les coefficients de Fresnel de réflexion et de transmission, deviennent :

$$\begin{cases} r_{TE} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \\ t_{TE} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \end{cases} \quad (3.35)$$

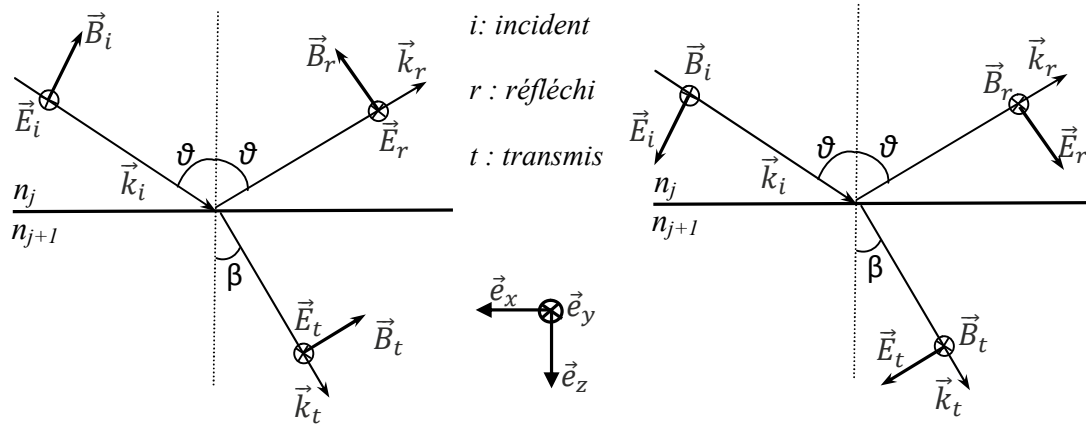
6.5. Polarisation transverse magnétique (TM) :

Encore une fois, la continuité des composantes tangentielles du champ électrique et du champ magnétique à l'interface exige que :

$$E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_i = E_t \cos \theta_t$$

$$B_i + B_r = B_t$$

$$\Rightarrow \frac{n_1 E_i}{c} + \frac{n_1 E_r}{c} = \frac{n_2 E_t}{c}$$



a. Polarisation (TE)

$$\vec{E}_i = (0, E_i, 0)$$

$$\vec{E}_r = (0, E_r, 0)$$

$$\vec{E}_t = (0, E_t, 0)$$

$$\vec{B}_i = \frac{n_j E_i}{c} (-\cos \theta, 0, -\sin \theta)$$

$$\vec{B}_r = \frac{n_j E_r}{c} (\cos \theta, 0, -\sin \theta)$$

$$\vec{B}_t = \frac{n_{j+1} E_t}{c} (-\cos \beta, 0, -\sin \beta)$$

b. Polarisation (TM)

$$\vec{E}_i = (E_i \cos \theta, 0, E_i \sin \theta)$$

$$\vec{E}_r = (-E_r \cos \theta, 0, E_r \sin \theta)$$

$$\vec{E}_t = (E_t \cos \beta, 0, E_t \sin \beta)$$

$$\vec{B}_i = (0, B_i, 0)$$

$$\vec{B}_r = (0, B_r, 0)$$

$$\vec{B}_t = (0, B_t, 0)$$

Figure 3.10 : Etats de polarisation des ondes électromagnétiques

$$\Rightarrow n_1(E_i + E_r) = n_2 E_t$$

On retrouve finalement les deux autres coefficients de Fresnel :

$$\begin{cases} r_{TM} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \\ t_{TM} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \end{cases} \quad (3.36)$$

Généralité :

Si on considère l'interface $(j-1)$ séparant le milieu $(j-1)$ et le j -ème milieu, Les coefficients de réflexion $\tilde{r}_{j-1,j}$ et de transmission $\tilde{t}_{j-1,j}$ sont définis comme :

$$\begin{cases} \tilde{r}_{j-1,j} = \frac{E_{j-1}^r}{E_{j-1}^t} \\ \tilde{t}_{j-1,j} = \frac{E_j^t}{E_{j-1}^t} \end{cases}$$

