REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

Département de mathématiques et informatique

Polycopié

Analyse III (Les Séries)

Cours et exercices d'applications

Fettouch Houari

Maitre de conférences B

Mostaganem 2019

Préface

Cet ouvrage a été conçu pour un but précis, un guide pratique et simple, un livre d'exercices corrigés avec rappel de cours à destination des étudiants de deuxième année licence mathématique abordant le module d'analyse III. Il contient l'essentiel du cours illustré par des exemples, tout en respectant le programme proposé par le ministère.

Il ne substitue en aucun cas à un cours théorique complet, au contraire il doit au fur et à mesure l'accompagner pour une bonne compréhension et une assimilation du cours. Des exercices d'applications de difficultés variées sont proposés à la fin de chaque chapitre afin d'élucider le raisonnement suivi et de permettre à l'étudiant de tester ses connaissances et à se préparer aux examens et aux tests finaux.

Fruit de nombreuses années d'enseignements, ce travail tout en restant modeste se divise en quatre chapitres, le contenu et l'ordre étant respecté suivant le canevas donné par le ministère.

Et de l'observation des difficultés que rencontre l'étudiant dans l'abord des mathématiques au niveau du premier cycle des universités qui se résume ainsi :

-Difficulté pour comprendre un énoncé

-Difficulté de conception et de rédaction de raisonnements

-Difficulté de mettre en œuvre un travail méthodique et de dégager les idées sous-jacentes.

L'ambition de cet ouvrage est de contribuer à la résolution de ces difficultés. Pour ma part, un conseil fort utile pour les étudiants ou tout autre personne voulant acquérir des connaissances dans ce domaine et de bien comprendre le côté théorique et de passer à faire les exercices sans se soucier des réponses. Les solutions sont utiles uniquement pour appréhender le degré de difficulté du problème posé.

J'espère que ce document est un apport pour les étudiants et pour toute autre personne voulant maitriser cette partie de l'analyse mathématique.

Je tiens à remercier mes collègues qui ont le mérite de bien juger ce manuscrit et d'y apporter des modifications. Il est possible que ce travail comporte des imperfections, je serai très reconnaissant à tous ceux qui me ferait part de leurs remarques et leurs suggestions.

Table des Matières

Chapitre 1

Séries numériques

Introduction

On introduit dans ce chapitre le concept fondamental de série numérique. Cette notion permet l'étude de phénomènes discrets par nature, permet également la définition de nouvelles fonctions, et sert de fondement aux théories essentielles des séries entières et séries de Fourier. Ses prolongements se retrouvent dans la plupart des branches de l'analyse et des probabilités.

Prérequis:

Analyse et topologie (limites, continuité, dérivation, développements limités). Suites réelles, complexes et vectorielles

Analyse 1ère année (transformations intégrales, fonctions spéciales, EDP,. . .)". Statistique inductive (1ère année)

Analyse numérique

1.1 Deux concepts : suites et séries numériques

Une suite numérique est par d´efinition une application définie sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ (ou éventuellement l'ensemble

des entiers supérieurs ou égaux ā un seul $n_0 \in \mathbb{N}$) et ā valeurs dans C : par exemple les applications :

$$n \in \mathbb{N} \to z^n \quad (z \in \mathbb{C})$$

$$n \in \mathbb{N} - \{0,1\} \to \frac{1}{n(n-1)}$$

d´efinissent des suites numériques ; on notera de manière abrégée une telle suite sous

la forme$(u_n)_{n \geq n0}$, n_0 d´esignant précisément le seuil en deça duquel le nombre un

n'est plus d´efini. On dit que un est le terme général de la suite. Si le terme général

de la suite est toujours un nombre réel, la suite est dite á valeurs réelles.

Definition 1 *Soit* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *une suite numérique; de* $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. On appelle série de terme général* u_n *la suite de* $\mathbb{k} \times \mathbb{k}$*,* $\left(\left(u_n, \sum_{k=n_0}^{n} u_k\right)\right)_{n \geq n_0}$.

La quantité $\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ *est appelée somme partielle d'indice* n*.*

Notation: On note $\sum_{n \geq n_0} u_n$ la série de terme général u_n ou $[u_n]_{n \geq n_0}$.

On réservera dans ce cours la notation $\sum_{k=n_0}^{\infty} u_n$ ā la limite (si elle existe)

Definition 2 *On dira que la série* $\sum_{n \geq n_0} u_n$ *est :*

- *convergente (CV) si* $\lim_{n \to +\infty} s_n$ *existe, et on note alors* $\sum_{n \geq n_0} u_n$ *cette limite,*
- *divergente (DIV) sinon,*
- *absolument convergente (AC) si* $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ *est convergente.*

Série géométrique: $u_n = cq^n$, avec $c \neq 0$. La série $\sum_{n \geq 0} cq^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$.et la somme

vaut alors $\frac{c}{1-q}$ (somme partielle pour $q \neq 1$)

Série télescopique : $u_n = v_n - v_{n+1}$ La somme partielle $S_n = v_0 - v_{n+1}$. La série converge ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ existe ,

et la somme vaut alors $v_0 - \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Example 3 *$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, pour $n \geq 1$, on a $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et donc $\sum\limits_{n\geq 1} u_n = 1$*

Proposition 4 *Si $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ est une série numérique convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$*

Preuve 1.1.1 *Il suffit de remarquer que, pour $n \geq n_0 + 1$,*

$$u_n = S_n - S_{n-1};$$

si la s´erie $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ converge, on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = \sum_{n\geq n_0} u_n$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = S - S = 0$

par linéarité de la prise de limite.

Example 5 *pour $\alpha \leq 0$, $\frac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 (qd $n \to +\infty$), donc $\sum\limits_{n\geq n_0} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergence.*

LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE

Il existe des séries divergentes dont le terme général tend vers 0.

Tout raisonnement du type « le terme général tend vers 0 donc la série converge » est FAUX

1.2 Séries numériques à termes positifs

Dans cette partie, on considère des séries à termes réels positifs. Quitte à considérer la série opposée, ces résultats s'étendent aux séries à termes réels de signe constant (attention toute fois à bien retourner les inégalités pour les séries à termes négatifs).

Proposition 6 *La série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge si et seulement si la suite des sommes partielles* $(S_n)_{n\geq 0}$ *est majorée.*

Si elle est divergente, alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Démonstration: $(\Leftarrow)$ $\forall n \in \mathbb{N} : S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$, alors $(S_n)_{n\geq 0}$ tel que $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est croissante, si $(S_n)_{n\geq 0}$ est majorée, donc elle est convergente par conséquent la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

$(\Longrightarrow)$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge} \quad &\Leftrightarrow \quad (S_n)_{n\geq 0} \text{ converge} \\
&\Longrightarrow \quad (S_n)_{n\geq 0} \text{ bornée} \\
&\Longrightarrow \quad (S_n)_{n\geq 0} \text{ majorée.}
\end{aligned}$$

Notations: Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série à termes positifs divergente, on écrira

$$\sum_{n\geq 0} u_n = +\infty.$$

Cette notation signifie que $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$, elle est générâlement réservée aux séries divergentes à termes positifs (ou positifs à partir d'un certain rang).

De même, pour indiquer que la série de terme général $u_n \geq 0$ converge, on écrit parfois $\sum_{n\geq 0} u_n < +\infty$.

Exemple 1.2.1 *Etudier la nature de la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos^2(n)}{(n+1)(n+2)}$

$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{\cos^2(n)}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ et on a $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

Alors $s_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{\cos^2(n)}{(n+1)(n+2)} \leq \sum_{p=0}^{n} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} \right) = 1 - \frac{1}{n+2} \leq 1$. Alors la série $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos^2(n)}{(n+1)(n+2)}$ est convergente.

1.2.1 Comparaison des séries *à termes positifs*

Théorème 1.2.1 *Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$.*

1) $\sum_{n \geq 0} v_n$ *converge* $\Longrightarrow \sum_{n \geq 0} u_n$ converge, *et on a*

$$\sum_{n \geq 0} u_n \leq \sum_{n \geq 0} v_n \ . \tag{2.1}$$

2) $\sum_{n \geq 0} u_n$ *diverge* $\Longrightarrow \sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Démonstration:

1) Soient $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Par hypothèse, on a $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ S_n \leq T_n \tag{2.2}$$

Comme la suite (T_n) est majorée (car convergente), il en est de même de la suite (S_n).

Donc la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. On obtient l'inégalité (2.1) en faisant tendre n vers l'infini dans l'inégalité (2.2).

2) C'est la contraposée de l'assertion 1).

Exemple 1.2.2 *Considérons les séries* $\sum_{n \geq 0} \ln \left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$ *et* $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ *. Il est clair* *que les deux séries sont à termes positifs, de plus on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \ln\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Comme $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ *est une série géométrique de raison* $0 < \frac{3}{4} < 1$ *donc elle est convergente, alors la série* $\sum_{n\geq 0}\sin\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$ *est convergente.*

Remarque 1.2.1 *Si la majoration $u_n \leq v_n$ n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang n_0, la règle de comparaison*

reste valable car la convergence des suites $(S_n)_{n\geq n_0}$ et $(T_n)_{n\geq n_0}$ entraîne celle des suites $(S_n)_{n\geq n_0}$ et $(T_n)_{n\geq n_0}$. Cependant, l'inégalité (2.1) peut être fausse. Ainsi, pour $u_n = 3^{-n}$ si $n \geq 0$, et $v_n = 2^{-n}$ si $n \geq 1$ et $u_0 = 0$, on a évidemment $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 1$, et l'exemple 1.3 avec $a = \frac{1}{3}$ et $a = \frac{1}{2}$ montre que

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \frac{3}{2} > \sum_{n\geq 0} v_n = 1.$$

La règle de comparaison permet d'établir un autre critère important.

1.2.2 Règle d'équivalence

Théorème 1.2.2 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs telles que* $u_n \tilde{} v_n$*, lorsque* $n \to +\infty$*. Alors*

1) Les séries sont de même nature.

2) En cas de convergence, les restes sont équivalents.

3) En cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes.

Démonstration: L'équivalence $u_n \tilde{} v_n$ peut s'écrire

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \Longrightarrow (1-\epsilon)\, v_n < u_n < (1+\epsilon)\, v_n. \tag{2.3}$$

ce qui montre que, pour n assez grand, $v_n > 0$ lorsque $u_n > 0$.

1) Il suffit d'appliquer la règle de comparaison. En effet, si $\sum v_n$ converge, il en est de même de $(1+\epsilon)\sum v_n$ et donc de $\sum u_n$ Si maintenant $\sum v_n$ diverge, il en est de même de $(1-\epsilon)\sum v_n$ et donc de $\sum u_n$

2) En cas de convergence, la suite des restes converge, et avec l'encadrement (2.3), on déduit que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow (1-\epsilon)\sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \leq (1+\epsilon)\sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p,$$

ce qui établit l'équivalence des restes.

3) En cas de divergence, notons (S_n) et (T_n) les suites des sommes partielles associées respectivement aux séries et $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$. Pour tout $n > n_0$; on a

$$S_n = S_{n_0} + \sum_{p=n_0+1}^{n} u_p \text{ et } T_n = T_{n_0} + \sum_{p=n_0+1}^{n} v_p,$$

et en utilisant l'encadrement (2.3), on obtient

$$(1-\epsilon)\sum_{p=n_0+1}^{+\infty} v_p \leq \sum_{p=n_0+1}^{+\infty} u_p \leq (1+\epsilon)\sum_{p=n_0+1}^{+\infty} v_p,$$

ce qui s'écrit aussi

$$(1-\epsilon)(T_n - T_{n_0}) \leq S_n - S_{n_0} \leq (1+\epsilon)(T_n - T_{n_0})$$

ou encore

$$\left(1-\epsilon-\frac{(1-\epsilon)T_{n_0}-S_{n_0}}{T_n}\right)T_n \leq S_n \leq \left(1+\epsilon-\frac{(1+\epsilon)T_{n_0}-S_{n_0}}{T_n}\right)T_n.$$

Comme les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes et à termes positifs, les suites des sommes partielles tendent vers $+\infty$, et l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1-\epsilon)\,T_{n_0} - S_{n_0}}{T_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\epsilon)\,T_{n_0} - S_{n_0}}{T_n} = 0$$

On peut donc trouver deux entiers naturels n_1 et n_2 tels que

$$n > n_1 \Longrightarrow -\epsilon \leq \frac{(1-\epsilon)\,T_{n_0} - S_{n_0}}{T_n} \leq \epsilon$$

et

$$n > n_2 \Longrightarrow -\epsilon \leq \frac{(1+\epsilon)\,T_{n_0} - S_{n_0}}{T_n} \leq \epsilon.$$

Avec $N = \max(n_1, n_2)$, on obtient

$$\forall n \in,\ n \geq N \Longrightarrow (1-2\epsilon)\,T_n < S_n < (1+2\epsilon)\,T_n,$$

ce qui établit l'équivalence des sommes partielles S_n et T_n.

Remarque 1.2.2 *La règle d'équivalence peut être mise en défaut si les séries ne sont pas à termes positifs. En revanche, la règle reste valable*

pour les séries $\sum u_n$ à termes négatifs, il suffit en effet de considérer les séries opposées, c'est-à-dire celles de terme général $-u_n$.

1.2.3 Séries de Rîemann

Théorème 1.2.3 *La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration: Cette série diverge pour $\alpha = 1$ (*voir exemple*). pour $\alpha < 1$, on a $n^{-1} < n^{-\alpha}$,donc la série $\sum n^{-\alpha}$ diverge d'après la

règle de comparaison. On a vu par ailleurs que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

(voir exemple), donc par majoration on a la convergence de $\sum n^{-\alpha}$ pour $\alpha \geq 2$. Il reste à traiter le cas $\alpha \in \,]1, 2[$. Pour cela, considérons la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \tag{2.4}$$

On a facilement

$$\sum_{p=1}^{n} u_p = 1 - \frac{1}{(n+1)^{-\alpha-1}}$$

et comme $\alpha - 1 > 0$, on en déduit que

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{p} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$$

D'après (2.4), on a alors, pour tout n suffisamment grand,

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(1 - \left(1 + \frac{1-\alpha}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

D'où

$$u_n = \frac{1-\alpha}{n^{\alpha}} + 0\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),$$

ce qui donne

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-\alpha}{n^{\alpha}}$$

Les deux séries étant à termes positifs, la règle d'équivalence permet de conclure que pour $\alpha \in]1,2[$, la série $\sum n^{-\alpha}$ et convergente.

Du théorème précédent, on déduit les règles pratiques suivantes qui sont des conséquences faciles du théorème (ou règle) de comparaison.

Corollaire 1.2.1 **(Règle** $n^{\alpha}u_n$**)** *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs*

1) Si la suite $(n^{\alpha}u_n)$ converge vers 0 et si $\alpha > 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

2) Si la suite $(n^{\alpha}u_n)$ tend vers $+\infty$ et si $\alpha \leq 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration: 1) Puisque la suite $(n^{\alpha}u_n)$ converge vers 0, en prenant $\epsilon = 1$ dans la définition de la convergence, on trouve un $N \in \mathbb{N}$ tel que $n^{\alpha}u_n \leq 1$ pour tout $n \geq N$. On en déduit que $u_n \leq n^{-\alpha}$ pour

tout $n > N$, et comme $\alpha > 1$, la série $\sum n^{-\alpha}$ converge, et on conclut par la règle de comparaison pour séries à termes positifs.

2) Si $(n^{\alpha}u_n)$ tend vers $+\infty$, alors on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $n^{\alpha}u_n \geq 1$ pour tout $n \geq N$. On a alors $u_n \leq n^{-\alpha}$ pour tout $n \geq N$,

et comme $\alpha < 1$, la série $\sum n^{-\alpha}$ est divergente, et on conclut ici aussi à l'aide de la règle de comparaison.

Théorème 1.2.4 (**Règle de domination**) *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs* $u_n = 0\,(v_n)$ *quand* $n \to +\infty$

Si la série $\sum v_n$est convergente, il en est de même de la série $\sum u_n$

Dans ce cas, les restes respectifs $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ vérifient $R_n = 0\,(\rho_n)$ lorsque $n \to +\infty$

Démonstration: L'hypothèse $u_n = 0\,(v_n)$ peut s'écrire

$$\exists M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow\ 0 \leq u_n \leq M v_n.$$

Si la série $\sum v_n$ converge, il en est de même de $M \sum v_n$, et d'après la règle de comparaison $\sum u_n$ converge.

Si les séries considérées sont convergentes, on a, pour tout $n \geq n_0$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq M \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k,$$

c'est-à-dire $R_n = 0\,(\rho_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Remarque 1.2.3 *Le théorème précédent reste vrai si la série* $\sum u_n$ *est*

à valeurs complexes, il suffit de remplacer u_n *par* $|u_n|$ *dans la démonstration ci-dessus.*

Théorème 1.2.5 ***(Comparaison série-intégrale)*** *Soient a un nombre réel donné et* $f; [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction positive et décroissante.*

Alors la série $\sum f(n)$ (avec $n \geq a$) et l'intégrale impropre $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\, dt$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence, on a l'encadrement suivant :

$$\int\limits_{n+1}^{+\infty} f(t)\, dt \leq R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \leq \int\limits_n^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Démonstration: Quitte à considérer $f_a(t) = f(t+a)$, on peut supposer $a = 0$. La décroissance de / donne pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$t \in [p,\ p+1] \Longrightarrow f(p+1) \leq f(t) \leq f(p).$$

Par intégration de f sur le segment $[p,\ p+1]$, on en déduit que

$$f(p+1) \leq \int\limits_p^{p+1} f(t)\, dt \leq f(p).$$

En sommant pour p allant de 0 à n, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} - f(0) \leq \int\limits_0^{n+1} f(t)\, dt \leq S_n. \tag{2.5}$$

Si la série converge, la suite (S_n) est majorée, donc la suite $\left(\int\limits_0^{n+1} f(t)\, dt\right)$ l'est aussi. La fonction f étant positive, $x \to \int\limits_0^{x} f(t)\, dt$ est majorée, ce qui prouve que l'intégrale impropre $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\, dt$ dt est convergente.

Réciproquement, si l'intégrale impropre est convergente de valeur M, on déduit de l'encadrement (2.5) que

$$S_{n+1} \leq \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt + f(0) \leq M + f(0)$$

La suite (S_n) des sommes partielles est donc bornée, et comme elle est croissante (car la série est à termes positifs), elle est donc convergente.

Autrement dit, la série $\sum u_n$ est convergente.

Proposition 1.2.1 ***(Séries de Bertrand)*** *La série de Bertrand*

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}} \qquad (\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$ *ou* $(\alpha = 1$ *et* $\beta > 1)$.

Démonstration:

Convergence par comparaison logarithmique

Proposition 1.2.2 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs à partir d'un rang* p*, et telles que*

$$\forall n > p,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

1) Si $\sum v_n$ est convergente, il en est de même $\sum u_n$.
2) Si $\sum u_n$ est divergente, il en est de même $\sum v_n$.

Démonstration: Bien sûr, les points 1) et 2) sont équivalents. En écrivant, pour $n > p+1$,

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} \leq \frac{v_{p+1}}{v_p},\ \frac{u_{p+2}}{u_{P+1}} \leq \frac{v_{P+2}}{v_{P+1}},\ \ldots,\ \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{v_n}{v_{n-1}},$$

puis en formant le produit de ces inégalités, on obtient

$$\frac{u_n}{u_p} \leq \frac{v_n}{v_p},$$

ce qui donne le résultat grâce à la règle de comparaison.

Exemple 1.2.3 *Étudier la convergence de la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{e^n}$ *en utilisant la règle de comparaison logarithmique avec la série* $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2}{e}\right)^n$.

