REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique

Polycopié de cours

Mesure et Intégration

Cours et exercices d'applications
Réalisé par :

MENAD Abdallah

Troisième année licence Mathématiques LMD

Année Universitaire 2019-2020

Table des matières

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques et Informatiques

Polycopié

Mesure et Intégration
Cours et exercices d'applications

Réalisé par :

Mr MENAD Abdallah

Année Universitaire : 2019-20120

Introduction

Ce cours à destination des étudiants de troisième année licence Mathématiques LMD comporte la matière de **Mesure et Intégration**. Il contient l'essentiel du cours avec des exemples et des exercices d'applications sont proposés avec des solutions en fin de chaque chapitre pour permettre à l'étudiants de tester ses connaissances et de se préparer aux tests et aux examens finaux.

Ce polycopié est inspiré du cours qui a été fait par Mr Medeghri Ahmed et Bouziani Fatima durant les années 2012-2015 au sein du département de mathématiques à l'université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem.

D'après ma petite expérience, lors de l'enseignement de cette matière durant quelques années, j'ai décidé de préparer ce polycopié qui contient toutes les notions fondamentales liées à cette matière.

Notons que le contenu de ce polycopié est exactement le même proposé dans l'offre de formation officiel suivant le cannevas donné par le ministère appliqué actuellement dans tous les départements des Universitée Algériennes.

Nous supposons que le lecteur a une bonne connaissances de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, les premiers principes de la théorie des ensembles et le concept d'intégration au sens de Riemann.

Comme ce polycopié est un cours, nous avons pris le parti de démontrer presque tous les résultats d'une façon complète, c'est-à-dire sans renvoyer au cours de la preuve à un résultat bien connu ou en admettant un résultat auxiliaire difficile. Nous avons d'ailleurs inclus un nombre considérable d'exercices résolus tels qu'ils ont été testés dans le cadre de travaux dirigés, ou ont fait l'objet de devoirs de reflexion ou de contôle des connaissances. Il va de soi que le lecteur aura intérêt a essayer de résoudre le problème sans lire la solution au préalable. Les chapitres de ce polycopié se terminent par des exercices corrigés puisés dans les fonds des séries de T.D de l'équipe pédagogique du département de Mathématiques de l'Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem.

L'originalité de ce polycopié réside dans son contenu, inspiré sans vergogne de la litérature existante.

Venons-en à une description plus précise de ce que l'on trouvera dans ce polycopié.

Dans le **premier chapitre**, nous donnerons rapidement les propriétés utiles concernant les opérations sur les ensembles, la dénombrabilité, les limites d'ensembles et les fonctions caractéristiques d'ensembles. Nous présentons, par la suite la notion de tribu particulièrement la tribu borélienne. Nous offrirons une étude détaillée concernant la mesure positive, la mesure extérieure et en particulier la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens.

Le **second chapitre** contient les propriétés générales des fonctions mesurables notament les applications numériques mesurables qui seront désignées par $\mathcal{L}^0$, nous étudierons la convergence presque partout et la convergence en mesure.

Au **troisième chapitre**, nous aborderons et traiterons la notion d'intégration par rapport à une mesure positive. En premier lieu, nous ferons l'étude pour les fonctions numériques mesurables et nous donnerons le Théorème de convergence monotone (ou de Beppo-Levi) et ses conséquences. Nous étudierons ensuite l'intégrale d'une fonction numérique mesurable et nous finirons par une comparisation de l'intégrale de Lebesgue avec l'intégrale de Riemann. Enfin, nous donnerons un aperçu général sur la construction de l'espace L^1 et le théorème de convergence dominée dans cet espace.

Nous consacrons dans **le quatrième chapitre** à l'étude de la mesure produit, notamment les Théorèmes de Fubini et quelques applications.

Enfin vu les erreurs répétées souvent dans les copies des examens de cette matière, j'ai constaté que la majorité des étudiants ne donnent pas l'importance au cours et ils font des exercices en se basant directement sur les corrigés. Je conseille alors les étudiants de lire d'abord le cours attentivement, de faire tous les exemples cités après chaque résultat donné et enfin de passer à résoudre les exercices proposés sans retourner au corrigé. Les solutions des exercices sont utiles uniquement pour tester le niveau des éfforts fournis par l'étudiant.

Finalement, j'espère que ce document pourra aider les étudiants qui veulent maîtriser cette partie mathématiques.

Comme toute entreprise humaine n'est infaillible, nous tenons à la fin de cette petite introduction, à solliciter la haute bienveillance de nos lecteurs de nous faire parvenir toutes leurs remarques via notre adresse E-mail : abdallah_menad@yahoo.com

Chapitre 1

Tribus et mesures

1.1 Rappels sur la théorie des ensembles

Dans toute la suite, on considère un ensemble de base E. On rappelle que $\mathcal{P}(E)$ désigne la famille de tous les sous-ensembles de E. Pour tout sous-ensembles A et B de E on a

$$A^c = \{x \in E : x \notin A\},$$

le complémentaire de A dans E.

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\} \\ &= A \cap B^c = A \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

$$A \Delta B = B \Delta A = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1.1.1 Dénombrabilité

Il est essentiel, pour tou ce qui concerne la théorie de la mesure de savoir distinguer ce qui est dénombrable de ce qui ne l'est pas.

Définition 1.1 *L'ensemble X est dit **dénombrable** s'il existe une bijection entre X et $\mathbb{N}$. En d'autre termes, on peut écrire*

$$X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_0, x_1, ..., x_n, ...\},$$

c'est-à-dire tout ensemble dénombrable pouvant être indexé par $\mathbb{N}$ (ou si on peut énumérer tous ses éléments).

Remarque 1.1
1. *Tout ensemble fini est dénombrable.*
2. *$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sont dénombrables mais $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*
3. *Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.*
4. *Si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_n est dénombrable, alors $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est dénombrable.*
5. *La propriété 4) reste vraie si l'on remplace la suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$ par la famille dénombrable $(A_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire avec I dénombrable.*

6. *Tout produit d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

En général, les familles dénombrables ou les propriétes qui s'expriment en termes de dénombrabilité sont notées avec le préfixe σ pour témoigner de leur caractère dénombrable (exemples : $\sigma-$algèbre, $\sigma-$additivité).

1.1.2 Limites d'ensembles

Définition 1.2 *Soit E un ensemble non vide et $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de parties de E, on définit la limite superieure et inferieure de la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ par*

$$\overline{\lim} A_n = \lim_n \sup A_n := \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k.$$

$$\underline{\lim} A_n = \lim_n \inf A_n := \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{k\geqslant n} A_k = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k.$$

Remarque 1.2 *Notons que*

$$\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n$$

En effet : on a

$$\bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset A_k,\ \forall k \geqslant n,$$

donc

$$\bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k = \overline{\lim} A_n,$$

d'où

$$\bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset \overline{\lim} A_n.$$

Proposition 1.1 *(Suite convergente d'ensembles)*

1. *Si $(A_n)_n$ est croissante i.e*

$$A_n \subset A_{n+1}, \forall n \geqslant 1,$$

alors

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

2. *Si $(A_n)_n$ est décroissante i.e*

$$A_{n+1} \subset A_n, \forall n \geqslant 1,$$

alors

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Dans les deux cas on dira que la suite $(A_n)_n$ est convergente.

Pour les suites réelles, rappelons que si $(a_n)_n$ est une suite dans $\mathbb{R}$, on définit

$$\limsup_n a_n = \inf_{n\geqslant 1}\sup_{k\geqslant n} a_k.$$

$$\liminf_n a_n = \sup_{n\geqslant 1}\inf_{k\geqslant n} a_k.$$

Ces deux nombres existent toujours dans $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

De même si $(f_n)_n$ est une suite de fonction d'un ensemble E dans $\mathbb{R}$, $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ comme fonctions de E dans $\overline{\mathbb{R}}$

$$\left(\limsup_n f_n\right)(x) = \inf_{n\geqslant 1}\sup_{k\geqslant n} f_k(x).$$

$$\left(\liminf_n f_n\right)(x) = \sup_{n\geqslant 1}\inf_{k\geqslant n} f_k(x).$$

1.2 Fonctions caractéristiques d'ensembles

Rappelons que la fonction caractéristique (ou indicatrice) χ_A d'une partie A de X est la fonction $\chi_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in A \\ 0, \text{ si } x \notin A. \end{cases}$$

Cette fonction ne prend donc que deux valeurs 1 ou 0 selon qu'elle est évaluée sur A ou non.

La fonction caractéristique vérifie les propriétés suivantes

Proposition 1.2 *Soient X un ensemble non vide et $A,B \subset X$*

1. *Si $A \cap B = \emptyset$ alors $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$.*
2. *$\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$ et si $B \subset A$ alors $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_B$.*
3. *Si $(A_n)_n$ une suite de parties de X on a alors*

$$\chi_{\underline{\lim} A_n} = \liminf_n \chi_{A_n} \text{ et } \chi_{\overline{\lim} A_n} = \limsup_n \chi_{A_n}.$$

De plus si les A_n sont disjoints deux à deux, alors

$$\chi_{\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{A_n}$$

1.3 Algèbres et tribus

Définition 1.3 *(algèbre de Boole) : Soient E un ensemble quelconque non vide et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E.*

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ est une ***algèbre*** *(de Boole) si pour tout $A, B \in \mathcal{A}$:*

1. *$\{\emptyset, X\} \in \mathcal{A}$*

2. $A^c = E \setminus A \in \mathcal{A}$

3. $A \cap B \in \mathcal{A}$

4. $A \cup B \in \mathcal{A}$

C'est une ***semi-algèbre*** *(notée δ) si les conditions 1) et 3) sont vérifiées et que le complémentaire d'un élément de δ est réunion finie d'éléments de δ.*

Remarque 1.3 *L'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par une semi-algèbre est constituée des réunions finies de parties de δ*

Définition 1.4 *(Tribu ou $\sigma-$algèbre) : Soient E un ensemble et $T \subset \mathcal{P}(E)$ un ensemble des parties de E. T est une tribu ou $\sigma-$algèbre sur E si :*

1. $E \in T$
2. T est stable par le passage au complémentaire

$$\forall A \in T,\ A^c \in T.$$

3. T est stable par la réunion dénombrable

$$\forall \left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset T,\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T.$$

1. $T = \{\emptyset, E\}$ Tribu grossière.
2. $T = P(E)$ Tribu discrète.

Remarque 1.4 $\varnothing \in T$, $\varnothing = E^c$

T est stable par intersection dénombrable

$$\begin{aligned}\forall \left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}} &\subset T,\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T. \\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n &= \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c.\end{aligned}$$

En général, la tribu est stable par n'importe quelle suite dénombrable d'opérations sur les ensembles.

Remarque 1.5 *Si T est une tribu sur E alors*

i) *$E \in T$ car $E = \emptyset^C$*

ii) *Si $\left(A_n\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite de T alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$.*

iii) *Si $A, B \in T$ alors $A \setminus B$, $A\Delta B \in T$ car*

$$A \setminus B = A \cap B^c \in T \text{ et } A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in T.$$

Proposition 1.3 *T est une tribus sur E si et seulement si*

1. $\emptyset \in T$.

2. T *est stable par complémentation et intersection finie.*
3. *Si* $(A_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite de* T *disjoints deux à deux (i.e* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$*), alors*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T.$$

Preuve. *La condition nécessaire est évidente. Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit de montrer que* T *est stable par réunion dénombrable, soit donc* $(A_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite de* T *et posons*

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_n = A_n \cap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i\right)^c, \ n \geqslant 2, \end{cases}$$

d'après l'hypothèse (2) de la proposition on a $B_n \in T$ *pour tout* $n \geqslant 1$*. Pour tout* $n \neq m$*, si* $n > m$ *on a*

$$B_m \cap B_n \subset A_m \cap B_n = A_m \cap \left(A_n \cap A_1^c \cap ... \cap A_m^c \cap ... \cap A_{n-1}^c\right) = \emptyset,$$

d'où

$$B_m \cap B_n = \emptyset, \ \forall n \neq m,$$

d'autre part, il est clair que

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Pour l'inclusion inverse, si $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$*, il existe* $n \geqslant 1$ *tel que* $x \in A_n$*. On pose* r *la plus petite* $n \geqslant 1$ *qui vérifie* $x \in A_n$ *i.e*

$$r = \min\{n \in \mathbb{N}, x \in A_n\},$$

alors

$$x \in A_r, x \notin A_{r-1}, x \notin A_{r-2}, ... \text{ et } x \notin A_1,$$

ce qui donne $x \in B_r$*, alors*

$$x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

Nous avons montré que les B_n *sont disjoints deux à deux et*

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n,$$

donc d'après (3) de la proposition, on a

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in T.$$

■

1.3.1 Tribu engendrée

Proposition 1.4 *Soit* $(T_i)_i$ *une famille de tribus sur l'ensemble* E. *Alors* $\bigcap\limits_{i\in I} T_i$ *est une tribu sur* E.

Preuve. *On a* $E \in T_i$, $\forall i \in I$ *donc* $E \in \bigcap\limits_{i\in I} T_i$.*Maintenant soit*

$$\begin{aligned} A &\in \bigcap_{i\in I} T_i \Longrightarrow A \in T_i, \forall i \in I \\ &\Longrightarrow A^c \in T_i, \forall i \in I \text{ (car } T_i \text{ Tribu)} \\ &\Longrightarrow A^c \in \bigcap_{i\in I} T_i. \end{aligned}$$

Soit

$$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcap_{i\in I} T_i,$$

alors

$$\begin{aligned} (A_n)_{n\in\mathbb{N}} &\subset \bigcap_{i\in I} T_i \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ A_n \in \bigcap_{i\in I} T_i \\ &\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in I,\ A_n \in T_i \\ &\Longrightarrow \forall i \in I,\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T_i \\ &\Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{i\in I} T_i. \end{aligned}$$

Donc $\bigcap\limits_{i\in I} T_i$ *est une Tribu sur* E. ■

Remarque 1.6 *La réunion d'une famille de tribus n'est pas forcément une tribu.*

Exemple 1.1 *Soit*

$$E = \{a, b, c\}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}, E\} \\ T_2 &= \{\varnothing, \{b\}, \{a, c\}, E\} \end{aligned}$$

T_1 *et* T_2 *sont des tribus, mais*

$$T_1 \cup T_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$$

ne l'est pas car

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin T_1 \cup T_2.$$

Remarque 1.7 *Si* $A \in T$ *et* $B \subset A \nRightarrow B \in T$

$$\{b, c\} \in T_1 \text{ mais } \{b\} \subset \{b, c\}$$

n'appartient pas à T_1.

Définition 1.5 *(Tribu engendrée) Soient E un ensemble et C un sous ensemble de $P(E)$. On appelle* ***tribu engendrée*** *par C notée $\sigma(C)$, la plus petite tribu contenant C. Donc c'est la tribu intersection de toutes les tribus contenant C.*

$$\sigma(C) = \cap T, \ T \text{ tribu}, \ C \subset T$$

Exemple 1.2 1. $\sigma(\{\varnothing\}) = \sigma(E) = \{E, \varnothing\}$.

2. *Soit $A \in P(E)$ telle que $A \neq E$ et $A \neq \varnothing$, alors*
$$\sigma(A) = \{\varnothing, E, A, A^c\}.$$
3. $E = \mathbb{N}$, $A = \{\{n\}, n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(A) = P(E)$.

1.3.2 Tribu image directe, tribu image réciproque

Theorème 1.1 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Montrer que*

1. *Si T est une Tribu sur E alors*
$$T' = \left\{B \subset F : f^{-1}(B) \in T\right\},$$
est une Tribu sur F. (Tribu image directe).
2. *Si T' est une Tribu sur F alors*
$$f^{-1}(T') = \left\{f^{-1}(B) : B \in T'\right\},$$
est une Tribu sur E. (Tribu image réciproque).

Preuve. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application ■

1. On a
$$T' = \left\{B \subset F : f^{-1}(B) \in T\right\},$$
et
$$F \subset F \text{ et } f^{-1}(F) = E \in T \ ,$$
donc
$$F \in T'.$$
-Soit
$$B \in T' \Longrightarrow B \subset F \text{ et } f^{-1}(B) \in T,$$
et on a
$$B^c \subset F,$$
d'autre part, on a
$$f^{-1}(B^c) = \ \left(f^{-1}(B)\right)^c \in T \text{ (car } T \text{ stable par complémentaire)},$$
donc
$$B^c \in T'.$$

Maintenant soit

$$\begin{aligned}(B_n)_{n\in\mathbb{N}} &\subset T' \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, B_n \in T'\\ &\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, B_n \subset F \text{ et } f^{-1}(B_n) \in T,\end{aligned}$$

donc

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset F \text{ et } f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in T,$$

(car T stable par $\cup$ dénombrable), donc

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in T',$$

d'où le résultat.

2. On a

$$f^{-1}(T') = \left\{f^{-1}(B) : B \in T'\right\},$$

est une Tribu sur E

a)

$$E = f^{-1}(F) \text{ et } F \in T' \Longrightarrow E \in f^{-1}(T').$$

b) Soit

$$\begin{aligned}A &\in f^{-1}(T') \Longrightarrow A = f^{-1}(B),\ B \in T'\\ &\Longrightarrow A^c = \left(f^{-1}(B)\right)^c = f^{-1}(B^c),\end{aligned}$$

et on a

$$B^c \in T'$$

donc

$$A^c \in f^{-1}(T').$$

c) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f^{-1}(T')$, alors

$$\begin{aligned}(A_n)_{n\in\mathbb{N}} &\subset f^{-1}(T') \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, A_n \in f^{-1}(T')\\ &\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \exists B_n \in T' : A_n = f^{-1}(B_n),\end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n),\ \text{avec} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in T',$$

donc

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in f^{-1}(T').$$

1.3.3 La tribu borélienne ou tribu de Borel

Définition 1.6 *(E, τ) est dit espace topologique si τ est une famille de partie de E appelées ouverts contenant $\varnothing$ et E, stable par union quelconque et stable par intersection finie.*

Exemple 1.3 *$(E, P(E))$ est un espace topologique.*

Définition 1.7 *(Tribu borélienne) Soit (E, τ) un espace topologique. On appelle tribu borélienne ou tribu de Borel, la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de τ. Cette tribu sera notée $\mathcal{B}(E)$. Les éléments de $\mathcal{B}(E)$ sont appelés boréliens de E.*

Exemple 1.4 *Si $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(C)$, où C est l'une quelconque des familles d'intervalles,*

$$\{]a, b[\,, a, b \in \mathbb{R}, a < b\}\,,\ \{]-\infty, a[\,, a \in \mathbb{R},\}$$
$$\{]a, +\infty[\,, a \in \mathbb{R}\}\,.$$

Remarque 1.8 *$\mathcal{B}(E)$ est aussi la tribu engendrée par l'ensemble des fermés de E. Les fermés sont les complémentaires des ouverts.*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbb{R}) &= \sigma(C) \text{ avec } C = \{[a, b]\,, a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \\ &\quad \text{ou } \{]-\infty, a]\,, a \in \mathbb{R},\} \text{ ou } \{[a, +\infty[\,, a \in \mathbb{R},\}\,.\end{aligned}$$

Proposition 1.5 *Soient T une tribu et $C \subset P(E)$. Alors*

$$C \subset T = \sigma(C) \subset T.$$

Proposition 1.6 *La tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$ est aussi engendrée par les fermés de l'espace topologique E.*
Preuve. *Soit $\mathcal{F}$ la famille de tous les fermés de E. Comme les tribus sont stables par passage au complémentaire et que les fermés sont les complémentaires des ouverts on a*

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(E),$$

et alors

$$\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{B}(E).$$

Inversement, soit $\theta \in \tau$ un ouvert de E, alors

$$\theta^c \in \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F}),$$

donc $\theta \in \sigma(\mathcal{F})$. Ce qui montre que $\tau \subset \sigma(\mathcal{F})$ et puisque $\mathcal{B}(E) = \sigma(\tau)$ on a $\mathcal{B}(E) \subset \sigma(\mathcal{F})$. ■

Lemme 1.1 *Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles $]a, b[$.*
Preuve. *Soit θ un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Posons la partie $A \subset \mathbb{Q}^2$ définie par*

$$A = \left\{(p, q) \in \mathbb{Q}^2, p < q :]p, q[\subset \theta\right\}.$$

Si $x \in \theta$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[\subset \theta$. Par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ on peut prendre $p_x, q_x \in \mathbb{Q}$ vérifiant

$$x - \varepsilon_x \leqslant p_x \leqslant x \text{ et } x \leqslant q_x \leqslant x + \varepsilon_x,$$

il résulte que
$$x \in \left]p_x, q_x\right[\subset \left]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x\right[\subset \theta,$$
d'où $p_x, q_x \in A$, *donc*
$$x \in \left]p_x, q_x\right[\subset \bigcup_{(p,q)\in A} \left]p, q\right[,$$
c'est-à-dire
$$\theta \subset \bigcup_{(p,q)\in A} \left]p, q\right[.$$
Inversement, si
$$x \in \bigcup_{(p,q)\in A} \left]p, q\right[,$$
il existe $p_x, q_x \in A$ *avec* $x \in \left]p_x, q_x\right[\subset \theta$ *d'où* $x \in \theta$. *On en déduit*
$$\theta = \bigcup_{(p,q)\in A} \left]p, q\right[.$$

Cette réunion est dénombrable car la partie $A \subset \mathbb{Q}^2$ *est dénombrable.* ■

Theorème 1.2 *(La tribu* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*) La tribu* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est engendrée par les intervalles* $\left]a, +\infty\right[$ *pour* $a \in \mathbb{R}$.
Preuve. *Soient* $\mathcal{S} = \{\left]a, +\infty\right[, a \in \mathbb{R}\}$ *la famille de toutes les intervalles* $\left]a, +\infty\right[$ *et* τ *l'ensembles des ouverts de* $\mathbb{R}$. *Il est clair que* $\mathcal{S} \subset \tau$ *alors* $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *car par définition on a* $\sigma(\tau) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Maintenant, montrons que* $\tau \subset \sigma(\mathcal{S})$, *soit* $\theta \in \tau$ *alors d'après le lemme précédent,* θ *est une réunion dénombrable d'intervalles de la forme* $\left]a, b\right[$ *d'où* $\theta = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]a_n, b_n\right[$.
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$ *on a*
$$\left]a, b\right[= \left]-\infty, b\right[\cap \left]a, +\infty\right[\text{ et } \left[b, +\infty\right[= \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]b - \frac{1}{n}, +\infty\right[.$$
Pour tout $n \geqslant 1$ *on a*
$$\left]b - \frac{1}{n}, +\infty\right[\in \mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S}),$$
donc la stabilité par intersection garantit que $\left[b, +\infty\right[\in \sigma(\mathcal{S})$ *et par complémentaire*
$$\left]-\infty, b\right[= \left(\left[b, +\infty\right[\right)^c \in \sigma(\mathcal{S}),$$
et
$$\left]a, +\infty\right[\in \mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S}),$$
ce qui donne $\left]a, b\right[\in \sigma(\mathcal{S})$. *Alors*
$$\theta = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]a_n, b_n\right[\in \sigma(\mathcal{S}).$$

Finalement on obtient l'inclusion $\tau \subset \sigma(\mathcal{S})$ *ce qui implique que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{S})$. ■

1.4 Mesures positives

Définition 1.8 *"Espace mesurable-Partie mesurable" Soient E un ensemble et T une tribu sur E. Le couple (E,T) est appelé espace mesurable. Les parties de E qui sont des éléments de T s'appellent les parties mesurablesde E.*

Proposition 1.7 *Soient E un ensemble, (E',T') est un espace mesurable et $f : E \longrightarrow E'$ une application.*

$$T = f^{-1}(T') = \left\{f^{-1}(B),\ B \in T'\right\}$$

est une tribu sur E appelée tribu image réceproque de T' par f.

Proposition 1.8 *Soient (E,T) est un espace mesurable E un ensemble, et $f : E \longrightarrow E'$ une application,*

$$T' = \left\{B \subset E' : f^{-1}(B) \in T\right\}$$

est une tribu sur E appelée tribu image directe de T par f.

Définition 1.9 *Soit (E,T) un espace mesurable, une mesure positive sur (E,T) (ou plus simplement sur E) est une application d'ensembles $\mu : T \longrightarrow [0,+\infty]$ vérifiant les propriétée suivantes*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) *Pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 1} \subset T$ de parties mesurables deux-à-deux disjointes, on a*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

On dit que (E,T,μ) est un espace mesuré.

Remarque 1.9

1. *Dans la définition précédente, la condition (i) peut être remplacée par la condition*

$$\exists A \in T : \mu(A) < \infty,\ \text{(i.e } \mu(A) \text{ est finie).}$$

2. *La $\sigma-$additivité (condition (ii)) contient, en particulier la propriété d'additivité simple pour tout $n \geqslant 1$, si les n ensembles mesurables $A_1, ..., A_n$ sont deux-à-deux disjointes, alors*

$$\mu(A_1 \cup ... \cup A_n) = \mu(A_1) + ... + \mu(A_n),$$

il suffit de prendre $A_{n+1} = A_{n+2} = ... = \emptyset$.

Définition 1.10 *"Mesure" Soit (E,T) est un espace mesurable. On appelle mesure sur (E,T) une application $m : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ vérifiant*

1. *$m(\varnothing) = 0$.*
2. *m est $\sigma-$additive, c'est à dire pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ de parties disjointes deux à deux ($A_n \cap A_m = \varnothing$ pour $n \neq m$), on a*

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n).$$

La mesure m est dite finie si $m(E) < +\infty$. La mesure m est une probabilité sur E si $m(E) = 1$.

Définition 1.11 *Soient E un ensemble et T une tribu sur E. On appelle probabilité une mesure P sur T telle que $P(E) = 1$. On dit que (E, T, P) est un espace probabilité et les éléments de T sont appelés les évènements.*

Exemple 1.5 *1. **Masse de Dirac** : Soient E un ensemble, T est une tribu sur E et $a \in E$. On définit sur T l'application δ_a pour $A \in T$ par*

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 0, \text{ si } a \notin A \\ 1, \text{ si } a \in A, \end{cases}$$

vérifions que δ_a est une mesure sur E. On a

(a) $\delta_a(\varnothing) = 0$, $a \notin \varnothing$.

(b) *Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $A_n \cap A_m = \varnothing$ pour $n \neq m$.*

Montrons que $\delta_a(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_a(A_n)$.