Dans le cas de la polarisation TE (S), les coefficients de réflexion et de transmission complexes sont définis par :

$$\begin{cases} \tilde{r}_{j-1,j} = \frac{\tau_{j-1} - \tau_j}{\tau_{j-1} + \tau_j} \\ \tilde{t}_{j-1,j} = \frac{2\tau_{j-1}}{\tau_{j-1} + \tau_j} \end{cases}$$

Et pour la polarisation TM (P), ces coefficients sont donnés par :

$$\begin{cases} \tilde{r}_{j-1,j} = \frac{\tilde{n}_j^2 \tau_{j-1} - \tilde{n}_{j-1}^2 \tau_j}{\tilde{n}_j^2 \tau_{j-1} + \tilde{n}_{j-1}^2 \tau_j} \\ \tilde{t}_{j-1,j} = \frac{2\tilde{n}_{j-1} \tilde{n}_j \tau_{j-1}}{\tilde{n}_j^2 \tau_{j-1} + \tilde{n}_{j-1}^2 \tau_j} \end{cases}$$

Où : $\tau_j = \tilde{n}_j \cos \theta_j = (\tilde{n}_j^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0)^{1/2}$

Avec θ_0, n_0 sont respectivement l'angle d'incidence et l'indice de réfraction du milieu d'incidence, θ_j est l'angle de réfraction dans la couche j.

Ces équations se réduisent dans le cas de l'incidence normale, lorsque $\theta_i = \theta_t = 0$

$$\begin{cases} r_{TE} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = -r_{TM} \\ t_{TE} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = t_{TM} \end{cases}$$

6.6. Angle de Brewster :

Le coefficient de réflexion r_{TM} de la polarisation transverse magnétique (TM) peut devenir nul pour une certaine valeur de l'angle d'incidence, dit angle de Brewster $\theta_i = \theta_B$

$$r_{TM} = 0 \Rightarrow n_2 \cos \theta_B = n_1 \cos \theta_t$$

On multiplie par $\sin \theta_t$

$$n_2 \cos \theta_B \sin \theta_t = n_1 \cos \theta_t \sin \theta_t$$

$$\Rightarrow \sin \theta_B \sin \theta_B = \sin \theta_t \sin \theta_t$$

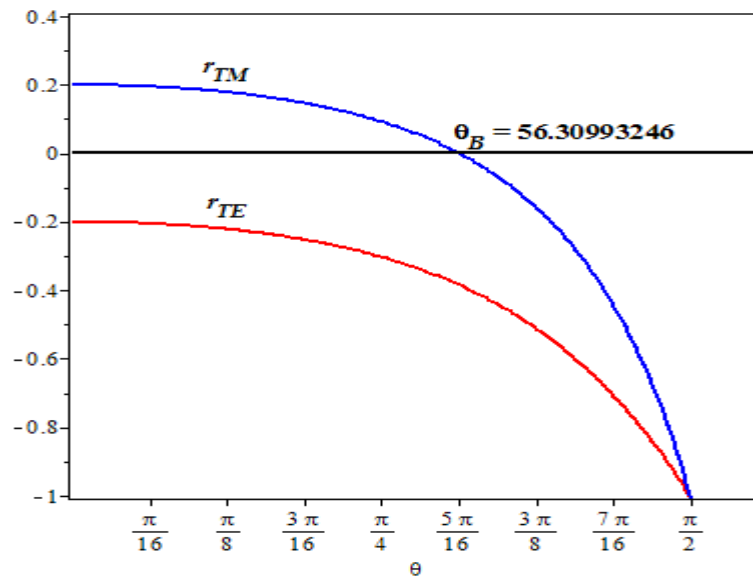


Figure 3.11 : Les coefficients de réflexion r_{TM} , r_{TE} et l'angle de Brewster θ_B

$$\Rightarrow \sin 2\theta_B = \sin 2\theta_t$$

Soit :

$$2\theta_B = 2\theta_t \quad \text{ou} \quad \pi - 2\theta_B = 2\theta_t$$

Soit :

$$\theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2} \quad (3.37)$$

D'où :

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \theta_t = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_B \right) = n_2 \cos \theta_B$$

Finalement, nous trouverons une expression pour l'angle de Brewster :

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (3.38)$$

L'angle de Brewster est l'angle pour lequel le rayon réfléchi est perpendiculaire au rayon transmis.