Posons $u_n = \frac{n}{e^n}$ et $v_n = \left(\frac{2}{e}\right)^n$, alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{ne} \leq \frac{2}{e} = \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Comme ($\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2}{e}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\frac{2}{e} < 1$). Alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{e^n}$ est convergente

Corollaire 1.2.2 *(**Critère de D'Alembert usuel (1768)**). Soit* $\sum u_n$ *une série à termes strictement positifs, telle que* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

i) Si $l < 1$; alors la série $\sum u_n$ converge.
ii) Si $l > 1$; alors la série $\sum u_n$ diverge.
iii) Si $l = 1$; on ne peut rien dire pour la nature de la série $\sum u_n$.

Démonstration.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \Longleftrightarrow \ \forall \epsilon > 0, \ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n > N_\epsilon \Longrightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \epsilon$$

$$\Longleftrightarrow \ \forall \epsilon > 0, \ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n > N_\epsilon \Longrightarrow l - \epsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \epsilon$$

i) Hypothése: $l < 1$, Il existe un réel k tel que $l < k < 1$et il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k$. On en déduit, pour tout entier i : $u_{n_0+i} \leq k^i u_{n_0}$. La série de terme général u_n est convergente.

ii) Hypothése: $l > 1$, , il existe un entier n_1 tel que, pour tout entier $n > n_1$, on ait $u_n > 0$ et $u_{n+1} > u_n$ d'où $u_{n+1} \geq u_{n_1} > 0$

. Le terme général u_n ne tend pas vers 0. Alors la série $\sum u_n$ divergente.

iii) Pour $l = 1$; on ne peut rien conclure. Par exemple si on prend la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente et la série $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ est convergente on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = 1.$$

Exemple 1.2.4 *Étudier a nature de la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1.3...(2n-1)}{3^n n!}$. *On a*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1.3...(2n+1)}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{1.3...(2n-1)}{3^n n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n+3} \\ &= \frac{2}{3} < 1. \end{aligned}$$

Ainsi d'après le Critère de D'Alembert la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1.3...(2n-1)}{3^n n!}$ *est convergente.*

1.2.4 Règle de Cauchy

Proposition 1.2.3 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs.*

i) S'il existe $l \in \mathbb{R}$, $0 < l < 1$ *tel que* $(u_n)^{\frac{1}{n}} \leq l$ *pour* n *assez grand, alors la série* $\sum u_n$ *converge.*

ii) Si $(u_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1$ *pour* n *assez grand, alors la série* $\sum u_n$ *diverge.*

Démonstration.

i) D'aprés la croissance de la fonction $x \to x^n$ sur $\mathbb{R}_+$; on a

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} \leq l \Longrightarrow u_n \leq l^n,$$

or $\sum l^n$ étant une série géométrique convergente $(0 < l < 1)$, donc d'après le Théorème comparaison, la

série $\sum u_n$ converge.

ii) On a $(u_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1 \Longrightarrow u_n \geq 1$, car la fonction $x \to x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n \geq 1$, ainsi la série $\sum u_n$ *diverge.*

Corollaire 1.2.3 ***(Règle de Cauchy usuelle (1821)).*** *Soit* $(u_n)_n$ *une suite à termes positifs telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$

i) Si $l < 1$*; alors la série* $\sum u_n$ *converge.*

ii) Si $l > 1$*; alors la série* $\sum u_n$ *diverge.*

iii) Si $l = 1$*; on ne peut rien dire pour la nature de la série* $\sum u_n$.

Démonstration.

On compare la série initiale avec une série géométrique.

i) Pour $l < 1$, il existe un réel k tel que $l < k < 1$. pour n assez, on a: $\sqrt[n]{u_n} < k$, d'où $u_n < k^n$ est comme la série $\sum k^n$ converge, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

ii) Pour $l > 1$, on a, pour n assez grand, $\sqrt[n]{u_n} > 1$, d'où $u_n > 1$. Le terme général ne tend pas vers 0. La série de terme général est donc divergente.

iii) Pour $l = 1$; on ne peut rien conclure. Par exemple si on prend la série divergente $\sum \frac{1}{n}$ et la série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \to +\infty} e^{-\frac{\ln(n)}{n}} = 1, \text{ car } \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n^2}\right)} =$$

Or la première série est divergente et la deuxième série est convergente.

Exemple 1.2.5 *Pour la série de terme général* $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$, *on a pour tout* $n \geq 1$,

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right),$$

et pour tout n suffisamment grand :

$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, et donc $n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1 + o(1)$.

Par continuité de l'exponentielle, on a alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-1}$, comme $e^{-1} < 1$, on conclut que la série $\sum\limits_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge.

Une question se pose maintenant, peut-on avoir des limites différentes en appliquant les deux

Critères, de D'Alembert et celui de Cauchy?

La réponse est donnée par la Proposition suivante.

Proposition 1.2.4 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes strictement positifs.*

i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l_1 \neq 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l_2 \neq 0$, alors $l_1 = l_2$.

Donc il est inutile d'essayer la règle de Cauchy si la règle de D'Alembert a donné $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \ (l \in \mathbb{R}_+)$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

iii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty$.

Remarque 1.2.4 *La réciproque de ii) est fausse.*

En effet, soit la série $\sum u_n$ *où*

$$u_n = \begin{cases} \left(\frac{5}{7}\right)^n & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ 3\left(\frac{5}{7}\right)^n & \textit{si } n \textit{ est impair} \end{cases}.$$

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{15}{7} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{5}{21} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

alors, la suite numérique $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ n'admet pas une limite, donc le Critère de D'Alembert ne s'applique pas.

Cependant. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{5}{7} < 1$, donc le Critère de Cauchy s'applique et la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

En particulier si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$; il est unitile d'essayer la règle de Cauchy.

Remarque 1.2.5 *Les Critères de Cauchy et de D'Alembert ne sont valides que si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ *existent.*

En revanche, la quantité $l = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{u_n}$ *est toujours définie. Alors on a,* *i) Si* $l < 1$ *i); alors la série* $\sum u_n$ *converge.*

ii) Si $l > 1$*; alors la série* $\sum u_n$ *diverge.*

iii) Si $l = 1$*; on ne peut rien dire pour la nature de la série* $\sum u_n$.

Pour la suite nous donnons des règles permettant d'explorer le cas où $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$*; dans le*

Critère de D'Alembert.

1.2.5 Critères de Raabe et Duhamel

Proposition 1.2.5 *Soit* $(u_n)_n$ *une suite à termes réels positifs. Si* $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ *admet une limite finie* L

, alors la série $\sum u_n$ convergente si $L > 1$ *et diverge si* $L < 1$.

Démonstration.

$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = L \iff \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\epsilon \implies \left|n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - L\right| < \epsilon$

$\iff \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\epsilon \implies L - \epsilon < n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < L + \epsilon$

i) Hypothése: $L < 1$, il existe $\epsilon_0 = \frac{1-L}{2} > 0$ tel que $L + \epsilon_0 < 1$ et donc $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < L + \epsilon_0 < 1$ à partir d'un certain rang n_0: d'après la Proposition précédente, la série $\sum u_n$ est diververgente.

ii) Hypothése: $L > 1$, il est clair qu'il existe $\epsilon_1 = \frac{L-1}{2} > 0$ tel que $L - \epsilon_1 > 1$ et donc $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > L - \epsilon_1 > 1$ à partir d'un certain rang n_1: Donc d'après

la Proposition précédente, la série $\sum u_n$ convergente.

iii) Hypothése: $L = 1$; on ne peut rien conclure.

Exemple: si on prend la série divergente $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n}$ et la série $\sum_{n\geq2} \frac{1}{n\ln^3 n}$ est une série de Bertrand elle est convergente , alors que

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n}\right) = 1,$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\frac{1}{n\ln^2 n}}{\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}}-1\right) &= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{(n+1)\ln^3(n+1)}{n\ln^3 n}-1\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{(n+1)}{n}-1\right)=1.
\end{aligned}$$

Corollaire 1.2.4 *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels strictement positifs, telle que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\ \text{pour } n\to+\infty.$$

i) Si $\alpha>1$ i); alors la série $\sum u_n$ converge.
ii) Si $\alpha<1$; alors la série $\sum u_n$ diverge. (Inégalité stricte et non plus large).
iii) Si $\alpha=1$; on ne peut rien dire pour la nature de la série $\sum u_n$

Exemple 1.2.6 *Étudier la nature de la série $\sum \frac{n!e^n}{n^{n+1}}$. on a*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to+\infty} e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\\
&= \lim_{n\to+\infty} e\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = ee^{-1}=1.
\end{aligned}$$

On applique le Critère de Duhamel, par le developpement, on a

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= e\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = ee^{\left[(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right]}\\
&= 1-\frac{\frac{1}{2}}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\\
&= 1-\frac{\frac{1}{2}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Dans ce cas $\mu=\frac{1}{2}<1$, ainsi la série $\sum\frac{n!e^n}{n^{n+1}}$ est divergente.

1.2.6 Critères de Gauss

Proposition 1.2.6 *.Soit* $\sum u_n$ *une série à termes strictement positifs, telle que*

$$\exists\,(\alpha;\beta) \in \mathbb{R} \times \left]1;+\infty\right[,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n^{\beta}}\right).$$

Alors,

$$\exists k \in \mathbb{R}_{+},\ u_n \overset{+\infty}{\backsim} \frac{k}{n^{\alpha}}.$$

et par conséquent la série $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

Exemple 1.2.7 *Étudier la nature de la série*

$$\sum \left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k} \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^{*}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n+1} 2k} \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2n+1}{2n+2}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

mais on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

ainsi d'après la Proposition précédente, la série $\sum \left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ est divergente.

1.3 Séries à termes quelconques

1.3.1 Séries alternées

Définition 1.3.1 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes quelconques.*

La série $\sum u_n$ est dite alternée si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n u_{n+1} < 0$.

Remarque 1.3.1 *Toute série alternée peut être écrite sous la forme* $\sum (-1)^n u_n$*; où un est de signe*

constant.

Théorème 1.3.1 ***(Théorème de Leibniz (1682)).****Soit* $\sum (-1)^n u_n$ *une série alternée, si* $(u_n)_n$

est décroissante et tend vers 0; alors la série $\sum (-1)^n u_n$ *est convergente.*

De plus sa somme S *est toujours comprise entre deux termes consécutifs* S_n *et* S_{n+1} *de la suite de*

ses sommes partielles.

et le reste :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

est du signe de u_{n+1} et vérifie $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Exemple 1.3.1 *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$*, la série* $\sum (-1)^{n-1} n^{-\alpha}$ *est alternée*

et la suite de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ *est décroissante et tend vers 0. D'après* le critère de Leibniz, la série $\sum (-1)^{n-1} n^{-\alpha}$ est donc convergente, et de plus, on a

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^{\alpha}}.$$

Remarque 1.3.2 *Si $\sum (-1)^n u_n$ est une série alternée et que (u_n) tend*

vers 0, Cela,ne suffit pas à assurer la convergence de la série. Considérons en effet la série alternée $\sum (-1)^n u_n$ avec $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

1.3.2 Critère d'Abel pour les séries de la forme $\sum u_n v_n$

Théorème 1.3.2 ***(Critère d'Abel (1826)).*** *Soit la série $\sum u_n v_n$ tel que,*

i) la suite $(v_n)_n$ décroissante et converge vers 0;

ii) il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq M$

Alors, la série $\sum u_n v_n$ est convergente.

Démonstration. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_k$.Soit $\epsilon > 0$ et soient p, $q \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned}
|T_{p+q} - T_p| &= \left|\sum_{k=p+1}^{p+q} u_k v_k\right| = \left|\sum_{k=p+1}^{p+q} (S_k - S_{k-1}) v_k\right| = \left|\sum_{k=p+1}^{p+q} S_k v_k - \sum_{k=p+1}^{p+q} S_{k-1} v_k\right| \\
&= \left|\sum_{k=p+1}^{p+q} S_k v_k - \sum_{k=p}^{p+q-1} S_k v_{k+1}\right| = \left|\sum_{k=p+1}^{p+q-1} S_k v_k + S_{p+q} v_{p+q} - S_p v_{p+1} - \sum_{k=p+1}^{p+q-1} S_k v_{k+1}\right| \\
&= \left|S_{p+q} v_{p+q} - S_p v_{p+1} - \sum_{k=p+1}^{p+q-1} S_k (v_k - v_{k+1})\right| \\
&\leq |S_{p+q}| |v_{p+q}| + |S_p| |v_{p+1}| + \sum_{k=p+1}^{p+q-1} |S_k| |(v_k - v_{k+1})| \leq M |v_{p+q}| + M |v_{p+1}| + M \sum_{k=p+1}^{p+q-1} |(
\end{aligned}$$

Puisque la suite (vn)n est décroissante, et alors

$$|T_{p+q} - T_p| \leq M v_{p+q} + M v_{p+1} + M (v_{p+1} - v_{p+q}) \leq 2M v_{p+1},$$

et comme la suite $(v_n)_n$ converge vers 0; alors il existe $N_\epsilon > 0$, tel que pour tout $n > N_\epsilon$ on a $v_n \leq \frac{\epsilon}{2M}$. Ainsi

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall p,\ q \in \mathbb{N}^* : \ \left(p \geq N_\epsilon \Longrightarrow |T_{p+q} - T_p| < \epsilon\right).$$

et par suite la suite $(T_n)_n$ est de Cauchy et donc convergente. D'où la série $\sum u_n v_n$ est convergente.

Exemple 1.3.2 *Étudier la nature de la série* $\sum \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}$.

Posons: $v_n = \frac{1}{n}$ *et* $u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$, *alors on a*

la suite à termes positifs $(v_n)_n$ *est décroissante vers* 0.

Dautre part considérons la suite $w_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$. on a

$$w_1 + w_2 + ... + w_n = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1 - e^{in\frac{\pi}{2}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{2}}}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

d'où

$$|w_1 + w_2 + ... + w_n| \leq \frac{2}{\left|1 - e^{i\frac{\pi}{2}}\right|} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Ainsi la série $\sum \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}$ est convergente.

1.3.3 Série absolument convergente

Définition 1.3.2 *La série* $\sum u_n$ *est dite absolument convergente, si la série* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

Proposition 1.3.1 *Toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration.Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ un une série absolument convergente. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ et } S_n^A = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

alors

$$\sum_{n\geq 0} u_n \text{ est une série absolument convergente} \Longleftrightarrow \text{la série} \sum_{n\geq 0} |u_n\,| \text{ est convergente}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{la suite } \left(S_n^A\right)_n \text{ est convergente}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{la suite } \left(S_n^A\right)_n \text{ est Cauchy.}$$

La suite $\left(S_n^A\right)_n$ est Cauchy$\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N}^* : \left(p \geq N_\epsilon \Longrightarrow \left|S_{n+p}^A - S_n^A\right| < \epsilon\right).$

Or on a

$$|S_{n+p} - S_n| = \left|\sum_{k=p+1}^{n+p} u_k\right| \leq \sum_{k=p+1}^{n+p} |u_k\,| = \left|S_{n+p}^A - S_n^A\right| < \epsilon,$$

ainsi la suite $(S_n)_n$ est de Cauchy, et donc elle est convergente et par suite la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

Remarque 1.3.3 *La réciproque de cette Proposition et en général fausse, par exemple : la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$*; elle est convergente mais n'est pas absolument convergente.*

Série semi-convergente

Définition 1.3.3 *Une série* $\sum u_n$ *est dite semi-convergente si elle est convergente et la série* $\sum_{n\geq 0} |u_n\,|$ *diverge.*

Exemple 1.3.3 *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ $(0 < \alpha \leq 1)$ *est semi-convergente.*

Définition 1.3.4 ***(Série commutativement convergente)****. On dit qu'une série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est commutativement converge, si pour toute bijection*

$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$; la série $\sum_{n\geq 0} u_{\varphi(n)}$ est convergente.

Proposition 1.3.2 *Toute série absolument convergente est commutativement convergente. Autrement dit : une série absolument convergente, converge toujours* *même si on change l'ordre de ses termes,et la somme ne dépend pas de l'ordre des termes.*

Remarque 1.3.4 *La propriété cité à la Proposition précédente n'est pas vraie si la série est semi-convergente, c'est-à-dire on ne peut pas changer l'ordre des termes.*

Exemple 1.3.4 *On a* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$*, alors* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$ *.D'autre part on a*

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{14} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \cdots = \frac{S}{2} \end{aligned}$$

donc $S = 0 \neq \ln(2)$.

1.3.4 Produit des séries

Définition 1.3.5 *soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries numériques.*

La séries $\sum_{n\geq 0} w_n$ avec $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ et dite produit des séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$.

Exemple 1.3.5 *soient* $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!}$ *et* $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{n!}$ *deux séries numériques, alors le terme general de la séries produit* $\sum_{n\geq 0} w_n$ *est*

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \frac{3^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{5^n}{n!} \end{aligned}$$

Exemple 1.3.6 *On cherche à calculer le produit suivant:*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right),$$

où $|x| < 1$. Par la règle de d'Alembert $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x| < 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est absolument convergente et sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{x-1}.$$

Ainsi la produit de Cauchy de cette série par elle même est

	1	x	x^2	x^n
1	1	x	x^2	x^n
x	x	x^2	x^3	x^{n+1}
x^2	x^2	x^3	x^4	x^{n+2}
x^n	x^n	x^{n+1}	x^{n+2}	x^{2n}

Ainsi on a

$$w_0 = 1,\ w_1 = 2x,\ w_2 = 3x^2....,\ w_n = (n+1)\,x^n.$$

Par application du théorème précédent, il vient pour $|x| < 1$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n\right) = 1 + 2x + 3x^2 + ... = \tfrac{1}{(1-x)^2}.$$

1.3.5 Groupement des termes

En général, la série obtenue en groupant des termes d'une série donnée peut converger sans que ce soit le cas de la série initiale: le sommes

partielles de la série obtenue après groupement ne forment qu'une suite extraite de la suite des sommes partielles de départ.

On considère la série

$$\sum_{n\geq 0} u_n = u_0 + u_1 + ... + u_n + .../ \ u_n \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

On groupe les termes de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ avec conservation de l'ordre.

On a alors,

$$(u_0 + u_1 + ... + u_{n_1}) \ + \ (u_{n_1+1} + u_{n_2+2} + ... + u_{n_2}) \ + ... + \ \left(u_{n_k+1} + ... + u_{n_{k+1}}\right) \ + ...$$

C'est a' dire, on a obtenue la série:
$\sum_{n\geq 0} v_n$ ou' $v_n = \sum_{p=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_p$, et $\varphi(0) = 0$, $\varphi(k) = n_k + 1$, $\forall \ k \in \geq 1$.

Définition 1.3.6 *On dit que la série* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *est déduite de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *par les groupement des termes.*

On s'intéresse ici aux liens éventuels entre les natures de $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ et, dans le cas de convergence, aux liens de leurs sommes. On a alors

Proposition 1.3.3 *Si la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge alors* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *converge, et on a de plus*

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} v_n$$

Preuve 1.3.1 *Soit* $(S_n)_n$ *et* $(T_n)_n$ *les suites des sommes partielles de* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *respectivement i.e.,*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n, \\ &\text{et} \\ T_n &= \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + ... + v_n. \end{aligned}$$

On a donc,

$T_0 = v_0 = u_0 + u_1 + ... + u_{n_1} = S_{n_1}$,

$T_1 = v_0 + v_1 = u_0 + ... + u_{n_1} + u_{n_1+1} + ...u_{n_2} = S_{n_2}$,

.

.

.

$T_k = v_0 + v_1 + ... + v_k = u_0 + ... + u_{k+1} = S_{n_{k+1}}$.

D'ou la suite $(T_n)_n$ est une sous-suite de $(S_n)_n$.