On ditingue deux cas

1) *Si $a \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, on a $\delta_a(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$. De plus*

$$a \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longrightarrow \exists! n_0 \in \mathbb{N} : a \in A_{n_0}, \ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont disjointes,}$$

donc

$$\delta_a(A_n) = 0, \ \forall n \neq n_0,$$

d'où

$$\delta_a(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1 = \delta_a(A_{n_0}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_a(A_n).$$

2) *Si $a \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, on a $\delta_a(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$. De plus*

$$a \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a \notin A_n, \ \delta_a(A_n) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

donc

$$\delta_a(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_a(A_n) = 0.$$

De 1) et 2), δ_a est une mesure sur E et c'est une probabilité, $\delta_a(E) = 1$.

*1. 2. **Mesure de Comptage** : Soient (E, T) est un espace mesurable et m l'application définie par*

$$m(A) = \begin{cases} card(A), \text{ si } A \text{ est finie} \\ +\infty, \text{ si non,} \end{cases}$$

on peut vérifier que m est bien une mesure sur E.

Définition 1.12 *(Espace mesuré) On appelle espace mesuré tout triplet (E, T, m) où (E, T) est un espace mesurable et m une mesure sur (E, T).*

Définition 1.13 *"mesure $\sigma-$finie" Soit (E, T, m) un espace mesuré.On dit que m est $\sigma-$finie si*

$$\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T \text{ telle que } E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, m(A_n) < +\infty.$$

Proposition 1.9 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré. La mesure μ possède les propriétés suivantes*

1. ***La monotonie :*** *Si $A, B \in T$ avec $A \subset B$ alors $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.*
2. *Si $A, B \in T$ avec $A \subset B$ et $\mu(A) < \infty$ alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*
3. ***La sous-additivité :*** *Pour toute suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$ dans T on a*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Preuve.

1. *Si $A, B \in T$ avec $A \subset B$ alors $B = A \cup (B \setminus A)$, puisque $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, par l'additivité de la mesure on a*
$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geqslant \mu(A).$$
2. *Si de plus $\mu(A) < \infty$ alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*
3. *Apartir de la suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$, on construit la suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$ définie par*
$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_n = A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)^c, \ n \geqslant 2, \end{cases}$$
on a $B_n \subset A_n$ pour $n \geqslant 1$, les B_n sont disjoints deux à deux dans T et $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$. La monotonie de la mesure donne $\mu(B_n) \leqslant \mu(A_n)$ pour tout $n \geqslant 1$. D'autre part, d'après la $\sigma-$additivité de la mesure on a
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

■

Définition 1.14 *On dit qu'une mesure positive μ est finie si elle est à valeurs finies c–à-d*

$$\mu(A) < \infty \text{ pour tout } A \in T.$$

Autrement dit, $\mu(E) < \infty$.

Définition 1.15 *Soit μ une mesure sur (E, T). On dit qu'elle est $\sigma-$finie s'il existe une suite de parties mesurables $(E_n)_{n \geqslant 1}$ telle que $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ et $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \geqslant 1$.*

Exemple 1.6

1. *La mesure de Dirac δ_x est finie car $\delta_x(E) = 1 < \infty$*
2. *La mesure de comptage sur E est :*

   i) *finie si et seulement si E est fini*

   ii) *$\sigma-$finie si et seulement si E est dénombrable.*

1.4.1 Propriétés des mesures, mesures extérieures, mesures complètes

La propriété de la continuité de la mesure sera à la base d'un des théorèmes les plus importants et l'un des plus utilisés pour l'intégrale de Lebesgue et le théorème de la convergence monotone.

Theorème 1.3 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré, alors*

1. ***La continuité croissante :*** *Si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante de parties mesurables, on a*
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n).$$
2. ***La continuité décroissante :*** *Si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante de parties mesurables avec*
$$\mu(A_1) < \infty,$$
alors, on a
$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n).$$

Preuve.

1. *Posons*
$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_n = A_n \diagdown A_{n-1}, \ n \geqslant 2, \end{cases}$$
les ensembles B_n sont mesurables et $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ pour tout $n \geqslant 1$, ce qui implique que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. De plus, les B_n, $n \geqslant 1$ sont deux à deux disjoints, donc
$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_k) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$
2. *Pour tout $n \geqslant 1$ posons $B_n = A_1 \diagdown A_n = A_1 \cap A_n^c$. Comme la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, en utilisant 1) on obtient*
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(B_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n),$$
d'autre part on a
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = A_1 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c\right) = A_1 \diagdown \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

il résulte que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right).$$

En fin, on peut simplifier par $\mu(A_1)$ puisque cette dernière quantité est finie,

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n).$$

■

Remarque 1.10 *La condition $\mu(A_1) < \infty$ dans 2) du théorème précédent est nécessaire comme le montre l'exemple suivant*

Exemple 1.7 *Considérons l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), card)$ et la suite des parties mesurables $(A_n)_{n\geqslant 1}$ telle que*

$$A_n = \{n, n+1, n+2, ...\},$$

montrons que la condition $\mu(A_1) < \infty$ est nécessaire pour la continuité décroissante de la mesure

Preuve. *La suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante*

$$A_{n+1} = \{n+1, n+2, n+3, ...\} \subset A_n = \{n, n+1, n+2, ...\},$$

et

$$\mu(A_1) = card(\{1, 2, 3, ...\}) = +\infty.$$

Si $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ alors $x \geqslant n$, pour tout $n \geqslant 1$. D'où $\mathbb{N}$ est borné, ce qui est une contradiction. Donc

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \emptyset.$$

D'autre part

$$0 = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \neq \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} card(\{n, n+1, n+2, ...\}) = +\infty.$$

■

1.4.2 Esemble négligeable et mesure complètes

Définition 1.16 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré et $N \subset E$. L'ensemble N est dit négligeable dans (E, T, μ) s'il existe $A \in T$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$*

Remarque 1.11 *Si* $(A_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite des parties négligeables dans* (E, T, μ) *alors* $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ *est négligeable.*

En effet : pour tout $n \geqslant 1$ *il existe* $B_n \in T$ *tel que* $A_n \subset B_n$ *et* $\mu(B_n) = 0$.

Or

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \text{ et } \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n) = 0,$$

donc $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ *est négligeable.*

Définition 1.17 *Un espace mesuré* (E, T, μ) *est dit complet si toute partie négligeable est mesurable (et donc de mesure nulle). Dans ce cas on dit que la mesure* μ *est complète.*

1.4.3 Mesures extérieurs

Définition 1.18 *Soit* X *un ensemble quelconque. On appelle mesure extérieure sur* X *une application* $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ *possèdant les propriétés suivantes*

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. *Si* $A \subset B \subset X$ *alors* $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.
3. *Pour toute suite* $(A_n)_n$ *de parties de* X *on a*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n).$$

Remarque 1.12 *Il est clair que toute mesure positive sur* $(X, \mathcal{P}(X))$ *est une mesure extérieure sur* X*, mais la réceproque n'est pas vraie en générale, comme le montre l'exemple suivant*

Exemple 1.8 *Soit* X *un ensemble non vide. L'application* $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \{0, 1\}$ *définie par*

$$\begin{cases} \mu^*(\emptyset) = 0 \\ \mu^*(A) = 1, \text{ si } A \neq \emptyset, \end{cases}$$

est une mesure extérieure sur X*.De plus si* $card(X) > 1$*, l'application* μ^* *n'est pas une mesure positive sur* $(X, \mathcal{P}(X))$.

Preuve. *Soit* $A, B \in \mathcal{P}(X)$ *avec* $A \subset B$

i) *Si* $A = \emptyset$*, alors* $\mu^*(A) = 0 \leqslant \mu^*(B)$

ii) *Si* $A \neq \emptyset$ *alors* $B \neq \emptyset$ *et donc* $\mu^*(A) = 1 = \mu^*(B)$

Soit maintenant $(A_n)_n$ *une suite de parties de* X*.Si tous les* A_n *sont vides on a*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \mu^*(\emptyset) = 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n).$$

Pour le contraire, s'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $A_j \neq \emptyset$ on a $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \neq \emptyset$ et alors

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 1 = \mu^*(A_j) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n),$$

ce qui signifie que μ^* est une mesure exterieure sur X.

Du fait que card$(X) > 1$, on peut choisir $a, b \in X$ avec $a \neq b$. On pose $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. Dans ce cas μ^* n'est pas additive car

$$\mu^*(A \cup B) = 1 \neq \mu^*(A) + \mu^*(B) = 2,$$

alors μ^* n'est pas une mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$. ■

Proposition 1.10 *Toute mesure extérieure additive sur X est une mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$.*

Preuve. *On vérifie la $\sigma-$additivité. Soit $(A_n)_n$ une suite de $\mathcal{P}(X)$ disjoints deux à deux. Tout d'abord remarquons que $\bigcup_{n=1}^{p} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ pour tout $p \geqslant 1$. D'après l'hypothèse de l'additivité et 2. de la définition précédente ona*

$$\sum_{n=1}^{p} \mu^*(A_n) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{p} A_n\right) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right),$$

et par le passage à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$ on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right),$$

cette dernière inégalité et 3) de la définition précédente donnent la $\sigma-$additivité de μ^*. ■

Définition 1.19 *Soit X un ensemble non vide et soit μ^* une mesure extérieure sur X. Une partie E de X est dite μ^*-mesurable si pour tout $A \subset X$ on a*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

On dit aussi que E est mesurable au sens de Carathéodory (par rapport à μ^*). On note $\mathcal{M}(\mu^*)$ la famille des parties μ^*-mesurable de X.

Remarque 1.13

1. *La mesurabilité de E ne fait pas intervenir $\mu^*(E)$ mais $\mu^*(A)$ où A est appelée ensemble test.*
2. *Pour tout $A \subset X$ on peut écrire*

$$A = A \cap (E \cup E^c) = (A \cap E) \cup (A \cap E^c),$$

par la sous-additivité de la mesure extérieure (3 dans la définition 1.19) on atoujours

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c),$$

alors pour montrer qu'une partie $E \subset X$ est μ^*-mesurable, il suffit de montrer que

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c),$$

pour tout $A \subset X$.

Exemple 1.9 *Soit X un ensemble non vide*

1. *X et $\emptyset$ sont μ^*-mesurable pour toute mesure extérieure.*
2. *Si μ^* est une mesure extérieure sur X et $E \subset X$ tel que $\mu^*(E) = 0$, alors E est μ^*-mesurable.*

Preuve. *2) Il suffit de montrer que*

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c),$$

est vrai pour tout $A \subset X$. D'après les inclusions

$$(A \cap E) \subset E \text{ et } (A \cap E^c) \cap A,$$

on a

$$\mu^*(A \cap E) \leqslant \mu^*(E) = 0 \text{ et } \mu^*(A \cap E^c) \leqslant \mu^*(A),$$

ce qui implique que

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A \cap E^c) \leqslant \mu^*(A).$$

■

Theorème 1.4 *Soit μ^* est une mesure extérieure sur un ensemble non vide X. Alors $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une tribu sur X et la restriction de μ^* à $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une mesure.*
Preuve. *$\emptyset$, $X \in \mathcal{M}(\mu^*)$, par l'exemple précédent. De façon immédiate, à partir de l'équation*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c),$$

on a $E \in \mathcal{M}(\mu^*)$ si et seulement si $E \in \mathcal{M}(\mu^*)^c$. Il reste donc à voir que $\mathcal{M}(\mu^*)$ est stable par réunion dénombrable. On commence par l'établir pour une réunion finie. Soient $E_1, E_2 \in \mathcal{M}(\mu^*)$, pour tout $A \subset X$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c), \tag{1.1}$$

on teste la μ^*-mesurabilité de E_2 par l'ensemble $A \cap E_1^c$

$$\mu^*(A \cap E_1^c) = \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c), \tag{1.2}$$

en remplaçant 1.2 dans 1.1 on obtient

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \\ &\geqslant \mu^*[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)] + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c), \end{aligned}$$

mais

$$(A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2) = A \cap [E_1 \cup (E_2 \diagdown E_1)] = A \cap (E_1 \cup E_2),$$

et aussi

$$A \cap E_1^c \cap E_2^c = A \cap (E_1 \cup E_2)^c,$$

on obtient donc

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*[A \cap (E_1 \cup E_2)] + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c),$$

d'où

$$E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}(\mu^*).$$

Pour terminer la preuve de que $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une tribu, montrons la stabilité par rapport à la réunion dénombrable. On considère une famille $(E_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{M}(\mu^*)$ deux à deux disjoints (si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{M}(\mu^*)$, on peut toujour écrire $U_n A_n = U_n E_n$, avec les éléments E_n deux à deux disjoints. Posons $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_n$ pour tout $n \geqslant 1$et on montre par récurrence sur n que pour toute partie $A \subset X$ on a

$$\mu^*(A \cap F_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k), \tag{1.3}$$

la propriété est vraie pour $n = 1$ et si l'on suppose qu'elle est vraie pour un rang n, et puisque $F_n \in \mathcal{M}(\mu^*)$ est une réunion finie des éléments dans $\mathcal{M}(\mu^*)$, on teste sa mesurabilité par $A \cap F_{n+1}$

$$\mu^*(A \cap F_{n+1}) = \mu^*(A \cap F_{n+1} \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_{n+1} \cap F_n^c), \tag{1.4}$$

d'autre part le fait que

$$F_{n+1} \cap F_n = F_n \text{ et } F_{n+1} \cap F_n^c = E_{n+1},$$

l'égalité (1.4) donne

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap F_{n+1}) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap E_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mu^*(A \cap E_k). \end{aligned}$$

Maintenant si on pose $F = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$ on a $A \cap F_n \subset A \cap F$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc d'après la monotonie de la mesure extérieure et (1.3) on a

$$\mu^*(A \cap F) \geqslant \mu^*(A \cap F_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k),$$

en prenant la limite lorsque $n \longrightarrow +\infty$, on trouve

$$\mu^*(A \cap F) \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_k),$$

inversement et par (3) de la définition 1.19

$$\mu^*(A \cap F) = \mu^*\left[\bigcup_{k=1}^{+\infty} (A \cap E_k)\right] \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_k),$$

d'où pour toute partie $A \subset X$

$$\mu^*(A \cap F) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_k). \tag{1.5}$$

On a $F^c \subset F_n^c$ pour tout $n \geqslant 1$ et

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n^c) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap F_n^c) \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap F^c),\end{aligned}$$

et par le passage à la limite lorsque $n \longrightarrow +\infty$ et par (1.5)

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c),$$

donc

$$F = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k \in \mathcal{M}(\mu^*),$$

la $\sigma-$additivité de μ^* sur $\mathcal{M}(\mu^*)$ résulte de la formule (1.5) en prenant pour ensemble test $A = X$. ■

1.5 Mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens

1.5.1 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Theorème 1.5 *Il existe une unique mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, notée λ, telle que*

$$\lambda(]b, a[) = b - a,$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On l'appelle la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.14 *1. Il est clair que la mesure λ est $\sigma-$finie puisque*

$$\lambda([-n, n]) = 2n < +\infty \text{ et } \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [-n, n].$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lambda(\{x\}) = 0$ et par conséquent

$$\lambda(]b, a[) = \lambda(]b, a]) = \lambda([b, a[) = \lambda([b, a]) = b - a.$$

En effet :

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[,$$

donc par la continuité décroissante, (2) dans le Théorème 1.3, on a

$$\lambda(\{x\}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \lambda\left(\left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

On en déduit immédiatement que

Proposition 1.11 *Toute ensemble dénombrable D de $\mathbb{R}$ possède une mesure de Lebesgue nulle $\lambda(D) = 0$.*

Preuve. *Puisque* $D = \bigcup_{n=1, x_n \in \mathbb{R}}^{+\infty} \{x_n\}$, *nous avons*

$$\lambda(D) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(\{x_n\}) = 0,$$

ce qui implique que $\lambda(D) = 0$. ■

Proposition 1.12 *La mesure de Lebesgue λ est invariante par translation et invariante par symétrie. Cest-à-dire pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a*

$$\lambda(\alpha + A) = \lambda(A) \ \ et \ \lambda(-A) = \lambda(A),$$

pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, où

$$\alpha + A = \{\alpha + a, a \in A\} \ \ et \ -A = \{-a, a \in A\}.$$

1.5.2 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$

Rappelons que un pavé P de $\mathbb{R}^m$ est un produit d'intervalles bornés $P = I_1 \times I_2 \times ... \times I_m$, avec $I_j \subset \mathbb{R}$ $(j = 1, ..., m)$ est un intervalle borné. La mesure du pavé P est donnée par

$$m(P) = |I_1| \times |I_2| \times ... \times |I_m|,$$

avec $|I_j|$ est la longueur du segment I_j.

Définition 1.20 *Pour toute partie A de $\mathbb{R}^m$, on définit*

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} m(P_i) : A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_i, P_i \text{ pavé ouvert de } \mathbb{R}^m \right\},$$

l'infimum est pris sur tous les recouvrements dénombrables de A par des pavés ouverts.

Theorème 1.6 *On a les assertions suivantes*

1. λ^* *est une mesure extérieure sur* $\mathbb{R}^m$.
2. *La tribu* $\mathcal{M}(\mu^*)$ *contient la tribu de Borel* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. $\lambda^*(P) = m(P)$, *pour tout pavé* $P \subset \mathbb{R}^m$.

1.6 Exercices corrigés

Exercise 1.1 *Soient E un ensemble non vide et $(A_i)_{i \in I}$ une famille des parties de E. Montrer que*

1. $E - \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (E - A_i)$

2. $E-\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}(E-A_i)$

Solution 1.1 *1. Soit* $x\in E-\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)$, *alors*

$$\begin{aligned} x &\in E-\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\Longleftrightarrow x\in E,\ x\notin\bigcup_{i\in I}A_i \\ &\Longleftrightarrow x\in E,\ x\notin A_i\ \forall i\in I \\ &\Longleftrightarrow x\in(E-A_i)\,,\ \forall i\in I \\ &\Longleftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I}(E-A_i)\,, \end{aligned}$$

d'où

$$E-\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcap_{i\in I}(E-A_i)$$

2. De même manière on montre que

$$E-\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}(E-A_i)\,.$$

Exercise 1.2 *Soient* E *un ensemble non vide et* $(A_i)_{i\in I}$ *une famille des parties de* E*. Montrer que*

1. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(A_i)\,.$
2. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\bigcap_{i\in I}f^{-1}(A_i)\,.$

Solution 1.2 *1. Soit* $x\in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)$, *alors*

$$\begin{aligned} x &\in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\Longleftrightarrow f(x)=\bigcup_{i\in I}A_i \\ &\Longleftrightarrow \exists k\in I,\ f(x)\in A_k \\ &\Longleftrightarrow x\in f^{-1}(A_k),\ k\in I \\ &\Longleftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}f^{-1}(A_i)\,, \end{aligned}$$

d'où

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(A_i)\,.$$

2. Même chose pour

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i).$$

Exercise 1.3 *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille des parties non vide d'un ensemble E. Montrer que*

1. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$
2. $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, *et dans ce cas l'égalité est vraie si et seulement si l'application f est injective.*

Solution 1.3 *1. Soit*

$$\begin{aligned} y &\in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \Longleftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i : y = f(x) \\ &\Longleftrightarrow \exists k \in I, x \in A_k \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A_k) \\ &\Longleftrightarrow y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i) \\ &\Longrightarrow f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i). \end{aligned}$$

2. Soit

$$\begin{aligned} y &\in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \Longleftrightarrow \exists x \in \bigcap_{i\in I} A_i : y = f(x) \\ &\Longleftrightarrow x \in A_i \ \forall i \in I \\ &\Longrightarrow y \in f(A_i), \forall i \in I \\ &\Longleftrightarrow y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i) \\ &\Longrightarrow f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i). \end{aligned}$$

Soit maintenant

$$\begin{aligned} y &= f(x) \in \bigcap_{i\in I} f(A_i) \Longleftrightarrow y \in f(A_i), \forall i \in I \\ &\Longrightarrow \exists x_i \in A_i : y = f(x_i), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 = \ldots = x_n = x \in A_i \Longrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i \\ &\Longrightarrow y = f(x) \in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right). \end{aligned}$$

Exemple 1.10 *Soit*

$$f: \begin{array}{ccc} [-2,2] & \longrightarrow & [0,4] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

on a

$$f\left(\{-2\} \cap \{2\}\right) \neq f\left(\{-2\}\right) \cap f\left(\{2\}\right),$$

donc l'opération d'inclusion est vérufiée mais l'égalité n'est pas vérifiée car f n'est pas injective.

Exercise 1.4 *(Opérations sur les tribus)*

1. Soit $\mathcal{F}$ une tribu de Ω et B un élément de $\mathcal{F}$. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{F}_B = \{A \cap B, A \in \mathcal{F}\},$$

est une tribu de B.

2. Soit $(X \times Y, \mathcal{F})$ un espace-produit mesuré et $\pi : X \times Y \longrightarrow X$ la projection canonique. L'ensemble

$$\mathcal{F}_X = \{\pi(F), F \in \mathcal{F}\},$$

est une tribu ?

3. On consider sur $\mathbb{N}$, pour chaque $n \geqslant 0$, la tribu

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(\{0\}, \{1\}, \{2\}, ..., \{n\}\right).$$

Montrer que la suite de tribu $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante mais que $\bigcup\limits_{n\geqslant 0} \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.(indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser le sous-ensemble $2\mathbb{N}$.

4. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit C une famille de parties de E, et soit $B \in \sigma(C)$, alors nécessairement il existe une famille dénombrable $\mathcal{D} \subset C$ telle que $B \in \sigma(C)$. Est ce que ça est vrai ?

Solution 1.4 *1. i)On a $B = \Omega \cap B \in \mathcal{F}_B$,ii) Soit $C = B \cap D \in \mathcal{F}_B$ avec $D \in \mathcal{F}$. Alors $D^c \in \mathcal{F}$ et $C_B^c = B \cap D^c \in \mathcal{F}_B$. iii) Soit $C_n = B \cap D_n \in \mathcal{F}_B$ avec $D_n \in \mathcal{F}$. Alors $\bigcup\limits_n D_n \in \mathcal{F}$ et $\bigcup\limits_n B_n = B \cap \bigcup\limits_n D_n \in \mathcal{F}_B$. L'ensemble $\mathcal{F}_B$ est donc une tribu sur B.*

2. On consider pour $X = Y = \{0,1\}$ la tribu $\mathcal{F}$ engendrée par l'élément $(0,0) \in X \times Y$. Il est clair que

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, X \times Y, \{(0,0)\}, X \times Y \backslash \{(0,0)\}\}.$$

On vérifie que

$$\mathcal{F}_X = \{\emptyset, \{0\}, X\},$$

ce qui n'est pas une tribu.

3. Posons

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n,$$

et supposons que $\mathcal{F}$ soit une tribu. On a

$$\{2n\} \in \mathcal{F}_{2n} \subset \mathcal{F} \text{ et } 2\mathbb{N} = \bigcup_{n \geqslant 0} \{2n\}.$$

Ainsi, $2\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ *i.e il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $2\mathbb{N} \in \mathcal{F}_{n_0}$. *Or les seuls éléments de cardinal infini de* $\mathcal{F}_{n_0}$ *sont de la forme* $\mathbb{N} \backslash A$, *où* A *est une partie de* $\{0, 1, ..., _{n_0}\}$. *On obtient donc une contradiction.*

4. *Oui c'est vrai. En effet, soit*

$$\mathcal{G} = \{B \in \sigma(C) ; \exists \mathcal{D} \subset C \text{ dénombrable tel que } B \in \sigma(\mathcal{D})\}.$$

Montrons que $\mathcal{G}$ *est une tribu.*

i) *Il est clair que* $E \in \mathcal{G}$

ii) *Si* $A \in \mathcal{G}$, *alors il existe* $\mathcal{D} \subset C$ *dénombrable tel que* $A \in \sigma(\mathcal{D})$, *et donc* $A^c \in \sigma(\mathcal{D})$: *on a* $A^c \in \mathcal{G}$.

iii) *Si* $(A_n) \subset \mathcal{G}$, *alors pour tout* n *il existe* $\mathcal{D}_n \subset C$ *dénombrable tel que* $A_n \in \sigma(\mathcal{D}_n)$, *et donc*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \sigma(\mathcal{D}), \text{ où } \mathcal{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \subset C \text{ est dénombrable,}$$

(étant une union dénombrable d'ensembles dénombrables), on a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}.$$

En conclusion, $\mathcal{G}$ *est une tribu. Or* $C \subset \mathcal{G}$, *ce qui implique que*

$$\sigma(C) \subset \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{G} \subset \sigma(C),$$

d'où le résultat.

Exercise 1.5 1. *Est ce que l'ensemble des ouverts de* $\mathbb{R}$ *est une tribu ?*

2. *Si on note* λ *la mesure de Lebesgue, rappeler pourquoi* $\lambda(\{x\}) = 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda\left(\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}\right) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \lambda(\{x\}) = \sum_{x \in \mathbb{R}} 0 = 0.$$

Où est le problème ?

3. *Si* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{G}$ *sont deux tribus, est ce que* $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ *est toujour une tribu ?*

4. *Si* $(a_n)_{n \geqslant 1}$ *et* $(b_n)_{n \geqslant 1}$ *sont deux suites de nombres réels, a-t-on toujours*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup(a_n + b_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sup a_n + \lim_{n \longrightarrow \infty} \sup b_n?$$

Et si les deux suites sont bornées ? Et si b_n *converge ?*

Solution 1.5 1. *Non, car le complémentaire de* $]-\infty, 0[$ *n'est pas ouvert.*

2. *Non, pas toujours. Par exemple si, en notant*

$$\Omega = \{1, 2, 3\},$$

on prend

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\},$$

et

$$\mathcal{G} = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \Omega\}?$$

En effet, on a alors

$$\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \Omega\},$$

qui n'est pas stable par union

$$\{1\} \cup \{2\} \notin \mathcal{F} \cup \mathcal{G}.$$

3. *On a*

$$\lambda(\{x\}) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \lambda([x - 1/n, x + 1/n]) = 0.$$

Par ailleurs l'égalité

$$\lambda\left(\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}\right) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \lambda(\{x\}),$$

n'est pas vérifiée car $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

4. *Ce n'est pas toujours vrai (par exemple* $a_n = -b_n = n$*). En revanche, le terme de guauche est inférieur ou égal au terme de droite lorsque les deux suites sont bornées, et l'égalité est vérifiée lorsque* b_n *converge.*

Exercise 1.6 *(Lemme de Borel-Cantelli)* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace mesuré (*μ *est une mesure positive) et que* $(A_n)_{n \geqslant 1}$ *est une suite 'éléments de* $\mathcal{A}$*. On rappelle que l'on note*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \inf A_n = \bigcup_{n \geqslant 1} \bigcap_{k \geqslant n} A_k \quad et \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \sup A_n = \bigcap_{n \geqslant 1} \bigcup_{k \geqslant n} A_k.$$

1. *Montrer que*

$$\mu\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} \inf A_n\right) \leqslant \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf \mu(A_n),$$

et que si $\mu\left(\bigcup_{n \geqslant 1} A_n\right) < \infty$*, alors*

$$\mu\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup A_n\right) \geqslant \lim_{n \longrightarrow \infty} \sup \mu(A_n).$$

Qu'est-ce qui se passe si $\mu\left(\bigcup_{n \geqslant 1} A_n\right) = \infty$?