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

Programme Maple pour tracer les coefficients de réflexion r_{TM} , r_{TE}

Le programme suivant trace les coefficients de réflexion r_{TM} , r_{TE} en fonction θ de et indique l'angle de Brewster θ_B

```
restart:
```

```
with(linalg):
```

```
with(ListTools):
```

```
with(LinearAlgebra):
```

```
with(plots):
```

```
with(Statistics):
```

```
with(student):
```

```
_EnvAllSolutions := true:
```

```
n := 1.50:
```

```
num_TE := cos(theta)-sqrt(n^2-sin(theta)^2):
```

```
den_TE := cos(theta)+sqrt(n^2-sin(theta)^2):
```

```
r_TE := num_TE/den_TE:
```

```
num_TM := n^2*cos(theta)-sqrt(n^2-sin(theta)^2):
```

```
den_TM := n^2*cos(theta)+sqrt(n^2-sin(theta)^2):
```

```
r_TM := num_TM/den_TM:
```

```
y := 0:
```

```
r_TM_plot := plot(r_TM, theta = 0 .. 100*Pi*(1/180), -1 .. .4, color = red, axes = boxed):
```

```
r_TE_plot := plot(r_TE, theta = 0 .. 100*Pi*(1/180), -1 .. .4, color = red):
```

```
y_plot := plot(y, theta = 0 .. 100*Pi*(1/180), -1 .. .4, color = red):
```

```
display(r_TE_plot, r_TM_plot, y_plot):
```

6.7. Angle critique (réflexion totale) :

Lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu plus dense à un milieu moins dense, le rayon réfracté s'éloigne de la normale, soit l'angle de réfraction est plus grand que l'angle d'incidence. En effet, la variation entre les deux angles n'est pas linéaire, l'angle de réfraction varie plus rapidement que l'angle d'incidence, comme prédit par la loi de Snell-Descartes. On peut se trouver dans la situation où le rayon réfracté soit parallèle à l'interface. L'angle d'incidence qui provoque cette situation est appelé « l'angle critique ». Lorsque l'angle d'incidence est supérieur à l'angle critique, le faisceau est "piégé" à l'intérieur du milieu d'incidence d'indice supérieur (figure 3.12), et ne passe pas par l'interface, mais présente plutôt une réflexion interne totale. La communication par fibre optique repose sur ce phénomène.

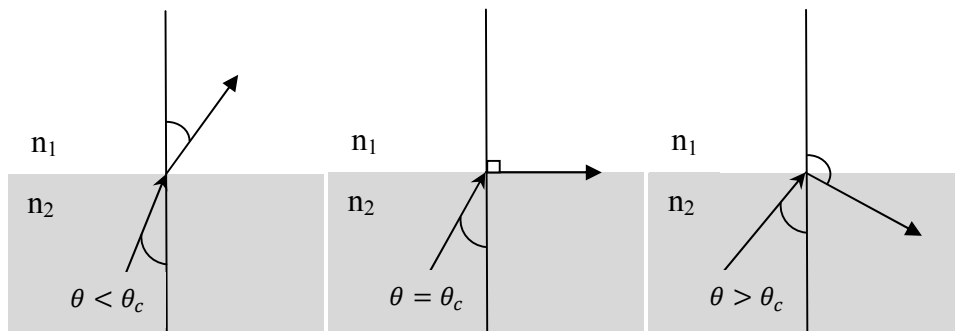


Figure 3.12 : La réfraction - la réflexion totale.