Puisque la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge i.e.,

$$\exists S \in \mathbb{R} \diagup \lim_{n\to+\infty} S_n = S.$$

Alors la sous-suite $(T_n)_n$ de $(S_n)_n$ converge aussi, et on a

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = S.$$

D'ou,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Remarque 1.3.5 *La réciprique de la proposition précédente est fausse, i.e*

$$\sum_{n\geq 0} v_n \text{ converge} \nRightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge},$$

comme le montre l'exemple suivant:

Exemple 1.3.7 *La série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n = \sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n$ *est divergente car sa suite des sommes partielles* $(S_n)_n$ *défini par*

$$S_n = \begin{cases} 1 \ si \ n \ pair \\ 0 \ si \ n \ impair \end{cases},$$

n'admet pas de limite. Mais, la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ obtenue par groupement de termes définie par

$$\sum_{n\geq 0} v_n = (1-1) + (1-1) + ... + (1-1) + ...$$

converge puisque c'est la série nulle.

Remarque 1.3.6 *La proposition précédente n'est guère intéressante, car elle suppose la convergence de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$.

1.3.6 Exercices avec solutions

Exercise 1.3.1 *Calculer la somme de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *dont le terme général est donné par:*

1) $u_n = \frac{1}{n(n+2)}$, $n \geq 1$. 2) $u_n = \frac{(n+3)}{(n-1)n(n+1)}$, $n \geq 2$;

3)$u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, $n \geq 1$; 4) $u_n = \arctan \frac{1}{n^2+3n+3}$, $n \geq 0$, 5) $u_n = nx^{n-1}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice :

1) Soit $u_n = \frac{1}{n(n+2)}$, $n \geq 1$. On peut écrire u_n sous la forme

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Alors, la suite des sommes partielles d'orde n de cette série est donnée par:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right), \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}.$$

Donc la série est convergente et sa somme:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+2)} = \frac{3}{4}.$$

2) Soit $u_n = \frac{(n+3)}{(n-1)n(n+1)}$, $n \geq 2$. En décomposant la fraction rationnelle en éléments simples, on peut ecrire

$u_n = -\frac{3}{n} + \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n+1} = 2\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$

Par conséquent, la suite des somme partielles d'ordre n est

$$\begin{aligned} S_n &= 2\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right), \\ &= 2\left(1-\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

D'ou

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 2\left(1-\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{2}.$$

Ainsi la série est convergente et sa somme:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+3)}{(n-1)\,n\,(n+1)} = \frac{3}{2}.$$

3) Soit $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, $n \geq 1$.La suite des sommes partielles de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right), \\ &= \left[\left(\sqrt{1}-\sqrt{0}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)...+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\right], \\ &= \sqrt{n}. \end{aligned}$$

D'ou

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

Ce qui montre que la série est divergente.

4) Soit $u_n = \arctan \frac{1}{n^2+3n+3}$, $n \geq 0$. En utilisant la formule suivante:

$$\arctan x - \arctan y = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right), \ \forall x,\ y \in \mathbb{R} :\ xy > -1,$$

le terme généralde la suite $(u_n)_n$ peut s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned}\arctan \frac{1}{n^2+3n+3} &= \arctan \frac{(n+2)-(n+1)}{1+(n+2)(n+1)} \\ &= \arctan(n+2) - \arctan(n+1).\end{aligned}$$

Alors, la suite des sommes partielles de cette série est

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n} (\arctan(k+2) - \arctan(k+1)), \\ &= (\arctan(2) - \arctan(1)) + \arctan(3) - \arctan(2) + ... + \arctan(n+2) - \arctan(n+1), \\ &= \arctan(n+2) - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

D'ou

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi la série est convergente et sa somme:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan \frac{1}{n^2+3n+3} = \frac{\pi}{4}.$$

5) Soit $u_n = nx^{n-1}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Alors, la suite des somme partielles d'ordre n

de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{n=1}^{n} kx^{k-1}, \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + nx^{n-1}. \end{aligned}$$

On remarque que

$$S_n = [\sigma_n(x)]^{\prime},$$

où

$$\sigma_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n.$$

Or σ_n est une somme d'une suite géométrique de raison x et de premier terme 1, d'où

$$\sigma_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{pour } x \neq 1.$$

Par conséquent, pour tout $x \neq 1$,

$$S_n = \left[\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right]^{\prime} = \frac{-(n+1)x^n + nx^n + 1}{(1-x)^2}.$$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 1 \\ \infty \text{ ou n'existe pas} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Si $x = 1$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} u_n = \sum_{n \geq 1} n$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0 $\left(\text{ici } \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \neq 0\right)$.

On conclut que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge si $x<1$, et sa somme:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Exercise 1.3.2 *Etudier la nature des séries dont le terme général est donné ci-dessous:*

1) $u_n = \sqrt{n^2+n} - n,\ \ n \geq 1$
2) $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \quad n \geq 1;$
3) $u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n\sqrt{n}}, \quad n \geq 1.$

Solution de l'exercice :

1) La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$ est divergente car son terme général ne tend pas vers 0. En effet, on a

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{2}.$

2) La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ est divergente car son terme général ne tend pas vers 0. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to+\infty} \exp\left[n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \exp\left[-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right] \\
&= e^{-1}
\end{aligned}$$

puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{-1}.$$

3) La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n\sqrt{n}}$ est divergente car son terme général ne tend pas vers 0. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \exp\left[-n\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\right] \\
&= 1,
\end{aligned}$$

puisque,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Exercise 1.3.3 *Soient $(u_n)_n$ une suite a termes dans $\mathbb{R}_*^+$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose:*

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \text{ et } w_n = \frac{u_n}{1+u_n^2}.$$

1) Montrer que les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

2) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge.

3) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $\sum_{n\geq 0} w_n$ diverge.

4)Donner un exemple où $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge et $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge.

Solution de l'exercice :

1) On montre que les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.Pour cela, on va utiliser le critère de comparaison car les séries

sont supposées à termes positifs. On va calculer la limite suivante:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\frac{u_n}{1+u_n}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}(1+u_n)\,.\end{aligned}$$

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors son terme général u_n tend vers 0, et par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = 1 \neq 0.$$

Par application du théorème de comparaison , les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Et comme on a suposé que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, donc $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge aussi.

Inversement,on a par définition

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Après calcul, on trouve

$$u_n = \frac{v_n}{1-v_n}.$$

Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors son terme général v_n tend vers 0, et par suite,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-v_n} = 1 \neq 0.$$

Par application du théorème de comparaison , les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Et comme on a suposé que $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge aussi. Ainsi on a montré que

$$\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge } \iff \sum_{n\geq 0} v_n \text{ converge.}$$

C'est à dire que les deux séries sont de même nature.

2) On suppose que $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge et on montre que la série $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ l'est aussi. On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq w_n \leq u_n.$$

Donc si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge, il en est de même pour la série $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ par le critère de comparaison des séries à termes positifs.

3) Si maintenant la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors

$$\exists M > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n}{1+u_n^2} \geq \frac{u_n}{1+M^2}.$$

Or $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge, donc $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{u_n}{1+M^2}$ diverge aussi. Et par conséquent la série $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ est divergente par application du critère

de comparaison des séries à termes positifs.

4) Il suffit de prendre $u_n = n^2$ par avoir la convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ et la divergence de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

Exercise 1.3.4 *Etudier la nature des séries suivantes*

1) $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$; 2) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n\cos^2 n}$;3) $\sum\limits_{n\geq 1} \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin x}dx$; 4) $\sum\limits_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;
5) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$; 6) $\sum\limits_{n\geq 0} e^{-\sqrt{1+n}}$; 7) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a^n n!}{n^n}$, $a > 0$.

Solution de l'exercice :

1) On fait remarque que la série $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$ est à terme positifs $\left(\frac{4n-3}{n(n^2-4)} > 0\right)$. On vérifie qu'au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{4n-3}{n(n^2-4)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4n}{n^2} = \frac{4}{n}.$$

Alors par le théorème de comparaison des séries à terme positifs, les deux séries $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$ et $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{4}{n^2}$ sont de même nature.

Et comme $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{4}{n^2}$ est une série de Riemann converge $(\alpha = 2 > 1)$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$ l'est aussi.

2) La série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n\cos^2 n}$ diverge. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \cos^2 n \leq 1.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n\cos^2 n} \geq \frac{1}{n}.$$

Par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n\cos^2 n}$ diverge puisque la série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

3) La série $\sum\limits_{n\geq 1} \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin x}dx$ est convergente. En effet, on sait que

$$\forall n \geq 2,\ \forall x \in \left[0,\ \frac{\pi}{n}\right], \quad \sin x \leq x.$$

Par suite,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin x}dx \leq \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{n}} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Or la série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$ est une série de Riemann convergente avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. Il en résulte que $\sum\limits_{n\geq 1} \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin x}dx$ converge.

4) On obtient facilement un équivalent au voisinage de $+\infty$,

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}.$$

D'abord, on remarque que les séries $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_{n\geq 2} -\frac{1}{n^2}$ sont de signe constant.En effet, pour tout $n \geq 2$,

$\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \leq 0$ car $0 < 1-\frac{1}{n^2} < 1$.

Donc, le critère de comparaison s'applique.Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge puisque la série de Riemann $\sum_{n\geq 2} -\frac{1}{n^2}$ est convergente.

5) $\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$ est une série à termes positifs.On considère la série harmonique

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n},$$

et on calcule la limite du rapport

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}\ln n}} = 1 \neq 0.$$

Par application de théorème de comparaison, les deux séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$ sont de même nature. Et comme $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge,

il en est de même pour la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

6) Pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{1+n}}$, on va appliquer la règle de Riemann ou " $n^\alpha u_n$ ".On a alors,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} n^2 e^{-\sqrt{1+n}} = 0,$$

puisque l'exponentielle l'emporte sur la fonction puissance. Il résulte de la règle de Riemann ou " $n^\alpha u_n$ (proposition) que la série

$\sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{1+n}}$ est convergente.

7) $\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{a^n n!}{n^n}$, $a > 0$, est une série à termes positifs. On applique la règle de d'Alembert parce que le terme général

de cette série contient des puissances $n^{èmes}$. Alors, on calcule le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{a^n n!} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$,on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} a\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e}.$$

Il résulte de l'application du théorème de d'Alembert que si $\frac{a}{e} < 1$, la série $\sum_{n\geq1} u_n$ converge et elle diverge si $\frac{a}{e} > 1$.

Il reste alors le cas douteux c'est à dire $a = e$. Dans ce cas, on utilise la règle de Duhamel,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e.e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

En utilisant un développement limite, on obtient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e.e^{-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'après la règle de Duhamel, la série $\sum_{n\geq1} u_n$ diverge puisque $\lambda = -\frac{1}{2} < 1$.

Exercise 1.3.5 *Etudier la nature de la série de Bertrand* $\sum_{n\geq2} u_n$ *où*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice :

i) Si α, $\beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 1$. Dans ce cas, on va utiliser la règle de Riemann. Pour cela, on note

$$\gamma = \frac{1+\alpha}{2}.$$

Alors $\gamma > 1$ de plus, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\gamma} u_n = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln n)^{-\beta} = 0.$$

En effet, en posant

$$v_n = \ln\left[n^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln n)^{-\beta}\right],$$

et par les propriétés du logarithme, il vient pour tout $n \geq 2$
$v_n = \frac{1-\alpha}{2}\ln n - \beta\ln(\ln n) = \ln n\left(\frac{1-\alpha}{2} - \beta\frac{\ln(\ln n)}{\ln n}\right).$
Par passage à la limite quand $n \to +\infty$,on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} v_v = -\infty,$$

puisque $\frac{1-\alpha}{2} < 0$. Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\gamma} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{v_n} = 0.$$

Il résulte de la règle de Riemann ou " $n^{\alpha}u_n$ " que la série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ est convergente.
2i) Si $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < 1$. On calcule la limite suivante:

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = \lim_{n\to+\infty} n^{1-\alpha} (\ln n)^{-\beta}.$$

Un raisonnement analogue à ce qui précède, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = +\infty.$$

Alors la série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ diverge par la règle de Riemann ou " $n^{\alpha}u_n$ " proposition.

3i) Si $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha = 1$. Ici, on va utiliser le critère de comparaison d'une série à une intégrale. Soit alors $f : [2,\ +\infty[\to \mathbb{R}^{+}$

définie par:

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{\beta}}.$$

Il est clair que

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [2, \ +\infty[,$$

et f est continue sur $[2, \ +\infty[$.De plus, f est décroissante, en effet pour tout $x \in [2, \ +\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{-\left[(\ln x)^{\beta} + \beta(\ln x)^{\beta-1}\right]}{x^2(\ln x)^{2\beta}} < 0.$$

D'après le critère de comparaison d'une série à une intégrale ($cf.$ théorème), la $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$ et l'intégrale généralisée

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\beta}} dx$ sont de même nature. Or,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\beta}} dx = \lim_{A\to+\infty} \int_2^{A} \frac{\frac{1}{X}}{(\ln x)^{\beta}} dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \begin{cases} \left.\frac{(\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right|_2^A, & \text{si } \beta \neq 1 \\ \ln(\ln x)|_2^A, & \text{si } \beta = 1 \end{cases}.$$

D'où,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\beta}} dx = \lim_{A\to+\infty} \begin{cases} \frac{(\ln A)^{-\beta+1}}{-\beta+1} - \frac{(\ln 2)^{-\beta+1}}{-\beta+1}, & \text{si } \beta \neq 1 \\ \ln(\ln A) - \ln(\ln 2), & \text{si } \beta = 1 \end{cases}.$$

Par conséquent,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\beta}} dx = \lim_{A\to+\infty} \begin{cases} -\frac{(\ln 2)^{-\beta+1}}{-\beta+1}, & \text{si } \beta > 1 \\ +\infty, & \text{si } \beta < 1 \\ +\infty, & \text{si } \beta = 1 \end{cases}.$$

Ce qui signifie que

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx = \begin{cases} \text{converge}, & \text{si } \beta > 1 \\ \text{diverge}, & \text{si } \beta \leq 1 \end{cases}.$$

Enfin, on conclut que

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} = \begin{cases} \text{converge}, & \text{si } \beta > 1 \\ \text{diverge}, & \text{si } \beta \leq 1 \end{cases}.$$

Ainsi l'étude de la nature de la série de Bertrand mène à:

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \begin{cases} \text{converge}, & \text{si } \alpha > 1,\ \beta \in \mathbb{R} \text{ ou } \alpha = 1,\ \beta > 1 \\ \text{diverge}, & \text{si } \alpha < 1,\ \beta \in \mathbb{R} \text{ ou } \alpha = 1,\ \beta \leq 1 \end{cases}.$$

Exercise 1.3.6 *Soit $(u_n)_n$ une suite à termes positifs telle que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{1.10}$$

1) Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que $u_n \underset{+\infty}{\sim} An^{-\alpha}$.

2) En déduire la nature de $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

Solution de l'exercice :

Pour cela, on pose

$$v_n = \ln(n^\alpha u_n), \quad n \geq 1$$

et on montre d'abord que $\sum v_n$ est convergente.On a alors.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln(n+1)^\alpha u_{n+1} - \ln(n^\alpha u_n), \\ &= \ln\left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Or $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vérifie (1.10), d'où (1.20) devient

$$v_{n+1}-v_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}+\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

En effectuant un développement limité de $(1+x)^{\alpha}$ puis de $\ln(1+u)$ ou voisinage de 0, on trouve

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \ln\left(1+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \\ &= \frac{\alpha}{n}-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right). \\ &= o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$v_{n+1}-v_n=o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or par définition,

$o\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n^2}o(1)$ où $o(1)$ une fonction bornée.

D'où,

$$v_{n+1}-v_n\leq\frac{c}{n^2}\quad\text{avec } c>0.$$

On déduit par le théorème de comparaison que $\sum(v_{n+1}-v_n)$ est convergente.Soit l sa limite, ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(v_{k+1}-v_k)=l.$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{n}(v_{k+1}-v_k)=v_{n+1}-v_1.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}(v_{n+1}-v_n)=l.$$

Par suite,

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=l+1.$$

En revenant à la définition de la suite $(v_n)_n$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}u_n = e^{l+v_1}.$$

Soit encore

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} An^{-\alpha}, \quad \text{avec } A = e^{l+v_1}. \tag{1.30}$$

2) Il vient de (1.30) et du théorème de conparaison que les séries $\sum u_n$ et $\sum An^{-\alpha}$ sont de même nature.

Et comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leq 1$, alors il en est de même pour la série $\sum u_n$.

Exercise 1.3.7 *Déterminer la nature des séries de terme général u_n où:*

1) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$; 2) $u_n = \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\right)\pi$, $n \in \mathbb{N}$; 3) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n n^a}$, $n \in \mathbb{N}$ et $a \neq \frac{1}{2}$.

Solution de l'exercice :

1) On remarque que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est une série alternée. Pour l'étude de la nature de cette série, on distingue deux cas:

Si $a \leq 0$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^a}$ est divergente car son terme général ne tend pas vers 0. Si maintenant $a > 0$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^a}$

est une série de Leibniz donc convergente puisque $v_n = \frac{1}{n^a} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(v_n)_n$ est décroissante et tend vers 0.

2) On peut écrire le terme général $u_n = \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\right)\pi$ sous la forme:

$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\right)\pi \\ &= \sin\left(n+1-\frac{n}{n+1}\right)\pi. \end{aligned}$$

Par la formule trigonométrique, on trouve

$$\sin\left(n+1-\frac{n}{n+1}\right)\pi = (-1)^n \sin\left(\frac{n}{n+1}\right)\pi.$$

Ainsi la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série alternée. On montre que cette série est une série de Leibniz. Pour cela, on pose:

$$v_n = \sin\left(\frac{n}{n+1}\right)\pi. \text{ on a } 0 < \left(\frac{n}{n+1}\right)\pi < \pi$$

Il est clair que $v_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et on a

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \sin\pi = 0.$$

Il reste à montrer que $(v_n)_n$ est décroissante. La suite $\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)\pi\right)_n$ est décroissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)\pi = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\pi \leq \left(1-\frac{1}{n+2}\right)\pi = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)\pi.$$

Comme la fonction $x \to \sin x$ est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, la suite $(v_n)_n$ est alors décroissante. On conclut que $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une

série de Leibniz donc convergente. Par conséquent la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge aussi.

3) On fait remarque $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n n^a}$ n'est pas une série alternée. Mais, il faut regarder ce qui se passe au dénominateur.

Pour $a < \frac{1}{2}$, on peut écrire

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n n^a} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}-a}}\right)^{-1}.$$

Puisque $\frac{1}{2} - a > 0$, on peut effectuer un dévelloppement limité et on obtient

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^a} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}-a}} + o\left(\frac{1}{n^{1-2a}}\right)\right).$$

Ainsi,

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^a} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^{1-a}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-2a}}\right).$$

Or,

$$-\frac{1}{n^{1-a}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-2a}}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^{1-a}}.$$

Donc les deux séries sont de même natures. Et comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} -\frac{1}{n^{1-a}}$ converge pour $1 - a > 0$ (*i.e.* $a < 0$)

et diverge pour $1 - a \leq 0$ (*i.e.* $a > 0$) , il en est de même pour la série $\sum_{n\geq 1} -\frac{1}{n^{1-a}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-2a}}\right)$. De plus, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une

série de Leibniz donc convergente. On conclut que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n n^a}$ converge si $a < 0$ (comme somme de deux séries convergentes)

et diverge si $0 \leq a < \frac{1}{2}$ (comme somme de deux séries une convergente et l'autre divergente).

Pour $a > \frac{1}{2}$, on peut écrire

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^a} = \frac{1}{n^a}(1 + \frac{(-1)^n}{n^{a-\frac{1}{2}}})^{-1}.$$

Il s'agit donc d'un terme général positif puisque l'on a pour n assez grand

$$(1 + \frac{(-1)^n}{n^{a-\frac{1}{2}}})^{-1} > 0.$$

De plus,

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^a} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^a}.$$

Or $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^a}$ converge si $a>1$ et diverge si $a\leq 1$. il en est de même pour la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n n^a}$. Et comme $a>\frac{1}{2}$, donc

$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n n^a}$ converge si $a>1$ et diverge et diverge si $\frac{1}{2}<a\leq 1$. En conclusion, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n n^a}$ converge lorsque

$a<0$ ou $a>1$, sinon elle diverge.