2. *(Lemme de Borel-Cantelli.) On suppose que* $\sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n) < \infty$. *Montrer que*

$$\mu\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup A_n\right) = 0.$$

3. *(Une application du lemme de Borel-Cantelli.) Soit* $\epsilon > 0$. *Montrer que pour preque tout* $x \in [0,1]$ *(pour la mesure de Lebesgue), il n'existe qu'un nombre fini de rationnels* p/q *avec* p *et* q *premiers entre eux tels que*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}},$$

i.e. presque tout x *est "mal approchable par des rationnels à l'ordre* $2+\epsilon$*".*

Solution 1.6 1. *On remarque que, pour tout* $n \geqslant 0$ *et pour tout* $k \geqslant n$,

$$\mu\left(\bigcap_{p\geqslant n} A_n\right) \leqslant \mu(A_k).$$

Ainsi,

$$\mu\left(\bigcap_{k\geqslant n} A_k\right) \leqslant \inf_{k\geqslant n} \mu(A_k). \tag{1.6}$$

Or la suite $\left(\bigcap_{k\geqslant n} A_k\right)_{n\geqslant 0}$ *est croissante. Le résultat s'obtient donc en passant à la limite quand* $n \longrightarrow \infty$ *dans (1.6). De même, on a*

$$\mu\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) \geqslant \sup_{k\geqslant n} \mu(A_k). \tag{1.7}$$

Or la suite $\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right)_{n\geqslant 0}$ *est décroissante et* $\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 0} A_n\right) < +\infty$. *Le résultat s'obtient donc en passant à la limite quand* $n \longrightarrow \infty$ *dans (1.7). On peut aussi utuliser le résultat précédent et raisonner en passant au complémentaire. En effet, posons* $F = \bigcup_{n\geqslant 0} A_n$, *on a alors*

$$F \backslash \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup A_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf (F\backslash A_n),$$

donc

$$\mu\left(F \backslash \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup A_n\right) \leqslant \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf (F\backslash A_n),$$

c'est-à-dire

$$\mu(F) - \mu\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup A_n\right) \leqslant \mu(F) - \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \mu(A_n),$$

comme $\mu(F) < \infty$, *cela implique le résultat.*

2. *On a pour tout $n \geqslant 0$,*

$$\mu\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) \leqslant \sum_{k\geqslant n} \mu\left(A_k\right),$$

or

$$\mu\left(\lim_{k\longrightarrow\infty} \sup A_k\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right), \text{ pour tout } n \geqslant 0$$

et $\sum_{k\geqslant n} \mu\left(A_k\right)$ *est le reste d'une série convergente et donc tend vers 0 quand* $n \longrightarrow \infty$. *On obtient ainsi le résultat.*

3. *Pour tout $q \geqslant 1$, on note*

$$A_q = [0,1] \cap \bigcup_{p=0}^{q} \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^{2+\epsilon}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^{2+\epsilon}}\right],$$

ainsi, $\lambda\left(A_q\right) \leqslant 2/q^{1+\epsilon}$, *par conséquent*

$$\sum_{q\geqslant 1} \lambda\left(A_q\right) < +\infty.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, $\lambda\left(\lim \sup_{q\longrightarrow\infty} A_q\right) = 0$, *or l'ensemble* $\lim \sup_{q\longrightarrow\infty} A_q$ *contient l'ensemble des réels bien approchables par des rationnels à l'ordre* $2+\epsilon$.

Exercise 1.7 *Soient E un ensemble et T une partie de $\mathcal{P}(E)$ stable par union dénombrable, stable par passage au complémentaire avec $\emptyset \in T$.*

1. *Montrer que T est une tribu sur E*
2. *L'ensemble des parties finies de E est-il une tribu ?*

Solution 1.7 1. *On a $E \in T$ car $E = \emptyset^c$ et que T est stable par passage au complémentaire. D'autre part T est stable par intersection dénombrable car, si*

$$(A_n) \subset T,$$

on a

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \in T,$$

(car T stable par passage au complémentaire et par union dénombrable) et donc

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T,$$

(car T stable par passage au complémentaire).

2. *On distingue deux cas :*

a) *Si E est fini, l'ensemble des parties finies de E est une tribu, c'est la tribu $\mathcal{P}(E)$.*

b) *Si E est infini, l'ensemble des parties finies de E n'est pas une tribu, car il n'est pas stable par passage au complémentaire (le complémentaire d'une partie finie est infinie...).*

Exercise 1.8 *Soit E un ensemble infini et*

$$S = \{\{x\}, x \in E\}.$$

Déterminer la tribu engendrée par S (distinguer les cas E dénombrable et non dénombrable).

Solution 1.8 *On note $T(S)$ la tribu engendrée par S.*

i) *On suppose que E est au plus dénombrable (c'est-à-dire fini ou dénombrable). D'après la stabilité de $T(S)$ par union dénombrable, la tribu $T(S)$ doit contenir toutes les parties au plus dénombrables. Comme toutes les parties de E sont au plus dénombrables, on en déduit $T(S) = \mathcal{P}(E)$.*

ii) *On suppose maintenant que E est infini non dénombrable. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de E au plus dénombrables et*

$$\mathcal{B} = \{A^c,\ A \in \mathcal{A}\}.$$

D'après la stabilité de $T(S)$ par union dénombrable, la tribu $T(S)$ doit contenir $\mathcal{A}$. Par stabilité de $T(S)$ par passage au complémentaire, $T(S)$ doit aussi contenir $\mathcal{B}$. On va montrer maintenant que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est une tribu (on en déduit que $T(S) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$). On a

$$\emptyset \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B},$$

et il est clair que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire car

$$A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{B},$$

et

$$A \in \mathcal{B} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}.$$

Enfin, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, on distingue deux cas :

1) *1er cas si*

$$A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N},$$

on a alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}.$$

2) *2eme cas : si il existe $n \in \mathbb{N}$ telque $A_n \in \mathcal{B}$ on a alors $A_n^c \in \mathcal{A}$, donc A_n^c est au plus dénombrable et*

$$\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p\right)^c = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p^c \subset A_n^c,$$

est aussi au plus dénombrable, ce qui donne

$$\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p\right)^c \in \mathcal{A},$$

et

$$\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}.$$

On a bien montré que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}.$$

Ce qui prouve la stabilité par union dénombrable de $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$. Finalement, $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ est donc une tribu contenant S et contenu dans $T(S)$, ceci donne

$$T(S) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}.$$

Exercise 1.9 *Soit A un ensemble mesurable (mesure de Lebesgue) tel que $A \subset [0,1]$, et soit*

$$f(x) = \mu(A \cap [0,x])$$

1. Montrer que f est continue.
2. On pose $\mu(A) = \alpha$, $(\alpha > 0)$. Montrer que

$$\forall \beta,\ 0 \leqslant \beta \leqslant \alpha;\ \exists B \subset A;\ \mu(B) = \beta$$

1. Montrons que f est continue :

$$\forall \epsilon > 0; \exists \delta > 0; |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |\mu(A \cap [0,x]) - \mu(A \cap [0,x_0])| \\ &= |\mu(A \cap]\inf(x,x_0); \sup(x,x_0)])| \\ &\leqslant |\mu(]\inf(x,x_0); \sup(x,x_0)])| = |x - x_0| \end{aligned}$$

$\Longrightarrow f$ est continue.

2. On a

$$f(0) = 0 \ ; \ f(1) = \mu(A \cap [0,1]) = \mu(A) = \alpha$$

f est continue et d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = \beta$ avec $\beta \in [0,\alpha]$ ce qui signifie l'existence d'un ensemble de la forme $B = A \cap [0,c]$ qui est inclue dans l'ensemble A et aussi

$$f(c) = \mu(A \cap [0,c]) = \mu(B) = \beta.$$

Exercise 1.10 *Soit (E,T,m) un espace mesuré. Montrer que*

$$\forall A, B \in T : m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

Solution 1.9 *On a*

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B \ \text{ et } \ (A \setminus B) \cap B = \varnothing,$$

en utilisant la $\sigma-$*additivité de* m*, on obtient*

$$\begin{aligned} m(A\cup B) &= m(A\setminus B)+m(B) \\ &\Longrightarrow m(A\cup B)+m(A\cap B)=m(A\setminus B)+m(B)+m(A\cap B) \\ &\Longrightarrow m(A\cup B)+m(A\cap B)=m(A)+m(B), \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} m(A\setminus B)+m(A\cap B) &= m((A\setminus B)\cup(A\cap B)) \\ &= m(A). \end{aligned}$$

Exercise 1.11 *Soit* (E,T,m) *un espace mesuré où* m *est une mesure vérifiant* $m(E)=1$*. Montrer que l'ensemble*

$$\mathcal{F}=\{A\in T; m(A)=0 \curlyvee m(A)=1\},$$

est une Tribu sur E*.*

1. On a $E\in T$ et $m(E)=1$, donc $E\in\mathcal{F}$
2. Soit $A\in\mathcal{F}\Longrightarrow A\in T : m(A)=0 \curlyvee m(A)=1$, d'autre part, on a $A^c\in T$, (car T stable par complémentaire) et

$$\begin{aligned} m(A^c) &= m(E-A)=m(E)-m(A) \\ &= 1-m(A)=\begin{cases} 1 & \text{si } m(A)=0 \\ 0 & \text{si } m(A)=1 \end{cases} \\ &\Longrightarrow m(A^c)\in\mathcal{F}\Longrightarrow A^c\in\mathcal{F} \end{aligned}$$

3. Soit

$$\begin{aligned} (A_n)_{n\in\mathbb{N}} &\subset \mathcal{F}\Longrightarrow\forall n\in\mathbb{N}, A_n\in\mathcal{F} \\ &\Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, A_n\in T \text{ et } m(A_n)=0 \curlyvee m(A_n)=1, \end{aligned}$$

donc on a

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\in T \text{ (car } T \text{ stable par } \cup \text{ dénombrable)},$$

on distingue deux cas :

i) Si

$$\forall n\in\mathbb{N},\ m(A_n)=0,$$

alors

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\leqslant\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)=0 \\ &\Longrightarrow m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)=0. \end{aligned}$$

ii) Si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ m(A_{n_0}) = 1,$$

alors

$$\begin{aligned} 1 &= m(A_{n_0}) \leqslant m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant m(E) = 1 \\ &\Longrightarrow m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1, \end{aligned}$$

donc

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}.$$

Exercise 1.12 *Soit (E, T, m) un espace mesuré, on pose*

$$\overline{T} = \{A \cup N : A \in T,\ N \in N_m\},$$

où N_m est l'ensemble des parties négligeables.

Montrer que $\overline{T}$ est une Tribu sur E contenant $T\cup\ N_m$.

Solution 1.10 *Soit*

$$\overline{T} = \{A \cup N : A \in T,\ N \in N_m\},$$

Montrons que $\overline{T}$ est une Tribu sur E :

1. *On a*

$$E \in \overline{T} \text{ car } E = E \cup \varnothing \text{ avec } E \in T \text{ et } \varnothing \in N_m, (m(\varnothing) = 0).$$

2. *Soit*

$$C \in \overline{T} \Longrightarrow \exists A \in T, \exists N \in N_m : C = A \cup N,$$

puisque

$$N \in N_m, \text{ alors } \exists B \in T :\ N \subset B \text{ et } m(B) = 0,$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} C^c &= (A \cup N)^c \\ &= A^c \cap N^c \\ &= A^c \cap (B^c \cup (N^c \diagdown B^c)) \\ &= (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap (N^c \diagdown B^c)) \\ &= (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap N^c \cap B), \end{aligned}$$

avec

$$(A^c \cap B^c) \in T \text{ et } (A^c \cap N^c \cap B) \in N_m,$$

car

$$A^c \cap N^c \cap B \subset B,$$

on en déduit que

$$C^c \in \overline{T}.$$

Soit

$$\begin{aligned} C_n &\subset \overline{T} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, C_n \in \overline{T} \\ &\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists A_n \in T, \exists N_n \in N_m : C_n = A_n \cup N_n, \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$N_n \in N_m \Longrightarrow \exists B_n \in T: \ N_n \subset B_n \ \text{et } m(B_n) = 0,$$

alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup N_n) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right),$$

avec

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in T \quad \text{et} \quad \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right) \subset \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right),$$

et

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n) = 0,$$

donc

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \overline{T}.$$

D'où $\overline{T}$ est une Tribu sur E.

Montrons que $T \cup N_m \subset \overline{T}$

i) Si $A \in T$, alors

$$A = A \cup \varnothing \text{ et } \varnothing \in N_m,$$

donc

$$A \in \overline{T}, \text{ d'où } T \subset \overline{T}.$$

ii) Si $N \subset N_m$, alors

$$N = \varnothing \cup N \text{ et } \varnothing \in T \Longrightarrow N \subset \overline{T},$$

donc

$$N_m \subset \overline{T},$$

finalement, on obtient

$$T \cup N_m \subset \overline{T}.$$

Exercise 1.13 *Soit E un ensemble non dénombrable. Pour toute partie A de E, on pose*

$$m(A) = \begin{cases} 0 \ \text{si } A \text{ est au plus dénombrable} \\ +\infty, \ \text{sinon} \end{cases}$$

m est-elle une mesure sur $\mathcal{P}(E)$?

Solution 1.11 1. *On a $m(\varnothing) = 0$ car $\varnothing$ est au plus dénombrable*

2. *Soit*

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E) : A_n \cap A_m = \varnothing \ \forall n \neq m,$$

on distingue deux cas :

i) *Si* $\forall n \in \mathbb{N}, A_n$ *est au plus dénombrable, alors* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *est au plus dénombrable, donc*

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} m\left(A_n\right) = 0.$$

ii) *Si* $\exists p \in \mathbb{N} : A_p$ *est infini non dénombrable, alors* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *est infini non dénombrable, et on a :*

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= +\infty = \sum_{n\in\mathbb{N}} m\left(A_n\right) \\ &= \sum_{n\neq p} m\left(A_n\right) + m\left(A_p\right). \end{aligned}$$

Donc m *est bien une mesure sur* $\mathcal{P}(E)$.

Exercise 1.14 *(Lemme de Borel-Cantelli) : Soit* (E, T, m) *un espace mesuré et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ *telle que* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) < \infty$.

Montrer que $m\left(\overline{\lim_n} A_n\right) = 0$.

Solution 1.12 *On a*

$$m(A_n) < \infty \ \text{donc} \ \sum_{k=n}^{+\infty} m\left(A_k\right) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'autre part on a

$$m\left(\bigcup_{n\geqslant n} A_p\right) \leqslant \sum_{p=n}^{+\infty} m\left(A_p\right),$$

donc

$$m\left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0,$$

la suite $\left(\bigcup\limits_{p\geqslant n} A_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante. Car si on pose*

$$\begin{aligned} B_n &= \bigcup_{n\geqslant n} A_p, \ B_n = A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup .... \\ B_{n+1} &= A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup A_{n+3} \cup .... \\ &\Longrightarrow B_{n+1} \subset B_n, \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) &= m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} m(B_n) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} m(\bigcup_{n\geqslant n} A_p) = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$m\left(\overline{\lim_n} A_n\right) = 0.$$

Exercise 1.15 *Soit (E, T, m) un espace mesuré fini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $m(A_n) = m(E)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.Montrer que*

$$m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = m(E).$$

Solution 1.13 *On a* $m(E) < \infty$

$$\begin{aligned} \forall n &\in \mathbb{N} : m(A_n^c) = m(E \setminus A_n) \\ &= m(E) - m(A_n) = 0. \end{aligned}$$

Par $\sigma-$additivité de m, on a

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right) = m\left(\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c\right) = 0,$$

d'où

$$m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = m(E) - m\left(\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c\right) = m(E).$$

Exercise 1.16 *Soit (E, T, m) un espace mesuré fini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On suppose que*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ m\left(\bigcup_{p\geqslant n_0} A_p\right) < \infty.$$

Montrer que

$$m\left(\underline{\lim_n} A_n\right) \leqslant \underline{\lim_n} m\left(A_n\right) \leqslant \overline{\lim_n} m(A_n) \leqslant m\left(\overline{\lim_n} A_n\right).$$

Solution 1.14 *On a*

$$m\left(\underline{\lim_n} A_n\right) = m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{p\geqslant n} A_p\right).$$

La suite $\left(\bigcap_{p\geqslant n} A_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et par monotonie croissante, on a*

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{p\geqslant n} A_p\right) = \lim_n m\left(\bigcap_{p\geqslant n} A_p\right).$$

De plus

$$m\left(\bigcap_{p\geqslant n} A_p\right) \leqslant m\left(A_q\right), \forall q \geqslant n,$$

car

$$\bigcap_{p\geqslant n} A_q \subset A_q, \forall q \geqslant n$$

donc

$$\begin{aligned} m\left(\bigcap_{p\geqslant n} A_p\right) &\leqslant \inf_{q\geqslant n} m\left(A_q\right) \\ &\Longrightarrow \lim_n m\left(\bigcap_{p\geqslant n} A_p\right)_n \leqslant \underline{\lim}_n m\left(A_n\right), \end{aligned}$$

et comme

$$\inf_{p\geqslant n} m\left(A_p\right) \leqslant \sup_{p\geqslant n} m\left(A_p\right),$$

alors

$$\underline{\lim}_n m\left(A_n\right) \leqslant \overline{\lim}_n m\left(A_n\right),$$

on a aussi

$$m\left(\overline{\lim}_n A_n\right) = m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} A_p\right),$$

et puisque $\left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : m\left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) < +\infty,$$

par la monotonie décroissante on a

$$m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = \lim_n m\left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right),$$

de plus

$$m\left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) \geqslant m\left(A_q\right), \forall q \geqslant n \text{ } \mathit{car} \text{ } A_q \subset \bigcup_{p\geqslant n} A_p \text{ } \forall q \geqslant n,$$

donc

$$m\left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) \geqslant \sup_{q\geqslant n} m\left(A_q\right),$$

par conséquent :

$$\lim_n m\left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) \geqslant \overline{\lim}_n m\left(A_n\right),$$

d'où

$$m\left(\overline{\lim_n} A_n\right) \geqslant \overline{\lim_n} m\left(A_n\right).$$

Chapitre 2

Fonctions mesurables "Variables aléatoires"

2.1 Fonctions mesurables

Définition 2.1 *Soient (E,T) et (F,T') deux espaces mesurables et $f : E \to F$ une application. f est dite **mesurable** si*

$$\forall A \in T', \ f^{-1}(A) \in T,$$

ce qui revient à dire que

$$f^{-1}(T') \subset T.$$

*Lorsque E et F sont des espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes, on dit que f est **bornée**.*

Exemple 2.1 1. *Si on munit E de la tribu $P(E)$, alors toute application f de E dans l'espace mesurable (F,T') est **mesurable**.*

2. *Soit (E,T) un espace mesurable et $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = a = cste, \forall x \in E$. Alors f est **mesurable**.*
   En effet : Soit $A \in B(\mathbb{R})$
   - *Si $a \in A$, $f^{-1}(A) = E \in T$.*
   - *Si $a \notin A$, $f^{-1}(A) = \varnothing \in T$.*

Theorème 2.1 *Soient $(E,T),(F,T')$ et (G,T'') trois espaces mesurables et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications mesurables. Alors alors $g \circ f$ est une application mesurable.*

Preuve. On a pour tout $C \in T''$, $g^{-1}(C) \in F$ car g est mesurable, et donc $f^{-1}\left(g^{-1}\left(C\right)\right) \in T$ puisque f est également mesurable, donc

$$\begin{aligned}
(gof)^{-1}(C) &= \{x \in E : (gof)(x) \in C\} \\
&= \{x \in E : g\left(f(x)\right) \in C\} \\
&= \left\{x \in E : f(x) \in g^{-1}(C)\right\} \\
&= \left\{x \in E : x \in f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right)\right\} \\
&= f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right) \in T.
\end{aligned}$$

ce qui prouve que gof est mesurable. ■

Proposition 2.1 *Soient* (E,T) *un espace mesurable et* f,g *deux applications de* E *dans* $\mathbb{R}$. *Alors l'application*

$$h:(f,g): \begin{array}{lcl} (E,T) & \to & (\mathbb{R}^2, B(\mathbb{R}^2)) \\ x & \mapsto & (f(x),g(x)) \end{array}$$

est mesurable si f *et* g *le sont.*

Proposition 2.2 *Si* E *et* F *sont deux espaces toplogiques munis de leurs tribus boréliennes et* $f: E \to F$ *une application continue, alors* f *est mesurable.*

Remarque 2.1 *L'inverse est en général faux.*

Exemple 2.2 *Soit*

$$\begin{array}{lcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

f est non continue mais mesurable. En effet : Soit $a \in \mathbb{R}$, on a :
- *Si $]a,+\infty[\cap \{0,1\} = \varnothing$ alors $f^{-1}(]a,+\infty[) = \varnothing \in B(\mathbb{R})$*
- *Si $]a,+\infty[\cap \{0,1\} \neq \varnothing$ alors $f^{-1}(]a,+\infty[) \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}-\mathbb{Q}, \mathbb{R}\} \subset B(\mathbb{R})$.*

Remarque 2.2 *Une application peut être mesurable par rapport à une tribu et ne pas être pour d'autres tribus.*
Preuve. *Soit la tribu*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ dénombrable ou } A^c \text{ dénombrable}\},$$

l'appliction identique

$$id : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

est évidement mesurable. Cependant

$$id : (\mathbb{R}, \mathcal{D}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

n'est pas mesurable d'après (2) dans l'exemple précédent car $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \nsubseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$ comme $[a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mais $[a,b] \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$. ∎

2.1.1 Caractérisation de la mesurabilité et stabilité de $\mathcal{L}^0(E)$

Proposition 2.3 *(Critère de mesurabilité)*

Soient (E,T) et (F,T') deux espaces mesurables et $f: E \to F$ une application et soit $G \subset \mathcal{P}(F)$ engendrant la tribu $T' = \sigma(G)$. Alors f est mesurable si et seulement si :

$$\forall C \subset G : f^{-1}(C) \in T. \tag{2.1}$$

Preuve. *Si la fonction f est mesurable, alors la condition 2.1 est évidente.*

Inversement, supposons que $f^{-1}(C) \in T$, pour $C \subset G$ et soit $\widetilde{T}'$ la tribu image de T par f définie par

$$T' = \left\{C \subset F : f^{-1}(C) \in T\right\},$$

alors $G \subset \widetilde{T}'$ et puisque $T' = \sigma(G)$ on a $T' \subset \widetilde{T}'$, et en particulier f est mesurable. ∎

Exemple 2.3 **a)** *Si* $(F,T') = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *$f$ est mesurable si et seulement si* $f^{-1}(]a,b[) \in T, \forall a,b \in T$ *tels que* $a < b$.

b) $(F,T') = \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\right)$, *$f$ est mesurable si et seulement si* $f^{-1}(]a,+\infty]) \in T, \forall a \in \mathbb{R}$.

Corollary 2.1 *Soient E et F deux espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes. Si* $f : (E, \mathcal{B}(E)) \longrightarrow (F, \mathcal{B}(F))$ *est continue, alors elle est mesurable.*

Remarque 2.3 (Mesurabilité d'une fonction numérique)

Puisque la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par la famille des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,+\infty[$, alors la fonction $f : (E,T) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si et seulement si

$$f^{-1}(]a,+\infty]) \in T, \forall a \in \mathbb{R}.$$

On note $\mathcal{L}^0(E)$ l'ensemble des fonctions $f : (E,T) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ numerique mesurables.

Proposition 2.4 *Soient (E,T) un espace mesurable et, (F,τ) un espace topologique, $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^0(E)$ deux applications numériques mesurables et $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow (F,\tau)$ une application continue. Alors l'application $h : (E,T) \longrightarrow (F,\tau)$ définie par*

$$h(x) = \Phi\left(f_1(x), f_2(x)\right), \text{ pour tout } x \in E,$$

est mesurable. Autrement dit, une combinaison continue de deux applications mesurables est mesurables.

Preuve. *On peut écrire $h = \Phi \circ F$ avec $F : (E,T) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ est définie par $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Puisque Φ est mesurable (car continue), il suffit de montrer que F est mesurable. Si I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ on a*

$$F^{-1}(I \times J) = f_1^{-1}(I) \cap f_2^{-1}(J) \in T.$$

Par la proposition 2.3 et comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendrée par les rectangles de la forme $I \times J$ l'application F est mesurable. ■

2.1.2 Opérations sur les fonctions mesurables

Proposition 2.5 *Soient (E,T) un espace mesurable et $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux applications. Alors si f, g sont mesurables les fonctions : $f+g$, $f \cdot g$, λf $(\lambda \in \mathbb{R})$, $\inf(f,g)$, $\sup(f,g)$, $\dfrac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ sont mesurables.*

Remarque 2.4 *$|f|$ peut être mesurable sans que f le soit.*

Exemple 2.4 *Soit $A \notin T$ et $f = \chi_A - \chi_{A^c}$ c'est-à-dire*

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in A \\ -1, \text{ si } x \in A^c, \end{cases}$$

alors $|f| = 1$ est mesurable, mais f ne l'est pas car par exemple

$$\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ et } f^{-1}(\{1\}) = A \notin T.$$

Proposition 2.6 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'applications mesurables de* (E,T) *dans* $\left(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\right)$. *Alors les applications* $\sup\limits_n f_n$, $\inf\limits_n f_n$, $\limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n$, $\liminf\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *sont aussi mesurables. De plus si la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* f, *alors* f *est mesurable.*
Plus généralement, l'ensemble

$$\left\{x \in E,\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) \text{ existe}\right\},$$

est mesurable.
Preuve. *Soit* $g = \sup\limits_n f_n$. *Pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *si* $x \in g^{-1}\left(]a,+\infty[\right)$ *alors il existe* $m \geqslant 1$*tel que* $f_m(x) \geqslant a$, *donc* $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}\left(]a,+\infty[\right)$.