Considérons un rayon se propageant dans un milieu d'indice n , par exemple du verre $n=1.5$), et rencontrant un dioptre séparant ce milieu de l'air, avec une longueur d'onde incidente de 550 nm (dans l'air). Premièrement, la figure 3.13 montre graphiquement la réflectance de la lumière tracée par rapport à l'angle d'incidence. La réflectance passe à 1,0 à l'angle critique de $41,8^\circ$.

Les conditions d'une réflexion interne totale sont:

1. La lumière se déplace d'un milieu optiquement plus dense (indice de réfraction plus élevé) vers un milieu optiquement moins dense (indice de réfraction inférieur).
2. L'angle d'incidence est supérieur à l'angle critique

Il est possible de calculer l'angle critique à la surface entre deux milieux en utilisant la loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

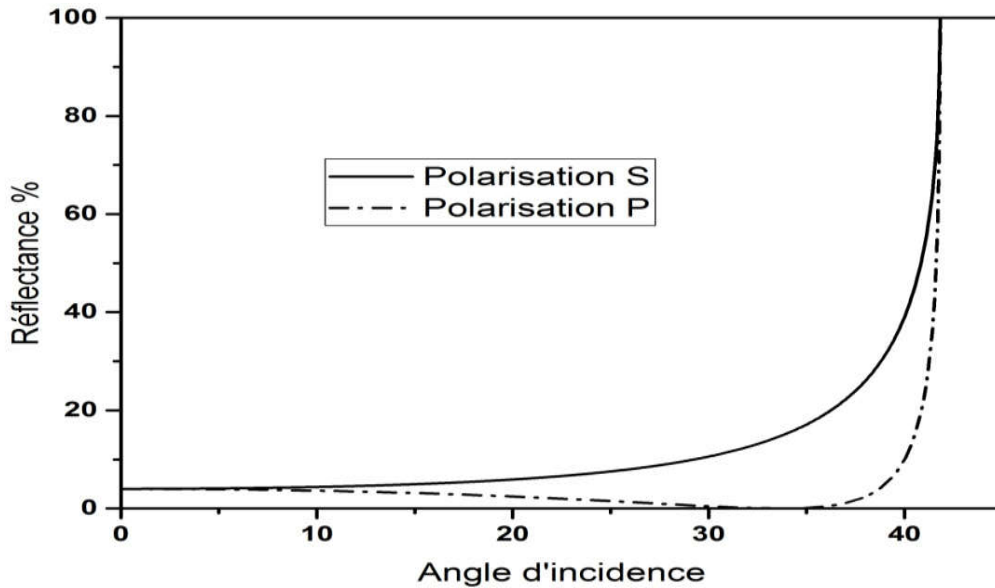


Figure 3.13 : Réfectance en fonction de l'angle d'incidence de la lumière passant du verre à l'air

où n_1 est l'indice de réfraction du matériau 1, n_2 est l'indice de réfraction du matériau 2, avec $n_1 > n_2$, θ_i est l'angle d'incidence et θ_t est l'angle de réfraction. Pour la réflexion interne totale, nous savons que l'angle d'incidence est l'angle critique. Donc,

$$\theta_i = \theta_c$$

Cependant, on sait aussi que l'angle de réfraction est de 90° . Donc nous avons :

$$\theta_t = 90^\circ$$

Nous pouvons alors écrire la loi de Snell-Descartes comme suit :

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin 90^\circ$$

on trouve :

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

Ou encore :

$$\theta_c = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \quad (3.39)$$

Il est à noter que pour une réflexion interne totale, le rayon incident est toujours dans le milieu le plus dense.

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

Exercices

Exercice 01 :

Le champ électrique d'une onde électromagnétique se propageant dans le vide est donné par :

$$\vec{E} = 50 \cdot \vec{e}_y \cdot \cos(10^8 t + \beta x) \text{ V/m}$$

- (a) Trouver la direction de propagation de l'onde.
- (b) Calculer β et le temps nécessaire pour parcourir une distance de $\frac{\lambda}{2}$.
- (c) Calculer, en fonction de β , le champ électrique aux instants : $t = 0$, $\frac{T}{4}$ et $\frac{T}{2}$.