Exercise 1.3.8 *Montrer que les séries de termes généraux:*

$$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ et } v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$$

ne sont pas de même nature pourtant u_n est équivalente à v_n au voisinage de $+\infty$.

Solution de l'exercice :

Les deux séries $\sum_{n\geq 1}u_n$ et $\sum_{n\geq 1}v_n$ ne sont pas de même nature. En effet, la série $\sum_{n\geq 1}u_n$ est une série de L'eibniz donc convergente et on a

$$v_n=u_n+\frac{1}{n}.$$

On fait remarquer que la série $\sum_{n\geq 1}v_n$ est la somme d'une série convergente et de la série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ qui est divergente.

Il en résulte que la série $\sum_{n\geq 1}v_n$ est divergente. D'où les deux séries ne sont pas de même nature et pourtant on a toujours

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\underset{+\infty}{\sim}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}.$$

Ceci montre que le théorème de comparaison pour les séries à termes de signe constant n'est pas applicable aux séries de signe variable.

Exercise 1.3.9 *Trouver une valeur approchée de la somme S de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^4}$ avec une erreur ne dépassant pas 10^{-2}.*

Solution de l'exercice :

$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^4}$ est une série de L'eibniz donc convergente.

Et d'après l'encadrement du reste d'une série alternée (cf. Proposition), il vient

$$|S - S_n| = |R_n| \leq |u_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^4},\ \forall n \geq 1.$$

Donc, il suffit de trouver $n \geq 1$ tel que

$$\frac{1}{(n+1)^4} \leq 10^{-2}.$$

On cherche alors $n \geq 1$ tel que

$$(n+1)^4 \geq 100$$

On remarque que $n = 1$ et $n = 2$ ne réalisent pas l'inéquation par contre $n = 3$ la vérifie. Il suffit donc de considérer la suite somme

partielle S_3 telle que

$$S_3 = -1 + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4}.$$

pour avoir une valeur approchée de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^4}$ avec une erreur inférieur ou égale à 10^{-2}.

Exercise 1.3.10 *On pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.*

1) prouver que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.

2) on pose $v_n = u_n - \ln x$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.

Etudier la nature de la série $\sum w_n$ et en déduire que la suite $(v_n)_n$ est convergente. On notera γ sa limite.

3) Soit $R_n = \sum_{k=n+1} \frac{1}{k^2}$. Déterminer un équivalent à R_n.

4) Soit C_n tel que $u_n = \ln x + \gamma + C_n$ et soit $t_n = C_{n+1} - C_n$. Donner un équévalent du reste $\sum_{k \geq n} t_k$. En déduire que

$$u_n = \ln x + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Solution de l'exercice :

Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.

1) On montre que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$ i.e.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 1.$$

En utilisant les encadrements qui découlent de la preuve du théorème (voir l'inégalité 2.2) suivants:

$$\int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq u_k \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt,$$

où $f(t) = \frac{1}{t}$ et $u_k = f(k)$. Alors, pour tout $k \geq 1$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}.$$

En sommant membre à membre, on trouve

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}.$$

Ce qui donne après calcul,

$$\ln(n+1) - \ln 2 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \leq \ln n.$$

Or

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}=u_n-1.$$

Donc

$$\ln(n+1)-\ln 2+1\leq u_n\leq \ln n+1.$$

Par conséquent,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n}+\frac{-\ln 2+1}{\ln n}\leq 1+\frac{1}{\ln n}.$$

Par passage à la limite quand $n\to+\infty$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\ln n}=1.$$

Et donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

2) On étudie la nature de $\sum w_n$ avec $w_n=v_{n+1}-v_n$ et $v_n=u_n-\ln n$.

On a

$$w_n=v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Or,

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}.$$

Donc

$$w_n=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}+\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right).$$

En utilisant un développement limité de $\ln(1-x)$ au voisinage de $x=0$, on trouve

$$w_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

Ceci montre que

$$w_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2(n+1)^2},$$

et on en déduit que $\sum w_n$ est convergente. Soit l sa limite i.e.,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} w_k = l.$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{n} w_n = v_{n+1} - v_1.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} (v_{n+1} - v_1) = l.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = v_1 + l.$$

D'où la suite $(v_n)_n$ est convergente.

3) On détermine un équivalent à R_n où

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

On sait le reste R_n d'une série convergente (cf. Proposition) vérifie l'encadrement suivant:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leq R_n \leq \int_{n}^{+\infty} f(t)\,dt \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

où $f(t) = \frac{1}{t^2}$. Or,

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{a\to+\infty} \int_{n+1}^{a} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{n+1},$$

et

$$\int_{n}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{a\to+\infty} \int_{n}^{a} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{n}.$$

Donc

$$\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

ou encore

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{R_n}{\frac{1}{n}} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on trouve

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{R_n}{\frac{1}{n}} = 1.$$

D'où

$$R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}. \tag{1.4}$$

4) On donne un équivalent du reste $\sum\limits_{k \geq n} t_k$. Alors, on a

$$\begin{aligned} t_n &= C_{n+1} - C_n, \\ &= u_{n+1} - \ln(n+1) - \gamma - u_n + \ln n + \gamma, \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right). \\ &= -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right). \end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$t_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2(n+1)^2}.$$

On appliquevle critère de comparaison des séries à termes constants, la série $\sum\limits_{n \geq 2} t_n$ est convergente et on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} t_k = \sum_{k=n}^{+\infty} (C_{k+1} - C_k) \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} -\frac{1}{2(n+1)^2} = -\frac{1}{2} R_{n.} \tag{1.5}$$

De (1.4) et (1.4), il vient

$$\sum_{k=n}^{+\infty} t_k \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.$$

On en déduit maintenant que

$$u_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On a,

$$\sum_{k=n}^{m} t_k = \sum_{k=n}^{m} (C_{k+1} - C_k) = C_{m+1} - C_n, \tag{1.6}$$

avec $C_m \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. En effet,

$\lim\limits_{m \to +\infty} C_m = \lim\limits_{m \to +\infty} (u_n - \ln n - \gamma) = \lim\limits_{m \to +\infty} (v_n - \gamma) = 0,$

car $\lim\limits_{m \to +\infty} v_n = \gamma$. Par passage à la limite dans (1.6) quand $m \to = \infty$, on obtient

$$\sum_{k=n}^{+\infty} t_k = -C_n,$$

Ainsi, en utilisant le résultat de la question précédente, on trouve

$$-C_n = \sum_{k=n}^{+\infty} t_k \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.$$

Ce qui s'écrit aussi

$$C_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par conséquent

$$u_n = \ln n + \gamma + C_n = u_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

γ est appelée la constante d'Euler.

Exercices sous forme de QCM

Objectifs.

L'objectif de ces exercices sous forme de QCM est de vous entraîner à ce type d'exercices que vous retrouverez dans de nombreux concours .

Exercise 1.3.11 *Validez pour chaque question la réponse juste*

Soit $\sum u_n$ la série de terme général $u_n = \frac{1}{1+2+3+....+n}$.

a) $u_n \sim \frac{1}{n}$

b) $\sum u_n$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = 2$

Solution

$1+2+3+....n = \frac{n(n+1)}{2}$, alors $u_n \sim \frac{2}{n^2} \quad (n \to +\infty)$

or $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ converge, alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente

$S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum\limits_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{N+1}\right)$

$\lim S_N = 2$

a) Fausse

b) Fausse

c) Vraie

Exercise 1.3.12 *Soit* $\sum u_n$ *la série de terme général* $u_n = \frac{2\sqrt{n}+\cos n}{n^2+\ln n}$

Indiquer les propositions vrais

a) $\sum u_n$ converge Vraie

b) $u_n \sim \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ Vraie

c) $\sum u_n$ diverge Fausse

Solution

$u_n = \frac{2\sqrt{n}\left(1+\frac{\cos n}{2\sqrt{n}}\right)}{n^2\left(1+\frac{\ln n}{n^2}\right)} \sim \frac{2\sqrt{n}}{n^2} \sim \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (n \to +\infty)$

a) Vraie

b) Vraie

c) Fausse

a) Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum \sin u_n$ converge.

b) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum (-1+\cos u_n)$ diverge.

c) Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum \exp(u_n)$ converge.

d) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum \frac{u_n}{n}$ diverge.

Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

2.0.7 Convergence simple

On suppose que $\Bbbk$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et que D est une partie non vide de $\Bbbk$.

Définition 2.0.7 *i) Une suite de fonction* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* D *dans* $\Bbbk$ *est une application* $n \to f_n$ *de* $\mathbb{N}$ *dans l'ensemble des fonctions de* D *dans* $\Bbbk$ *.*

$ii)$Une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D dans $\Bbbk$ converge simplement vers la fonction f si quelque soit $t \in D$,la suite numérique $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(t)$.

On peut reformuler la propriété $ii)$ de la façon suivante:

Proposition 2.0.4 *La suite de fonction* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* D *dans* $\Bbbk$ *converge simplement vers la fonction* f *si et seulement si:*

$$\forall t \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant N \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Définition 2.0.8 *i) Une série de fonctions de terme général* f_n *de* D *dans* $\Bbbk$ *est un couple formé de deux suites de fonctions définies sur* D *et à valeurs dans* $\Bbbk$ $\left\{(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$ *telles que*

$$\forall t \in D, \forall n \in \mathbb{N}, s_n(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t).$$

$ii)$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n s'appelle le terme général d'ordre n de la série de fonctions et s_n s'appelle la somme partielle d'ordre n .

$iii)$ Une série de fonctions de terme général f_n ,défini sur D ,à valeurs dans $\Bbbk$ convergz simplement et a pour somme s si quel que soit $t \in D$,la suite numérique de terme général $f_n(t)$ converge et a pour somme $s(t)$.

$iv)$ Si la série converge simplement ,pour tout $t \in D$ et $n \in \mathbb{N}$, $r_n(t) = s(t) - s_n(t)$ s'appelle le reste d'ordre n de terme général f_n .

Comme dans le cas des séries numériques , on a:

Notation:

On note $s = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i$. Ce qui veut dire:

$$\forall t \in D, s(t) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(t).$$

Si la série de fonctions de terme général f_n converge simplement et a pour somme s ,on peut donc écrire : $\forall t \in D, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$r_n(t) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} f_i(t) - \sum_{i=0}^{n} f_i(t) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=n+1}^{k} f_i(t) = \sum_{i=n+1}^{+\infty} f_i(t).$$

La convergence de la série de terme général $f_n(t)$ s'exprime par la convergence de la suite des sommes partielles $s_n(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t)$.

la série de fonctions de terme général f_n de D dans $\Bbbk$ converge simplement et a pour somme s si et seulement si ,

$\forall t \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tel que:

$$n \geq N \Rightarrow |s_n(t) - s(t)| = \left| \sum_{i=0}^{n} f_i(t) - s(t) \right| = |r_n(t)| \leq \varepsilon.$$

Remarquons que dans ces définitions et propositions sur la convergence simple ,l'entier N peut dépendre de t :

il n'y a pas en général un entier N qui marche pour tout $\forall t \in D$. A cause de cela , la converence simple des suites ou des séries de fonctions ne transmet pas , en général ,les propriétés de la suite à sa limite ou de la série à sa somme .

Donnons des exemples :

Exemple 2.0.8 *i) La suite de fonctions continues définie pour tout $t \in [0,1]$ par $f_n(t) = t^n$, converge simplement vers la fonction discontinue f telle que :*

$$\begin{cases} f(t) = 0 & si\ t \in [0,1[\\ f(1) = 1. \end{cases}$$

$ii)$ La série de fonctions continues définie pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, de terme général $f_n(t) = \sin^2 t \cos^n t$, converge simplement et a pour somme la fonction s , discontinue en 0 ,telle que :

$$\begin{cases} s(t) = \frac{\sin^2 t}{1-\cos t}\ si\ t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ s(0) = 0\ . \end{cases}$$

Exemple 2.0.9 *i) La suite de fonctions dérivables définie pour $n \geq 1$ et pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ par*

$$f_n(t) = \frac{\sin nt}{\sqrt{n}}\ ,$$

converge simplement vers la fonction 0 .

Par contre la suites des dérivées

$$f_n'(t) = \frac{n \cos nt}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \cos nt\ ,$$

ne converge pas vers 0 qui est pourtant la dérivée de la limite des $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$ii)$ La série de fonctions dérivables définie pour $n \geq 2$ et pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,de terme général

$$f_n(t) = \frac{\sin nt}{\sqrt{n}} - \frac{\sin(n-1)t}{\sqrt{n-1}} \ ,$$

converge simplement et a pou somme la fonction $-\sin t$.

La série des dérivées ne converge pas .

Exemple 2.0.10 *$i)$ La suite de fonction définie par $f_n(t) = nt(1-t^2)^n$ pour tout $t \in [0,1]$ converge vers simplement vers la fonction nulle . Par contre ,*

$$\int_0^1 f_n(t)dt = n\int_0^1 t(1-t^2)^n dt = \frac{n}{2n+2} \ .$$

Cette suite converge vers $\frac{1}{2}$ qui n'est pa ségal à l'intégrale de la limite des $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$.

$ii)$ La série de fonctions continues définie pour $n \geq 1$, de terme général

$$f_n(t) = nt(1-t^2)^n - (n-1)t(1-t^2)^{(n-1)} \ .$$

pour tout $t \in [0,1]$ converge simplement et a pour somme 0 .L'intégrale de f_n sur $[0,1]$ vaut d'aprés le $i)$ $\frac{n}{2n+2} - \frac{n-1}{2n}$.

La série dont le terme général est l'intégrale f_n sur $[0,1]$ converge donc vers $\frac{1}{2}$,puisque

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{2i+2} - \frac{i-1}{2i} \right) = \frac{n}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2} \ ,$$

qui n'est pas l'intégrale de la somme de la série de terme général f_n sur $[0,1]$.

pour que les propriétés de la suite ou de la série , se transmettent à la limite de la suite ou à la somme de la série , on est donc amené à définir une convergence plus forte , la convergence uniforme .

2.0.8 Convergence uniforme

Définition 2.0.9 *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D dans $\Bbbk$ converge uniformément vers la fonction f si :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que }, n \geq N \Longrightarrow \forall t \in D, |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon \ .$$

Cette définition s'écrit encore :

Proposition 2.0.5 *La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D dans $\Bbbk$ converge uniformément vers la fonction f si :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que }, n \geq N \Longrightarrow \sup_{t\in D} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon \ .$$

Example 7 *Considèrons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $I = \mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$.*

On vérifie facilement que cette suite converge simplement vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{array}{l} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array}$$

pour $\varepsilon \in \left]0, 1\right[$ donné et $x > 0$, on aura

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+nx} < \ \varepsilon$$

pour $nx > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$,soit pour $n \geq n_{x,\varepsilon} = E\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x}\right) + 1$.

supposons qu'il existe un entier n_ε indépendant de $x \in I$ tel que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. on aura alors pour tout $x > 0$ et $n \geq n_\varepsilon$, $\frac{1}{1+nx}$ ε et faisant tendre x vers 0 pour n fixé , on aboutir à $1 \leq \varepsilon$,ce qui n'est pas .

Il est donc impossible de trouver un tel n_ε valable pour tout $x \in I$ ou meme pour tout $x > 0$ .on dit dans ce cas que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$ $\left(\text{ou } \mathbb{R}_+^*\right)$.

Example 8 *En reprenant l'exemple précèdent , on a pour* $x > 0$ *,* $|f_n(x) - f(x)| = \varphi(nx)$ *ou* $\varphi(y) = \frac{1}{1+y}$ *pour* $y > 0$ *avec*

$\sup\limits_{y>0} \varphi(y) = 1$, ce qui donne $\sup\limits_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = 1$ et la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$ $\left(\text{ou } \mathbb{R}_+^*\right)$

mais sur $J = [a, +\infty[$ avec $a > 0$, on a :

$$\sup_{x \geq a} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1 + na}$$

du fais de la décroissante de la fonction x$\rightarrow \frac{1}{1+nx}$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+na} = 0$,on déduire que la convergence est uniforme sur J.

Exercise 2.0.13 *montrer que si* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions uniformément convergente vers une fonction* f *sur un intervalle* I *,alors la suite de fonctions* $(\sin(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* $\sin(f_n)$ *sur* I*.*

corrigé de l'exercice:

$|\sin(f_n(x) - \sin(f(x)))| \leq |(f_n(x) - f(x))| \leq \sup\limits_{x \in I} |(f_n(x) - f(x))|$

le résultat qui suit nous donne un critère permettant de prouver la non convergence uniforme .

Définition 2.0.10 *Une série de fonctions de terme général* f_n *de* D *dans* $\mathbb{k}$ *converge uniformément et a pour somme* s *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que },$$

$$n \geq N \Longrightarrow \forall t \in D, |s_n(t) - s(t)| = \left| \sum_{i=0}^{n} f_i(t) - s(t) \right| = |r_n(t)| \leq \varepsilon \ .$$

On peut également reformuler ceci en :

Proposition 2.0.6 *La série de fonctions de terme général* f_n *de* D *dans* $\mathbb{k}$ *converge uniformément et a pour somme* s *si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que },$$

$$n \geq N \Longrightarrow \sup_{t \in D} |s_n(t) - s(t)| = \sup_{t \in D} \left| \sum_{i=0}^{n} f_i(t) - s(t) \right| = \sup_{t \in D} |r_n(t)| \leq \varepsilon \ .$$

On peut définir une norme sur l'ensemble des fnctions bornées sur un ensemble D , qui est directement reliée à la converence uniforme des suites ou des séries de fonctions :

Définition 2.0.11 *Soit f une fonction bornée sur D ,alors on appelle norme de la convergence uniforme de f, le nombre défini par :*

$$\|f\|_{\infty} = \sup \{|f(t)| \quad |t \in D\} \ .$$

Grâce à cette norme, on peut écrire trés simplement la convergence uniforme des suites et séries de fonctions :

Remarque 2.0.7 1*) La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si et seulement si la suite numérique $(\|f_n - f\|_{\infty})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 .*

2) La série de fonctions de terme général u_n converge uniformément et a pour somme s si et seulement si

la suite numérique $(\|s_n - s\|_{\infty})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 .

La différence entre les définitions 2.0.9 et 2.0.10 sur la convergence uniforme des suites et séries de fonctions et leurs analogues pour la convergence simple , définitions 2.0.7 et 2.0.8 ,est qu'ici l'entier N ne dépend pas de $t \in D$: il est le même pour tous les t dans D .Cette constation permet de montrer la proposition suivante :

Proposition 2.0.7 *i) Si une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f ,elle converge simplement vers f et la réciproque est fausse .*

$ii)$ La série de fonctions de terme général u_n converge uniformément et a pour somme s ,elle converge simplement et a même somme . La réciproque est fausse .

Démonstration

$i)$ Il suffit de remarquer que si $\sup_{t\in D} |f_n(t) - f(t)|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$,alors ,pour t_0 fixé dans D , $f_n(t_0) - f(t_0)$ tend vers 0 .

Voici un contre-exemple montrant que la réciproque de cette proposition est fausse :

la suite de fonction de l'exemple 2.0.8 , $f_n(t) = t^n$ pour $t \in [0, 1]$ converge simplement vers la fonction f telle que $f(t) = 0$ si $t \in [0, 1]$ et $f(1) = 1$.

Or $\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |t^n| = 1$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$ donc cette suite ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

$ii)$ De la même manière ,si $\sup_{t\in D} |s_n(t) - s(t)|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$,alors ,pour t_0 fixé dans D , $s_n(t_0) - s(t_0)$tend vers 0 .