Inversement, si $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}\left(]a,+\infty[\right)$ *il est clair que* $g(x) = \sup\limits_n f_n(x) \geqslant a$, *d'où*

$$g^{-1}\left(]a,+\infty[\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}\left(]a,+\infty[\right) \in T.$$

Ainsi g *est mesurable. Il en va de même de* $\inf\limits_n f_n = -\sup\limits_n\left(-f_n\right)$. *Par définition on a*

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \inf_{n\geqslant 1}\sup_{k\geqslant n} f_k,$$

et

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \sup_{n\geqslant 1}\inf_{k\geqslant n} f_k,$$

On est donc ramené aux résultats précédents. De plus si $(f_n)_n$ *converge simplement vers* f *alors*

$$f = \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \limsup_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n,$$

d'où le résultat. Finalement pour montrer la dernière affirmation, on définit l'application

$$F : (E,T) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{R}}^2,\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2)\right),\ F(x) = \left(\liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n, \limsup_{n\longrightarrow+\infty} f_n\right),$$

et on remarque que

$$\left\{x \in E,\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) \text{ existe}\right\} = F^{-1}(\Delta),$$

où

$$\Delta = \left\{(x,x) : x \in \overline{\mathbb{R}}\right\},$$

l'ensemble Δ *est fermé alors il appartient à* $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2)$ *et donc* $F^{-1}(\Delta) \in T$ *puisque* F *est mesurable.* ■

Proposition 2.7 *Soit* (E,T) *un espace mesurable. Toute application numérique mesurable positive* $f : E \longrightarrow [0,+\infty]$ *est limite simple d'une suite croissante de fonctions* $(f_n)_n$ *(mesurable) étagées.*

On donne la preuve de cette proposition sous forme d'un exercice corrigé (voir exercice 2.2.)

2.2 Fonction caractéristique ou indicatrice

Définition 2.2 *Soit (E,T) un espace mesurable et $A \subset E$. On appelle fonction caractéristique ou indicatrice de l'ensemble A notée 1_A ou χ_A, la fonction définie par :*

$$1_A(x) = \chi_A(x) = \begin{cases} 1 \ , \ si \ x \in A \\ 0 \ , \ sinon. \end{cases}$$

Remarque 2.5 *La fonction caractéristique 1_A est mesurable si et seulement si A est mesurable.*

En effet : Soit $a \in \mathbb{R}$, on a

$$1_A^{-1}(]a,+\infty[) = \begin{cases} \emptyset \ , \ si \ a \geqslant 1 \\ A \ , \ si \ 0 \leqslant a < 1 \ \ ??? \\ E, \ si \ a < 1. \end{cases}$$

Comme $\emptyset$, $E \in T$, il suffit que $A \in T$.

2.2.1 Fonctions étagées

Définition 2.3 *Soit (E,T) un espace mesurable et f une fonction de E dans $\mathbb{R}$. On dit que f est étagée si elle prend qu'un nombre finie da valeurs (i.e : Card$f(E) < +\infty$). En notant*

$$f(E) = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\},$$

on a alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(x),$$

où pour chaque $i \in \{1,2,...,n\}$, $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\})$. Cette écriture s'appelle l'écriture ***canonique.***
f est dite étégée positive si $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $\forall i = 1,2,...,n$.

Remarque 2.6 *f est combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques, donc f est mesurable si et seulement si $\forall i = \overline{1,n}$, A_i est mesurable.*

Exemple 2.5

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} 1 \ , \ si \ x \in \mathbb{Q} \\ 2 \ , \ sinon \end{cases} \end{array}$$

f est étagée car $f(\mathbb{R}) = \{1,2\}$ et on a

$$\begin{array}{rcl} f & : & 1_{\mathbb{Q}} + 2 \cdot 1_{\mathbb{R}-\mathbb{Q}} \\ \forall x & \in & \mathbb{R} : \ f(x) = 1_{\mathbb{Q}}(x) + 2 \cdot 1_{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}(x). \end{array}$$

Proposition 2.8 *Si $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions étagées et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f + \lambda g, f \cdot g, \sup(f,g)$, et $\inf(f,g)$ sont des fonctions étagées.*

Preuve. *On écrit f et g sous la forme*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \chi_{A_i} \quad et \quad g = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot \chi_{B_j},$$

où $n, m \in \mathbb{N}$. Puisque les familles $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(B_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ forment des partitions de E on peut écrire

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \cdot \chi_{A_i\cap B_j} \quad et \quad g = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_j \cdot \chi_{A_i\cap B_j},$$

alors on a

$$f + g = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j) \cdot \chi_{A_i\cap B_j} \quad et \quad f \cdot g = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} (a_i b_j) \cdot \chi_{A_i\cap B_j}$$

et aussi

$$\sup(f, g) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \sup(a_i, b_j) \cdot \chi_{A_i\cap B_j} \quad et \quad \inf(f, g) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_i, b_j) \cdot \chi_{A_i\cap B_j}.$$

■

2.2.2 Deuxième caractérisation de la mesurabilité

Définition 2.4 *Soit (E, T) un espace mesurable et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une application. On pose pour tout $x \in E$:*

$$\begin{aligned} f^{+}(x) &= \max(f(x), 0) \\ f^{-}(x) &= \min(f(x), 0) = \max(-f(x), 0) \\ |f|(x) &= |f(x)| \end{aligned}$$

Proposition 2.9 *Sous les mêmes conditions de la définition précédente on a :*

$$\begin{aligned} f &= f^{+} - f^{-}, \qquad |f| = f^{+} + f^{-} \\ f^{+} &= \frac{|f| + f}{2}, \qquad f^{-} = \frac{|f| - f}{2}, \end{aligned}$$

f est mesurable si et seulement si f^{+} et f^{-} le sont.

Proposition 2.10 *Soit (E, T) un espace mesurable et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Il existe alors une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (mesurable) étagées convergente simplement vers f.*
Preuve. *Les applications f^{+} et f^{-} sont mesurables donc la proposition 2.7 donne l'existence de deux suites croissantes $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des applications (mesurables) étagées telles que $h_n \longrightarrow f^{+}$ et $g_n \longrightarrow f^{-}$ simplement quand $n \longrightarrow +\infty$. On pose $f_n = h_n - g_n$, de sorte que $f_n(x) \longrightarrow f^{+}(x) - f^{-}(x) = f(x)$, quand $n \longrightarrow +\infty$, pour tout $x \in E$. D'autre part, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est étagée (voir la proposition 2.8).* ■

2.3 Quelques propriétés des applications mesurables

Proposition 2.11 *Soient $f, g : (E, T) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ deux applications mesurables et $a \in \mathbb{R}$. Alors les parties suivantes*

$$\begin{aligned} (f = a) : &= \{x \in E : f(x) = a\} \\ (f = g) : &= \{x \in E : f(x) = g(x)\} \\ (f \neq g) : &= \{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \\ (f > g) : &= \{x \in E : f(x) > g(x)\}, \end{aligned}$$

sont mesurables, c'est-à-dire appartiennent à T.

Preuve. *On a directement*

$$\begin{aligned} (f = a) &= f^{-1}(\{a\}) \in T \\ (f = g) &= (f - g)^{-1}(\{a\}) \in T \\ (f \neq g) &= (f = g)^c \in T \\ (f > g) &= (f - g)^{-1}(]0, +\infty[) \in T. \end{aligned}$$

■

2.3.1 Propriétés vraies presque partout

Définition 2.5 *Soit (E, T, m) un espace mesuré. Une propriété $p(x)$ concernant $x \in E$ est dite vraie presque partout si l'ensemble*

$$\{x \in E : p(x) \text{ n'est pas vraie}\},$$

est négligeable.

2.3.2 Egalité presque partout

Définition 2.6 *Soit (E, T, m) un espace mesuré $f, g : E \longrightarrow F$ deux fonctions ($F = \mathbb{R} \vee \overline{\mathbb{R}} \vee \mathbb{R}_+ \vee ...$). On dit que $f = g$ presque partout et on note $f = g$ p.p si l'ensemble*

$$\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$$

est négligeable i.e

$$\exists A \in T \text{ t.q } m(A) = 0 \text{ et } f(x) = g(x) \ \forall x \in A^c.$$

Exemple 2.6 *Si les fonctions $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sont égaux presque partout, alors il existe $A \in T$ tel que*

$$(f \neq g) \subset A \text{ et } m(A) = 0,$$

donc

$$f(x) = g(x), \forall x \in A^c \text{ et } m(A) = 0,$$

on peut remarquer que si f et g sont mesurables, alors $(f \neq g) \in T$ et donc $f = g$ presque partout si et seulement si $m(f \neq g) = 0$.

Exemple 2.7 *Soit* $(E,T,m) = (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ *et soient* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tels que*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ , si } x \neq 0 \\ 1 \text{ ,si } x = 0 \end{cases} , \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ , si } x \neq 0 \\ -1 \text{ ,si } x = 0, \end{cases}$$

on a

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\} = \{0\} \text{, et } \lambda(\{0\}) = 0,$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ , } f(x) \neq g(x),$$

donc

$$f = g \qquad\qquad p.p.$$

Theorème 2.2 *Soit* (E,T,m) *un espace mesuré complet et* $f, g : (E,T) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *deux applications telle que* f *est mesurable et* $f = g$ *presque partout. Alors* g *est mesurable.*
Preuve. *Il existe* $A \in T$ *telle que* $m(A) = 0$ *et* $f(x) = g(x), \forall x \in A^c$.

Soit $a \in \mathbb{R}$, *si on pose*

$$(g > a) = g^{-1}(]a, +\infty[),$$

on a

$$\begin{aligned} (g > a) &= (g > a) \cap (A \cup A^c) \\ &= [(g > a) \cap A] \cup [(g > a) \cap A^c] \\ &= [(g > a) \cap A] \cup [(f > a) \cap A^c], \end{aligned}$$

d'autre part, puisque f *est mesurable on a* $(f > a) \cap A^c \in T$ *et d'autre part l'ensemble* $(g > a) \cap A$ *est négligeable car*

$$(g > a) \cap A \subset A \text{ et } m(A) = 0,$$

donc

$$(g > a) \cap A \in T,$$

puisque la mesure m *est complète. On a alors*

$$(g > a) \in T,$$

d'où la mesurabilité de g. ■

2.4 Convergence p.p et convergence en mesure

Définition 2.7 *Soit* (E,T,m) *un espace mesuré,* $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *ou* $[0, +\infty]$ *une suite de fonction et* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *ou* $[0, +\infty]$ *une fonction. On dit que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* ***presque partout*** *vers* f *sur* E *s'il existe* $A \subset E$ *négligeable tel que pour tout* $x \in A^c$, *la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(x)$. *Dans ce cas on écrit* $f_n \longrightarrow f$ *p.p.*

Remarque 2.7

1. *Si les fonctions* f_n *et* f *sont mesurables, alors la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque partout vers* f *si*

$$m\left(\left\{x \in E : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}\right) = 0.$$

2. *La convergence simple implique la convergence presque partout car si $f_n \longrightarrow f$ simplement on a*

$$m\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n \neq f\right) = m(\emptyset) = 0.$$

Exemple 2.8 *Soit $E = [0,1]$, T la tribu borélienne sur $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue λ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = (-x)^n$. Pour tout $x \in [0,1]$ on a $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = 0$ et*

$$\lambda\left(\left\{x \in [0,1] : \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) \neq 0\right\}\right) = \lambda(\{1\}) = 0,$$

donc $f_n \longrightarrow f$ p.p.

Définition 2.8 *Soit (E,T,m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}$, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable. On dit que f_n converge* ***en mesure*** *vers f si :*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0\}) = 0,$$

i.e :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0\ m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) < \varepsilon,$$

ou bien

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0.$$

Remarque 2.8 *La convergence presque partout n'entraine pas la convergence en mesure.*

Exemple 2.9 *Soit $E = \mathbb{R}$, $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m = \lambda$ la mesure de Lebesgue et $f_n = \chi_{[n,n+1]}$,*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ n \leqslant x \leqslant n+1 \\ 0 & si\ \ x < n \ ou\ x > n+1, \end{cases}$$

il existe $n_0 = [x]+1$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $f_n(x) = 0$. Alors $(f_n)_n$ converge simplement vers 0 sur E, cequi donne $f_n \longrightarrow f$ p.p. D'autre part si on pose $\varepsilon = 1$ on a

$$\begin{aligned} \lambda(\{x \in E : |f_n(x) - 0| \geqslant 1\}) &= \lambda\left(\left\{x \in E : \chi_{[n,n+1]} \geqslant 1\right\}\right) \\ &= \lambda([n,n+1]) = 1 \neq 0, \end{aligned}$$

donc f_n ne tend pas vers 0 en mesure.

Proposition 2.12 *Dans un espace mesuré fini $m(E) < \infty$, la convergence presque partout entraîne la convercgence en mesure.*

Proposition 2.13 *Supposons que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge en mesure vers f. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ converge vers f presque partout.*

Proposition 2.14 *Soit (E,T,m) un espace mesuré, et $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $[0,+\infty]$ une suite de fonctions mesurables et $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $[0,+\infty]$deux fonctions mesurables. Si $f_n \longrightarrow f$ en mesure et $f_n \longrightarrow g$ en mesure, alors $f = g$ presque partout. C'est-à-dire la limite est unique presque partout.*

Preuve. Montrons que $f = g$ p.p. Soit $\delta > 0, \forall x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |f(x) - g(x) - f_n(x) + f_n(x)| \\ &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)|, \end{aligned}$$

donc

$$\left\{|f - f_n| \leqslant \frac{\delta}{2}\right\} \cap \left\{|f_n - g| \leqslant \frac{\delta}{2}\right\} \subset \{|f - g| \leqslant \delta\},$$

d'où

$$\{|f - g| > \delta\} \subset \left\{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\right\} \cup \left\{|f_n - g| > \frac{\delta}{2}\right\},$$

donc

$$m(\{|f - g| > \delta\}) \leqslant m\left(\left\{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\right\}\right) + m\left(\left\{|f_n - g| > \frac{\delta}{2}\right\}\right).$$

En passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, on obtient que

$$m(\{|f - g| > \delta\}) = 0,$$

et on a

$$\begin{aligned} \{x \in E : f(x) \neq g(x)\} &= \{|f - g| > 0\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{|f - g| > \frac{1}{n}\right\}, \end{aligned}$$

donc

$$m(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m\left(\left\{|f - g| > \frac{1}{n}\right\}\right) = 0,$$

d'où

$$f = g \ \text{ p.p.}$$

■

2.5 Variable aléatoire

Définition 2.9 *Soit (E, T) un espace probabilisable, on appelle variable aléatoire une fonction $X : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable. i.e :*

$$X^{-1}(A) \in T, \ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

ou bien toute fonction mesurable de (E, T) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exemple 2.10

1. *Toute application $f : (X, \mathcal{P}(X)) \longrightarrow (Y, \mathcal{P}(Y))$ est mesurable.*
2. *Si T et T' sont deux tribus sur E alors l'identité sur E*

$$id : (E, T) \longrightarrow (E, T'), \ id(x) = x,$$

est mesurable si et eulement si $T' \subset T$.

3. *Si (E,T) et (F,T') sont deux espaces mesurables et $f : T \longrightarrow T'$ une application constante (c'est-à-dire il existe $y_0 \in F$ tel que pour tout $x \in E$ on a $f(x) = y_0$) alors f est mesurable.*
4. *Une fonction étagée f est toujours mesurable.*
5. *Soit (E,T) un espace mesurable et $A \in T$. La fonction indicatrice χ_A de l'ensemble A est une application de E dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est mesurable si et seulement si $A \in T$. Pour cette raison, les éléments de T sont dits ensembles mesurables.*

Preuve. *On démontre seulement (4) et (5). Pour (4) en effet si f est une fonction de (E,T) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, alors il existe $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une partition de E et $\{a_1, ..., a_n\} \subset \mathbb{R}$ tels que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \chi_{A_i}$. Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a donc*

$$f^{-1}(B) = \left(\bigcup_{a_i \in A} A_i \right) \in T,$$

ce qui prouve que f est mesurable.

Maintenant montrons (5), d'après (4) si $A \in T$ la fonction étagée χ_A est mesurable.

Inversement, si χ_A est mesurable, alors

$$A = (\chi_A)^{-1}(\{1\}) \in T,$$

car $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ comme un fermé dans $\mathbb{R}$. ■

Définition 2.10 *Soit (E,T) et (F,T') deux espaces probabilisables, une fonction $X : E \longrightarrow F$ est un* ***élément aléatoire*** *si elle est mesurable, i.e :*

$$X^{-1}(A) \in T, \forall A \in T'.$$

Lorsque F est un espace vectoriel, on dit que X est une variable aléatoire vectorirlle ou un vecteur aléatoire.

2.5.1 Convergence presque uniforme

Définition 2.11 *Soit (E,T,m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}$, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable. On dit que f_n converge presque uniforme vers f si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in T \ t.q\ m(A) \leqslant \varepsilon \ et\ f_n \xrightarrow{unif} f \quad sur\ A^c.$$

$$Conver\ P.U \Longrightarrow \ Conv\ \ P.P.$$

Définition 2.12 *(Sup essentiel) Soit (E,T,m) un espace mesuré et $f \in M$, f est essentiellement...si*

$$\exists C \in \mathbb{R}_+ \ t.q\ |f| \leqslant C \quad p.p.$$

On appelle sup *essentielle de $|f|$ et on le note $\|f\|_\infty$*

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \quad t.q \quad |f| \leqslant C \quad p.p\},$$

si f n'est pas essentiellement bornée on pose $\|f\|_\infty = \infty$.

2.5.2 Convergence essentiellement uniforme

Définition 2.13 *Soit (E, T, m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}$, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable. On dit que f_n converge essentiellement uniforme vers f si :* $\|f - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2.6 Exercices corrigés

Exercise 2.1 *Soit la fonction* $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} \text{ si } x > 0 \text{ et } x < y \leqslant 2x \\ -\dfrac{1}{(1+x)^2} \text{ si } x > 0 \text{ et } 2x < y \leqslant 3x \\ 0 \text{ si } x > 0 \text{ et } y \notin \left]x, 3x\right[\\ 0 \text{ si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$A_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } x < y < 2x + \frac{1}{n} \right\},$$

et

$$B_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } 2x < y < 3x + \frac{1}{n} \right\}.$$

Déterminer $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ *et* $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$.

2. *En déduire que la fonction f est mesurable.*

Solution 2.1 1. *On a*

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } x < y < 2x \right\}$$

et

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } 2x < y < 3x \right\},$$

on pose maintenant

$$g(x,y) = \frac{1}{(1+|x|)^2} \text{ pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

La fonction $g : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *est mesurable car elle est continue. On remarque maintenant que* $f = g\chi_A - g\chi_B$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *les ensembles* A_n *et* B_n *sont des ouverts de* $\mathbb{R}^2$ *ils appartiennent donc à* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

2. *On en déduit que* $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *et alors les fonctions* χ_A *et* χ_B *sont mesurables. En fin la fonction f est mesurable comme somme de produit de fonctions mesurables.(rappelons que la tribu de Borel* $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ *sur* $\overline{\mathbb{R}}$ *est engendrée par les intervalles* $\left]a, +\infty\right[, a \in \mathbb{R}$).

Exercise 2.2 *Pour tout $n \geqslant 1$, on définit la fonction étagée $\varphi_n : [0,+\infty] \longrightarrow [0,+\infty[$ par*

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 2^{-n} E(2^n t) & si \;\; 0 \leqslant t < n \\ n \;\; si \;\; t \geqslant n, \end{cases}$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

1. *Démontrer que $0 \leqslant \varphi_n(t) \leqslant \varphi_{n+1}(t)$ pour tout $t \in [0,+\infty]$ et $n \geqslant 1$.*
2. *On pose $f_n = \varphi_n \circ f$. Vérifier que f_n est étagée et montrer que la suite $(f_n)_n$ est croissante.*
3. *Démontrer que si $f(x) < \infty$ alors pour n suffisament grand on a*

$$f(x) - 2^{-n} \leqslant f_n(x) \leqslant f(x).$$

Conclure.

Solution 2.2 1. *On a trois cas*

i) *Pour $t \geqslant n+1$ (ou aussi $t = +\infty$). Alors $\varphi_{n+1}(t) = n+1 > n = \varphi_n(t)$.*

ii) *Pour $n \leqslant t < n+1$. D'après la croissance de la fonction partie entière on a*

$$E\left(2^{n+1}t\right) \geqslant E\left(2^{n+1}n\right) = 2^{n+1}n,$$

ce qui implique que

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{1}{2^{n+1}} E\left(2^{n+1}t\right) \geqslant n = \varphi_n(t).$$

iii) *Pour $0 \leqslant t < n$. Puisque*

$$2^{n+1}t \geqslant 2E(2^n t) \in \mathbb{N},$$

on a

$$E\left(2^{n+1}t\right) \geqslant 2E(2^n t),$$

alors

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{1}{2^{n+1}} E\left(2^{n+1}t\right) \geqslant \frac{1}{2^n} E(2^n t) = \varphi_n(t).$$

Donc dans tout les cas, pour tout $t \in [0,+\infty]$ et $n \geqslant 1$ on a

$$\varphi_n(t) \leqslant \varphi_{n+1}(t).$$

2. *Il est clair que les applications φ_n sont étagées pour tout $n \geqslant 1$, alors les f_n sont aussi étagées car*

$$f_n(E) = \varphi_n(f(E)) = \varphi_n([0,+\infty]),$$

est finie. D'autre part par la croissance de la suite $(\varphi_n)_n$ on peut écrire

$$f_n(x) = \varphi_n(f(x)) \leqslant \varphi_{n+1}(f(x)) = f_{n+1}(x), \forall n \geqslant 1, \forall x \in E.$$

3. *Pour n suffisament grand choisissons $n > f(x)$, dans ce cas nous avons*
$$f_n(x) = \frac{1}{2^n} E\left(2^n f(x)\right),$$
par les propriétés de la partie entière
$$2^n f(x) - 1 \leqslant E\left(2^n f(x)\right) \leqslant 2^n f(x),$$
donc
$$f(x) - \frac{1}{2^n} \leqslant f_n(x) \leqslant f(x),$$
finalement par le passage à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ nous concluons que $f_n \longrightarrow f$ simplement.

Exercise 2.3 *Soit $X = [0,1[$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ. Soit la suite $(f_n)_n$ de fonctions définie par $f_n = \chi_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right[}$. Montrer que $f_n \longrightarrow 0$ en mesure, mais que $(f_n)_n$ ne converge pas vers 0 presque partout.*

Solution 2.3 *Pour tout $\alpha > 0$ on a*
$$\{x \in X : |f_n(x) - 0| \geqslant \alpha\} \subset \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[,$$
donc
$$\lambda\left(\{x \in X : |f_n(x) - 0| \geqslant \alpha\}\right) \leqslant \lambda\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[\right) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0,$$
il s'ensuit que $f_n \longrightarrow 0$ en mesure.

D'autre part
$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty} f_n = 1 \neq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n = 0,$$
alors pour tout $x \in [0,1[$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) \neq 0$. D'où
$$\lambda\left(\left\{x \in X : \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) \neq 0\right\}\right) = \lambda\left([0,1[\right) = 1 \neq 0,$$
et donc $(f_n)_n$ ne peut converger presque partout vers 0.

Exercise 2.4 *Soient $f, g, h : (\Omega, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions quelconques. Montrer que si $f = g$ presque partout et $g = h$ presque partout, alors $f = h$ presque partout.*

Solution 2.4 *Il existe $A, B \in \mathcal{M}$ tels que*
$$(f \neq g) \subset A,\ (g \neq h) \subset B \quad et \quad \mu(A) = \mu(B) = 0.$$
Puisque
$$(f = g) \cap (g = h) \subset (f = h),$$
on a
$$(f \neq h) \subset (f \neq g) \cup (g \neq h) \subset A \cup B,$$
et on a
$$\mu(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B) = 0,$$
d'où
$$(f \neq h) \subset A \cup B \quad avec \quad \mu(A \cup B) = 0.$$
Finalement $f = g$ presque partout.

Exercise 2.5 *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction mesurable, pour* $a > 0$ *on pose*

$$f_a(x) = \begin{cases} a \quad si \quad f(x) > a \\ f(x) \quad si \quad |f(x)| \leqslant a \\ -a \quad si \quad f(x) < -a \end{cases}$$

Montrer que f_a *est mesurable.*

Solution 2.5 *On définit la fonction* $T_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *par*

$$T_a(s) = \begin{cases} a \quad si \; s > a \\ s \quad si \; |s| \leqslant a \\ -a \quad si \quad s < -a, \end{cases}$$

T_a *est continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *donc mesurabele, et de plus* $f_a = T_a o f$, *donc* f_a *est mesurable en tant que composée de deux applications mesurables.*

Exercise 2.6 *Additivité de l'intégrale de Lebesgue sur les fonctions positives*

Soit (E, τ, μ) *un espace mesuré. Soit* f, g *deux fonctions positives mesurables. Montrer que*

$$\int_E (f+g)\, d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

On pourra commencer par supposer f *et* g *sont étagées. Puis utiliser un théorème d'approximation de fonctions mesurables positives par des fonctions étagées et enfin le théorème de convergence monotone (Beppo-Levi).*

Solution 2.6 *Disons que* f *et* g *sont étagées et prenant les valeurs* a_i, $i = 1, ..., n$ *et* b_j, $j = 1, ..., p$ *sur les ensembles* A_i *et* B_j. *Remarquons* $(A_i)_i$ *et* $(B_j)_j$ *forment des partitions de* E. *On a d'une part :*

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu + \int_E g d\mu &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{p} b_j \mu(B_J) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{p} \mu(A_i \cap B_j) \right) + \sum_{j=1}^{p} b_j \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(B_j \cap A_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (a_i + b_j)\, \mu(A_i \cap B_j). \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \sum_{i=1}^{n} a_i 1(A_i) + \sum_{j=1}^{p} b_j 1(B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{p} 1(A_i \cap B_j) \right) + \sum_{j=1}^{p} b_j \left(\sum_{i=1}^{n} 1(B_j \cap A_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (a_i + b_j)\, 1(A_i \cap B_j), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\int_E (f+g)\,d\mu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(a_i+b_j)\,\mu\,(A_i\cap B_j) = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

Pour passer à f, g mesurables positives quelconques, il suffit de considérer (u_n) et (v_n) des suites croissantes de fonctions positives étagées telles que $(u_n) \longrightarrow f(x)$ et $(v_n) \longrightarrow g(x)$ (en croissant donc) pour tout $x \in E$. Pour tout n on a alors

$$\int (u_n+v_n)\,d\mu = \int u_n d\mu + \int v_n d\mu.$$

En passant à la limite dans cette égalité et en utilisant Beppo-Levi, on trouve

$$\int (f+g)\,d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

Exercise 2.7 *Soit f_n une suite de fonctions mesurables positives sur (E, τ, μ). On définit la fonction F pour tout $x \in E$ par*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Montrer que la fonction F est mesurable positive et que

$$\int_E F d\mu = \sum_{n=0}^{\infty}\int_E f_n d\mu.$$

Solution 2.7 *Soit F_p la somme partielle*

$$F_p(x) = \sum_{n=0}^{p} f_n(x),$$

d'après l'exercice précédent on a

$$\int F d\mu = \sum_{n=0}^{p}\int f_n d\mu,$$

de plus la suite de fonctions $(F_p)_p$ est une suite croissante (car les f_n sont positives) de fonctions mesurables positives telles que $F_p(x) \longrightarrow F(x)$ pour tout $x \in E$. Le theorème de convergence monotone donne alors que F est mesurable (elle est aussi positive) et que :

$$\int F d\mu = \lim_{p\longrightarrow\infty}\int_E F_p d\mu = \sum_{n=0}^{\infty}\int f_n d\mu.$$

Exercise 2.8 *On travaille sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de dénombrement μ : pour tout $A \subset \mathbb{N}$, $\mu(A)$ est le cardinal de A si A est fini, $\mu(A) = +\infty$ dans le cas contraire.*

1. *Soit* $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$ *une fonction positive sur* $\mathbb{N}$. *On peut également voir* f *comme une suite de nombres réels positifs* $u_n = f(n)$. *En remarquant que* f *s'écrit* $f = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) 1_{\{n\}}$, *expliquer la valeurs de* $\int_{\mathbb{N}} f d\mu$.
2. *Soit* $(u_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$ *une suite double de réels positifs. Montrer que*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}\right).$$

3. *Calculer*

$$\sum_{p=2}^{\infty}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}\right).$$

Solution 2.8 1. *Par intégration terme à terme d'une série de fonctions positives on obtient :*

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f(n) 1_{\{n\}}(x) d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\mu(\{n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

Les séries classiques sont des intégrales de Lebesgue.