Exercice02 :

Soit le champ électrique d'une onde lumineuse (exprimé en unité S.I.) :

$$\vec{E} = 10^3 \cdot \vec{e}_y \cdot \cos \pi \left[9 \cdot 10^{14} t - \frac{3 \cdot 10^6}{2} (\sqrt{3}x + z) \right]$$

\vec{e}_y est un vecteur unitaire le long de l'axe Oy .

- 1) Déterminer (a) sa direction de propagation, (b) sa vitesse v , (c) sa longueur d'onde λ , (d) sa fréquence f et (e) son amplitude E_0 .
- 2) Montrer que \vec{E} est solution de l'équation de propagation.
- 3) Quelle est l'expression du champ magnétique \vec{B} correspondant, calculer B_0 ?
- 4) Représenter sur un schéma clair les vecteurs \vec{E} , \vec{B} et le vecteur d'onde \vec{k} .
- 5) Dédurre les propriétés de structure de l'onde plane.

Exercice 03 :

On considère deux polarisations circulaires de même amplitude, mais tournant en sens inverse, dont les champs électriques sont respectivement :

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = E_0 [\vec{e}_x \cos(\omega t) + \vec{e}_y \sin(\omega t)]$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = E_0 [\vec{e}_x \cos(\omega t + \varphi) - \vec{e}_y \sin(\omega t + \varphi)]$$

Calculer le champ électrique résultant $\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Préciser, l'état de polarisation de l'onde résultante.

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

Exercice 04 :

Décrire l'état de polarisation de chacune des ces ondes :

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \cos(\omega t - kz - \pi) \end{bmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{bmatrix} E_0 \cos\left(2\pi\left(\nu t - \frac{z}{\lambda}\right) - \frac{\pi}{2}\right) \\ E_0 \cos\left(2\pi\left(\nu t - \frac{z}{\lambda}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$
$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_0 \sin(\omega t - kz) \\ E_0 \sin\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{bmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Exercice 05 :

Décrire l'état de polarisation de chacune de ces ondes :

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x - E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$$
$$\vec{E}_2 = E_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e}_x - E_0 \cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_y$$
$$\vec{E}_3 = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x - E_0 \cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_y$$

Corrigés

Exercice 01 :

Le champ électrique de l'onde électromagnétique est donné par :

$$\vec{E} = 50 \cdot \vec{e}_y \cdot \cos(10^8 t + \beta x) \text{ V/m}$$

a) du signe positif dans $(\omega t + \beta x)$, nous en déduisons que l'onde se propage le long de $-\vec{e}_x$.

b) Dans le vide, la vitesse de propagation est c :

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{10^8}{3 \cdot 10^8} = \frac{1}{3} \text{ rad/m}$$

le temps nécessaire pour parcourir une distance de $\frac{\lambda}{2}$:

$$\frac{\lambda}{2} = c \cdot t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{\lambda}{2 \cdot c} = \frac{2 \cdot \pi}{\beta} \cdot \frac{1}{2 \cdot c} = \frac{6 \cdot \pi}{2 \cdot 3 \cdot 10^8} = 31,42 \text{ ns}$$

c) le champ électrique à :

$$t = 0, E_y = 50 \cos \beta x$$

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

$$t = \frac{T}{4}, E_y = 50 \cos\left(\omega \cdot \frac{2\pi}{4\omega} + \beta x\right) = -50 \sin \beta x$$

$$t = \frac{T}{2}, E_y = 50 \cos\left(\omega \cdot \frac{2\pi}{2\omega} + \beta x\right) = -50 \cos(\beta x)$$

Exercice 02 :

$$\vec{E} = 10^3 \cdot \vec{e}_y \cdot \cos \pi \left[9 \cdot 10^{14} t - \frac{3 \cdot 10^6}{2} (\sqrt{3}x + z) \right]$$

1- (a) La direction de propagation :

On a

$$\vec{E} = E_0 \cdot \vec{e}_y \cdot \cos[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}]$$