De même ,pour montrer que la réciproque de cette proposition est fausse,donnons un contre-exemple :

la série de fonction de l'exemple 2.0.8 ,de terme général $u_n(t) = \sin^2 t \cos^n t$ défini pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ converge simplement mais pas uniformément car :

$$\sup_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]} |r_n(t)| = \sup_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]} \left| \sum_{i=n+1}^{+\infty} \sin^2 t \cos^i t \right| = \sup_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]} \left| \frac{\sin^2 t \cos^{n+1} t}{1 - \cos t} \right| = 2,$$

puisque :

$$\lim_{n\to 0} \frac{\sin^2 t \cos^{n+1} t}{1 - \cos t}.$$

Il existe un critère de Cauchy uniforme, qui permet de tester la convergence uniforme d'une suite ou d'une série sans connaître sa limite ou sa somme :

Exercise 2.0.14 *On définit la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ ,\forall x \in \mathbb{R} \ ,f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

1. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle simplemet sur $\mathbb{R}$,et si oui ,vers quelle fonction?

2.la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

3.la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $[-1,1]$?

corrigé de l'exercice:

1.pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la suite $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à 0.

pour $x \neq 0$,on a $f_n(x) = n\sin\left(\frac{x}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} x$ et la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x.

En définitive, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplemet sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \to x$.

2.pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = f_n(x) - f(x) = n\sin\left(\frac{x}{n}\right) - x$$

est impaire et dérivable de dérivée $g_n'(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \leq 0$,cette dérivée s'annulant aux points $x_{n,k} = 2nk\pi$ ou $k \in \mathbb{Z}$ avec $g_n(x_{n,k}) = 2nk\pi$!;on a donc $\sup\limits_{x\in[-2nk\pi,2nk\pi]} |g_n(x)| = 2n|k|\pi$,$\forall\ k \in \mathbb{Z}$ et $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| = +\infty$.

la convergence donc n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

3.sur $[-1,1]$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction g_n est décroissante et $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |g_n(x)| = |g_n(1)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ .la convergence est donc uniforme .

Théorème 2.0.3 *Critère de Cauchy uniforme*

i) Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D dans $\Bbbk$ converge uniformément si et seulement si:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geq N \Longrightarrow \sup_{t\in D} |f_p(t) - f_q(t)| \leq \varepsilon.$$

ii) Une série de fonctions de terme général u_n de D dans $\Bbbk$ converge uniformément si et seulment si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geq N \Longrightarrow \sup_{t \in D} |s_p(t) - s_q(t)| = \sup_{t \in D} \left| \sum_{i=q+1}^{p} u_i(t) \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration

i) supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur D. Alors:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Longrightarrow \forall t \in D, |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

D'où ,

$$p, q \geq N \Longrightarrow \forall t \in D, |f_p(t) - f_q(t)| \leq |f_p(t) - f(t)| + |f_q(t) - f(t)| \leq 2\varepsilon.$$

On a donc bien le critère de Cauchy uniforme.

Réciproquement, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geq N \Longrightarrow \forall t \in D, |f_p(t) - f_q(t)| \leq \varepsilon,$$

pour $t \in D$ fixé, la suite de nombres $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{k}$, donc converge vers un nombre $f(t)$. Dans le critère de Cauchy, on peut alors faire tendre q vers $+\infty$ et on obtient:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } p \geq N \Longrightarrow \forall t \in D, |f_p(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

ii) La démonstration de cette propriété pour les séries est la même que pour les suites en raisonnant sur la suite des sommes partielles.

Comme dans les cas numérique, pour **les séries de fonctions,** le critère de Cauchy uniforme a un corollaire, que l'on utilise beaucoup par sa contaposée, pour montrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément:

Corollaire 2.0.1 *Si la série de fonctions de terme général* u_n *de* D *dans* $\mathbb{k}$ *converge uniformément sur* D*, alors* $\|u_n\|_\infty = \sup_{t \in D} |u_n(t)| \to 0$ *quand* $n \to \infty$*. La réciproque est fausse.*

Démonstration

Il suffit d'écrire:

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{t \in D} |u_n(t)| = \sup_{t \in D} |s_n(t) - s_{n-1}(t)|,$$

et d'appliquer le critère de Cauchy uniforme.

Pour montrer la réciproque est fausse, il suffit de prondre une série dont le terme général est une fonction constante, qui diverge et dont le terme général tend vers 0 à l'infini. Par exemple la série de fonctions constantes, de terme général $u_n(t) = \frac{1}{n}, n > 1$,pour tout t convient.

On a pour les **séries de fonctions,** une notion de convergence, la **converence normale,** qui implique la convergence uniforme et qui dans la pratique est souvent facile à vérifier:

Définition 2.0.12 *Une série de fonctions de terme général* u_n *converge normalement sur* D *si la série numérique à termes positifs de terme général* $\|u_n\|_\infty = \sup_{t \in D} |u_n(t)|$ *converge.*

Le terme convergence normale correspond au fait qu'elle s'exprime à l'aide de la norme de la convergence uniforme définie dans la définition 2.0.11:

Cette notion de convergence est plus forte que la convergence uniforme car on a:

Proposition 2.0.8 *Si la série de fonctions de terme général* u_n *converge normalement sur* D*, elle converge uniformément sur* D*.*

Démonstration

On peut écrire:

$$\sup_{t\in D}\left|\sum_{i=q+1}^{p} u_i(t)\right| \leq \sum_{i=q+1}^{p} \sup_{t\in D}|u_i(t)|\,.$$

Si la série numérique de terme général $\sup\limits_{t\in D}|u_n(t)|$ converge, elle vérifie le critère de Cauchy et l'inégalité ci-dessus prouve que la série de terme général u_n vérifie le critère de Cauchy uniforme. Donc elle converge uniformément sur D.

Remarque 2.0.8 *La réciproque de cette propriété est fausse : la série de fonctions de terme général* $u_n(t) = \frac{(-1)^n}{n+t}, n > 1,$ *est uniformément convergente sur* $[0, 1]$*.*

En effet, cette série de fonctions n'est pas normalement convergente car

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{(-1)^n}{n+t}\right| = \frac{1}{n},$$

et cette série numérique est divergente.

Pour montrer la convergence uniforme, on utilise la majoration du reste d'une série alternée, voir 4.5.2:

$$\forall t \in [0, 1], |r_n(t)| \leq \left|\frac{(-1)^n}{n+1+t}\right| \leq \left|\frac{1}{n+1}\right|.$$

Par suite, $\sup\limits_{t\in[0,1]}|r_n(t)| \to 0$ quand $n \to \infty$ et on a bien convergence uniforme sur $[0, 1]$.

Exemple 2.0.11 *i) La série de terme général* $u_n(t) = \frac{\sin nt}{n^2}, n > 1,$*définie sur* $\mathbb{R}$ *converge normalement car:*

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sin nt}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}.$$

ii) soit $r \in \,]0, 1[$. La série de terme général $u_n(z) = z^n$ définie sur le disque D_r centré à l'origine, de rayon r ,cnverge uniformément sur ce disque car:

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{t\in D_r}|u_n(z)| = r^n.$$

Remarque 2.0.9 *Dans toutes les définitions et propriétés de ce paragraphe, le domaine D est fondamental.Dans l'exemple ii) ci-dessus, on a convergence uniforme sur D_r pour $r < 1$ mais pas sur D_1.*

2.0.9 Continuité des limites et des sommes pour la convergence uniforme

Théorème 2.0.4 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un domaine D et qui converge uniformément vers une fonction f sur D . Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en un point t_0 de D, f esr aussi continue en t_0.*

On peut alors écrire:

$$f(t_0) = \lim_{t\to t_0} f(t) = \lim_{t\to t_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t_0) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{t\to t_0} f_n(t),$$

ce qui est un cas d'interversion de limites.

Démonstration

Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f ,on a:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Longrightarrow \forall t \in D, |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

$\varepsilon > 0$ étant fixé, écrivons la continuité de la fonction f_N en t_0 :

$$\forall\eta > 0 \text{ tel que } |t - t_0| \leq \eta \Longrightarrow |f_N(t) - f_N(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pout tout $t \in D$, on peut alors écrire:

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &= |f(t) - f_N(t) + f_N(t) - f_N(t_0) + f_N(t_0) - f(t_0)| \\ &\leq |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_N(t_0)| + |f_N(t_0) - f(t_0)|. \end{aligned}$$

Donc si $|t - t_0| \leq \eta$, on a :

$$|f(t) - f(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ceci prouve la continuité de f en t_0.

Corollaire 2.0.2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un domaine D et qui converge uniformément vers une fonction f sur D. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur D, f est aussi continue sur D.*

Théorème 2.0.5 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un domaine D et qui converge uniformément vers une fonction f sur D. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue en un point t_0 de D, s est aussi continue en t_0.*

On peut alors écrire:

$$\begin{aligned} s(t_0) &= \lim_{t\to t_0} \sum_{i=0}^{+\infty} u_i(t) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} u_i(t_0) = \sum_{i=0}^{+\infty} \lim_{t\to t_0} u_i(t), \end{aligned}$$

ce qui est un cas d'interversion de limite et somme infinie.

Démonstration

On applique le théorème 2.0.4 à la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de terme général u_n, qui sont continues comme sommes finies de fonctions continues.

Corollaire 2.0.3 *On considère une série de fonctions de terme général u_n défini sur un domaine D, qui converge uniformément et a pour somme la fonction s sur D. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur D, s est aussi continue sur D.*

On utilise souvent ces résultats par contraposée : en reprenant l'exemple 2.0.8, on retrouve immédiatemment:

Exemple 2.0.12 *i) La suite de fonctions continues* $f_n(t) = t^n$ *converge simplement vers une fonction* f*, discontinue sur* $[0, 1]$*. Elle ne converge donc pas uniformément sur cet intervalle.*

ii) La série de fonctions continues de terme général $\sin^2 t \cos^n t$ converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et a pour somme une fonction discontinue. Elle ne converge donc pas uniformément sur cet intervalle.

La convergence uniforme des suites ou séries de fonctions est suffisante mais non nécessaire pour assurer la continuité des limites de suites de fonctions, théorème 2.0.4, et de sommes de séries de fonctions, théorème 2.0.5, sur le domaine D en entier et on est obligé d'utiliser un argument, dit de saturation. Donnons deux exemples :

Exemple 2.0.13 1*) La suite de fonctions continues* $f_n(t) = n^2 t e^{-nt}$ *ne converge pas uniformément sur* $[0, +\infty[$*.*

2) La somme de la série de fonctions de terme général $\frac{1}{n^t} n > 1$, est continue sur $]1, +\infty[$.

Démonstration

1) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $[0, +\infty[$ qui est bien une fonction continue .

Par contre, la convergence n'est pas uniforme. En effet, on a $f_n'(t) = n^2 e^{-nt}(1 - nt)$, cette fonction s'annule en $t = \frac{1}{n}$ et $\sup\limits_{t\in[0,+\infty[} f_n(t) = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{n}{e}$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$.

En revanche, il est facile de voir que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $[a, +\infty[$,

pour $a > 0$.

2) Soit $a > 1$, On peut écrire:

$$\forall t \in [a, +\infty[\, , 0 \leq \frac{1}{n^t} \leq \frac{1}{n^a}.$$

La série numérique de terme général $\frac{1}{n^a}$ est convergente. La série de fonctions de terme général $\frac{1}{n^t}$ est normalement convergente donc uniformément convergente sur $[a, +\infty[$ et sa somme s est continues sur cet intervalle. Comme se raisonnement est valable pour tout $a > 1$, s est continue sur tous les intervalles $[a, +\infty[$ avec $a > 1$ donc aussi sur leur réunion qui est exactement l'intervalle $]1, +\infty[$.

2.0.10 Dérivabilité des limites et des sommes pour la convergence uniforme

Pour pouvoir parler de dérivation, on va se placer sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

Théorème 2.0.6 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telle que :*

1) Il existe $t_0 \in I$ tel que la suite numérique $(f_n(t_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2) La suite des dérivées $(f_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I vers une fonction g.

Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I vers une fonction dérivable f telle que $f^{'} = g$.

On peut alors écrire, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} f^{'}(t) &= \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)^{'} \\ &= \lim_{n\to+\infty} f_n^{'}(t), \end{aligned}$$

ce qui est un cas d'interversion de limite de dérivation.

Démonstration

Soit $I^{'}$ un sous-intervalle borné de I contenant t_0 et soit $\left|I^{'}\right|$ sa longueur.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On peut écrire le critère de Cauchy uniforme pour la suite $(f_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ sur $I^{'}$:

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geq N \Rightarrow \forall t \in I^{'}, \left| f_p^{'}(t) - f_q^{'}(t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\left|I'\right|}.$$

Pour chaque couple $p, q \geq N$, appliquons le théorème des accroissements finis en t_0 à la fonction $f_p - f_q$: pour $t \in I^{'}$,

$$\begin{aligned} \left|[f_p(t) - f_q(t)] - [f_p(t_0) - f_q(t_0)]\right| &\leq |t - t_0| \sup_{t \in I'} \left| f_p^{'}(t) - f_q^{'}(t) \right| \\ &\leq |t - t_0| \frac{\varepsilon}{2\left|I'\right|} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in I^{'}$, on a:

$$|f_p(t) - f_q(t)| \leq |f_p(t_0) - f_q(t_0)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par hypothèse, la suite $(f_n(t_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge ; par suite , elle est de Cauchy et il existe $N^{'} \in \mathbb{N}$ tel que :

$$p, q \geq N^{'} \Rightarrow |f_p(t_0) - f_q(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que :

$$p, q \geq \sup\left\{N, N^{'}\right\} \Rightarrow \forall t \in I^{'}, |f_p(t) - f_q(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci prouve la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $I^{'}$ .Soit f sa limite.

En prenant la formule des accroissements finis ci-dessus en un point $t_1 \in I^{'}$ et en divisant par $|t - t_1|$, on peut écrire : $p, q \geq N \Rightarrow \forall t \in I^{'}, t \neq t_1$,

$$\left| \frac{f_p(t_0) - f_q(t_0)}{t - t_1} - \frac{f_p(t_1) - f_q(t_1)}{t - t_1} \right| = \left| \frac{f_p(t) - f_p(t_1)}{t - t_1} - \frac{f_q(t) - f_q(t_1)}{t - t_1} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\left|I'\right|}.$$

En revenant au début de la démonstration, on a vu que l'on aussi :

$$p, q \geq N \Rightarrow \forall t \in I^{'}, \left| f_p^{'}(t) - f_q^{'}(t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\left|I^{'}\right|}.$$

En définissant la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \varphi_n(t) = \frac{f_n(t)-f_n(t_1)}{t-t_1} \text{ pour } t \neq t_1 \\ \varphi_n(t_1) = f_n^{'}(t_1), \end{cases}$$

Ces propriétés montrent que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $I^{'}$. Soit φ sa limite.

La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues en t_1 car puisque par hypothèse, les fonctions f_n sont dérivables en t_1 et on peut écrire:

$$\lim_{t\to t_1} \varphi_n(t) = \lim_{t\to t_1} \frac{f_n(t) - f_n(t_1)}{t - t_1} = f_n^{'}(t_1) = \varphi_n(t_1).$$

En appliquant le théorème 2.0.4, on voit que la limite φ de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue en t_1 et que :

$$\begin{aligned} \varphi(t_1) &= g(t_1) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{'}(t_1) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{t\to t_1} \frac{f_n(t) - f_n(t_1)}{t - t_1} \\ &= \lim_{t\to t_1} \lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(t) - f_n(t_1)}{t - t_1} = \lim_{t\to t_1} \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1}. \end{aligned}$$

On en déduit que la dérivée de f au point t_1 existe et vaut :

$$f^{'}(t_1) = g(t_1) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{'}(t_1).$$

Puisque ceci est vrai pour tout $t \in I^{'}$, ceci prouve bien que f est dérivable sur $I^{'}$ et que sa dérivé est la limite de la suite $(f_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$,c'est-à-dire que $g = f^{'}$.

Comme on a choisit pour I' un sous-intervalle borné quelconque de I contenant t_0, le raissonnement précédent prouve que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tous sous-intervalle bornés de I contenant t_0. Donc La limite f de la suite

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dérivable, de dérivée g sur tous sous-intervalle bornés de I contenant t_0 et par suite sur I tout entier.

sous les hypotheses du théoreme 2.0.6, si de plus ,les fonction $f_n^{'}$sont continues sur I, alors la limite f a une dérivée $f^{'}$ continue sur I.

démonstration:

comme sous les hypotheses du théoreme 2.0.6, la suite $\left(f_n^{'}\right)_{n\in\mathbb{N}}$converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I ,il suffit d'appliquer le théoreme 2.0.4: la limite $f^{'}$ de la suite $\left(f_n^{'}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue sur tout sous-intervalle borné de I et donc sur I tout entier.

Remarquons que la convergnce uniforme de la suite de fonction ne suffit pas a assurer la dérivabilité de la limite:

la suite de fonctions dérivables $f_n(t) = \left(t^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$,$n > 1$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $|t|$,qui n'est pas dérivable en 0.

en effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a:

$$|t| \leq \left(t^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq |t| + \frac{1}{n}$$

d'ou

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \ |f_n(t) - |t|| \leq \frac{1}{n}$$

Cette inégalité implique la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction $|t|$. D'aprés le théoreme 2.0.6, la suite des dérivées ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

On utilisera beaucoup le cas particulier du théoreme 2.0.6 suivant :

si la suite de fonctions dérivables $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f et si la suite des dérivées converge uniformément sur tous les sous-intervalles bornés de I vers g ,alors f est dérivable et $f^{'} = g$ sur I .

on va maintenant étudier la dérivabilité des sommes de séries :

soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considere une série de fonctions de terme général u_n , dérivable sur I telle que

1) Il existe $t_0 \in I$ tel que la série numérique de terme général $u_n(t_0)$ converge

2) La série des dérivées, de terme général $u_n^{'}$ converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I et a pour somme une fonction σ .

Alors, la série de terme général u_n converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I et a pour somme une fonction dérivable s telle que $s^{'} = \sigma$.

Avec la notation des sommes infinies, ceci s'écrit :

$$s^{'}(t) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right)^{'}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{'}(t)$$

ce qui est un cas d'interversion de somme infinie et de dérivation .

Démonstration:

Il suffit d'appliquer le théoreme 2.0.6 a la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de terme général u_n , qui sont dérivables comme sommes finies de fonctions dérivables.

on obtient également les corollaires suivant pour les séries de fonctions :

sous les hypotheses du théoreme 2.0.7,si de plus, les fonctions $u_n^{'}$ sont continues sur I, alors la somme s a une dérivée $s^{'}$ continue sur I .

si la série de fonctions dérivables, de terme général u_n converge simplement sur I et a pour somme s et si la suite des dérivées converge uniformément sur tous les sous-intervalles bornés de I et a pour somme σ , alors s est dérivable et $s^{'} = \sigma$ sur I .

soit $0 < r < 1$ et $I = [-r, +r]$ .on considere la série de fonctions définies sur I, de terme général $u_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$.

la série numérique de terme général $u_n(0)$ converge (c'est la série nulle !) et la série des dérivées de terme général t^n converge uniformément sur I d'aprés l'exemple 2.0.11(ii).

la somme $s(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}$ est donc dérivable et sa dérivée vaut :

$$s^{'}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}t^{n}=\frac{1}{1-t}$$

comme $s(0)=0$,on déduire que $s(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-t)$.

2.0.11 Intégration des limites et sommes pour le convergence uniforme:

soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et qui converge uniformément vers une fonction f sur $[a,b]$. alors , la suite numérique $\left(\int_a^b f_n(s)\,ds\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite $\int_a^b f(s)\,ds$.