2. *Soit* f_n *la suite de fonctions positives sur* $\mathbb{N}$ *définies par* $f_n(p) = u_{n,p}$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$. *Le théorème d'intégration terme à terme donne :*

$$\int_{\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n d\mu.$$

La première question appliquée à chaque membre de cette égalité donne le résultat.

3. *Les termes sont positifs, on échange :*

$$\begin{aligned}\sum_{p=2}^{\infty}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}\right) &= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}\right)\\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}\\ &= \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = 1,\end{aligned}$$

par téléscopage. On ne sait pas grand chose sur les valeurs des sommes de Riemann $\sum 1/n^p$ *pour* p *entier* $\geqslant 2$, *mais on peut calculer la somme de ces sommes !*

Exercise 2.9 *Soit* (E, τ, μ) *un espace mesuré,* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions intégrables qui converge presque partout vers une fonction intégrable* f.

1. *On suppose que* $\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu = 0$. *Montrer que*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu \text{ et } \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_E |f_n| \, d\mu = \int_E |f| \, d\mu.$$

2. *Réciproquement, on suppose que* $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \int_E |f_n| \, d\mu = \int_E |f| \, d\mu$. *Montrer que*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu = 0,$$

on pourra utiliser la suite de fonctions $g_n = |f| + |f_n| - |f - f_n|$ *et lui appliquer le seul théorème de convergence dont elle satisfait les hypothèses.*

3. *Résumer les résultats des questions précédentes en une équivalence.*

4. *On se place sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. *Donner un exemple de suite* (f_n) *de fonctions intégrables qui converge vers une fonction* f *intégrable, telle que*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu,$$

et telle que, pourtant, $(\int_E |f_n - f| \, d\mu)$ *ne tende pas vers* 0.

Solution 2.9 1. *Il suffit d'écrire :*

$$\left| \int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu \right| \leqslant \int_E |f_n - f| \, d\mu,$$

et

$$\left| \int_E |f_n| \, d\mu - \int_E |f| \, d\mu \right| = \left| \int_E |f_n| - |f| \, d\mu \right| \leqslant \int_E ||f_n| - |f|| \, d\mu \leqslant \int_E |f_n - f| \, d\mu,$$

(inégalité triangulaire renversée).

2. *Les fonctions* g_n *sont positives , on ne peut faire que Fatou. Notons que* g_n *converge simplement vers* $2|f|$ *presque partout par hypothèse. On obtient*

$$\int_E \lim_{n \longrightarrow +\infty} \inf g_n d\mu \leqslant \lim_{n \longrightarrow +\infty} \inf \int_E g_n d\mu,$$

autrement dit :

$$\int_E 2|f| \, d\mu \leqslant \lim_{n \longrightarrow +\infty} \inf \int_E |f| + |f_n| - |f - f_n| \, d\mu = 2 \int_E |f| \, d\mu - \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sup \int_E |f_n - f| \, d\mu.$$

La deuxième égalité provenant de l'hypothèse de cette question. Donc

$$0 \leqslant \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sup \int_E |f_n - f| \, d\mu \leqslant 0.$$

Par conséquent

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sup \int_E |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

3. *Nous venons de montrer que, sous les hypothèses de l'exercice :*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu = 0 \iff \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_E |f_n| \, d\mu = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_E |f| \, d\mu.$$

4. *Il va falloir choisir des fonctions qui change de signe, sinon les résultats précédents assurent que de telles fonctions n'existent pas. Considérons* $f_n = \frac{1}{n}\left(1_{[0,n]} - 1_{[-n,0]}\right)$. *Les* f_n *sont intégrables, convergent vers* 0 *(qui est intégrable). On a aussi :*

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = 0 \longrightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} 0 d\mu,$$

et poutant

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - 0|\, d\mu = 2.$$

Exercise 2.10 *Soient* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions continues.*

1. Si λ est la mesure de Lebesgue, montrer que

$$f = g \text{ p.p} \iff f = g.$$

2. Si δ_0 est la mesure de Dirac :

$$\forall A \in B(\mathbb{R}) : \delta_0(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

montrer que

$$f = g \text{ p.p} \iff f(0) = g(0)$$

1. Montrons que $f = g$ p.p $\iff f = g$

   i) $\Longleftarrow$ Si $f = g$ i.e :$f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, et on a $f = g$ p.p car $f = g$ sur $\varnothing^c$ et $\lambda(\varnothing) = 0$

   ii) $\Longrightarrow$ Si $f = g$ p.p, alors $\exists A \in B(\mathbb{R}) : \lambda(A) = 0$ et $f = g$ sur A^c, on a alors

$$\{f(x) \neq g(x)\} \subset A$$

$$\{f(x) = g(x)\} = (f - g)^{-1}(\mathbb{R}^*),$$

   est un ouvert car $f - g$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc

$$\{f(x) \neq g(x)\} \in B(\mathbb{R}),$$

   de plus

$$\lambda(\{f(x) \neq g(x)\}) \leqslant \lambda(A) = 0,$$

   donc

$$\{f(x) \neq g(x)\} = \varnothing,$$

   car un ouvert non vide est toujour de mesure de Lebesgue strictement positive, d'où

$$f = g \text{ partout.}$$

2. Montrons que

$$f = g \text{ p.p} \iff f(0) = g(0)$$

i) $\Longleftarrow$ Si $f(0) = g(0)$, on prend $A = \{0\}^c$ on a donc $A \in B(\mathbb{R})$, et $\delta_0(A) = 0$ et

$$f = g \text{ sur } A^c \quad \text{donc } f = g \quad \text{p.p.}$$

ii) $\Longrightarrow$ Si $f = g$ p.p donc

$$\exists A \in B(\mathbb{R}) : f = g \text{ sur } A^c \text{ et } \delta_0(A) = 0,$$

donc

$$0 \notin A \text{ i.e} : 0 \in A^c \text{ d'où } f(0) = g(0).$$

Chapitre 3

Fonctions Intégrables

Dans ce chapitre (E, T, m) désigne un espace mesuré. Dans la suite on étudie l'intégrale de Lebesgue sur E par rapport à la mesure m.

On note $\mathcal{E}_+$: Ensemble des fonctions étagées mesurable et positives de (E, T) dans $\mathbb{R}_+$muni de la tribu borélienne.

3.1 Intégrale d'une fonction étagée positive

Définition 3.1 *Soit $f \in \mathcal{E}_+$, de décomposition canonique $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \chi_{A_i}$ On pose*

$$\int_E f dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(_{A_i}) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Cette quantité s'appelle intégrale sur E de la fonction f par rapport à la mesure m.

L'intégrale $\int f dm$ est un élément de $[0, +\infty]$. Bien que les a_i soient tous réels elle peut très bien valoir $+\infty$, si pour $a_i > 0$, le correspondant $m(A_i)$ vaut $+\infty$. Rappelons la convention $0 \times (+\infty) :=$ qui est bien utile ici lorsque $m\left(f^{-1}\left(\{0\}\right)\right) = +\infty$.

Exemple 3.1 *1. Si f est une fonction constante, alors sa décomposition canonique s'écrit $f = a\chi_E$, avec $a \geqslant 0$. la formule $\int_E f dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(_{A_i})$ nous donne alors*

$$\int_E adm = a \cdot m(E).$$

2. Si $f = a\chi_A$ avec $a > 0$, $A \in T$ et $A \neq E$, sa décomposition canonique est

$$f = a\chi_A + 0\chi_{A^c},$$

d'où

$$\int a \cdot \chi_A = a \cdot m(A) + 0 \cdot m(A^c) = a \cdot m(A).$$

On note

$$\int_E f dm = \int_{x \in E} f(x) dm$$

Remarque 3.1 *1. Si $\exists i : a_i = 0$ et $m(A_i) = +\infty$, alors par conséquent on a $0\times(+\infty) = 0$*
L'intégrale de Lebesgue est indépendante de l'écriture de la fonction étagée, donc si :

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} = f = \sum_{j=1}^{p} b_j 1_{Bj},$$

alors

$$\sum_{i=1}^{n} a_i m(_{A_i}) = \sum_{j=1}^{p} b_j m(_{B_J}).$$

2. Si $A \in T$, $\int_E 1_A dm = m(A)$.

Proposition 3.1 *Soient f et g deux fonctions étagées mesurables, et positives. Alors*

$$\int_E (f+g)\,dm = \int_E f dm + \int_E g dm.$$

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ : \int_E (\alpha f)\,dm = \alpha \int_E f dm$.
2. Si $f \geqslant g$ alors $\int_E f dm \geqslant \int_E g dm$.

Preuve.

1. Posons

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \quad et \quad g = \sum_{j=1}^{p} b_j 1_{Bj}.$$

On a

$$f + g = \sum_{k=1}^{n+p} \gamma_k 1_{C_k},$$

avec

$$\gamma_k = \begin{cases} a_k\ , & 1 \leqslant k \leqslant n \\ b_{k_n}\ , & n+1 \leqslant k \leqslant n+p \end{cases} \quad et \quad C_k = \begin{cases} A_k\ , & 1 \leqslant k \leqslant n \\ B_{k_n}\ , & n+1 \leqslant k \leqslant n+p. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_E (f+g)\,dm &= \sum_{k=1}^{n+p} \gamma_k m(C_{_k}) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k m(C_{_k}) + \sum_{k=n+1}^{n+p} \gamma_k m(C_{_k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k m(A_k) + \sum_{k=n+1}^{n+p} b_{k-n} m(B_{k-n}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k m(A_k) + \sum_{k=1}^{p} b_k m(B_k) \\ &= \int_E f dm + \int_E g dm. \end{aligned}$$

2. On a

$$\alpha f = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i) 1_{A_i}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_E (\alpha f) dm &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i) m(A_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i) = \alpha \int_E f dm. \end{aligned}$$

■

Proposition 3.2 *1. Soient $f, g \in \mathcal{E}_+$ ($\mathcal{E}_+$: Ensemble des fonctions étagées mesurable et positives) telles que $f \geqslant g$: on a $(f-g) \in \mathcal{E}_+$ (car $\mathbb{R}_-$ espace vectoriel) et*

$$\int_E f dm = \int_E [(f-g)+g]\, dm = \int_E (f-g)\, dm + \int_E g dm,$$

car $\int_E (f-g)\, dm \geqslant 0$.

Remarque 3.2 *Si $f, g \in E$ avec $f \geqslant g$ et $\int_E g dm < +\infty$, alors*

$$\int_E (f-g)\, dm = \int_E f dm - \int_E g dm$$

3.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive

Définition 3.2 *Soit (E, T, m) un espace mesuré et soit $f \in \mathcal{M}_+$ (Ensemble des fonctions mesurables positives de E dans $\mathbb{R}$). On définit l'intégrale de f par :*

$$\int_E f dm = \sup \left\{ \int_E g dm;\; g \in M_+ : g \leqslant f \right\}.$$

3.2.1 Théorème de la convergence monotone

Theorème 3.1 *(de la convergence monotone ou de Beppo-Levi) Soit (E, T, m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables et positives convergeant vers une fonction f. Alors $f \in \mathcal{M}_+$ et*

$$\int_E f dm = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n dm = \sup_n \int_E f_n dm.$$

Preuve. *La suite $\left(\int_E f_n dm\right)_n$ est croissante dans $[0, +\infty]$, donc convergente vers $L \in [0, +\infty]$*

$$L := \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n dm = \sup_n \int_E f_n dm.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f_n \leqslant f$ et par la croissance de l'intégrale on obtient

$$\int_E f_n dm \leqslant \int_E f dm,$$

puis en prenant le supremum sur $n \in \mathbb{N}$

$$L \leqslant \int_E f dm.$$

Par ailleurs, soit $s \in \mathcal{E}_+$ tel que $s \leqslant f$ et soit $\alpha \in]0, 1[$. On définit

$$A_n = \{x \in E : f_n(x) \geqslant \alpha \cdot s(x), \}$$

comme

$$A_n = (f_n - \alpha \cdot s)^{-1}([0, +\infty]),$$

et la fonction $x \longmapsto f_n(x) - \alpha \cdot s(x)$ *est mesurable, alors* $A_n \in T$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. D'autre part, la suite* $(A_n)_n$ *est croissante car si* $x \in A_n$*, alors* $\alpha \cdot s(x) \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ *par croissance de* $(f_n)_n$*, donc* $x \in A_{n+1}$ *et aussi on a* $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$*. Grâce à la définition de* A_n *on peut écrire une inégalité entre des fonctions mesurables positives*

$$\alpha \cdot s \cdot \chi_{A_n} \leqslant f_n \chi_{A_n} \leqslant f_n.$$

On en déduit par croissance de l'intégrale et $\int_A f dm = \int_A f \chi_A dm$

$$\int_{A_n} (\alpha \cdot s)\, dm \leqslant \int_{A_n} f_n dm \leqslant \int f_n dm. \tag{3.1}$$

De plus, si $s = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot \chi_{B_i}$*, alors* $s \cdot \chi_{A_n} = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot \chi_{(B_i \cap A_n)}$ *on a donc*

$$\int_{A_n} s dm = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot m(B_i \cap A_n). \tag{3.2}$$

Pour tout $i = 1, ..., m$*, la suite* $(B_i \cap A_n)_n$ *est croissante et*

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} (B_i \cap A_n) = B_i \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) = B_i \cap E = B_i,$$

dans (3.2), on peut passer à la limite quand n *tend vers* $+\infty$*, en appliquant la continuité croissante de mesure* m

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{A_n} s dm = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot \left(\lim_{n \to +\infty} m(B_i \cap A_n) \right) = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot m(B_i) = \int s dm.$$

Faisant tendre n *vers l'infini dans 3.1 on obtient aussi, pour tout* $\alpha \in]0,1[$ *et tout* $s \in \mathcal{E}_+$ *avec* $s \leqslant f$ *on a*

$$\alpha \cdot \int s dm \leqslant L.$$

■

Corollary 3.1 *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$*, alors*

$$\int_E \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) dm = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n dm.$$

Preuve. *On applique le théorème de la convergence monotone à la suite* $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *définie par*

$$g_n = \sum_{p=0}^{n} f_p.$$

On a $g_n \in M_+$ *et*

$$g_n \longrightarrow f = \sum_{p=0}^{+\infty} f_p \quad , \quad n \longrightarrow +\infty,$$

de plus

$$g_{n+1} \geqslant g_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ donc } f \in \mathcal{M}_+,$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E g_n dm = \int_E f dm,$$

i.e :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \int_E \left(\sum_{p=0}^{n} f_p \right) dm &= \int_E \left(\sum_{p=0}^{+\infty} f_p \right) dm \\ &\Longrightarrow \sum_{p=0}^{+\infty} \int_E f_p dm = \int_E \left(\sum_{p=0}^{+\infty} f_p \right) dm. \end{aligned}$$

■

Proposition 3.3 *Soient* $f, g \in M_+$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}_+$. *Alors*

1. $$\int_E (f+g)\, dm = \int_E f dm + \int_E g dm.$$
2. $$\int_E (\alpha f)\, dm = \alpha \int_E f dm.$$
3. *Si* $f \geqslant g$ *alors*
$$\int_E f dm \geqslant \int_E g dm.$$
4. *Si* $m(E) = 0$, *alors*
$$\int_E f dm = 0.$$

Preuve.

1. *Comme* $f, g \in \mathcal{M}_+, \exists (\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ *et croissante telles que*
$$f = \lim_{n \to +\infty} \theta_n \text{ et } g = \lim_{n \to +\infty} \varphi_n.$$
On a
$$f + g = \lim_{n \to +\infty} (\theta_n + \varphi_n),$$
d'après le Théorème de la convergence monotone
$$\begin{aligned} \int_E (f+g)\, dm &= \lim_{n \to +\infty} (\theta_n + \varphi_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\int_E \theta_n dm + \int_E \varphi_n dm \right) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \int_E \theta_n dm + \lim_{n \to +\infty} \int_E \varphi_n dm \\ &= \int_E f dm + \int_E g dm. \end{aligned}$$

2. On a

$$\alpha f = \alpha \lim_{n\to+\infty} \theta_n = \lim_{n\to+\infty} (\alpha\theta_n),$$

donc

$$\int_E (\alpha f)\, dm = \lim_{n\to+\infty} \int_E \alpha\theta_n dm = \alpha \lim_{n\to+\infty} \int_E \theta_n dm = \alpha \int_E f dm.$$

3. Soient $f, g \in M_+$ telles que $f \geqslant g$ on a $f - g \in M_+$, d'après (1) ona :

$$\int_E f dm = \int_E [(f-g)+g]\, dm = \int_E (f-g)\, dm + \int_E g dm \geqslant \int_E g dm,$$

car

$$\int_E (f-g)\, dm \geqslant 0.$$

Conséquence : *Si $f, g \in M_+$ telles que $f \geqslant g$ et $\int_E g dm < +\infty$, alors*

$$\int_E (f-g)\, dm = \int_E f dm - \int_E g dm.$$

4. Pour toute fonction étagée positive $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$ on a

$$\int_E \varphi dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i) = 0 \text{ car } A_i \subset E \text{ et } m(E) = 0,$$

d'ou

$$\int_E f dm = \sup\left\{ \int_E g dm;\ g \in E_+ : g \leqslant f \right\} = 0.$$

■

Définition 3.3 *Soit (E, T, m) un espace mesuré, et $f \in M_+$, $A \in T$, on définit l'intégrale de Lebesgue de f sur A par*

$$\int_A f dm = \int_A f 1_A dm \text{ où } (f1_A)(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ , sinon} \end{cases}, f1_A \in M_+,$$

si $m(A) = 0$, alors

$$\int_A f dm = 0.$$

Proposition 3.4 *Soit (E, T, m) un espace mesuré, $A, B \in T$ tels que $A \cap B = \varnothing$ et $f, g \in M_+$. Alors :*

1.
$$\int_{A\cup B} f dm = \int_A f dm + \int_B f dm.$$

2. Si $f = g$ p.p alors $\int_E f dm = \int_E g dm$.

Preuve.

1. *On a :*

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} f dm &= \int_E f1_{A\cup B} dm = \int_E (f1_A + f1_B)\, dm, \text{ (car } 1_{A\cup B} = 1_A + 1_B\text{)}\\ &= \int_E f1_A dm + \int_E f1_B dm = \int_A f dm + \int_B f dm.\end{aligned}$$

2. *Soit $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et $f1_{A^c} = g1_{A^c}$ (i.e : $f(x) = g(x)$ sur A), on a*

$$f1_{A^c} \text{ et } g1_{A^c} \in M_+ \text{ et } \int_E f1_{A^c} dm = \int_E g1_{A^c} dm.$$

De plus

$$\int_E f dm = \int_A f dm + \int_{A^c} f dm = \int_E f1_{A^c} dm,$$

$$\begin{aligned}\int_E g dm &= \int_A g dm + \int_{A^c} g dm = \int_E g1_{A^c} dm\\ &= \int_E f1_{A^c} dm = \int_E f dm.\end{aligned}$$

Conséquence : *Si $f \in \mathcal{M}_+$ telle que $f = 0$ p.p alors :*

$$\int_E f dm = 0.$$

■

3.2.2 Lemme de Fatou

Lemme 3.1 *(lemme de Fatou) Soient (E, T, m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ alors*

$$\int_E \underline{\lim}_n f_n dm \leqslant \underline{\lim}_n \int_E f_n dm = \underline{\lim}_n \left(\inf_{p\geqslant n} \int_E f_p dm \right).$$

Preuve. *On a*

$$\underline{\lim}_n f_n = \lim_n \inf_{p\geqslant n} f_p,$$

on pose $g_n = \inf_{p\geqslant n} f_p$ alors $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \underline{\lim}_n f_n$, $n \longrightarrow \infty$, d'après le théorème de la convergence monotone

$$\underline{\lim}_n f_n \in \mathcal{M}_+ \text{ et } \lim_{n\to\infty} \int_E g_n dm = \int_E \lim_{n\to\infty} g_n dm,$$

i.e :

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \inf_{p\geqslant n} f_p = \int_E \underline{\lim}_n f_n dm.$$

D'autre part pour tout $p \geqslant n$, on a $g_n \leqslant f_n$ donc $p \geqslant n$

$$\int_E g_n dm \leqslant \int_E f_p dm \Longrightarrow \int_E g_n dm \leqslant \inf_{p\geqslant n} \int_E f_p dm.$$

En passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, *il vient :*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_E g_n dm &= \int_E \underline{\lim}_n f_n dm \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf_{p\geqslant n} \int_E f_p dm \\ &= \underline{\lim}_n \int_E f_n dm. \end{aligned}$$

■

3.3 Mesures et probabilités de densité

3.3.1 Mesure de densité

Définition 3.4 *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}_+$, $\int_A f dm = \int f 1_A dm$, *on définit* $\mu : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ *par*

$$\mu(A) = \int f 1_A dm = \int_A f dm \ , \forall A \in T,$$

μ *est une sur* T *appelée* ***mesure de densité*** *de* f *par rapport à* m *et notée* $\mu = fm$.

Exemple 3.2 *"Probabilité de densité"*

Définition 3.5 *Soit* P *une probabilité sur* $B(\mathbb{R})$ P *est une probabilité de densité (par rapport à Lebesgue) si*

$$\exists f \in \mathcal{M}_+ \text{ telle que } \int f d\lambda = 1 \text{ et } P(A) = \int f 1_A d\lambda = \int_A f d\lambda \ , \forall A \in B(\mathbb{R}),$$

Rappel : Une loi de probabilité est par définition une probabilité sur $B(\mathbb{R})$.

Loi uniforme $U(a, b)$: Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$: $\frac{1}{a-b} 1_{[a,b]}$

$$P(A) = \frac{1}{a-b} \int 1_{[a,b]} 1_A d\lambda, \ \forall A \in T.$$

Loi exponentielle $\varepsilon(\tau)$: Soit $\tau > 0$, la loi exponentielle est définie par la densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ , \text{ si } x < 0 \\ \tau e^{-\tau x} \ , \text{ si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Loi de Gauss $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: Soit $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. La loi de Gauss de paramètre (μ, σ) est définie par la densité f

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

3.4 L'espace L^1 des fonctions intégrables

Remarque 3.3 *si $f \in \mathcal{M}$ (l'ensemble des fonctions mesurables), $|f|$, f^+, $f^- \in \mathcal{M}$. La monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne*

$$\int_E f^+ dm \leqslant \int_E |f|\, dm \text{ et } \int_E f^- dm \leqslant \int_E |f|\, dm,$$

avec

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \text{ et } f^-(x) = \min(f(x), 0) = \max(-f(x), 0), \ (|f|(x) = |f(x)|\,).$$

Définition 3.6 *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable. On dit que f est intégrable au sens de Lebesgue si*

$$\int_E |f|\, dm < +\infty.$$

Dans le cas

$$\int_E f^+ dm < +\infty \quad \text{et} \quad \int_E f^- dm < +\infty,$$

on pose alors

$$\int_E |f|\, dm = \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm \in \mathbb{R}.$$

On note $\mathcal{L}^1$ l'ensemble des fonctions intégrables.

Proposition 3.5 *f est intégrable si et seulement si f^+ et f^- le sont.*
Preuve. *"$\Longrightarrow$" si f est intégrable , on a $\int_E |f|\, dm < +\infty$*

$$0 \leqslant f^+ \leqslant |f| \Longrightarrow 0 \leqslant \int_E f^+ dm \leqslant \int_E |f|\, dm < +\infty,$$

$$0 \leqslant f^- \leqslant |f| \Longrightarrow 0 \leqslant \int_E f^- dm \leqslant \int_E |f|\, dm < +\infty,$$

d'où f^+ et f^- sont intégrables.

"$\Longleftarrow$" si f^+ et f^- sont intégrables, alors

$$\int_E f^+ dm < +\infty \quad \text{et} \quad \int_E f^- dm < +\infty,$$

donc

$$\int_E |f|\, dm = \int_E f^+ dm + \int_E f^- dm < +\infty,$$

d'où le résultat :

$$f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow \int_E f^+ dm < +\infty \quad \text{et} \quad \int_E f^- dm < +\infty.$$

■

Exemple 3.3 1. $\theta_n = \dfrac{1}{2n} \cdot 1_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}^*$ *est intégrable car*

$$\int_{\mathbb{R}} \theta_n d\lambda = \frac{1}{2n} \lambda([0, n]) = \frac{1}{2} \quad , \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. $\theta = 1_{[0,+\infty[}$ *est non intégrable car*

$$\int_{\mathbb{R}} \theta d\lambda = \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,+\infty[} d\lambda = \lambda([0,+\infty[) = +\infty.$$

3.4.1 L'éspace L^1(Cas complexe)

Si $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable, alors $(\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)$ sont toutes deux mesurables), on dit que f est intégrable et on note $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ si

$$\int_E |f|\, dm = \int_E \sqrt{(\mathrm{Re}\, f)^2 + (\mathrm{Im}\, f)^2} dm < \infty,$$

on pose alors

$$\int_E f dm = \int_E \mathrm{Re}(f) dm + i \int_E \mathrm{Im}(f) dm.$$

Proposition 3.6 *Soit (E, T, m) un espace mesuré. Alors*

1. *$\mathcal{L}^1$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
2. *Lapplication : $f \longmapsto \int_E f dm$ est linéaire de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}$.*
3. *Soient $f, g \in \mathcal{L}^1$ telles que $f \leqslant g$ alors $\int_E f dm \leqslant \int_E g dm$.*
4. *$\forall f \in \mathcal{L}^1 : \left|\int_E f dm\right| \leqslant \int_E |f|\, dm$.*

Preuve.