Avec $\omega = 9 \cdot \pi \cdot 10^{14}$ rad/s

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \pi \cdot \frac{3 \cdot 10^6}{2} (\sqrt{3}x + z) \Rightarrow \begin{cases} k_x = 3 \cdot \pi \cdot 10^6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = k \cos \theta \\ k_y = 0 \\ k_z = 3 \cdot \pi \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{2} = k \sin \theta \end{cases}$$

D'où $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad et $k = 3 \cdot \pi \cdot 10^6$ rad/m

(b) La vitesse v, (c) La longueur d'onde λ , (d) la fréquence f et (e) l'amplitude E_0 :

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{9\pi \cdot 10^{14}}{3\pi \cdot 10^6} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = c, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3\pi \cdot 10^6} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-6} \text{ m},$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9}{2} \cdot 10^{14} \text{ Hz}, \quad E_0 = 10^3 \text{ V/m}$$

2) \vec{E} solution de l'équation de propagation.

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (1)$$

$$E(r, t) = E_y(x, z, t)$$

$$\Delta E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -(3 \cdot \pi \cdot 10^6)^2 \cdot 10^3 \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \Delta \vec{E}$$

$$\Delta E_y = -9 \cdot \pi^2 \cdot 10^{15} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -81 \cdot \pi^2 \cdot 10^{31} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (3)$$

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

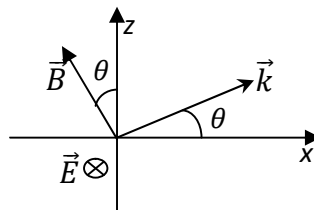
On remplace (2) et (3) dans (1) avec $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

3) L'expression du champ magnétique \vec{B}

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} (-Ek_z \vec{e}_x + Ek_x \vec{e}_z) = \frac{3 \cdot \pi \cdot 10^6}{\omega} E \cdot \left(-\frac{1}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_z \right)$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \left(-\frac{1}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_z \right) B_0 = \frac{E_0}{c}$$

4) Représentation des vecteurs \vec{E} , \vec{B} et \vec{k}



5) Les propriétés de structure de l'onde plane :

L'onde transversale ($\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k}$) ; $\vec{E} \perp \vec{B}$; \vec{E}, \vec{B} et \vec{k} forme un trièdre direct.

Exercice3:

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = E_0 [\vec{e}_x \cos(\omega t) + \vec{e}_y \sin(\omega t)] \text{ et } \vec{E}_2(\vec{r}, t) = E_0 [\vec{e}_x \cos(\omega t + \varphi) - \vec{e}_y \sin(\omega t + \varphi)]$$

Calcul du champ électrique résultant : La somme de ces deux polarisations est

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2E_0 \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{e}_x - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{e}_y \right]$$

L'état de polarisation de l'onde résultante :

La somme de deux polarisations circulaires de sens opposé et de même pulsation est une polarisation linéaire dont l'orientation dépend du déphasage entre les deux ondes.

Exercice 04:

Etat de polarisation :

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \cos(\omega t - kz - \pi) \end{bmatrix} \text{ Polarisation linéaire.}$$

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_0 \cos\left(2\pi\left(vt - \frac{z}{\lambda}\right) - \frac{\pi}{2}\right) \\ E_0 \cos\left(2\pi\left(vt - \frac{z}{\lambda}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \text{Polarisation linéaire.}$$

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_0 \sin(wt - kz) \\ E_0 \sin\left(wt - kz - \frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \text{Polarisation elliptique gauche.}$$

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_0 \cos(wt - kz) \\ E_0 \cos\left(wt - kz + \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \text{Polarisation circulaire droite.}$$

Exercice 05 :

Détermination de l'état de polarisation:

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos(wt - kz) \vec{e}_x - E_0 \cos(wt - kz) \vec{e}_y$$

$$E_0 \cos(wt - kz) \vec{e}_x + E_0 \cos(wt - kz + \pi) \vec{e}_y$$

$$= E_0 \cos(wt - kz) (\vec{e}_x - \vec{e}_y)$$

Le vecteur d'onde est $\vec{k} = k\vec{e}_z$

Au niveau du plan $z = 0$ on a :

$$\text{Pour } wt = 0 : \vec{E}_1 = E_0 \vec{e}_x - E_0 \vec{e}_y \quad \text{et} \quad E_1 = \sqrt{2}E_0$$

$$\text{Pour } wt = \frac{\pi}{2} : \vec{E}_2 = \vec{0}$$

$\varphi = \pi$ Polarisation linéaire

$$\vec{E}_2 = E_0 \sin(wt - kz) \vec{e}_x - E_0 \cos\left(wt - kz - \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_y$$

$$= E_0 \cos\left(wt - kz - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_x + E_0 \cos\left(wt - kz + \frac{3\pi}{4}\right) \vec{e}_y$$

Le vecteur d'onde est $\vec{k} = k\vec{e}_z$

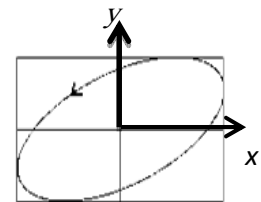
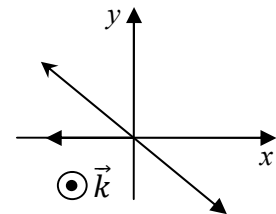
Au niveau du plan $z = 0$ on a :

$$\text{Pour } wt = 0 : \vec{E}_2 = 0 \vec{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \vec{e}_y \quad \text{et} \quad E_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0$$

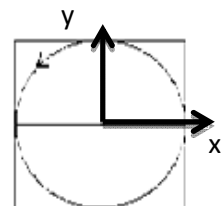
$$\text{Pour } wt = \frac{\pi}{2} : \vec{E}_2 = E_0 \vec{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \vec{e}_y \quad E_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0$$

$\varphi = \frac{\pi}{4}$ Polarisation elliptique droite.

$$\vec{E}_3 = E_0 \cos(wt - kz) \vec{e}_x - E_0 \cos\left(wt - kz - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_y$$



$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$



$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

CHAPITRE III : PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

$$= E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_0 \cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_y$$

Le vecteur d'onde est $\vec{k} = k\vec{e}_z$

Au niveau du plan $z = 0$ on a :

$$\text{Pour } \omega t = 0 : \vec{E}_2 = E_0 \vec{e}_x \quad \text{et} \quad E_2 = E_0$$

$$\text{Pour } \omega t = \frac{\pi}{2} : \vec{E}_2 = -E_0 \vec{e}_y \quad E_2 = E_0$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ *Polarisation circulaire droite.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. Amzallag, J. Cipriani, J. Ben Naim et N. Piccioli : « *La physique du Fac, Electrostatique et Electrocinétiq*ue », 2^{ème} Edition, Edi-Science 2006.
- [2] José- Philippe Pérez, Robert Carles, Robert Fleckinger : « *Electromagnétisme, fondements et application, avec 300 exercices et problèmes résolus* », 4^{ème} édition, Dunod, 2002.
- [3] R Michel Hulin : « *Electromagnétisme, Équations de Maxwell* », Armand Colin 1971.
- [4] R Michel Hulin : « *Electromagnétisme, Ondes électromagnétique* », Armand Colin 1971.
- [5] Pierre Krempf : « *Electromagnétisme MP* », Collection les nouveaux Précis Bréal 2004.
- [6] Joseph Edminister : « *Electromagnetics* », 3rd edition, Schaum's Outline Series 2000.
- [7] Matthew Sadiku: « *Elements of Electromagnetics* », 3rd Edition, Hardcover 2000.
- [9] Maxime Nicolas : « *Ondes et électromagnétisme* », Dunod 2009.
- [10] Patrice Tchofo Dinda, Pierre Mathey : « *Electromagnétisme, Ondes et propagation guidée* », Dunod 2017.
- [20] Maple 17. Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., Waterloo, Ontario.
- [21] OriginPro, Version 2019b. OriginLab Corporation, Northampton, MA, USA.