On peut alors écrire :

$$\int_a^b f(s)\,ds=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(s)\,ds$$

$$=\int_a^b\lim_{n\to+\infty}f_n(s)\,ds,$$

ce qui est un cas d'interversion de limite et d'intégrales.

démonstration:

pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $t\in[a,b]$, on pose $F_n(t)=\int_a^t f_n(s)\,ds$ .les fonctions F_n sont dérivables sur $[a,b]$ comme intégrales de fonctions continues et de plus

$$\forall t\in[a,b]\ \ ,F_n^{'}(t)=f_n(t)$$

d'apres l'hypothese , la suite $\left(F_n^{'}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ et comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_n(a)=0$,la suite numérique $(F_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge . On peut donc appliquer le théoreme 2.0.6 a la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$:cette suite converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction F telle que $F^{'}=f$ et $F(a)=0$ .On en déduit :

$$\forall t\in[a,b]\ ,F(t)=\int_a^t f(s)\,ds$$

en particulier pour $t=b$,

$$F(b)=\int_a^b f(s)\,ds$$

soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$f_n(t)=t^n(1-t)^n$$

comme pour $t\in[0,1]$, $0\leq t(1-t)\leq\frac{1}{4}$,on a :$\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq f_n(t)\leq\frac{1}{4^n}$ .ceci implique que la suite de fonctions continues   converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

La suite $\left(\int_0^1 s^n(1-s)^n\,ds\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

On considere une série de fonctions de terme général u_n ,définie et continue sur $[a,b]$,qui converge uniformément sur $[a,b]$ et a pour somme s. alors , la série numérique de terme général $\left(\int_a^b u_n(t)\,dt\right)$ converge et a pour somme $\int_a^b s(t)\,dt$.

on peut alors écrire:

$$\begin{aligned}\int_a^b s(t)\,dt &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b u_n(t)\,dt\\ &= \int_a^b\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(t)\,dt,\end{aligned}$$

ce qui est un cas d'interversion de somme infinie et intégrale.

démonstration:

On applique le théoreme précédent 2.0.8 a la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de terme général u_n, qui sont continues sur $[a,b]$ comme sommes finies de fonctions continues.

On considere la série de fonctions de terme général $u_n(t) = \frac{t^{2n}}{(2n)!}$, définie sur $[0,1]$.

comme $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{1}{(2n)!}$,cette série converge normalement donc uniformément (proposition 2.0.9) sur $[0,1]$ .d'apres le téoreme précédent, on a donc, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{t^{2i}}{(2i)!} dt = \int_0^x \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!} \right) dt = \int_0^x \cosh(t)\, dt = \sinh(x)$$

2.0.12 Exercices

pour $n \geq 1$ et $x \in]0,+\infty[$,on définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par:

$$f_n(x) = n\left|\ln(x)\right|^n$$

1)déterminer le domaine de convergence simple D de cette suite de fonctions.

2)Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur D et sur les sous-intervalles fermés bornés de D.

soit α un nombre réel strictement positif .On considere la suite de fonctions définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$n \geq 1, f_n(x) = nx^n (1-x)^\alpha$$

1)montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur l'intervalle $[0,1]$ et trouver sa limite.

2)montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers sa limite sur l'intervalle $[0,1]$ si et seulement si $\alpha > 1$.

3)On suppose $0 < \alpha \leq 1$ .Montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur le segment $[0,a]$ pour tout $a \in [0,1[$.

Exercise 2.0.15

soit a un réel strictement positif .Pour tout $n \in \mathbb{N}$,on désigne par u_n la fonction définie pour $x \in [0, +\infty[$ par :

$$u_n(x) = n x^n e^{-nx^2}$$

1)Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln u_n(x)$ pour $x > 0$.

2)En déduire que pour tout $a > 0$,la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge simplement sur $x > 0$.

3)a)pour $|z| < 1$,calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n z^n$.

b)En faisant un changement de variable ,en déduire la somme $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

4)a)Calculer $\sup\limits_{x \in [0,+\infty[} u_n(x)$.

b)En déduire que la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge normalement sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $a > 4$.

5)soit $a = 4$. On cherche a montrer que dans ce cas ,la série de fonctions $u_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

a)trouver un réel $C > 0$ tel que

$$\forall N^* \in \mathbb{N} \ , \sum_{n=N}^{2N} u_n(x_N) \geq C \text{ avec } x_N = \sqrt{\frac{2}{N}}$$

b)on déduire que $\sup\limits_{x \in [0,+\infty[} \sum\limits_{n=N}^{2N} u_n(x_N)$ ne tend vers pas vers 0 quand $N \to +\infty$.

c)conclure .

6)On suppose toujours que $a = 4$.

a)montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} s(x) = 1$.

b)Retrouver la conclusion de la question 5).

Démontrer les inégalités ,pour $0 \leq x \leq 1$:

$$0 \leq e^x - 1 - x \leq 2n^2$$

soit

$$u_n(t) = \exp\left(2^{-nt}\right) - 1, t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$$

1)Déterminer l'ensemble D des réel $t \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série de fonctions de terme général $u_n(t)$ converge .

2)soit $a > 0$.étudier la convergence uniforme sur l'intervalle $[a, +\infty[$ de la série de fonctions de terme général u_n .

3)soit s la somme de la série de fonctions de terme général u_n .étudier la continuité de la fonction s sur D.

4)Trouver un équivalent pour $s(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

On considere la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$f_n(t) = 0$ si $t \geq \frac{1}{n}$,$f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = 2n$, $f_n(0) = 0$ et f_n est affine continue sur les intervalles $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$ et $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$.

1)Expliciter les fonctions f_n pour $t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ et les représenter sur un graphe .

2)Vérifier que pour tout $t \in [0,1]$, $f_n(t) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

3)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 f_n(t)\, dt = 1$$

4)pourquoi le théoreme 4.5.1 ne s'applique t'il pas ?

Corrigé des exercices sur le chappitre 3

corrigé de l'exercice 2.0.13

1)pour $|\ln(x)| < 1$,la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et pour $|\ln(x)| \geq 1$,la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.Donc $D = \left]\frac{1}{e}, e\right[$.

2)On remarque que $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} n |\ln(x)|^n = n$ donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur D.

soit $[a, b] \subset \left]\frac{1}{e}, e\right[$ un sous-ensemble compact de D.

Alors $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} n |\ln(x)|^n = n \sup(|\ln a|, |\ln b|)^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$,donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

corrigé de l'exercice 2.0.14

1)si $0 \leq x < 1$,$nx^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

si $x = 1$, $f_n(x) = 0$.

Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

2)On cherche le maximum de la fonction f_n sur l'intervalle $[0, 1]$ .pour cela ,on calcule :

$$f_n^{'}(x) = nx^{n-1}(1-x)^{\alpha-1}(n-(n+\alpha)x)$$

En posant $x_n = \frac{n}{n+\alpha}$,on voit que f_n est croissante sur $[0, x_n]$ et décroissante sur $[x_n, 1]$.

f_n atteint donc son maximum en x_n et celui-ci vaut :

$$M_n = f_n(x_n) = n\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{-n}\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right)^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} n^{1-\alpha}$$

Comme $M_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$,la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc bien uniformément vers 0 sur $[0, 1]$ si et seulement si $\alpha > 1$.

3)On suppose $0 < x \leq 1$ .si $a \in [0, 1[$ est fixé ,comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$,si n est assez grand , $x_n > a$,donc la fonction f_n est croissante sur la segment $[0, a]$ et de plus ,lorsque $n \to +\infty$:

$$\sup_{0\leq x\leq a} |f_n(x)| = f_n(a) \to 0$$

La suite de fonctions converge donc bien uniformément sur le segment $[0, a]$ pour tout $a \in [0, 1[$.

corrigé de l'exercice 2.0.15

1)pour $x > 0$,on a : $\frac{1}{n}\ln u_n(x) = \frac{1}{n}(\ln n + a\ln x - nx^2)$.

D'ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln u_n(x) = -x^2$.

2)pour $x > 0$ fixé ,la série à terme positifs $u_n(x)$ vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = e^{-x^2} < 1$. On peut donc appliquer le critère de cauchy :la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge .ceci étant vrai pour tout $x > 0$,on en déduit que la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. En $x = 0$,la série de fonctions est nulle donc convergente de somme nulle .

3)a)pour $z < 1$,$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^n$.

b)posons $z = e^{-x^2}$. On déduit que pour $x > 0$, $x^a \frac{e^{-x^2}}{\left(1-e^{-x^2}\right)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = s(x)$.

4)a)Etudions le maximum de $u_n(x)$ sur $]0, +\infty[$:

$u_n'(x) = nx^{a-1}e^{-nx^2}(a - 2nx^2)$ .Donc $u_n'(x) = 0 \iff x = x_n = \sqrt{\frac{a}{2n}}$.

u_n admet un maximum au point x_n et $u_n(x_n) = \frac{a^{\frac{a}{2}}}{2^{\frac{a}{2}}n^{\frac{a}{2}-1}}e^{-\frac{a}{2}} = \frac{A}{n^{\frac{a}{2}-1}}$.

b)La série numérique de terme général $\frac{A}{n^{\frac{a}{2}-1}}$ converge si et seulement si $\frac{a}{2} - 1 > 1$ c'est à dire $a > 4$,ce qui implique le résultat .

5)pour $a = 4$,la série numérique de terme général $u_n(x)$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$.

a)pour $N \leq n \leq 2N$,$u_n(x_N) \geq n\left(\frac{2}{N}\right)^2 e^{-\frac{2n}{N}} \geq \frac{4}{N}e^{-4}$.

D'ou $\sum_{n=N}^{2N} u_n(x_N) \geq 4e^{-4} = C$.

b)on déduire que $\sup_{x\in[0,+\infty[} \sum_{n=N}^{2N} u_n(x) \geq \sum_{n=N}^{2N} u_n(x_N) \geq C$ et donc $\sup_{x\in[0,+\infty[} \sum_{n=N}^{2N} u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $N \to +\infty$.

c)La série de fonctions de terme général $u_n(x)$ ne vérifie pas le critère de cauchy uniforme et donc ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

6)a)On remarque que $\left(1 - e^{-x^2}\right)^2 \sim x^4$ quand $x \to 0$. donc $s(x) \sim e^{-x^2} \sim 1$ quand $x \to 0$.

b)comme $s(0) = 0$, la somme de la série de fonctions de terme général $nx^4e^{-nx^2}$ est discontinue sur $[0, +\infty[$ et par suite la convergence ne peut pas etre uniforme sur cet intervalle.

corrigé de l'exercice 2.0.16

on pose $f(x) = e^x - 1 - x$ et $g(x) = e^x - 1 - x - 2x^2$ .On vérifie que $f(0) = g(0) = 0$,que f est croissante sur $[0, 1]$ et que g est décroissante sur $[0, 1]$ .Cela implique bien que $f(x) \geq 0$ et $g(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$.

1)si $t \leq 0$,alors la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0 quand n tend vers

$+\infty$,donc la série de terme général $u_n(t)$ diverge .

si $t > 0$,on a $2^{-nt} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$,et par conséquent , $u_n(t) \sim 2^{-nt}(n \to +\infty)$ .la série géométriquede terme 2^{-nt} étant convergente car $|2^{-t}| < 1$,il résulte du théorème des équivalents pour les séries à termes positifs que la série de terme général $u_n(t)$ converge .

conclusion:D=$\mathbb{R}_+^*$.

2)pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$,la fonction $t \to u_n(t)$ est positive et décroissante sur $[a, +\infty[$,car $u_n^{'}(t) = -n(\ln 2)\, 2^{-nt} \exp(2^{-nt})$ quel que soit $t \in [a, +\infty[$

Donc $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |u_n(t)| = u_n(a)$

puisque la série numérique de terme général $u_n(a)$ converge ,la série de fonctions de terme général u_n converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

3)Fixons $t_0 \in D = \mathbb{R}_+^*$ .soit $a > 0$ tel que $a < t_0$ .pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est une fonction continue sur $[a, +\infty[$. de plus , la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$ .D'aprés le théorème de continuité pour les série de fonctions uniformément convergentes , la fonction s est continue sur $[a, +\infty[$. en particulier ,elle est continue en $t_0 \in]a, +\infty[$.

Le point $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ étant quelconque ,on déduire que s est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

4)puisque $0 \leq e^x - 1 - x \leq 2x^2$ pour tout $x \in [0, 1]$,on a $2^{-nt} \leq u_n(t) \leq 2^{-nt} + 2.2^{-nt}$,quels que soient $t > 0$ en $n \in \mathbb{N}^*$.

ceci implique que

$$\sum_{n=1}^{N} 2^{-nt} \leq \sum_{n=1}^{N} u_n(t) \leq \sum_{n=1}^{N} 2^{-nt} + 2. \sum_{n=1}^{N} 2^{-nt}$$

pour $N \geq 1$ et tout $t > 0$

En faisant N tendre vers $+\infty$ on obtient ,pour $t > 0$:

$$\frac{2^{-t}}{1 - 2^{-t}} \leq s(t) \leq \frac{2^{-t}}{1 - 2^{-t}} + 2. \frac{2^{-2t}}{1 - 2^{-2t}}$$

Comme : $\frac{2^{-2t}}{1-2^{-2t}} = \circ\left(2^{-t}\right)$ et $\frac{2^{-t}}{1-2^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} 2^{-t}$ on a:

$$s\left(t\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2^{-t}}{1-2^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} 2^{-t}$$

En conclusion ,$s\left(t\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} 2^{-t}$

corrigé de l'exercice 2.0.17

1)pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,on a:

si $t \in \left[0, \frac{1}{2n}\right]$,$f_n\left(t\right) = 4n^2 t$

si $t \in \left[\frac{x}{2}, x\right]$, $g_x\left(t\right) = -4n^2\left(t - \frac{1}{n}\right)$

2) on distingue deux cas :

ou bien $t = 0$,alors $f_n\left(0\right) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on voit que $f_n\left(0\right) \to 0$ quand $n \to +\infty$

ou bien $t \neq 0$ et alors si $\frac{1}{n} \leq t$,c'est à dire $n \geq \frac{1}{t}$, $f_n\left(t\right) = 0$ donc on a aussi $f_n\left(t\right) \to 0$ quand $n \to +\infty$

donc quel que soit $t \in [0, 1]$,on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(t\right) = 0.$

3)On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,l'aire du triangle isocéle de base $\frac{1}{n}$ et de hauteur $2n$ est 1.C'est l'aire comprise entre l'axe des t et le graphe de la fonction $t \to f_n\left(t\right)$,donc

$$\int_0^1 f_n\left(t\right) dt = 1$$

4)L'interversion de la limite quand $n \to \infty$ et de l'intégrale n'est pas vérifiée puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n\left(t\right) dt = 1$ et $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(t\right) dt = 0.$

On voit que $\sup\limits_{x\in[0,1]} f_n\left(t\right)$ =2n $\to \infty$ lorsque $n \to \infty$ et donc la suite de fonction $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers 0 . cette suite de fonctions ne vérifie pas les hypothése du théorème 4.5.1

Chapitre 3

Séries entières

Définition 3.0.13 *On appelle Séries entières de variable réelle (resp. de variable complexe) toute série de fonction de la forme* $\sum a_n x^n$ *(resp.* $\sum a_n z^n$ *), où* $(a_n)_n$ *est une suites des nombres complexes.*

La suite $(a_n)_n$ est appelée la suite des coefficients de la Séries entières.

Remarque 3.0.10 *Toute séries entières converge pour* $z = 0$.

On désigne par D l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels la série $\sum a_n z^n$ est convergente, on note $f(z)$ la somme de cette série, soit :

$$\forall z \in D,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

L'ensemble D est appelé domaine de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

L'ensemble D est non vide puisqu'il contient toujours 0.

Exemple 3.0.14 *Déterminer les domaines de convergence des séries entières suivantes*

1. $\sum z^n$; 2. $\sum \frac{z^n}{n!}$.

1.Il est clair que la série $\sum z^n$ est une série géométrique de raison z, alors elle est convergente si et seulement si $|z| < 1$, ainsi le domaine de convergence de la série $\sum z^n$ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1.

2.En utilisant le Critère de D'alembert on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|z|}{n+1} = 0,$$

d'où la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$, ainsi le domaine de convergence de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est $\mathbb{C}$ tout entier.

Pour la suite nous ne considérons que les séries entières réelles, c'est-à-dire les séries de la forme $\sum a_n x^n$, où $(a_n)_n$ est une suites réelle et $x \in \mathbb{R}$.

3.0.13 Convergence d'une série entière

Proposition 3.0.9 *(Abel)*

Soit la série entière $\sum a_n x^n$.S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que la suite $(a_n x_0^n)_n$ soit bornée. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument.

Démonstration: On a,

$$\begin{aligned}\text{La suite } (a_n x_0^n)_n \text{ borné } &\Rightarrow \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |a_n x_0^n| \leq M,\\ &\Rightarrow \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq \frac{M}{|x_0^n|},\end{aligned}$$

alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$, on trouve

$$|a_n x^n| \leq M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

or la série géométrique $\sum M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ est convergente car $\left|\frac{x}{x_0}\right|^n < 1$. Ainsi, la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente.

Corollaire 3.0.4 *S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que la série $\sum a_n x_0^n$ est convergente, alors la série entière $\sum a_n x^n$ converge absolument en tout point $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$.*

Démonstration: On a,

$$\text{la série } \sum a_n x^n \text{ est convergente} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n x_0^n = 0,$$

C'est-à-dire la suite $(a_n x_0^n)_n$ est convergente, et donc elle est bornée. Ainsi d'aprés la proposition précédente, la série entière $\sum a_n x^n$ converge absolument en tout point $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$.

3.0.14 Rayon de convergence d'une série entière

Définition 3.0.14 *Soit la série entière $\sum a_n x^n$. Le nombre réel positif*

$$R = \sup \{r \in \mathbb{R}_+ / \text{ la suite } (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\},$$

S'appelle le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$.

Exemple 3.0.15 *La série $\sum x^n$ a rayon de convergence $R = 1$, car la suite $(r^n)_n$ est bornée si et seulement si $|r| \preceq 1$.*

Remarque 3.0.11 *Le rayon de convergence d'une série entière peut prendre la valeur $+\infty$, c'est le cas où le domaine de convergence est $\mathbb{R}$.*

Exemple 3.0.16 *Repronons l'exemple de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$, il est clair que le domaine de convergence est $\mathbb{R}$ tout entier. D'où le rayon de convergence est $R = +\infty$.*

Proposition 3.0.10 *Soit la série $\sum a_n x^n$, s'il existe deux réels strictement positifs m et M telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ m \preceq |a_n| \preceq M,$$

alors le rayon de convergence de cette série vaut 1.

Démonstration

Soit R le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$. Comme, $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \preceq |a_n| \preceq M$ alors,

$$\sup\{r \in \mathbb{R}_+/ \text{ la suite } (Mr^n)_n \text{ est bornée}\} \subset \sup\{r \in \mathbb{R}_+/ \text{ la suite } (|a_n|\, r^n)_n \text{ est bornée}\}$$

et

$$\sup\{r \in \mathbb{R}_+/ \text{ la suite } (|a_n|\, r^n)_n \text{ est bornée}\} \subset \sup\{r \in \mathbb{R}_+/ \text{ la suite } (mr^n)_n \text{ est bornée}\}$$

Or

$$\begin{aligned} \sup\{r &\in \mathbb{R}_+/ \text{ la suite } (Mr^n)_n \text{ est bornée}\} = \sup\{r \in \mathbb{R}_+/ \text{ la suite } (mr^n)_n \text{ est bornée}\} \\ &= \sup\{r \in \mathbb{R}_+/ \text{ la suite } (r^n)_n \text{ est bornée}\} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi $R = 1$.

Exemple 3.0.17 *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum \left(\sin^2 n + 1\right) x^n$.

En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq (\sin^2 n + 1) \leq 2,$$

donc d'aprés la proposition précédente, le rayon de convergence de la série $\sum \left(\sin^2 n + 1\right) x^n$ égale 1.