1. Soient $f, g \in \mathcal{L}^1$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_E |\alpha f + \beta g|\, dm \leqslant |\alpha| \int_E |f|\, dm + |\beta| \int_E |g|\, dm < +\infty,$$

donc $(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{L}^1$.

2. On commence par la **linéarité :** Soient $f, g \in \mathcal{L}^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrons

i) $\int_E (\alpha f)\, dm = \alpha \int_E f dm$.

ii) $\int_E (f + g)\, dm = \int_E f dm + \int_E g dm$.

i) On a :

$$(\alpha f)^+ = \begin{cases} \alpha f^+ & \text{si } \alpha \geqslant 0 \\ -\alpha f^- & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \quad , \ (\alpha f)^- = \begin{cases} \alpha f^- & \text{si } \alpha \geqslant 0 \\ -\alpha f^+ & \text{si } \alpha < 0, \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_E (\alpha f)\, dm &= \int_E (\alpha f)^+ \, dm - \int_E (\alpha f)^- \, dm \\ &= \begin{cases} \int_E \alpha f^+ dm - \int_E \alpha f^- dm & \text{si } \alpha \geqslant 0 \\ \int_E (-\alpha f^-)\, dm - \int_E (-\alpha f^+)\, dm & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha \left(\int_E f^+ dm - \int_E f^- dm\right) & \text{si } \alpha \geqslant 0 \\ -\alpha \left(\int_E f^- dm - \int_E f^+ dm\right) & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha \int_E f dm & \text{si } \alpha \geqslant 0 \\ \alpha \int_E f dm & \text{si } \alpha < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

ii) On a

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$
$$\Longrightarrow (f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$
$$\Longrightarrow \int_E (f+g)^+ \, dm + \int_E f^- dm + \int_E g^- dm = \int_E (f+g)^- \, dm + \int_E f^+ dm + \int_E g^+ dm$$
$$\Longrightarrow \int_E (f+g)^+ \, dm - \int_E (f+g)^- \, dm = \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm + \int_E g^+ dm - \int_E g^- dm$$
$$\Longrightarrow \int_E (f+g) \, dm = \int_E f dm + \int_E g dm.$$

3. Soient $f, g \in \mathcal{L}^1$ telles que $f \leqslant g$

$$\Longrightarrow f^+ - f^- \leqslant g^+ - g^-$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad f^+ + g^- \leqslant f^- + g^+ \\
&\Longrightarrow \quad \int_E \left(f^+ + g^-\right) dm \leqslant \int_E \left(f^- + g^+\right) dm \\
&\Longrightarrow \quad \int_E f^+ dm + \int_E g^- dm \leqslant \int_E f^- dm + \int_E g^+ dm \\
&\Longrightarrow \quad \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm \leqslant + \int_E g^+ dm - \int_E g^- dm \\
&\Longrightarrow \quad \int_E f dm \leqslant \int_E g dm.
\end{aligned}$$

4. Soit $f \in \mathcal{L}^1$, on a

$$\begin{aligned}
\left| \int_E f dm \right| &= \left| \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm \right| \\
&\leqslant \int_E f^+ dm + \int_E f^- dm \\
&= \int_E f^+ dm - \int_E |f| \, dm.
\end{aligned}$$

■

Conséquence : Si $f, g \in \mathcal{L}^1$telles que $f = g$ p.p alors $\int_E f dm = \int_E g dm$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\left| \int_E f dm - \int_E g dm \right| &= \left| \int_E (f-g) \, dm \right| \\
&\leqslant \int_E |f-g| \, dm = 0,
\end{aligned}$$

car

$$|f-g| = 0 \text{ p.p (Si } f \in M_+,\ f = 0 \text{ p.p} \Longrightarrow \int_E f dm = 0,$$

d'où

$$\int_E f dm = \int_E g dm.$$

■

3.4.2 Théorème de la convergence dominée

Soit (E, T, m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables convergeant vers une fonction f presque partout et $g \in \mathcal{L}^1$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leqslant g \quad \text{p.p},$$

alors

$$f \in \mathcal{L}^1 \text{ et } \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_E f_n dm = \int_E f dm.$$

Proposition 3.7 *Soit (E, T, m) un espace mesuré, $A \in T$ telle que $m(A) < \infty$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions intégrables bornées convergeant vers f, alors*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_A f_n dm = \int_A f dm \text{ et } \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_E |f_n - f|\, dm = 0.$$

Proposition 3.8 *"Corollaire" Soit (E, T, m) un espace mesuré, $g \in \mathcal{L}^1, (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est convergente telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{p=0}^{n} f_p\right| \leqslant g,$$

alors

$$\int_E \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) dm = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n dm.$$

3.4.3 Applications du Théorème de la convergence dominée

Intégrales dépendant d'un paramètre

Soit (E, T, m) un espace mesuré, $f : E \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, on définit l'application : $\begin{array}{llll} f(.,t) & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ et on suppose que $f(.,t) \in \mathcal{L}^1, \forall t \in \mathbb{R}$, on note F l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$F(t) = \int_E f(.,t) dm = \int_E f(x,t) dm(x).$$

Theorème 3.2 *(Continuité sous l'intégrale) : Si*

1. $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f(x,t)| \leqslant g(x)$ *p.p où* $g \in \mathcal{L}^1$
2. *L'application* $t \longmapsto f(x,t)$ *est continue en* t_0 *pour presque tout* $x \in E$*. Alors* F *est continue en* t_0

Theorème 3.3 *(Dérivabilité sous l'intégrale) : Si $t \longmapsto f(x,t)$ est dérivable p.p et que sur cet ensemble $\left|\frac{\partial}{\partial t}(f(x,t))\right| \leqslant g(x)$ où $g \in \mathcal{L}^1$. Alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(t) = \int_E \dfrac{\partial}{\partial t}(f(x,t))\, dm(x)$.*

3.5 comparaison entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Riemann

3.5.1 Intégrabilité au sens de Riemann

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et soit $x_0, x_1, ..., x_n$ un ensemble fini de points tels que $a = x_0 <, x_1 <, ..., x_n = b$. Dans chaque $[x_k, x_{k+1}]$ on choisit ζ_k et on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \left(x_{k+1} - x_k\right) \quad \text{tel que} \quad y_k = f(x_k).$$

Si $S_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} S$ (indépendante du choix de x_k) alors S s'appelle intégrale de Riemann sur $[a,b]$ et notée $\int\limits_a^b f(x)dx.$

Idée de Lebesgue : approcher l'aire sous le graphe de la fonction par une union de rectangles (comme Riemann).

Dans le cas de Riemann, on s'interesse à la variation de la fonction sur son domaine de définition.

Dans le cas de Lebesgue, on définit le rectangle en fonction des valeurs de la fonction.

Définition 3.7 *Une partie A de $[a,b]$ est mesurable au sens de Riemann si 1_A est Riemann intégrable.*

Exemple 3.4 $1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ *n'est pas Riemann intégrable sur $[0,1]$ donc $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ n'est pas Riemann mesurable.*

Proposition 3.9 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable. Alors f est mesurable pour la tribu $\widetilde{B}\left([a,b]\right)$.*

Proposition 3.10 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est intégrable au sens de Riemann si et seulement si f est continue p.p (l'ensemble de discontinue de f est négligeable pour la mesure de Lebesgue λ).*

Proposition 3.11 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée définie sur un intervalle borné $[a,b]$ $(b > a)$. Si f est intégrable au sens de Riemann alors f est intégrable au sens de Lebesgue*

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Remarque 3.4 *l'inverse est en générale faux.*

Exemple 3.5 *La fonction de Dirichlet définie sur $[0,1]$ par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f = 1$ p.p , f est Lebesgue intégrable et son intégrale est égale à 1, alors son intégrale de Riemann n'est pas définie.

Proposition 3.12 *Soit* $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *(*$-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$*) une fonction mesurable telle que* f *est bornée sur tout compact* $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$ *et Riemann intégrable. Si l'intégrale de Riemann généralisée* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *est absolument convergente, alors* f *est Lebesgue intégrable sur* $]a,b[$ *et donc sur* $[a,b]$ *et on a*

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{]a,b[} f d\lambda = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{d \longrightarrow b \\ c \longrightarrow a}} \int\limits_c^d f(x)dx.$$

Conséquence *: Si* $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue et d'intégrale de Riemann généralisée* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *absolument convergente, alors* f *est Lebesgue intégrable sur* $]a,b[$ *et*

$$\int_{]a,b[} f d\lambda = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Remarque 3.5 *Si l'intégrale de Riemann généralisée* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *n'est pas absolument convergente, alors* $\int_{]a,b[} |f| \, d\lambda = +\infty$ *donc* f *n'est pas Lebesgue intégrable.*

Exemple 3.6 *La fonction* $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ *n'est pas Lebesgue intégrable sur* $\mathbb{R}_+$ *car*

$$\lim_{A \longrightarrow \infty} \int\limits_0^A \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty.$$

3.6 Les espaces $\mathbf{L}^p$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$

3.6.1 Les espaces $\mathbf{L}^p$ $(1 \leqslant p < +\infty)$

Définition 3.8 *Soit* (E,T,m) *un espace mesuré,* $1 \leqslant p < +\infty$ *et* $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. On dit que* $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E,T,m) = \mathcal{L}^p$ *si*

$$\int_E |f|^p \, dm < +\infty.$$

Donc $f \notin \mathcal{L}^p$ *si*

$$\int_E |f|^p \, dm = +\infty.$$

Proposition 3.13 *Soit (E,T,m) un espace mesuré et $1 \leqslant p < +\infty$, alors $\mathcal{L}^p$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Preuve.

i) *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^p$. On a $\alpha f \in \mathcal{M}$ et*

$$\int_E |\alpha f|^p \, dm = |\alpha|^p \int_E |f|^p \, dm < +\infty,$$

donc $\alpha f \in \mathcal{L}^p$

ii) *Soient $f, g \in \mathcal{L}^p$, on a $f + g \in M$ et*

$$\begin{aligned} |f+g|^p &\leqslant [|f| + |g|]^p \leqslant [2 \sup(|f|, |g|)]^p \\ &\leqslant 2^p [|f|^p + |g|^p] \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_E |f+g|^p \, dm &\leqslant 2^p \int_E |f|^p \, dm + 2^p \int_E |g|^p \, dm < +\infty \\ &\Longrightarrow (f+g) \in \mathcal{L}^p. \end{aligned}$$

■

3.6.2 Inégalité de Young

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (p et q sont dits cojugués). Alors

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

3.6.3 Inégalité de Holder

Soit (E,T,m) un espace mesuré et $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et soient $f, g \in \mathcal{L}^p$. Alors $fg \in \mathcal{L}^1$ et

$$\int_E |fg| \, dm \leqslant \left(\int_E |f|^p \, dm \right)^{1/p} \left(\int_E |g|^q \, dm \right)^{1/q}.$$

i) Montrons que $fg \in \mathcal{L}^1$. On a $fg \in \mathcal{M}$ et d'après l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} |fg| &\leqslant \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} \\ &\Longrightarrow \int_E |fg| \, dm \leqslant \frac{1}{p} \int_E |f|^p \, dm + \frac{1}{q} \int_E |g|^q \, dm < +\infty, \end{aligned}$$

donc $fg \in \mathcal{L}^1$.

ii) Montrons l'inégalité de Holder

a) Si $\int_E |f|^p \, dm = 0$ ou $\int_E |g|^q \, dm = 0$ (i.e : $f = 0$ p.p ou $g = 0$ p.p)

$$fg = 0 \text{ p.p et } \int_E |fg| \, dm = 0.$$

b) Si $\int_E |f|^p \, dm \neq 0$ et $\int_E |g|^q \, dm \neq 0$. On pose

$$\widetilde{f} = \frac{f}{\left(\int_E |f|^p \, dm\right)^{1/p}} \text{ et } \widetilde{g} = \frac{g}{\left(\int_E |g|^q \, dm\right)^{1/q}},$$

on a

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{f}\widetilde{g}\right| &\leqslant \frac{1}{p}\left|\widetilde{f}\right|^p + \frac{1}{q}\left|\widetilde{g}\right|^q \\
&\Longrightarrow \frac{|fg|}{\left(\int_E |f|^p \, dm\right)^{1/p}\left(\int_E |g|^q \, dm\right)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\int_E |f|^p \, dm} + \frac{1}{q}\frac{|g|^q}{\int_E |g|^q \, dm},
\end{aligned}$$

en passant à l'intégrale , on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\int_E |fg| \, dm}{\left(\int_E |f|^p \, dm\right)^{1/p}\left(\int_E |g|^q \, dm\right)^{1/q}} &\leqslant \frac{1}{p}\frac{\int_E |f|^p \, dm}{\int_E |f|^p \, dm} + \frac{1}{q}\frac{\int_E |g|^q \, dm}{\int_E |g|^q \, dm} \\
&\leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int_E |fg| \, dm \leqslant \left(\int_E |f|^p \, dm\right)^{1/p}\left(\int_E |g|^q \, dm\right)^{1/q}.$$

3.6.4 Inégalité de Minkowski

Soit (E, T, m) un espace mesuré et $1 \leqslant p < +\infty$ et soient $f, g \in \mathcal{L}^p$. Alors $(f+g) \in \mathcal{L}^p$ et

$$\left(\int_E |f+g|^p \, dm\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E |f|^p \, dm\right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p \, dm\right)^{1/p}.$$

Preuve. Soit q l'exopsant conjugué de p (i.e : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

On a

$$|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q \text{ car } \left(|f+g|^{p-1}\right)^q = |f+g|^{(p-1)q} = |f+g|^p.$$

D'après l'inégalité de Holder

$$\int_E |f|\,|f+g|^{p-1} \, dm \leqslant \left(\int_E |f|^p \, dm\right)^{1/p}\left(\int_E |f+g|^p \, dm\right)^{1/q}$$

$$\int_E |g|\,|f+g|^{p-1} \, dm \leqslant \left(\int_E |g|^p \, dm\right)^{1/p}\left(\int_E |f+g|^p \, dm\right)^{1/q}$$

donc

$$\int_E |f+g|^p \, dm = \int_E |f+g|\,|f+g|^{p-1} \, dm \leqslant \int_E |f|\,|f+g|^{p-1} \, dm + \int_E |g|\,|f+g|^{p-1} \, dm,$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\int_E |f+g|^p \, dm &\leqslant \left[\left(\int_E |f|^p \, dm\right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p \, dm\right)^{1/p}\right]\left(\int_E |f+g|^p \, dm\right)^{1/q} \\
&\Longrightarrow \left(\int_E |f+g|^p \, dm\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E |f|^p \, dm\right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p \, dm\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

$$\text{car } \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$$

■

Proposition 3.14 *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré et* $1 \leqslant p < +\infty$ *. Alors l'application :* $f \longmapsto \|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, dm\right)^{1/p}$ *est une semi-norme sur* $\mathcal{L}^p$.
Preuve. *On a*

i) $\|f\|_p \in \mathbb{R}_+, \forall f \in \mathcal{L}^p$ *et*

$$\|f\|_p = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \ p.p$$

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{L}^p$

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_p &= \left(\int_E |\alpha f|^p \, dm\right)^{1/p} = |\alpha| \left(\int_E |f|^p \, dm\right)^{1/p} \\ &= |\alpha| \, \|f\|_p \, . \end{aligned}$$

iii) $\forall f, g \in \mathcal{L}^p$:

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \ \textit{(Inégalité de Minkowski).}$$

■

Définition 3.9 *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré et* $1 \leqslant p < +\infty$ *. On définit l'espace* $L^p(E, T, m) = L^p$ *comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions* $\mathcal{L}^p$ *pour la relation déquivalence = p.p. Donc*

$$L^p = \left\{ \mathring{f} / f \in \mathcal{L}^p \right\} \ \text{avec} \ \mathring{f} = \{ g \in \mathcal{L}^p / g = f \ p.p \}$$

Si $F \in L^p$ *et* $f \in F$*. On pose* $F = \mathring{f}$

$$\|F\|_p = \|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, dm\right)^{1/p} .$$

Remarque 3.6 *Toutes les inégalités précédentes restent vraies pour les* L^p.

Proposition 3.15 *L'application :* $f \longmapsto \|f\|_p$ *est une norme sur* L^p.

Theorème 3.4 *(Théorème de Fischer-Riesz)* $\left(L^p, \|.\|_p\right)$ *est un espace de Banach (i.e : un espace vectoriel normé complet).*

3.7 L'espace $\mathbf{L}^\infty$

Définition 3.10 *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré et* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *mesurable. On dit que* f *est essentiellement bornée et on note* $f \in \mathcal{L}^\infty(E, T, m) = \mathcal{L}^\infty$ *s'il existe* $c \in \mathbb{R}_+$ *telle que* $|f| \leqslant c$ *p.p.*

Proposition 3.16 *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. Alors* $\mathcal{L}^\infty$ *est un* $-\mathbb{R}$ *espace vectoriel.*
Preuve.

i) *Soient* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $f \in \mathcal{L}^\infty$ *alors* $\exists c \in \mathbb{R}_+$ *telle que* $|f| \leqslant c$ *p.p, on a* $\alpha f \in \mathcal{M}$ *et* $|\alpha f| \leqslant |\alpha| \, |f| \leqslant |\alpha| \, c$ *p.p d'ou* $\alpha f \in \mathcal{L}^\infty$.

ii) *Soient* $f, g \in \mathcal{L}^\infty$.

$f \in \mathcal{L}^\infty \Longrightarrow \exists c \in \mathbb{R}_+$ *telle que* $|f| \leqslant c$ *p.p, donc* $\exists A \in T : m(A) = 0$ *et* $|f| \leqslant c$ *sur* A^C.

$g \in \mathcal{L}^\infty \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_+$ *telle que* $|g| \leqslant k$ *p.p, donc* $\exists B \in T : m(B) = 0$ *et* $|g| \leqslant k$ *sur* B^C.

On a $(f+g) \in \mathcal{M}$ *et* $\exists D = A \cup B \in T : m(D) = 0$ *et*

$$|f+g| \leqslant |f| + |g| \leqslant c + k + D^C,$$

d'où

$$|f+g| \leqslant c + k \quad p.p \quad et \quad (f+g) \in \mathcal{L}^\infty.$$

■

Proposition 3.17 *Si* $f \in \mathcal{L}^\infty$, *on pose*

$$\|f\|_\infty = \inf \{c \in \mathbb{R}_+ : |f| \leqslant c \quad p.p\} \quad et\ on\ a \quad |f| \leqslant \|f\|_\infty \quad p.p.$$

Preuve. *On suppose que* $f \in \mathcal{L}^\infty$. *Par définition de la borne inférieure. On a*

$$\exists\, (C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \{c \in \mathbb{R}_+ : |f| \leqslant c \quad p.p\}$$

telle que $C_n \longrightarrow \|f\|_\infty$ *quand* $n \longrightarrow \infty$, *donc pour tout* $n \in \mathbb{N}, \exists A_n \in T$ *telle que* $m(A_n) = 0$ *et* $|f| \leqslant c_n$ *sur* A_n^C, *on pose* $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$, *alors on a* $m(A) = 0$ *et* $|f| \leqslant c_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ *sur* A^C. *Comme* $C_n \longrightarrow \|f\|_\infty$ *quand* $n \longrightarrow \infty$. *On déduit que*

$$|f| \leqslant \|f\|_\infty \quad sur\ A^C \quad d'où \ |f| \leqslant \|f\|_\infty \quad p.p.$$

■

Proposition 3.18 *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. Alors l'application* $f \longmapsto \|f\|_p$ *est une semi-norme sur* $\mathcal{L}^\infty$.

Preuve. *On a*

i) $\|f\|_\infty, \forall\ f \in \mathcal{L}^\infty$

ii)

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty \quad &= \quad 0 \Longleftrightarrow \inf \{c \in \mathbb{R}_+ : |f| \leqslant c \quad p.p\} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad |f| \leqslant \|f\|_\infty = 0 p.p \\ &\Longleftrightarrow \quad f = 0\ p.p\end{aligned}$$

iii) *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $f \in \mathcal{L}^\infty$, *alors* $\alpha f \in \mathcal{L}^\infty$ *et*

$$\begin{aligned}\|\alpha f\| &= \inf \{c \in \mathbb{R}_+ : |\alpha f| \leqslant c \quad p.p\} \\ &= \inf \{c \in \mathbb{R}_+ : |\alpha|\, |f| \leqslant c \quad p.p\} \\ &= |\alpha|\, \|f\|_\infty .\end{aligned}$$

iv) *Si* $f, g \in \mathcal{L}^\infty$, *on a*

$$\begin{aligned}(f+g) \quad &\in \quad \mathcal{L}^\infty \ et \ |f+g| \leqslant |f| + |g| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \ \ p.p \\ &\Longrightarrow \quad \|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .\end{aligned}$$

■

Définition 3.11 *Soit (E,T,m) un espace mesuré. On définit l'espace $L^{\infty}_{\mathbb{R}}(E,T,m) = L^{\infty}$, comme l'ensemble des classes d'équivalences des fonctions $\mathcal{L}^{\infty}$ pour la relation "$=$ p.p". Donc*

$$L^{\infty} = \left\{ \mathring{f} / f \in \mathcal{L}^{\infty} \right\} \text{ avec } \mathring{f} = \{ g \in \mathcal{L}^{\infty} : g = f \ \ p.p \}$$

Si $F \in L^{\infty}$ et $f \in F$. On pose $F = \mathring{f}$

$$\|F\|_{\infty} = \|f\|_{\infty} = \inf \{ c \in \mathbb{R}_{+} : |f| \leqslant c \ \ p.p \} .$$

Proposition 3.19 *L'application : $f \longmapsto \|f\|_{p}$ est une norme sur L^{∞}.*

Theorème 3.5 $(L^{\infty}, \|.\|_{\infty})$ *est un espace de Banach.*

Proposition 3.20 *"Comparaison des L^{p} $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ Soit (E,T,m) un espace mesuré fini $(m(E) < +\infty)$ $p, q \in \mathbb{R}_{+}$ tels que $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$. Alors $L^{q} \subset L^{p}$.*

Preuve.

– *Si $q = +\infty$ et $1 \leqslant p < +\infty$. On a $|f|^{p} \leqslant \|f\|_{\infty}^{p}$, donc*

$$\int_{E} |f|^{p} \, dm \leqslant \int_{E} \|f\|_{\infty}^{p} \, dm \leqslant \|f\|_{\infty}^{p} \, m(E) < +\infty,$$

d'où

$$f \in L^{p} \text{ et } \|f\|_{p} \leqslant m(E)^{1/p} \cdot \|f\|_{\infty} .$$

– *Supposons que $q < +\infty$ et soit $1 \leqslant p \leqslant q$, $f \in L^{q}$, alors*

$$\begin{aligned} \int_{E} |f|^{q} \, dm \quad &< \quad +\infty \Longrightarrow \int_{E} (|f|^{p})^{q/p} \, dm < +\infty \\ &\Longrightarrow \quad |f|^{p} \in L^{q/p}. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Holder aux fonctions $|f|^{p}$ et 1 avec les exposants conjugués $\alpha = \dfrac{q}{p}$ et $\beta = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} = \left(1 - \dfrac{p}{q}\right)^{-1}$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{E} |f|^{p} \, dm \quad &\leqslant \quad \left(\int_{E} (|f|^{p})^{q/p} \, dm \right)^{p/q} \left(\int_{E} 1 dm \right)^{1 - \frac{p}{q}} \\ &= \quad \|f\|_{q}^{p} \, m(E)^{1 - \frac{p}{q}} < +\infty, \end{aligned}$$

donc

$$f \in L^{p} \text{ et } \|f\|_{p} \leqslant m(E)^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \cdot \|f\|_{q} .$$

■

Remarque 3.7 *1. Si (E,T,m) est un espace probabilisé $(m(E) = 1)$ et si $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$, alors*

$$L^{\infty} \subset L^{q} \subset L^{p} \subset L^{1},$$

et

$$\|f\|_{1} \leqslant \|f\|_{p} \leqslant \|f\|_{q} \leqslant \|f\|_{\infty} .$$

2. *Si la condition $m(E) < +\infty$ n'est pas vérifiée, les espaces L^p sont en général icomparables.*

Exemple 3.7 *Si E n'est pas de mesure finie, $f = 1 \in L^\infty$ mais pas dans L^1.*

–
$$\frac{1}{1+|x|} \in L^2\left(\mathbb{R}^+, B(\mathbb{R}^+), \lambda\right) \diagdown L^1\left(\mathbb{R}^+, B(\mathbb{R}^+), \lambda\right).$$

–
$$\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1\left([0,1]\right) \diagdown L^2\left([0,1]\right).$$

–
$$\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1\left([0,1]\right) \diagdown L^\infty\left([0,1]\right).$$

3.8 Exercices corrigés

Exercise 3.1 *Soit la suite des fonctions $f_n : (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définit par*

$$f_n(x) = \chi_{[0,n[}(x)\frac{1}{E(x)!},$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

1. *Donner la limite simple de la suite $(f_n)_n$.*
2. *Calculer $\int \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x)$.*

Solution 3.1 1. *Puisque la suite $([0,n[)_{n\geqslant 1}$ est croissante et*

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}[0,n[= \mathbb{R}_+,$$

d'autre part, on a

$$\chi_{\underline{\lim} A_n} = \liminf_n \chi_{A_n} \ \ et\ \chi_{\overline{\lim} A_n} = \limsup_n \chi_{A_n}.$$

donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \chi_{[0,n[}(x) = \chi_{\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}[0,n[}(x) = \chi_{\mathbb{R}_+}(x) = 1, \ \ pour\ tout\ x \in \mathbb{R}_+,$$

d'où

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \frac{1}{E(x)!}, \ pour\ tout\ x \in \mathbb{R}_+.$$

2. *La suite $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ est croissante pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Les fonctions positives $x \mapsto f_n(x)$ sont décroissantes alors mesurables. D'après le théorème de la convergence monotone on a*

$$\int \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) = \int \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) d\lambda(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int f_n(x) d\lambda(x),$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\int f_n(x)d\lambda(x) &= \int_{[0,n[} \frac{1}{E(x)!}d\lambda(x) = \int_{\bigcup_{k=0}^{n-1}[k,k+1[} \frac{1}{E(x)!}d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[k,k+1[} \frac{1}{E(x)!}d\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[k,k+1[} \frac{1}{k!}\lambda([k,k+1[) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!},
\end{aligned}$$

d'où

$$\int \frac{1}{E(x)!}d\lambda(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Exercise 3.2 *Soit (E,T,m) un espace mesuré et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. Monter que*

$$\lim_{m(A)\longrightarrow 0} \int_A f(x)dm = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 :\ \forall A \in T,\ m(A) < \delta \Longrightarrow \int_A fdm < \varepsilon.$$

1. *Calculer*
$$\int_{[0,1]} -\frac{\log(1-x)}{x}dm \quad et \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{[0,1]} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n e^{\frac{n}{2n+x}}dm.$$

Solution 3.2 1. **i)** *Le cas où f est bornée :*

$$\forall x \in E,\ \exists M,\ f(x) \leqslant M$$

$$\int_A fdm \leqslant M.m(A) \Longrightarrow m(A) < \frac{\varepsilon}{M} \Longrightarrow \int_A fdm < \varepsilon,$$

ii) *Le cas où f n'est pas bornée : On définit dans ce cas la suite (A_n) de la forme*

$$A_n = \{x,\ f(x) \leqslant n\}$$

est une suite mesurable et croissante c-à-d

$$A_1 \subset A_2 \subset .... \subset A_n \subset ...,\quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E.$$

On pose $f_n = f.1_{A_n}$, alors on a

$$f_n \leq f_{n+1} \ et \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n = f\ 1_E = f$$

et en utilisant la convergence monotone, on déduit

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_E f_n dm &= \int_E \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n dm \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{A_n} fdm = \int_E fdm \\
&\Longrightarrow \forall\varepsilon>0;\quad \exists n_0\in\mathbb{N},\ n\geq n_0\ \left|\int_{A_n} fdm - \int_E fdm\right| < \varepsilon \\
&\Longrightarrow \int_E fdm < \varepsilon + \int_{A_n} fdm \\
&\Longrightarrow \int_{E\cap A} fdm < \varepsilon + \int_{A\cap A_n} fdm \\
&\Longrightarrow \int_A fdm < \varepsilon + n.m(A\cap A_n) \leq \varepsilon + n.m(A) < \varepsilon_1,\quad m(A) < \frac{\varepsilon}{n}.
\end{aligned}$$

i) *On calcule* $\displaystyle\int_{[0,1]} -\frac{\log(1-x)}{x}dm$*,On a*

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad;\quad \forall x\in[0,1]$$

$$\int_{[0,1]} -\frac{\log(1-x)}{x}dm = \int_{[0,1]} \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}}{x}dm = \int_{[0,1]}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}dm$$

et d'après la propriété de la convergence monotonée, on a

$$\int_{[0,1]}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}dm = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,1]}\frac{x^{n-1}}{n}dm = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

ii) *On calcule* $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{[0,1]}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n e^{\frac{n}{2n+x}}dm$*,On a*

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\log\left(1-\frac{1}{n}\right)}\qquad et\quad \log\left(1-\frac{1}{n}\right)\leqslant -\frac{1}{n}$$

donc

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e^{-1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2n+x} &= \frac{2n+x}{2n+x} - \frac{n+x}{2n+x} = 1 - \frac{n+x}{2n+x} \leqslant 1 \\
&\Longrightarrow e^{\frac{n}{2n+x}} \leqslant e^1 \Longrightarrow \left(1-\frac{1}{n}\right)^n e^{\frac{n}{2n+x}} \leqslant e^{-1}.e^1\quad,\quad m\left([0,1]\right) = 1 < \infty
\end{aligned}$$

et d'après le théorème de la convergence bornée, on déduit

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty}\int\limits_{[0,1]}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} e^{\frac{n}{2n+x}}dm &= \int\limits_{[0,1]}\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} e^{\frac{n}{2n+x}}dm \\ &= \int\limits_{[0,1]} e^{-1}.e^{1l2}dm = e^{-\frac{1}{2}}m([0,1]) = \frac{1}{\sqrt{e}}.\end{aligned}$$

Exercise 3.3 *Soit (E,T,m) un espace mesuré, où m est une mesure positive et $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable.*

1. Monter que si $f \in \mathcal{L}^1(E,T,m)$, alors
$$\lim_{n} n\cdot m\left(\{|f| \geqslant n\}\right) = 0,$$
la réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1(E,T,m)$, alors
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\int\limits_{|f|\leqslant n}|f|^2\, dm < +\infty,$$
la réciproque est-elle vraie ?

1. On a
$$0 \leqslant n.m\left(\{|f| \geqslant n\}\right) = \int_E n1_{\{|f|\geqslant n\}}dm \leqslant \int_E |f|\, 1_{\{|f|\geqslant n\}}dm,$$
d'autre part on a
$$0 \leqslant g_n = |f|\, 1_{\{|f|\geqslant n\}} \leqslant |f| \in \mathcal{L}^1(m) \text{ et } \lim_{n\longrightarrow\infty}|f(x)|\, 1_{\{|f|\geqslant n\}}(x) = 0,$$
le théorème de convergence dominée assure que
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_E |f|\, 1_{\{|f|\geqslant n\}}dm = 0, \qquad \text{d'ou le résultat.}$$
La réciproque est fausse . La fonction continue positive sur $[0, e^{-1}]$ donnée par $g(x) = x\ln(x^{-1})$ a pour dérivée $\ln(x^{-1}) - 1$ et est donc croissante sur $[0, e^{-1}]$ de $g(0) = 0$ à $g(e^{-1}) = e^{-1}$. On a
$$\int\limits_{0}^{e^{-1}}\frac{dx}{g(x)} = \int\limits_{0}^{e^{-1}}\frac{dx}{x\ln(x^{-1})} = \int\limits_{e}^{+\infty}\frac{du}{u\ln(u)} = \lim_{A\longrightarrow\infty}\ln(\ln A) = +\infty$$
Néanmoins, pour $n \geqslant 1$
$$\left\{x \in \left[0, e^{-1}\right], \frac{1}{g(x)} \geqslant n\right\} = \left\{x \in \left[0, e^{-1}\right], g(x) \leqslant n^{-1}\right\} = [0, x_n]$$
où $x_n \in [0, e^{-1}]$ est caractérisé par $x_n\ln(x_n^{-1}) = g(x_n) = n^{-1}$, ce qui implique
$$n\cdot m\left(\left\{x \in \left[0, e^{-1}\right], \frac{1}{g(x)} \geqslant n\right\}\right) = nx_n = \frac{1}{|\ln x_n|} \longrightarrow 0$$
car $x_n \longrightarrow 0_+$. La propriété (1) peut donc être vérifiée sans que f (ici $1/g$) soit $\mathcal{L}^1$.

2. Pour $f \in \mathcal{L}^1$, on a

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} \int_{|f| \leqslant n} |f|^2 \, dm = \int \left(\sum_{n \geq 1} n^{-2} |f|^2 \, 1_{\{|f| \leq n\}} \right) dm.$$

Avec

$$F(x) = \sum_{n \geqslant 1} n^{-2} |f(x)|^2 \, 1_{\{|f| \leqslant n\}}(x) = \sum_{n \geqslant \max(|f(x)|,1)} n^{-2} |f(x)|^2 = |f(x)|^2 \sum_{n \geqslant \max(|f(x)|,1)} n^{-2}$$

comme pour $N \geqslant 1$,

$$\sum_{n \geqslant N} n^{-2} \leqslant \min\left(\frac{\pi^2}{6}, \frac{1}{N-1} \right),$$

on obtient

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \min\left(\frac{\pi^2}{6}, \frac{1}{\max(|f(x)|, 1)} \right) |f(x)|^2 \leq \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{6} |f(x)|^2 & \text{si } |f(x)| \leqslant 2 \\ \dfrac{|f(x)|^2}{|f(x)| - 1} & \text{si } |f(x)| > 2. \end{cases}$$

Comme pour $|f(x)| \leqslant 2$ on a

$$\frac{\pi^2}{6} |f(x)|^2 \leqslant \frac{\pi^2}{6} |f(x)| \, |f(x)| \leqslant |f(x)| \frac{2\pi^2}{6} \leqslant 4 |f(x)|$$

et pour $|f(x)| > 2$

$$\frac{|f(x)|^2}{|f(x)| - 1} = \frac{|f(x)|}{|f(x)| - 1} |f(x)| \leqslant 2 |f(x)|,$$

il vient

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 4 |f(x)|,$$

ce qui donne le résultat

La réciproque est fausse car avec $f(x) = \dfrac{1}{x} 1_{[1,+\infty[}(x)$ (qui n'est pas dans $\mathcal{L}^1$), on a néanmoins

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} \int_{|f| \leqslant n} |f|^2 \, dm = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} \int_{x \geqslant 1} \frac{1}{x^2} dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercise 3.4 *1. Etudier la limite éventuelle de la suite* $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *donnée par*

$$w_n = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(\pi x)}{1 + x^{n+2}} dx.$$

2. Soient $a, b \in]0, +\infty[$. *Justifier l'égalité suivante*

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{x e^{-ax}}{1 - e^{-bx}} dx = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(a + bn)^2}.$$

Solution 3.3 *1. On pose*

$$f_n(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1 + x^{n+2}}, \ x \in \mathbb{R}_+,$$

on remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant |f_n(x)| \leqslant 1_{[0,1]}(x) + 1_{]1,+\infty[}(x)\frac{1}{1+x^2} = g(x).$$

On vérifie que g est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_n f_n(x) = f(x)$ où

$$f(x) = \sin(\pi x) \ si \ x \in [0,1[\,, \ f(1) = \frac{1}{2}\sin(\pi) \ et \ f(x) = 0 \ si \ x > 1.$$

Le théorème de convergenge dominée implique alors que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} w_n = \int_{[0,1[} \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}.$$

2. *Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = xe^{-(a+bn)x}$. On a clairement*

$$\forall x \in]0, +\infty[\,, \frac{xe^{-ax}}{1 - e^{-bx}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x).$$

Comme il s'agit de fonctions positives, mesurable car continues sur $]0, +\infty[$; l'intervention série /intégrale positive implique que

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{xe^{-ax}}{1 - e^{-bx}} dx = \sum_{n \geqslant 0} \int_{]0,+\infty[} f_n(x) dx.$$

Par un changement de variable linéaire

$$\int_{]0,+\infty[} f_n(x) dx = \frac{1}{(a+bn)^2} \int_{]0,+\infty[} xe^{-x} dx.$$

Une intégration par partie implique que

$$\int_{]0,+\infty[} xe^{-x} dx = 1,$$

ce qui permet de conclure.

Exercise 3.5 *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.*

1. *Montrer que*

$$m(\{x : f(x) \geqslant \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int_E f dm.$$

2. *Montrer l'équivalence suivante :*

$$\int_E f dm = 0 \iff f = 0 \ \ p.p.$$

3. *Montrer que*

$$\int_E f dm < \infty \Longrightarrow f < \infty \quad p.p.$$

Solution 3.4 1. *Montrons que*

$$m\left(\{x : f(x) \geqslant \alpha\}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_E f dm.$$

On pose

$$A = \{x : f(x) \geqslant \alpha\},$$

alors

$$\begin{aligned} f &\geqslant \alpha.1_A = \alpha.m(A) \\ &\Longrightarrow m(A) \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_E f dm. \end{aligned}$$

2. *Montrons que*

$$\int_E f dm = 0 \iff f = 0 \quad p.p.$$

$\Longleftarrow$: *Si* $f = 0$ $p.p$, *alors*

$$\int_E f dm = \int_E 0 dm = 0$$

$\Longrightarrow$: *On suppose*

$$\int_E f dm = 0,$$

soit

$$A_n = \left\{x : f(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}, \forall n \geqslant 1,$$

d'après 1) on a

$$m(A_n) \leqslant n\int_E f dm = 0,$$

donc

$$m(A_n) = 0 \ \forall n \geqslant 1,$$

de plus

$$\begin{aligned} m\left(\{x \in E : f(x) > 0\}\right) &= m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left\{x : f(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}\right) \\ &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}^*} m(A_n) = 0. \end{aligned}$$

3. *Montrons que*

$$\int_E f dm < \infty \Longrightarrow f < \infty \quad p.p.$$

On pose

$$B_n = \{x : f(x) \geqslant n\}, \forall n \geqslant 1,$$

$$B_\infty = \{x : f(x) = \infty\},$$

on a donc

$$\begin{aligned} m(B_\infty) &= m\left(\bigcap_{n\geqslant 1} B_n\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} m(B_n) \\ &\leqslant \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\int_E f dm = 0, \end{aligned}$$

car $(B_n)_{n\geqslant 1}$ *est décroissante et*

$$m(B_n) \leqslant \frac{1}{n}\int_E f dm < +\infty, \forall n \geqslant 1,$$

d'où $f < \infty$ *p.p.*

Exercise 3.6 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré tel que* $m(E) < +\infty$, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ *une fonction mesurable telle que, pour tout* $A \in T$ *on ait:*

$$\int_A f dm \leqslant m(A).$$

1. *Pour tout* $k > 1$, *on pose*
$$A_k = \{x \in E : f(x) \geqslant k\}.$$
Montrer que
$$km(A_k) \leqslant \int_{A_k} f dm;$$
en déduire que $m(A_k) = 0$.
2. *Montrer que*
$$f(x) \leqslant 1 \quad p.p.$$

Solution 3.5 1. *Montrons que*

$$k.m(A_k) \leqslant \int_{A_k} f dm.$$

On a

$$A_k = f^{-1}([k, +\infty[) \in T \text{ car } f \text{ est mesurable,}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} \forall x &\in A_k,\ f(x) \geqslant k \\ &\Longrightarrow \int_{A_k} f dm \geqslant \int_{A_k} k dm = km(A_k) \\ &\Longrightarrow \int_{A_k} f dm \geqslant km(A_k). \end{aligned}$$

Montrons que $m(A_k) = 0$: *Comme* $A_k \in T$ *on a*

$$\begin{aligned} km(A_k) &\leqslant \int_{A_k} f dm \leqslant m(A_k) \\ &\Longrightarrow (k-1)\, m(A_k) \leqslant 0 \\ \text{et } k &> 1 \Longrightarrow m(A_k) = 0\ \forall k > 1. \end{aligned}$$

2. Montrons que $f(x) \leqslant 1$ p.p : On a

$$\begin{aligned}\{x\in E : f(x)>1\} &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left\{x\in E : f(x)\geqslant 1+\frac{1}{n}\right\}\\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{1+\frac{1}{n}},\end{aligned}$$

d'autre part, la suite $\left(A_{1+\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante au sens de l'inclusion, donc

$$m\left(\{x\in E : f(x)>1\}\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} m\left(A_{1+\frac{1}{n}}\right) = 0,$$

car

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1+\frac{1}{n}>1 \text{ et } m\left(A_{1+\frac{1}{n}}\right)=0,$$

d'où le résultat.

Exercise 3.7 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives convergeante vers une une fonction f. Montrer que*

$$\exists C\geqslant 0 : \forall n\in\mathbb{N}, \int_E f_n dm \leqslant C \Longrightarrow \int_E f dm \leqslant C.$$

Solution 3.6 *On a grâce au lemme de Fattou :*

$$\int_E f dm = \int_E \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n dm = \int_E \underline{\lim}_n f_n dm \leqslant \underline{\lim}_n \int_E f_n dm \leqslant C.$$

Exercise 3.8 1. *Pour tout réal α et tout entier $n\geqslant 1$, on pose :*

$$I_n(a) = \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-ax}dx.$$

Déterminer $\lim_{n\longrightarrow\infty} I_n(a)$.

2. *Déterminer les limites des intégrales suivantes quand $n\longrightarrow\infty$*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}(\sin x)^n \sin(nx)\,dx, \quad \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos x dx$$

$$\int_0^1 \frac{ne^{-x}}{nx+1}dx, \quad \int_0^1 \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{1+x^2}dx.$$

Solution 3.7 1. *On détermine $\lim_{n\longrightarrow\infty} I_n(a)$: On pose*

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-ax}1_{[0,n]}(x), x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*,$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de fonctions mesurables (continue) et positives et*

$$|f_n(x)| \leqslant e^x e^{-ax} 1_{[0,n]}(x) \leqslant e^{(1-a)x} 1_{\mathbb{R}^+}(x) = f(x),$$

d'autre part, on a

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{(1-a)x}dx = \begin{cases} \frac{1}{a-1} & si \;\; a > 1 \\ +\infty & si \;\; a \leqslant 1 \end{cases}$$

d'où $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *si et seulement si* $a > 1$,*de plus*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = f(x),$$

donc si $a > 1$ *et d'après le théorème de la convergence dominée*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} I_n(a) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) = \frac{1}{a-1},$$

et si $a \leqslant 1$, *on a*

$$\underline{\lim}_n f_n(x) = e^{(1-a)x} 1_{\mathbb{R}^+}(x),$$

et d'après le lemme de Fattou

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} I_n(a) = \underline{\lim}_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \underline{\lim}_n f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{(1-a)x}dx.$$

Donc

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} I_n(a) = +\infty, a \leqslant 1.$$

(On peut aussi montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est croissante et on applique le théorème de la convergence monotone ainsi on obtient le résultat directement.*

2. *On détermine les limites des intégrales :*

i) *On détermine*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} (\sin x)^n \sin(nx)\, dx,$$

on pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\;\; f_n(x) = e^{-x} (\sin x)^n \sin(nx)\,,\;\; x \in \mathbb{R}^+,$$

$(f_n)_n$ *est une suite de fonctions continues, donc mesurables, d'autre part ona*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi\right\},\;\; |\sin x| < 1,$$

et on a

$$|\sin x|^n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0,$$

de plus

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, |f_n(x)| < |\sin x|^n\,,$$

donc
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi\right\}, f_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$
et
$$\lambda\left(\left\{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{N}\right\}\right) = 0,$$
car cet ensemble est négligeable, donc $(f_n)_n$ *converge vers* 0 *p.p et*
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+}, \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| \leqslant e^{-x} \quad et \quad \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1 < +\infty,$$
donc d'après le théorème de la convergence dominée :
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} (\sin x)^n \sin(nx)\, dx = 0.$$

ii) *On détermine*
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^{n} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x dx,$$
on pose
$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x.1_{[0,n]}(x), \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; n \in \mathbb{N}^{*},$$
$(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *est une suite de fonctions mesurables et :*
$$|f_n(x)| \leqslant e^{-x} |\cos x|\, 1_{[0,n]}(x) \leqslant e^{-x}1_{[0,n]}(x) = f(x),$$
avec $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, *de plus*
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) = e^{-x}\cos x 1_{[0,n]}(x),$$
donc d'après le théorème de la convergence dominée
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^{n} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx.$$

iii) *On détermine*
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^{1} \frac{ne^{-x}}{nx+1} dx,$$
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]$, *on pose*
$$f_n(x) = \frac{ne^{-x}}{nx+1} = e^{-x}\left(x + \frac{1}{n}\right)^{-1},$$
le lemme de Fattou donne
$$\underline{\lim}_{n} \int_0^{1} e^{-x}\left(x + \frac{1}{n}\right)^{-1} dx = \underline{\lim}_{n} \int_0^{1} f_n(x)dx \geqslant \int_0^{1} \underline{\lim}_{n} f_n(x)dx = \int_0^{1} e^{-x}x^{-1}dx = +\infty.$$ ∎

iv) *On détermine*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^1 \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{1+x^2}dx,$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0,1],$ *on pose*

$$f_n(x)=\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{1+x^2},$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de fonctions continues donc mesurables et on a*

$$|f_n(x)|=\left|\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{x}{1+x^2},$$

et $x\longmapsto\dfrac{x}{1+x^2}$ *est intégrable sur* $[0,1],$ *de plus*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}f_n(x)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{x\frac{n}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{1+x^2}=\frac{x}{1+x^2}, \forall x\in\left]0,1\right],$$

le théorème de la convergence dominée donne

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^1 f_n(x)dx &= \int_0^1\lim_{n\longrightarrow\infty}f_n(x)dx\\ &= \int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

Exercise 3.9 *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{|x|\geqslant n}f_n(x)dx=0.$$

Solution 3.8 *On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, et $x\in\mathbb{R}$:*

$$f_n(x)=f(x).1_{]-\infty,-n]\cup[n,+\infty[}(x).$$

Alors

$$\forall n\in\mathbb{N}, \text{ on a : } |f_n(x)|\leqslant|f|\in\mathcal{L}^1,$$

et

$$\forall x\in\mathbb{R}, \text{ on a } \lim_{n\longrightarrow\infty}f_n(x)=0,$$

le théorème de la convergence dominée donne

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\longrightarrow\infty}f_n(x)dx=0,$$

d'où le résultat.

Exercise 3.10 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$f_n(x) = ne^{-nx}; \; f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Calculer $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.

Solution 3.9 *On calcule* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$

On a

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}dx = \int\limits_1^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx,$$

$(f_n)_n$ *est une suite de fonctions continues donc mesurables et positives, donc d'après le corollaire de la convergence monotone on a :*

$$\begin{aligned} \int\limits_1^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_1^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_1^{+\infty} ne^{-nx}dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \frac{1}{1-e^{-1}} - 1 = \frac{1}{e-1}. \end{aligned}$$

Exercise 3.11 *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :*

$$F(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(xt)\, dx, \; F(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1. *Montrer que F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que F vérifie l'équation différentielle :*

$$F'(t) + \frac{t}{2}F(t) = 0,$$

   et déduire sa valeur.

Solution 3.10 1. *Montrons que F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.*

i) $\forall t \in \mathbb{R}, x \in [0, +\infty[$, *on pose*

$$f(x,t) = e^{-x^2} \cos(xt).$$

ii) *On a* $\forall x \in [0, +\infty[\,, x \longmapsto f(x,t)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, +\infty[$

$$|f(x,t)| \leqslant e^{-x^2} \;\; et \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} < +\infty,$$

donc d'après le théorème de la continuité sous l'intégrale F est continue sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in [0, +\infty[\,, x \longmapsto f(x,t)$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = -xe^{-x^2} \sin(xt),$$

de plus

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \right| \leqslant xe^{-x^2}, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

donc

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} < +\infty;$$

d'après le théorème de la dérivabilité sous le signe intégrale F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(t) = -\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \sin(xt)\, dx.$$

2. *Montrons que F vérifie l'équation différentielle :*

$$F'(t) + \frac{t}{2} F(t) = 0,$$

i) *On a*

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \sin(xt)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{-x^2} \sin(xt) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} t \cos(xt)\, dx \\ &= -\frac{t}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(xt)\, dx = \frac{t}{2} F(t), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

ii) *On déduit la valeur de $F(t)$: on a*

$$\begin{aligned} F'(t) + \frac{t}{2} F(t) &= 0 \Longrightarrow F'(t) = -\frac{t}{2} F(t) \\ &\Longrightarrow \frac{F'(t)}{F(t)} = -\frac{t}{2} \Longrightarrow \ln |F(t)| = -\frac{t^2}{4} + C \\ &\Longrightarrow F(t) = Ke^{-\frac{t^2}{4}}, \ \textit{de plus} \ \ F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = K. \end{aligned}$$

Donc

$$F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Exercise 3.12 *On considère sur $\mathbb{R}_+$ la fonction :*

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx.$$

1. *Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} F(t)$.*
2. *Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} F'(t)$.*

Solution 3.11 1. *Montrons que F est continue sur $\mathbb{R}_+$: $\forall t \geqslant 0, \forall x \geqslant 0$, on pose*

$$f(x,t) = \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2},$$

on a $t \longmapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et

$$|f(x,t)| \leqslant \frac{1}{1+x^2}, \forall t \geqslant 0$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [arc\tan x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} < +\infty,$$

donc d'après le théorème de la continuité sous l'intégrale F est continue sur $\mathbb{R}_+$. On calcule $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} F(t)$, d'après le théorème de la convergence dominée : $\forall (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels positifs qui converge vers $+\infty$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} F(t_n) = \int_0^{+\infty} \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{e^{-t_n x^2}}{1+x^2} dx = 0.$$

2. *Montrons que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$*
On a $\forall t \geqslant 0$, $t \longmapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = -\frac{x^2 e^{-tx^2}}{1+x^2}.$$

De plus, $\forall a > 0, t > 0$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \right| \leqslant \frac{x^2 e^{-ax^2}}{1+x^2} \text{ avec } x \longmapsto \frac{x^2 e^{-ax^2}}{1+x^2} \text{ intégrable,}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 e^{-ax^2}}{1+x^2} dx < +\infty \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-ax^2}}{1+x^2} dx < +\infty,$$

car

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} e^{-ax^2} = 0.$$

Donc F esr dérivable sur $]a,+\infty[$ et comme a est quelconque F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$F'(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{x^2e^{-tx^2}}{1+x^2}dx.$$

On calcule $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} F'(t)$: On a $\forall (t_n)_n$ suite réels positifs qui converge vers 0, et d'après le lemme de Fattou

$$\begin{aligned}
\underline{\lim}_n(-F'(t)) &= \underline{\lim}_n \int_0^{+\infty} \frac{x^2e^{-t_nx^2}}{1+x^2}dx \geqslant \int_0^{+\infty} \underline{\lim}_n \frac{x^2e^{-t_nx^2}}{1+x^2}dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}dx = +\infty,
\end{aligned}$$

donc $F'(t)$ converge vers $-\infty$ quand $t \longrightarrow 0^+$.