Proposition 3.0.11 *Soit la série entière* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* R. *Alors,*

i) la série entière $\sum a_n x^n$ est absolument convergente pour tout x, telle que $|x| < R$.

ii) Dans le cas où R est fini, les série $\sum a_n x^n$ et $\sum |a_n x^n|$ sont divergentes pour tout x tel que $|x| > R$.

Démonstration: Triviale.

Soit la série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence R. Alors la série $\sum a_n x^n$ est normalement convergente sur tout intervalle $[-r, +r]$ tel que $r < R$.

3.0.15 Théchnique de calcul de rayon de convergence

Théorème 3.0.7 *(Règle d'Hadamard)*

Soit la série entière $\sum a_n x^n$. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$ une valeur dans $\bar{\mathbb{R}}(\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$, alors le rayon de cette série est $R = \frac{1}{l}$.

Soit la série entière $\sum a_n x^n$,Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ une valeur dans $\bar{\mathbb{R}}(\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$, alors le rayon de cette série est $R = \frac{1}{l}$.

i) Dans le cas où les deux limites $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ n'existent pas, le rayon de convergence et alors donné par

$$R = \frac{1}{l} \text{ où } l = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ si } l \neq 0,$$

et si $l = 0$, on a: $R = +\infty$ et si $l = +\infty$ on a: $R = 0$.

ii) Soit la série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence R. Alors son domaine de convergence est l'un des quatre intervalles: $]-R, +R[\,, [-R, +R[\,,]-R, +R]$ ou bien $[-R, +R]$.

Soit la série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence R. Alors les séries $\sum n a_n x^{n-1}$ et $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ont même rayon de convergence R.

3.0.16 Opérations sur les séries entières

Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, deux séries entières ayant respectivement R et R'pour rayon de convergence.

i) Si $R \neq R'$, le rayon de convergence R'' de la série $\sum (a_n + b_n) x^n$ est $R'' = \min\{R, R'\}$.

ii) Si $R = R'$, le rayon de convergence de la série $\sum (a_n + b_n) x^n$ est $R'' \geq R$.

Démonstration

1-Supposons que $R' < R$.

i) Si $|x| < R'$ alors $|x| < R$, d'où les deux séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont absolument convergentes.

Comme $|(a_n + b_n)x^n| \leq |a_n x^n| + |b_n x^n|$, alors la série $\sum (a_n + b_n) x^n$ converge absolument pour $|x| < R' = \min\{R, R'\}$.

ii) Si $|x| > R'$, deux cas de figure se présentent:

a) Si $R' < |x| < R$, la série $\sum b_n x^n$ converge absolument et $\sum a_n x^n$ diverge. Donc $\sum (a_n + b_n) x^n$ diverge.

b) Si $R' < R < |x|$, les deux séries divergent. Montrons $\sum (a_n + b_n) x^n$ diverge. Raisonnons par l'absurde. Alors on suppose que la série $(\sum (a_n + b_n) x^n)$ est converge, donc d'aprés la proposition 5.5 (Abel), la série $\sum (a_n + b_n) x^n$ converge absolument pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $|x_0| < |x|$ et en particulier pour x_0 vérifiant $R' < |x_0| < R < |x|$. D'où la contradiction.

2-Si $R = R'$. Il est clair que la série $\sum (a_n + b_n) x^n$ converge absolument si $|x| < R = R'$, ainsi le rayon de convergence $R'' \geq R = R'$.

Soient les deux séries $\sum\limits_{n \geq 0} x^n$ et $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{1-2^n}{2^n} x^n$. Les deux séries ont pour rayon de convergence $R = 1$. Par contre la série déduite de la somme des deux séries $\sum\limits_{n \geq 0} x^n$ et $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{1-2^n}{2^n} x^n$ (i.e. $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} x^n$), a pour rayon de convergence $R'' = 2$.

Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, deux séries entières ayant respectivement R et R'pour rayon de convergence. ALors la série produit des deux séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ est une série entière de terme général $c_n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$ et son rayon de converence $R'' \geq \min\{R, R'\}$.

3.1 Application du Théorème de continuité, Théorème d'intégration et Théorème de dérivation sur les séries entières

3.1.1 Continuité

Théorème 3.1.1 *La fonction somme S d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R(\neq 0)$ est continue sur $]-R, +R[$.*

Démonstration

Soit $0 < r < R$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n(x) = a_n x^n$ sont continues sur $[-r, +r]$ et puisque la convergence est normale donc uniforme dans $[-r, +r]$, donc d'aprés le Théorème de continuité sur les séries de fonctions, la fonction somme S de la série entière $\sum a_n x^n$ est continue sur $[-r, +r]$, pour tout r, $(0 < r < R)$, et par suite elle est continue sur $]-R, +R[$.

Proposition 9 *(continuité d'Abel)*

Soit la série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence R. Si la série numérique $\sum a_n R^n$ converge, alors la série entière $\sum a_n x^n$ est uniformément convergente sur $[0, R]$, et sa somme est continue sur ce segment.

En particulier,

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

3.1.2 Intégration

Théorème 3.1.2 *Soit la série entière* $\sum a_n x^n$ *de somme* S *et de rayon de convergence* R*. Alors pour tout intervalle* $[a,b]$ *inclue dans* $]-R,+R[$ *on a*

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n dx.$$

Démonstration

Il est clair que pour tout intervalle $[a,b]$ inclue dans $]-R,+R[$, les fonctions $f_n(x) = a_n x^n$ sont continues et la série entière $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[a,b]$, et donc d'aprés le théorème d'intégration sur les séries de fonctions, on trouve que la fonction S(x) la somme de la série $\sum a_n x^n$ est intégrable sur $[a,b]$, de plus on a

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n dx.$$

Corollaire 3.1.1 *Soit la série entière* $\sum a_n x^n$ *de somme* S *et de rayon de convergence* R*. Alors la fonction* S *est continue sur* $]-R,+R[$ *et ses primitives sont de la forme:*

$$t \to k^+ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}, \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

Démonstration

En appliquant le Théorème précédent sur le segment $[0,t]$.

3.1.3 Dérivation

Théorème 3.1.3 *Soit la série entière* $\sum a_n x^n$ *de somme* S *et de rayon de convergence* R*. Alors la fonction* S *est de classe* C^1 *sur* $]-R,+R[$*, de plus on a*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Démonstration

On applique le Théorème de dérivation sur les séries de fonctions, en effet : pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n(x) = a_n x^n$ sont de classe C^1 sur $]-R, +R[$, la série $\sum a_n x^n$ converge simplement sur $]-R, +R[$ et la série $\sum n a_n x^{n-1}$ converge uniformément sur tout segment $[-r, +r]$ pour tout r tel que $0 < r < R$. Alors la fonction somme S est de classe C^1 sur $[-r, +r]$, et par suite S est de classe C^1 sur $]-R, +R[$. De plus

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Corollaire 3.1.2 *Soit la série $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R. Alors sa somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, est uniformément dérivable ($f \in C^{\infty}(]-R, +R[)$), et l'on a:*

$$\forall x \in]-R, +R[\, , f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Démonstration

En effet, si: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, par application du Théorème précédent, il est facile de voir que la fonction f est indéfiniment dérivable ($f \in C^{\infty}(]-R, +R[)$). De plus on a $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, et par récurrence, la dérivée d'ordre k est donnée par la relation:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2)...(n-k+1) n a_n x^{n-1}.$$

De cette expression, il résulte que $f^{(k)}(0) = a_k k!$ c'est-à-dire

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

3.1.4 Séries de Taylor

Motivation

Soit f une fonction réelle à variable réelle. Peut-on trouver une suite réelle $(a_n)_n$ et $r > 0$ tels que l'on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in \,]-r, r[$?

Si ce problème admet une solution, on dit que f est développable en série entière au voisinage de 0.

On peut généraliser cette situation en se posant la même question pour une fonction définie au voisinage d'un point x_0 : il existe-il une suite $(a_n)_n$ et $r > 0$ tels que l'on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ pour $x \in \,]x_0 - r, x_0 + r[$?

Dans l'affirmatif, on dira que f est développable en série entière au voisinage de x_0.

Pour qu'une fonction f soit développable en série entière au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, il est nécessaire qu'elle soit de classe C^∞ dans un voisinage $]x_0 - r, x_0 + r[$ de x_0 et dans ce cas on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Démonstration

Similaire à celle du corollaire 3.1.2.

Soit $f : \,]-r, r[\, \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ dans un voisinage de 0. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in \,]-r, r[, \left| f^{(n)}(x) \right| \leq M$. Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est simplement convergente sur $]-r, r[$ et on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \forall x \in \,]-r, r[\,.$$

Démonstration

Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in \,]-r, r[$, on a $\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M$.

Le développement de Taylor de f au voisinage de 0 à l'ordre n donne:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ \text{avec } 0<\theta<1,$$

où la quantité $\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$ est appellé le reste de Mac-Laurin.
Pour démontrer la Proposition, il suffit de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=0$.
En effet:

$$x\in\left]-r,r\right[\Rightarrow|\theta x|<r\Rightarrow\left|f^{(n+1)}(\theta x)\right|\leq M,$$

3.1.5 Exercices:

Exercise 3.1.1 *Déterminer les domaines de convergence des séries entières*

$$1.\sum_{n\geq0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\ \ ;\ 2.\sum_{n\geq0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

Exercise 3.1.2 *Déterminer le rayon puis le domaine de convergence des séries entières suivantes*

$$1.\sum_{n\geq0}\frac{n^2+n}{3^n}x^n\ ;2.\sum_{n\geq0}\exp^{-n^2}x^n\ \ ;\ 3.\sum_{n\geq0}\frac{\ln n}{n^2}x^n;$$

$$4.\sum_{n\geq2}\frac{(-1)^n}{\ln n}x^n;5.\sum_{n\geq1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)x^n;6.\sum_{n\geq0}\cosh(n)\,x^n.$$

Exercise 3.1.3 *Soit $\sum_{n\geq0}a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

1. Quelle est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq0}a_nx^{2n}$.

2. On déduit le rayon de convergence des séries entières :

$$1\ .\sum_{n\geq0}\tfrac{\ln n}{n^2}x^{2n}\ ;\ \ 2.\sum_{n\geq0}\cosh(n)\,x^{3n}\quad;\quad 3.\sum_{n\geq0}\tfrac{n^2+n}{3^n}x^{5n}\ .$$

Exercise 3.1.4 *Soit la suite de fonction* $(f_n)_n$ *telle que :* $f_n(x) = \frac{x^{4n}}{(4n)!}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$.

2. Développer la fonction $f(x) = \cos x + \cosh x$ en série entière sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$.

Exercise 3.1.5 *Calculer les sommes des séries suivantes dans leur intervalle ouvert de convergence après avoir déterminé ses rayon de convergence.*

$$1. \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n \ ; \quad 2. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} x^n.$$

Exercise 3.1.6 *Calculer les sommes suivantes dans leur intervalle ouvert de convergence après avoir déterminé le rayon de convergence de la série proposée.*

$$1. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!} x^{2n}; \quad 2. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)} x^{3n}.$$

Solution des exercices:

- **Solution de l'exercice 3.1.1 :**

  1. On pose $u_n = \left|\frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}\right|$.

     En utilisant le Critère de D'Alembert sur les séries numériques à termes positifs , on trouve

     $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{|z|^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{|z|^{2n}}{(2n)!}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0.$

     donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} \left|\frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}\right|$ est convergente sur $\mathbb{C}$, d'où la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ est convergente sur $\mathbb{C}$.

2. On pose $u_n = \left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}\right|$

En utilisant le Critère de D'Alembert sur les séries numériques à termes positifs , on trouve
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{|z|^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|z|^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0.$
donc la série $\sum\limits_{n\geq 0}\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}\right|$ est convergente sur $\mathbb{C}$, ainsi la série $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$ est convergente sur $\mathbb{C}$.

Solution de l'exercice 3.1.2 :

1. On pose $a_n = \frac{n^2+n}{3^n}$, alors
$\lim\limits_{n\to+\infty} \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)^2+n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n^2+n}{3^n}}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2+n+1}{n^2+n}\frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3},$
d'où le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{n^2+n}{3^n}x^n$ est $R = 3$.

pour $x = 3$:

$$\frac{n^2+n}{3^n}x^n = \frac{n^2+n}{3^n}3^n = n^2+n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc la série entière $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{n^2+n}{3^n}x^n$ est divergente pour $x = 3$.

pour $x = -3$:

$$\frac{n^2+n}{3^n}x^n = \frac{n^2+n}{3^n}(-1)^n 3^n = (n^2+n)(-1)^n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty,$$

donc la série $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{n^2+n}{3^n}x^n$ est divergente pour $x = -3$.
Ainsi le domaine de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{n^2+n}{3^n}x^n$, est $D = \left]-3, 3\right[$.

2. On pose $a_n = e^{-n^2}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|e^{-n^2}|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{e^{-n^2}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0.$$

d'où le rayon de convergence de la séries entiére $\sum\limits_{n\geq 0} e^{-n^2}x^n$ est $R = +\infty$.

Ainsi son domaine de convergence est $D = R$.

3. On pose $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}}{\frac{\ln n}{n^2}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

d'où le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq1} \frac{\ln n}{n^2} x^n$ est $R = 1$.

Pour $x = 1$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$, donc la série $\sum_{n\geq1} \frac{\ln n}{n^2}$ est convergente.

Pour $x = -1$: $\sum_{n\geq1} (-1)^n \frac{\ln n}{n^2}$ est absolument convergente, donc elle est convergente.

Ainsi le domaine de convergence de la série $\sum_{n\geq1} \frac{\ln n}{n^2} x^n$, est $D = [-1, 1]$.

4. On pose $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}}{\frac{(-1)^n}{\ln n}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 1,$$

d'où le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq2} \frac{(-1)^n}{\ln n} x^n$ est $R = 1$.

Pour $x = 1$: la série $\sum_{n\geq2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge d'aprés le Théorème d'Abel (Théorème 2.49).

Pour $x = -1$: la série $\sum_{n\geq2} \frac{1}{\ln n}$ diverge, car $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 2$.

Ainsi le domaine de convergence de la série $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n}{\ln n} x^n$, est $D =]-1, 1]$.

5. On pose $a_n = \sin(\frac{1}{n})$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

d'où le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq1} \sin\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ est $R = 1$.

Pour $x = 1$: $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, alors la série $\sum_{n\geq2} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

Pour $x = -1$: la série $\sum_{n\geq2} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ converge d'aprés le Théorème d'Abel (Théorème 249).

Ainsi le domaine de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln n} x^n$, est $D = [-1, 1[$

6.On pose $a_n = ch(n)$

$$\lim\limits_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to+\infty} |\frac{ch(n+1)}{ch(n)}| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{ch(n+1)}{ch(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{n+1}+e^{-(n+1)}}{e^n+e^{-n}}$$
$$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n(e+e^{-(2n+1)})}{e^n(1+e^{-2n})} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e+e^{-(2n+1)}}{1+e^{-2n}} = e.$$

Alors le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} ch(n)x^n$ est $R = \frac{1}{e}$.

Pour $x = \frac{1}{e}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+e^{-2n}}{2} = \frac{1}{2}$, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} ch(n)\left(\frac{1}{e}\right)^n$ diverge.

Pour $x = -\frac{1}{e}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+e^{-2n}}{2}(-1)^n = \overset{+}{-}\frac{1}{2}$ donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} ch(n)\left(\frac{1}{e}\right)^n$ diverge.

Ainsi le domaine de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln n} x^n$, est $D = \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$.

Solution de l'exercice 3.1.3.

1. $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entiére de rayon de convergence R, si et seulement si, pour tout $x \in R$

si $|x| < R$, la série entiére $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est convergente

et

si $|x| > R$, la série entiére $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est divergente.

Alors,

si $|x^2| < R$(i.e. $|x| < \sqrt{R}$), la série entiére $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^{2n}$ est convergente

et

si $|x^2| > R$(i.e. $|x| > \sqrt{R}$), la série entiére $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^{2n}$ est divergente

d'où le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^{2n}$ est $\sqrt{R}$.

2.1. D'aprés l'Exesrcice **3.1.2**, le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} x^n$ est 1, ainsi on déduit que le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} x^{2n}$ est $\sqrt{1} = 1$.

2.2. En utilisant la démonstration par récurrencen, on peut monter que si $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est une série entiére de rayon de convergence R, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^{pn}$ est de rayon de convergence $\sqrt[p]{R}$.

D'aprés l'Exercice **3.1.2**, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} chn\ x^n$ est $\frac{1}{e}$, ainsi le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} chn\ x^{3n}$ est $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

2.3. Daprés l'Exercice **3.1.2**, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n}{3^n} x^n$ est 3, ainsi le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+n}{3^n} x^{5n}$ est $\sqrt[5]{3}$.

Solution de l'Exercice 3.1.4. Soit la suite de fonction $(f_n)_n$ telle que

$$f_n(x) = \frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$

1. Calcul de rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(4n)!} x^n$.on pose $a_n = \frac{1}{(4n)!}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{1}{(4(n+1))!}}{\frac{1}{(4n)!}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(4n)!}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(4n)!} = 0,$$

d'où le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(4n)!} x$ est $R = +\infty$.

Ainsi d'aprés l'Exercice précédent, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(4n)!} x$ est $\sqrt[4]{R} = +\infty$.

2. On a : $\cos x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ et $chx = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ alors

$$\cos x + chx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 1}{(2n)!} x^{2n}.$$

3. Comme

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n+1}{(2n)!} x^{2n} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k}+1}{(4k)!} x^{4k} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1}+1}{(2(2k+1))!} x^{2(2k+1)} \\ &= 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k)!} x^{4k}\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k)!} x^{4k} = \frac{\cos x + chx}{2}.$$

Solution de l'Exercice 3.1.5.

1. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)}}{\frac{1}{n(n-1)}}\right| = 1$, donc le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 2}\frac{1}{n(n-1)}x^n$ est $R = 1$.

Comme $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, donc

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}x^k = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}x^k - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}x^k.$$

En passant quand n tend vers l'infini,on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - x = -\ln(1-x) - x$$

et

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -x\ln(1-x).$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty}\tfrac{1}{n(n-1)}x^n &= -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x \\ &= x + (1-x)\ln(1-x).\end{aligned}$$

2.On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{3(n+1)}{n+3}}{\frac{3n}{n+2}}\right| = 1$, donc le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{3n}{n+2}x^n$ est $R = 1$.

pour $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{3n}{n+2}x^n &= 3\left[\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - \tfrac{2}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{1}{n+2}x^{n+2}\right] \\ &= 3\left[\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - \tfrac{2}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty}\tfrac{x^n}{n}\right] \\ &= 3\left[\tfrac{1}{1-x} - \tfrac{2}{x^2}(-\ln(1-x) - x)\right] \\ &= 3\left[\tfrac{2-x}{x(1-x)} + \tfrac{2\ln(1-x)}{x^2}\right]\end{aligned}$$

Pour $x = 0$: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{3n}{n+2}x^n = 0$.

D'où

$$S(x) = \left\{\begin{array}{cc} 3\left[\frac{2-x}{x(1-x)} + \frac{2\ln(1-x)}{x^2}\right] & \text{si } x \in]-1,0[\cup]0,+1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array}\right\}$$

Solution de l'exercice 3.1.6.

1. Calcul de rayon de covergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{(2n+1)!}x^n$. On pose $a_n = \frac{n}{(2n+1)!}$

$$\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{(2n+3)!}}{\frac{n}{(2n+1)!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}\frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0,$$

donc $R = +\infty$.

Alors d'aprés l'Exercice **3.1.3**, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{(2n+1)!}x^{2n}$ est $+\infty$. Calcul de la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{(2n+1)!}x^{2n}$ sur R: on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{(2n+1)!}x^{2n} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+1-1}{(2n+1)!}x^{2n}\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n}\right],$$

Alors pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{n}{(2n+1)!}x^{2n} &= \tfrac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{x^{2n}}{(2n)!} - \tfrac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right]\\ &= \tfrac{1}{2}\left(ch(x) - \tfrac{sh(x)}{x}\right).\end{aligned}$$

Si $x = 0$: $\sum_{n=0}^{m}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{m}\frac{n}{(2n+1)!}x^{2n} = 1 \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

D'où

$$S(x)\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2}\left(ch(x) - \frac{sh(x)}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x = 0\end{array}\right\}$$

2. Calcul de rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}x^n$. On pose $a_n = \frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}$,alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}|\tfrac{a_{n+1}}{a_n}| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^2+4(n+1)-1}{(n+1)!(n+3)}}{\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}}\right|\\ &= \lim_{n\to+\infty}\tfrac{(n+1)^2+4(n+1)-1}{n^2+4n-1}\tfrac{(n+2)}{(n+1)(n+3)} = 0,\end{aligned}$$

donc $R = +\infty$.

Alors d'aprés l'Exesrcice **3.1.3**, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}x^{3n}$ est $+\infty$. Calcul de la somme de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}x^{3n}$ sur R. Pour $x\neq 0$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{n^2+4n-1}{n!(n+2)} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(n+2)^2-5}{n!(n+2)} x^{3n}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{(n-1)!} x^{3n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!} x^{3n} - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!(n+2)} x^{3n}$$
$$= x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(x^3)^n}{n!} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(x^3)^n}{n!} - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!(n+2)} x^{3n}$$
$$= x^3 e^{x^3} + 2e^{x^3} - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!(n+2)} x^{3n}.$$

Et comme
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!(n+2)} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{n+1}{(n+2)!} x^{3n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{n-1}{n!} x^{3(n-2)}$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{1}{(n-1)!} x^{3(n-1-1)} - \sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{(x^3)^{(n-2)}}{n!},$$
donc pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!\,(n+2)} x^{3n} &= \frac{1}{x^3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^3)^n}{n!} - \frac{1}{x^6}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x^3)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{x^3}\left(e^{x^3}-1\right) - \frac{1}{x^6}\left(e^{x^3}-1-x^3\right) = \left(\frac{e^{x^3}\left(x^3-1\right)+1}{x^6}\right),\end{aligned}$$

ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n!\,(n+2)} x^{3n} = x^3 e^{x^3} + 2\left(e^{x^3}-1\right) - \left(\frac{e^{x^3}\left(x^3-1\right)+1}{x^6}\right).$$

Si $x = 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!\,(n+2)} x^{3n} = 1 \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \text{c'est-à-dire } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!\,(n+2)} x^{3n} = 1.$$

D'où

$$S(x) = \begin{cases} x^3 e^{x^3} + 2\left(e^{x^3}-1\right) - 5\left(\frac{e^{x^3}\left(x^3-1\right)+x^4-x^3+1}{x^6}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Chapitre 4

Séries de Fouries

Nous allons dans un premier temps introduire la notion de série de Fourier en partant des développements en séris entières.

Le théoremes relatif aux projections orthogonales d'un espace préhilbertien sur un sous-espace de dimension finie nous donnera une autre

présentation de cette notion de série de Fourie.

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n e^{inx}$ est une série entière de rayon de convergence R>0 éventuellement infini, on peut définir, en notant f la somme de cette série entière, pour

tout réel $r \in]0, R[$ la fonction φ_r par:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_r(x) = f\left(re^{ix}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n e^{inx}$$

La fonction f étant continue sur le disque ouvert $D(O, R) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < R\}$,on en déduit que, pour r fixé dans $]0, R[$, la fonction φ_r est continue sur tout $\mathbb{R}$.

Remarque 4.0.1 *Avec* $|\alpha_n r^n e^{inx}| = |\alpha_n| r^n$ *pour tout réel* x *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n| r^n < +\infty$, *on déduit que la série de fonctions* $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n e^{inx}$ *est normalement convergente sur* $\mathbb{R}$, *ce qui permet de retrouver la continuité de* φ_r *avec celle des fonctions* $x \longmapsto e^{inx}$ *pour tout entier naturel* n.

Remarque 4.0.2 *Si p est un entier naturel non nul, on sait que la série dérivée :*

$$\sum n(n-1)\cdots(n-p \div 1)\alpha_n z^{n-p}$$

a même rayon de convergence que $\sum \alpha_n z^n$, donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n^p |\alpha_n| r^n$ est convergente pour tout réel $r \in]0, R[$

(puisque $n^p |\alpha_n| r^n \underset{+\infty}{\backsim} r^p n(n-1)\cdots(n-p \div 1) |\alpha_n| r^{n-p}$) et avec $|(in)^p \alpha_n r^n e^{inx}| = n^p |\alpha_n| r^n$ pour tout entier naturel n et tout réel x, on déduit que la série de fonctions

$\sum (in)^p \alpha_n r^n e^{inx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Comme les fonctions $x \longmapsto e^{inx}$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.pour tout entier naturel n,

on en déduit que la fonction φ_r est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.De la $2\pi-$périodicité des fonctions $x \longmapsto e^{inx}$, on déduit que la fonction φ_r est périodique de

période 2π, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_r(x+2\pi) = \varphi_r(x)$$

En utilisant les formules d'Euler :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

on peut écrire que :

$$\varphi_r(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \cos(nx) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \sin(nx)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \cos(nx) + i \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n r^n \sin(nx)$$

chacune des séries de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \cos(nx)$ et $i \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n r^n \sin(nx)$ étant normalement convergente sur $\mathbb{R}$ (le terme général est majoré par $|\alpha_n| r^n$).

Un tel développement est appelé développement en série de Fourier de la fonction φ_r .

Nous allons étudier un peu plus loin, de façon plus générale, cette notion de série de Fourier.

Les coefficients α_n peuvent s'exprimer à l'aide de formules intégrales comme suit.

Théorème 4.0.4 (*Cauchy*) *Avec les notations qui précèdent, on a :*

$$\forall n \geq 0,\ \alpha_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t)\, e^{-int} dt$$

Démonstration. Avec la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n e^{inx}$, on

peut écrire pour tout entier $n \geq 0$;

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t)\, e^{-int} dt &= \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt \\ &= 2\pi \alpha_n r^n \end{aligned}$$

puisque:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq n \\ 2\pi & \text{si} \quad k = n \end{cases} .$$

On a en particulier:

$$f(0) = a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t)\, dt$$

Remarque 4.0.3 *Pour* $n \geq 1$, *on a:*

$$\int_0^{2\pi} \varphi_r(t)\, e^{int} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k+n)t} dt = 0$$

et:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \varphi_r(t)\cos(nt)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t)\left(e^{int}+e^{-int}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t)\,e^{-int}dt = \pi\alpha_n r^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \varphi_r(t)\sin(nt)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t)\left(e^{int}-e^{-int}\right)dt \\
&= -\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t)\,e^{-int}dt = i\pi\alpha_n r^n.
\end{aligned}$$

Soit, pour $n \geq 1$:

$$\alpha_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t)\,e^{-int}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t)\cos(nt)\,dt$$

et:

$$i\alpha_n r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t)\sin(nt)\,dt.$$

Les coefficients

$$\begin{aligned}
a_n &= \alpha_n r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t)\cos(nt)\,dt \qquad n \geq 0 \\
b_n &= i\alpha_n r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t)\sin(nt)\,dt. \qquad n \geq 1
\end{aligned}$$

sont les coefficients de Fourier trigonométriques de φ_r et les coefficients:

$$c_n = \alpha_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t)\,e^{-int}dt \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

sont les coefficients de Fourier exponentiels de φ_r.

Nous utiliserons par la suite les coefficients trigonométriques un peu plus commodes pour les fonctions à valeurs réelles paires ou impaires.

Exercise 4.0.7 *Montrer que les seules fonctions développables en série entière et bornées sur $\mathbb{C}$ sont les fonctions constantes (théorème de Liouville).*

Solution: On a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et il existe un réel $M > 0$tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

En utilisation les notations qui précédent, on a pour tout réel $r > 0$ et tout entier $n \geq 1$:

$$|\alpha_n| = \frac{1}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{it}\right) \right| dt \leq \frac{M}{r^n} \underset{r \to +\infty}{\to} 0$$

donc $\alpha_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $f = \alpha_0$.

Remarque 4.0.4 *i) puisque f est $2\pi-$ périodique, on peut changer l'intervalle d'intégration en $[\alpha,\ \alpha + 2\pi]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*

ii) Si f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$.

iii) Si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

Les théorèmes fondamentaux

4.0.6 Le théorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $2\pi-$ périodique et de classe ζ^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de $f$converge simplement sur $\mathbb{R}$. En chaque point $x \in \mathbb{R}$, la somme de la série de Fourier de f est égale à la demi-somme des limites à gauche et à droite de f. En particulier si f est continue au point $x \in \mathbb{R}$, alors la somme de la série de Fourier de f au point x est égale à $f(x)$

4.0.7 Le théorème de convergence normale

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $2\pi-$périodique, de classe ζ^1 parmorceaux, et continue sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier ζ^1de f converge normalement sur $\mathbb{R}$, et sa somme est égale à f ..

4.0.8 Égalité de Parseval

Théorème 4.0.5 *(Egalité de Parseval (1799)).pour tout fonction $f \in D$, on a*

Theorem 10

$$\| f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} | c_n |^2 .$$

Si f est à valeurs réelles, on a

$$\| f\|^2 = \langle f, f\rangle = \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} | f(x) |^2 \, dx =| a_0 |^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(| a_n |^2 + | b_n |^2).$$

4.0.9 Exercices

Exercise 4.0.8 *Soit f la fonction 2π-périodique définie pour tout $x \in [-\pi, \pi[$ par*

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 0 \text{ si } & x \in [-\pi, 0[\\ x \text{ si } & x \in [0, \pi[\end{Bmatrix}$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ associé à f et donner la série de Fourier associée à f.

2. En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ } et \text{ } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercise 4.0.9 *Soit f la fonction 2π-périodique définie pour tout $x \in [-\pi, \pi[$ par $f(x) = x$*

1. Déterminer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ associé à f et donner la série de Fourier associée à f.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\sin\left(n\frac{\Pi}{2}\right)$.

3. En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \ et \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercise 4.0.10 *Soit f la fonction 2π-périodique définie pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.*

1. Déterminer la série de Fourier associée à f .

2. En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \ , \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} et \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

Exercise 4.0.11 *Soit f la fonction 2π-périodique définie pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ par $f(x) =\mid x \mid$.*

1. Déterminer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ associé à f et donner la série de Fourier associée à f.

2. En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \ , \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \ et \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercise 4.0.12 *Soit f la fonction 2π-périodique définie pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ par*

$$\left\{\begin{matrix} x \sin x & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0[. \end{matrix}\right\}$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier $a_0(f)$, $a_1(f)$ et $b_1(f)$ associé à f .

2. Déterminer, pour tout $n \geq 2$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ associé à f et donner la série de Fourier associée à f.

3. En déduire la somme $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$.

Exercise 4.0.13 *Soit f la fonction 2π-périodique définie pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ par $f(x) = \mid \sin(x) \mid$.*

1. Déterminer la série de Fourier associée à f.

2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mid \sin(x) \mid = \frac{8}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2-1}$.

Exercices suplémentaires:

Exercise 4.0.14 *Soit f la fonction paire, 2π périodique définie par*

$$f(x) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & si & x \in [0,1] \\ 0 & si & x \in]1, \pi[\end{Bmatrix}$$

a) Déterminer la série de Fourier associée à f.

b) Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$.

c) Calculer la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n)}{n}$.

Solution des exercices:

- **Solution de l'exercice 4.0.8.**

1. La fonction f n'est ni paire, ni impaire, alors les coefficients de Fourier sont:

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} x dx = \frac{\pi}{4}.$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin(nx)\Big]_0^{\pi}\right) - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = -\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{n^2\pi}\cos(nx)\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right),
\end{aligned}$$

d'où

$$a_{2p}(f) = 0 \text{ pour } p \neq 0$$

et

$$a_{2p+1}(f) = -\frac{2}{(2p+1)^2\pi}.$$

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos(nx)\Big]_0^{\pi}\right) + \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx = -\frac{1}{n\pi}\left(x\cos(nx)\Big]_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n}.
\end{aligned}$$

La série de Fourier associée à f est donc

$$F(f)(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\right).$$

2.La fonction f étant de classe C^1 par morceaux et 2π–périodique, alors d'aprés le Théorème de Lejeune Dirichlet (Théorème 4.0.6), on a en particulier en tout point x où f est continue

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \right).$$

La fonction f est continue en 0, alors

$$\begin{aligned} 0 &= f(0) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

comme

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \end{aligned}$$

alors on a

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Solution de l'exercice 4.0.9.

1.

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0.$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx = 0,$$

car la fonction $x \mapsto x\cos(nx)$ est impaire.

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos(nx)]_0^{\pi}\right) + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

La série de Fourier associée à f est donc

$$F(f)(x) = 2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}$, alors

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \text{si } n = 2p \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p+1 \end{array}\right\}.$$

3. f est C^1 par morceaux et continue sur$[-\pi,\pi[$ donc d'aprés le Théorème de Lejeune Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $[-\pi,\pi[$; d'où pour tout $x \in [-\pi,\pi[$, on a

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

En particulier pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right),$$

en utilisant **2,** on trouve

$$2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} (-1)^n = \frac{\pi}{2},$$

par suite, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

En utilisant l'égalité de Parceval, on a

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx,$$

ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Solution de l'exercice 4.0.10.

1. Comme f est paire, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n(f) = 0$.

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\, dx,$$

car la fonction $x \mapsto x^2\cos(nx)$ est paire.

En utilisant l'intégral par partie deux fois, on trouve

$$a_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

La série de Fourier associée à f est donc

$$F(f)(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

2. f est C^1 par morceaux et continue sur R donc d'aprés le Théorème de Lejeune Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement vers f sur R.

Donc en tout point x où la fonction f est continue, on a:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

En particulier pour $x = 0$,on a:

$$f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

De même pour $x = \pi$, on a:

$$f(x) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

En utilisant l'égalité de Parceval, on a:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{5},$$

ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Solution de l'exercice 4.0.11.

1. Comme f est paire, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $b_n(f) = 0$.

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos(nx)\, dx,$$

car la fonction $x \mapsto |x| \cos(nx)$ est paire. D'où

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} x \sin(nx)]_0^{\pi} \right) - \frac{2}{n\pi} \int_{0}^{\pi} \sin(nx)\, dx = -\frac{2}{n\pi} \int_{0}^{\pi} \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \left(\cos(nx)]_0^{\pi} \right) = \frac{1}{n^2\pi} \left((-1)^n - 1 \right), \end{aligned}$$

ainsi pour tout $p \in \mathbf{N}^*, a_{2p}(f) = 0$ et pour tout $p \in \mathbf{N}, a_{2p+1}(f) = -\frac{4}{(2p+1)^2\pi}$.
La série de Fourier associée à f est donc

$$F(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)x).$$

2. La fonction f est C^1 par morceaux et continue sur R donc d'après le Théorème de Lejeune Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $[-\pi, \pi[$; d'où pour tout $x \in [-\pi, \pi[$, on a

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)x).$$

En particulier pour $x = 0$, on a:

$$f(0) = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

soit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

D'après les Exercices précédents on a

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En utilisant l'égalité de Parceval, on a

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3},$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{16n^4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4},$$

alors on a

$$\frac{15}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Solution de l'exercice 4.0.12.

1. En utilisant l'intégration par partie, on a

$$a_0(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin(x)\,dx=\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}a_1(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin(x)\cos(x)\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin(2x)\,dx=-\frac{1}{4},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}b_1(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin^2(x)\,dx.\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}x(1-\cos(2x))\,dx=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

2. Pour $n\geq 2$, on a

$$
\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left[x\sin((n+1)x) + x\sin((1-n)x)\right]dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{\pi} x\sin((n+1)x)\,dx - \int_{0}^{\pi} x\sin((1-n)x)\,dx\right),
\end{aligned}
$$

en utilisant l'intégration par partie, on trouve

$$
\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\left(x\left(-\frac{1}{n+1}\cos((n+1)x) + \frac{1}{n-1}\cos((n-1)x)\right)\Big]_0^{\pi}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{0}^{\pi}\left(-\frac{1}{n+1}\cos((n+1)x) + \frac{1}{n-1}\cos((n-1)x)\right)dx}_{=0},
\end{aligned}
$$

donc

$$
a_n(f) = \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n-1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} = -\frac{(-1)^n}{n^2+1}.
$$

$$
\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left[x\cos((1-n)x) - x\cos((n+1)x)\right]dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{\pi} x\cos((n-1)x)\,dx - \int_{0}^{\pi} x\cos((n+1)x)\,dx\right),
\end{aligned}
$$

en utilisant l'intégration par partie, on trouve

$$
\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left(x\left(\frac{1}{n-1}\sin((n-1)x)-\frac{1}{n+1}\sin((n+1)x)\right)\Big]_0^{\pi}\right)}_{=0} \\
&\quad -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{n-1}\sin((n-1)x)-\frac{1}{n+1}\sin((n+1)x)\right)dx,
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
b_n(f) &= -\frac{1}{2\pi}\left(\left(-\frac{1}{(n-1)^2}\cos((1-n)x)+\frac{1}{(n+1)^2}\cos((n+1)x)\right)\Big]_0^{\pi}\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left(\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right),
\end{aligned}
$$

d'où

$$b_n(f)=\frac{2n\left((-1)^{n+1}-1\right)}{\pi\left(n^2-1^2\right)}.$$

La série de Fourier associée à f est donc

$$
\begin{aligned}
F(f)(x) &= a_0(f)+a_1(f)\cos(x)+b_1(f)\sin(x)+\sum_{n\geq 2}\left(a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx)\right) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cos(x)+\frac{\pi}{4}\sin(x)+\sum_{n\geq 2}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}\cos(nx)+\frac{2n\left((-1)^{n+1}-1\right)}{\pi\left(n^2-1^2\right)}\sin(nx)\right).
\end{aligned}
$$

3. D'aprés le Théorème de Le jeune Dirichlet, appliqué au point $x=0$, on a

$$f(0)=0=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}\Rightarrow\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}=-\frac{1}{4}.$$

Bibliographie

[1] BALAC. S. CHUPIN L. , Analyse et Algèbre: Cours de deuxième année avec exercice corrigés et illustrations avec Maple,

Collection des sciences appliquées de L'INSA de Lyon, (2008) .

[2] CAGNAC G., RAMIS E., COMMEAU J., Nouveau cours de mathématiques spéciales, Tome2, Analyse, Masson and Cie,

Paris (1965) .

[3] COTTET-EMARD F., Analyse, cours et exercices corrigées. de boeck. Bruxelles (2005) .

[4] COTTET-EMARD F., Calcul différentiel, intégrales multiples, séries de Fourier, Analyse 2, de boeck, Bruxelles. (2006)

[5] DIEUDONNE J., Elements d'Analyse 1, fondements de l'analyse moderne, Gauthier-Villars, Cahiers Scientifique, Paris (1972) .

[6] MARCO J. P., BOUMAZA H., COLLAS B., COLLION S., DELLINGER M., FAGET Z., LAZZARINI L., SCHAFFHAUSER F.,

Mathématiques L3 Analyse. collection Pearson Education. (2009) .

[7] SCHWARTZ, L., Analyse I, Théorie des ensembles et Topologie. Hermann, Collection enseignement des sciences, Paris (1991) .

[8] SCHWARTZ, L., Analyse , Topologie générale et Analyse Fonctionnelle. Hermann, Paris (1970) .

[9] SKANDALIS, G., Topologie et Analyse, Dunod, (2001) .

[10] WALTER RUDIN., Principes d'analyse mathématique. Dunod (2006) .