Exercise 3.13 *Soient (E,T,m), un espace mesuré et f,g deux fonctions appartenant respectivement à L^p et L^q où $p,q \in \mathbb{R}_+^*$.*

Montrer que si $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$, on a

$$fg \in L^r \text{ et } \|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Solution 3.12 *On a $\dfrac{r}{p}+\dfrac{r}{q}=1$ donc $\dfrac{p}{r}$ et $\dfrac{q}{r}$ sont conjugués, d'autre part f et g sont mesurables donc $|f.g|^r$ l'est aussi, d'après l'inégalité de Hölder*

$$\begin{aligned}
\int_E |f.g|^r dm &= \int |f|^r . |g|^r dm \\
&\leqslant \left(\int_E (|f|^r)^{p/r} dm\right)^{r/p} . \left(\int_E (|g|^r)^{q/r} dm\right)^{r/q} \\
&= \left(\int_E (|f|^p) dm\right)^{r/p} . \left(\int_E (|f|^q) dm\right)^{r/q} < +\infty,
\end{aligned}$$

car

$$|f|^r \in L^{p/r} \text{ et } |g|^r \in L^{q/r},$$

d'où

$$f.g \in L^r \text{ et } \|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Exercise 3.14 *Soient (E,T,m), un espace mesuré et f,g deux fonctions appartenant respectivement à L^p et L^q où $p,q,r \in \mathbb{R}_+^*$, tels que*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1,\ f\in L^p,\ g \in L^q,\ h \in L^r.$$

Montrer que

$$fgh \in L^1 \text{ et } \|fgh\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

Solution 3.13 *On pose*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{s},$$

alors d'après l'exercice précédent on a

$$fg \in L^{s} \text{ et } \|fg\|_{s} \leqslant \|f\|_{p}\|g\|_{q},$$

de plus

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{r}=1,$$

donc d'après l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned}(fg)\,h &\in L^{1} \text{ et } \|fgh\|_{1} \leqslant \|fg\|_{s}\|h\|_{r} \\ &\leqslant \|f\|_{p}\|g\|_{q}\|h\|_{r},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercise 3.15 *Soient*

$$f \in L^{p}([0,+\infty[)\,,\ g \in L^{q}([0,+\infty[) \text{ où } 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty \text{ sont conjugués.}$$

Calculer

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t} f(s)g(s)ds.$$

Solution 3.14 *On a*

$$\begin{aligned}\left|\int_{0}^{t} fg\right| &\leqslant \int_{0}^{t}|fg| \leqslant \left(\int_{0}^{t}|f|^{p}\right)^{1/p}\left(\int_{0}^{t}|g|^{q}\right)^{1/q} \\ &\leqslant \|f\|_{p}\|g\|_{q},\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t} f(s)g(s)ds=0.$$

Chapitre 4

Produit d'espaces mesurés

Définition 4.1 *(Tribu produit) Soient* (E_1, T_1), (E_2, T_2) *deux espaces mesurables et* $E = E_1 \times E_2$ *et on note* $T = T_1 \otimes T_2$ *la tribu sur* E *engendrée par*

$$T_1 \times T_2 = \{A_1 \times A_2,\ A_1 \in T_1,\ A_2 \in T_2\ \}\ \ i.e : T = \sigma\left(T_1 \times T_2\right).$$

Exemple 4.1 *si* $(E_1, T_1) = (E_2, T_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *alors*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})\right) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Proposition 4.1 *La tribu* $T_1 \otimes T_2$ *est la plus petite tribu sur* $E_1 \times E_2$ *qui rende mesurable les deux projections canoniques*

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 & : & (E_1 \times E_2, T_1 \otimes T_2) \longrightarrow (E_1, T_1)\,,\ \pi_1(x,y) = x \\ \pi_2 & : & (E_1 \times E_2, T_1 \otimes T_2) \longrightarrow (E_2, T_2)\,,\ \pi_2(x,y) = y. \end{array}$$

Preuve. π_1 et π_2 sont mesurables car pour tout $A \in T_1$ et $B \in T_2$ on a

$$\pi_1^{-1}(A) = \{(x,y) \in E_1 \times E_2 : x \in A\} = A \times Y \in T_1 \otimes T_2,$$

et aussi $\pi_2^{-1}(B) = X \times B \in T_1 \otimes T_2$.

Soit $\mathcal{A}$ une trbu sur $E_1 \times E_2$ qui rende

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 & : & (E_1 \times E_2, \mathcal{A}) \longrightarrow (E_1, T_1)\,,\ \pi_1(x,y) = x \\ \pi_2 & : & (E_1 \times E_2, \mathcal{A}) \longrightarrow (E_2, T_2)\,,\ \pi_2(x,y) = y, \end{array}$$

mesurables. Pour tout $A \in T_1$ et $B \in T_2$,

$$A \times B = (A \times E_2) \cap (E_1 \times B) = \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B) \in \mathcal{A},$$

ce qui signifier que $T_1 \times T_2 \subset \mathcal{A}$ donc $T_1 \otimes T_2 \subset \mathcal{A}$. ∎

Proposition 4.2 *Soient* $(E, T), (E_1, T_1)$ *and* (E_2, T_2) *trois espaces mesurables et soit l'application*

$$f = (f_1, f_2) : (E, T) \longrightarrow (E_1 \times E_2, T_1 \otimes T_2)\,.$$

Alors f *est mesurable si et seulement si* $f_1 : (E, T) \longrightarrow (E_1, T_1)$ *et* $f_2 : (E, T) \longrightarrow (E_2, T_2)$ *sont mesurables.*

Preuve. Si f est mesurable, alors

$$f_1 = \pi_1 \circ f \quad \text{et} \quad f_2 = \pi_2 \circ f,$$

le sont aussi comme composition des fonctions mesurables.

Inversement : si f_1 et f_2 sont mesurables, alors pour tout $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ on a

$$f^{-1}(A_1 \times A_2) = f_1^{-1}(A_1) \cap f_2^{-1}(A_2) \in T.$$

Donc puisque $T_1 \otimes T_2 = \sigma(T_1 \times T_2)$ alors f est mesurable. ■

Définition 4.2 *(Les sections)*

Pour toute partie E de $X \times Y$ et tout $x \in X$, on pose

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}.$$

On dit que E_x est la section de E selon $x \in X$. De manière analogue, on définit la section de E selon $y \in Y$ par

$$E_y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

Par exemple, si $E = A \times B$ où $A \subset X$ et $B \subset Y$, pour tout $x \in X$ on a

$$E_x = \begin{cases} \emptyset & si \;\; x \notin A \\ B & si \;\; x \in A. \end{cases}$$

Définition 4.3 *Soient l'application $f : X \times Y \longrightarrow Z$. Pour $x \in X$ et $y \in Y$, on définit les applications partielles $f_x : Y \longrightarrow Z$ et $f_y : X \longrightarrow Z$ par*

$$f_x(y) = f(x, y) \quad et \quad f_y(x) = f(x, y).$$

Une propriété importante de la tribu produit $T_1 \otimes T_2$ est d'assurer la mesurabilité des sections et les applications partielles. Plus présément on a

Proposition 4.3 *Soient $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables.*

1. *Si $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, alors pour tout $x \in X$ et $y \in Y$ on a $E_x \in \mathcal{N}$ et $E_y \in \mathcal{M}$*
2. *Si l'application $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est mesurable, alors les applications partielles $f_x : (Y, \mathcal{N}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $f_y : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont mesurables.*

Preuve.

1. Posons
$$\mathcal{A} = \{E \subset X \times Y : E_x \in \mathcal{N} \text{ pour tout } x \in X\}.$$
Comme $(X \times Y)_x = Y \in \mathcal{N}$ pour tout $x \in X$, on a $X \times Y \in \mathcal{A}$. Si $E \in \mathcal{A}$, alors pour tout $x \in X$ on a $(E^c)_x = (E_x)^c \in \mathcal{N}$ et par conséquent $E^c \in \mathcal{A}$. Enfin, soit $(E_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, pour tout $x \in X$ on a
$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right)_x = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (E_n)_x \in \mathcal{N},$$

et par conséquent $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathcal{A}$. On a ainsi montré que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $X \times Y$. En outre, si $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$, alors pour tout $x \in X$

$$(A \times B)_x = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \; x \notin A \\ B & \text{si } \; x \in A, \end{cases}$$

de sorte que $A \times B \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ est la plus petite tribu sur $X \times Y$ contenant les rectangles mesurables, on en déduit que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{A}$, ce qui démontre (1).

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est mesurable, on a $f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. pour tout $x \in X$, on a en vertu de (1)

$$f^{-1}(]a, +\infty[) = f^{-1}(]a, +\infty[)_x \in \mathcal{N},$$

et par conséquent $f_x : (Y, \mathcal{N}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est mesurable.

■

4.0.1 Mesure produit

On veut maintenant construire une mesure sur l'espace produit $X \times Y$ où X et Y sont des espaces mesurés.

Theorème 4.1 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés $\sigma-$finis.*

1. *Il existe une unique mesure positive, notée $\mu \otimes \nu$, sur la tribu $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ qui vérifie*

$$\mu \otimes \nu (A \times B) = \mu (A) \cdot \nu (B),$$

quels que soit $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$.

2. *Pour tout $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, les fonctions*

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{M}) & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ x & \longmapsto & \nu (E_x) \end{array} \quad et \quad \begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{N}) & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ y & \longmapsto & \mu (E_y) \end{array}$$

sont mesurables et de plus on a

$$\mu \otimes \nu (E) = \int_X \nu (E_x) \, d\mu = \int_Y \mu (E_y) \, d\nu. \tag{4.1}$$

Corollary 4.1 *Sous les hypothèses du théorème précdent, on a*

$$\int_X \left(\int_Y \chi_E (x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \mu \otimes \nu (E) = \int_Y \left(\int_X \chi_E (x, y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y),$$

pour tout $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

Preuve. Il est clair que pour tout $(x, y) \in X \times Y$ on a $\chi_{E_x} = \chi_E = \chi_{E_y}$ et par définition de l'intégrale on a

$$\nu (E_x) = \int_Y \chi_{E_x} d\nu \;\; \text{et} \;\; \mu (E_y) = \int_X \chi_{E_y} d\mu.$$

Alors d'après (4.1) on a

$$\mu\otimes\nu\,(E)=\int_X \nu\,(E_x)\,d\mu=\int_X\left(\int_Y \chi_E\,(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x),$$

et

$$\mu\otimes\nu\,(E)=\int_Y \mu\,(E_y)\,d\nu=\int_Y\left(\int_X \chi_E\,(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y).$$

■

Remarque 4.1 *1. L'hypothèse $\sigma-$finitude est nécessaire. En effet, soit $(X,\mathcal{M})$, $(Y,\mathcal{N})=$ $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu=\lambda$ est la mesure de Lebesgue et ν la mesure de comptage (ν est non $\sigma-$finie). Soit*

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\right\}\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}=\mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Pour tout $x\in X$ et $y\in Y$ on a $\nu\,(E_x)=1$ et $\lambda\,(E_y)=0$, or

$$\infty=\int_{\mathbb{R}}\nu\,(E_x)\,d\lambda\neq\int_{\mathbb{R}}\nu\,(E_y)\,d\nu=0.$$

2. La mesure produit $\mu\otimes\nu$ est $\sigma-$ fini sur $(X,\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})$. En effet, comme les espaces $(X,\mathcal{M},\mu)$, $(Y,\mathcal{N},\nu)$ sont $\sigma-$finis, il existe $(E_n)_n\subset\mathcal{M}$ et $(G_n)_n\subset\mathcal{N}$ tels que

$$X=\bigcup_{n=1}^{+\infty}E_n \text{ et } Y=\bigcup_{n=1}^{+\infty}G_n \text{ avec } \mu\,(E_n)<\infty \text{ et } \nu\,(G_n)<\infty \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}^*.$$

Pour tout $n,m\geqslant 1$, on pose $F_{n,m}=E_n\times G_m$, de sorte que

$$X\times Y=\bigcup_{n,m\geqslant 1}^{+\infty}F_{n,m} \text{ et } \mu\otimes\nu\,(F_{n,m})=\mu\,(E_n)\cdot\nu\,(G_m)<\infty, \text{ pour tout } n,m\geqslant 1.$$

Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, on en déduit que $\mu\otimes\nu$ est $\sigma-$ finie.

Proposition 4.4 *Soient (E_1,T_1,m_1), (E_2,T_2,m_2) deux espaces mesurés $\sigma-$finis et $E=E_1\times E_2$, $T=T_1\otimes T_2$. Alors il existe une unique mesure m sur T vérifiant :*

$$m\,(A_1\times A_2)=m_1\,(A_1)\,m_2\,(A_2)\,,\ A_1\in T_1,\ \ A_2\in T_2.$$

Cette mesure est notée $m=m_1\otimes m_2$ et elle est $\sigma-$finie.

Définition 4.4 *L'espace (E,T,m) tel que $E=E_1\times E_2$, $T=T_1\otimes T_2$ et $m=m_1\otimes m_2$ s'appelle l'espace produit des espaces (E_1,T_1,m_1) et (E_2,T_2,m_2).*

Exemple 4.2 $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\lambda_2)=(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)\times(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$

$$\begin{aligned}\forall\,]a,b[\,,]c,d[\ &\in\ B(\mathbb{R}):\lambda_2\,(]a,b[\,\times\,]c,d[)=\lambda\,(]a,b[)\times\lambda(]c,d[)\\ &=\ (b-a)\times(d-c).\end{aligned}$$

4.1 Théorème de Fubini-Tonelli

Theorème 4.2 *Soient (E_1, T_1, m_1), (E_2, T_2, m_2) deux espaces mesurés $\sigma-$finis et (E, T, m) l'espace produit ($E = E_1 \times E_2$, $T = T_1 \otimes T_2$ et $m = m_1 \otimes m_2$). Pour toute fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ mesurable positive*

1. *les fonctions*

$$F_1 : \begin{cases} (E_1, T_1) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{R}_+}, B(\overline{\mathbb{R}_+})\right) \\ \qquad x_1 \longmapsto \int_{E_2} f(x_1, x_2) dm_2(x_2), \end{cases}$$

$$F_2 : \begin{cases} (E_2, T_2) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{R}_+}, B(\overline{\mathbb{R}_+})\right) \\ \qquad x_2 \longmapsto \int_{E_1} f(x_1, x_2) dm_1(x_1), \end{cases}$$

   sont mesurables positives

2. *On a les égalités suivantes*

$$\begin{aligned} \int_{E_1 \times E_2} f d(m_1 \otimes m_2) &= \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \right) dm_1(x_1) \qquad (4.2) \\ &= \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x_1, x_2) dm_1(x_1) \right) dm_2(x_2). \end{aligned}$$

Preuve. Pour $f = \chi_M$ avec $M \in T_1 \otimes T_2$, les conditions 1) et 2) ont été établies en 2) dans le théorème 4.1 et le corollaire 4.1. Pour $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow [0, +\infty]$ étagée mesurable, les résultats restent vrai par linéarité. Finalement, si $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable, alors il existe une suite croissante $(f_n)_{n \geqslant 1}$ de fonctions étagées positives telles que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x_1, x_2) = f(x_1, x_2), \text{ pour tout } (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2.$$

Par le Théorème de la convergence monotone on a

$$\int_{E_1} f(x_1, x_2) dm_1(x_1) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{E_1} f_n(x_1, x_2) dm_1(x_1), \text{ pour tout } x_2 \in E_2.$$

Donc la fonction $x_2 \longmapsto \int_{E_1} f(x_1, x_2) dm_1(x_1)$ est mesurable comme la limite simple d'une suite de fonctions mesurables. Par le même raisonnement, on voit que la fonction $x_1 \longmapsto \int_{E_2} f(x_1, x_2) dm_2(x_2)$ est mesurable. les égalités 4.2 sont vraies pour les fonctions f_n donc pour f par passage à la limite croissante en appliquant deux fois le Théorème de la convergence monotone. ■

Corollary 4.2 *Soient (E_1, T_1, m_1), (E_2, T_2, m_2) deux espaces mesurés $\sigma-$finis et (E, T, m) l'espace produit et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors f est m intégrable si et seulement si*

$$\int_{E_1} \left(\int_{E_2} |f(x_1, x_2)| \, dm_2(x_2) \right) dm_1(x_1),$$

ou

$$\int_{E_2} \left(\int_{E_1} |f(x_1, x_2)| \, dm_1(x_1) \right) dm_2(x_2),$$

est finie. c'est-à-dire

$$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m), \left(\int_E |f|\, dm < +\infty\right)$$

$$\Longleftrightarrow \int_{E_1}\left(\int_{E_2} |f|\, dm_2\right) dm_1 < +\infty \quad ou \quad \int_{E_2}\left(\int_{E_1} |f|\, dm_1\right) dm_2 < +\infty.$$

4.1.1 Théorème de Fubini

Theorème 4.3 *Soient (E_1, T_1, m_1), (E_2, T_2, m_2) deux espaces mesurés $\sigma-$finis et (E, T, m) l'espace produit.Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et intégrable. $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Alors*

1. *La fonction $x_2 \longmapsto f(x_1, x_2)$ est m_2 intégrable sur E_2 pour presque tout $x_1 \in E_1$.*
2. *La fonction $x_1 \longmapsto \int_{E_2} f(x_1, x_2) dm_2(x_2)$ est m_1 intégrable sur E_1.*
3. *La fonction $x_1 \longmapsto f(x_1, x_2)$ est m_1 intégrable sur E_1 pour presque tout $x_2 \in E_2$.*
4. *La fonction $x_2 \longmapsto \int_{E_1} f(x_1, x_2) dm_1(x_1)$ est m_2 intégrable sur E_2, et on a*

$$\begin{aligned}
\int_E f dm &= \int_{E_1 \times E_2} f d(m_1 \otimes m_2) = \int_{E_1}\left(\int_{E_2} f(x_1, x_2) dm_2(x_2)\right) dm_1(x_1) \\
&= \int_{E_2}\left(\int_{E_1} f(x_1, x_2) dm_1(x_1)\right) dm_2(x_2).
\end{aligned}$$

Remarque 4.2 *le théorème de Fubini est souvent utilisé sous la forme suivante :*

Corollary 4.3 *Soient (E_1, T_1, m_1), (E_2, T_2, m_2) deux espaces mesurés $\sigma-$finis et (E, T, m) l'espace produit.Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que*

$$\int_{E_1}\left(\int_{E_2} |f(x_1, x_2)|\, dm_2(x_2)\right) dm_1(x_1) < +\infty,$$

ou

$$\int_{E_2}\left(\int_{E_1} |f(x_1, x_2)|\, dm_1(x_1)\right) dm_2(x_2) < +\infty,$$

alors

$$\int_{E_1}\left(\int_{E_2} |f(x_1, x_2)|\, dm_2(x_2)\right) dm_1(x_1) = \int_{E_2}\left(\int_{E_1} |f(x_1, x_2)|\, dm_1(x_1)\right) dm_2(x_2).$$

Définition 4.5 *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Une application $\varphi : U \longrightarrow V$ est un C^1-difféomorphisme si φ est bijective de classe C^1 sur U et si φ^{-1} est de classe C^1 sur V.*

Theorème 4.4 *(Théorème de changement de variable) : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Une application $\varphi : U \longrightarrow V$ est un C^1-difféomorphisme et $J(\varphi)$ le déterminant de la matrice Jacobienne de φ. Pour toute fonction borélienne positive f sur V ou intégrable sur V, on a*

$$\int_V f(x)dx = \int_U f(\varphi(y))\, |J(\varphi)(y)|\, dy.$$

Exemple 4.3 *"Les coordonnées polaires" Soit $f(x,y)$ une fonction mesurable positive (resp, intégrable) dans le disque de $\mathbb{R}^2$ défini par :*

$$x^2+y^2<R^2,$$

alors la fonction

$$(r,\theta)\longmapsto f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r,$$

est une fonction mesurable positive (intégrable) sur le rectangle $]0,R[\times]0,2\pi[$ et on a

$$\int_D f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^R f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdrd\theta,$$

$$\begin{array}{rccc}\varphi: &]0,R[\times]0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ & (r,\theta) & \longmapsto & (x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta),\end{array}$$

est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert : $]0,R[\times]0,2\pi[$ sur l'ouvert $D\diagdown]0,R[\times\{0\}$.

Exemple 4.4 *D'après le théorème de Tonelli*

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^2 &= \left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy.\end{aligned}$$

En coordonnées polaires

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty}e^{-r^2}rdrd\theta=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}re^{-r^2}dr\\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

avec

$$r=Jac=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}$$

Proposition 4.5 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une application $\varphi:U\longrightarrow\mathbb{R}^n$ est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert de U sur sa image $V=\varphi(U)$ si et seulement si :*

1. *φ est injective*
2. *φ est de calasse C^1 (les ddérivées partielles de φ existent et sont continues sur U.)*
3. *En tout point $u\in U$, le déterminant de la matrice Jacobienne de φ est non nul.*

4.2 Exercices corrigés

Exercise 4.1 *Soient $a, b \in]0, +\infty[$ tels que $a < b$. Jutifier l'existence de l'intégrale*

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt.$$

Représenter cette intégrale comme une intégrale double et la calculer explicitement en fonction de a et b (justifier soigneusement sa réponse).

Solution 4.1 *La fonction $t \in]0, +\infty[\longrightarrow t^{-1}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$ est continue positive, donc mesurable positive et l'intégrale*

$$I = \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$$

est donc bien définie. On remarque ensuite que

$$\forall t \in]0, +\infty[\,, \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = \int_{]0,+\infty[} e^{-tu} du.$$

On pose $f : (t, u) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\longmapsto e^{-tu}$. C'est une fonction continue donc $\mathcal{B}\left(]0, +\infty[\otimes [a, b]\right)$-mesurable. Le théorème de Fubini positif s'applique et on a

$$\begin{aligned} I &= \int_{]0,+\infty[} \left(\int_{[a,b]} e^{-tu} du \right) dt = \int_{[a,b]} \left(\int_{]0,+\infty[} e^{-tu} dt \right) du \\ &= \int_{[a,b]} \frac{du}{u} = \log a - \log b. \end{aligned}$$

Exercise 4.2 *utiliser le théorème de Fubini pour calculer l'intégrale*

$$\int_a^b dx \int_0^1 y^x dy,\ 0 < a < b$$

et déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln y} dy.$$

Solution 4.2 *Pour tout $x \in [a, b]$, $y \in [0, 1[$, on pose $f(x, y) = y^x$. On a f est mesurable (continue) et positive et :*

$$\int_a^b dx \int_0^1 y^x dy = \int_a^b dx \left[\frac{y^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 = \int_a^b \frac{dx}{x+1} = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

D'près le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned}\int_a^b dx \int_0^1 y^x dy &= \int_0^1 dy \int_a^b y^x dx = \int_0^1 dy \int_a^b e^{x\ln y} dx \\ &= \int_0^1 dy \left[\frac{e^{x\ln y}}{\ln y}\right]_a^b = \int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln y} dy,\end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln y} dy.$$

Exercise 4.3 *Soit (E, d) un espace métrique séparable. On note $\mathcal{B}(E)$ la tribu Borélienne. Pour tout $x \in E$ et tout réel $r > 0$, on note*

$$B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\},$$

la boule ouverte de centre x et de rayon r. Une mesure positive $\mu : \mathcal{B}(E) \longrightarrow [0, +\infty]$ est dite uniformément répartie si elle satisfait la condition suivante :

$$\forall x, y \in E, \forall r > 0,\ 0 < \mu(B(x, r)) = \mu(B(y, r)) < \infty.$$

On fixe μ et ν deux mesures uniformément réparties. Pour tout $r > 0$, on pose

$$g(r) = \mu(B(x, r)) \text{ et } h(r) = \nu(B(y, r)).$$

Dans ce qui suit U désigne un ouvert non-vide de E.

Montrer que

$$\{(x, y) \in E \times U : d(x, y) < r\} \in \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E).$$

Expliquer pouquoi $x \in E \longmapsto \nu(u \cap B(x, r))$ est $\mathcal{B}(E)$-mesurable.

Solution 4.3 *La fonction destance $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue pour la topologie produit sur $E \times E$. Donc*

$$O = \{(x, y) \in E \times U : d(x, y) < r\},$$

est un ouvert de la topologie produit sur $E \times E$. C'est donc un borélien de cet espace. Comme (E, d) est un métrique séparable, un théorème du cours permet d'affirmer que

$$\mathcal{B}(E \times E) = \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E).$$

On a donc

$$O_x^1 = \{x \in E : (x, y) \in O\} = U \cap B(x, r).$$

Le théorème d'existence de la mesure produit (ou Fubini positif appliqué à la fonction 1_O) permet d'affirmer d'une part que $O_x^1 \in \mathcal{B}(E)$ (mais c'est évident ici) et que $x \longmapsto \nu(O_x^1)$ est $\mathcal{B}(E)$-mesurable, ce qui est bien le résultat désiré.

Exercise 4.4 *Montrer que*

$$\int_U \nu\left(U\cap B\left(x,r\right)\right)\mu\left(dx\right)=\int_U \mu\left(U\cap B\left(y,r\right)\right)\nu\left(dy\right).$$

(indication : on peut montrer que ces intégrales valent $\mu\otimes\nu\left(V\right)$, pour un certain sous-ensemble V de $E\times E$, déffirent de celui du l'exo précédent).

Solution 4.4 *On pose*

$$V=\left\{(x,y)\in U\times U : d(x,y)<r\right\},$$

qui est un ouvert de topologie produit sur $E\times E$, donc dans $\mathcal{B}\left(E\right)\otimes\mathcal{B}\left(E\right)$ (on raisonne comme à l'exercice précédent). Pour tous $x,y\in U$

$$V_x^1=\left\{y\in E:(x,y)\in V\right\}=U\cap B\left(x,r\right)\ \text{ et } V_y^2=\left\{x\in E:(x,y)\in V\right\}=U\cap B\left(y,r\right).$$

Si $x\notin U$, $V_x^1=\emptyset$ et si $y\notin U$, $V_y^2=\emptyset$. Le théorème de Fubini implique alors que

$$\mu\otimes\nu\left(V\right)=\int_E \nu\left(V_x^1\right)\mu\left(dx\right)=\int_U \nu\left(U\cap B\left(x,r\right)\right)\mu\left(dx\right).$$

De même

$$\mu\otimes\nu\left(V\right)=\int_E \nu\left(V_y^2\right)\nu\left(dy\right)=\int_U \mu\left(U\cap B\left(y,r\right)\right)\nu\left(dy\right).$$

Finalement

$$\int_U \nu\left(U\cap B\left(x,r\right)\right)\mu\left(dx\right)=\int_U \mu\left(U\cap B\left(y,r\right)\right)\nu\left(dy\right).$$

Exercise 4.5 *On veut montrer que $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)=\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)\otimes\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$.*

1. *Montrer que pour tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion dénombrable de produit d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\subset\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)\otimes\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$.*
2. *Soient A est un ouvert de $\mathbb{R}$ et*

$$\mathcal{M}_1=\left\{B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right):A\times B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right\}.$$

   Montrer que $\mathcal{M}_1$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ contenant les ouverts de $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathcal{M}_1=\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$.
3. *Soient B est un ouvert de $\mathbb{R}$ et*

$$\mathcal{M}_2=\left\{A\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right):A\times B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right\}.$$

   Montrer que $\mathcal{M}_2=\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$.
4. *Montrer que $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)\otimes\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)\subset\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$ (et donc $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)=\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)\otimes\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$).*

Solution 4.5 1. *Soit O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour $(x_1,x_2)\in O$, il existe $r>0$ tel que*

$$]x_1-r,x_1+r[\times]x_2-r,x_2+r[\subset O.$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver

$$y_1\in\mathbb{Q}\cap]x_1-r,x_1[,\ z_1\in\mathbb{Q}\cap]x_1,x_1+r[,\ y_2\in\mathbb{Q}\cap]x_2-r,x_2[\ \text{ et } z_2\in\mathbb{Q}\cap]x_2,x_2+r[.$$

On a donc

$$(x_1, x_2) \in \left]y_1, z_1\right[\times \left]y_2, z_2\right[\subset O.$$

On note alors

$$I = \left\{(y_1, z_1, y_2, z_2) \in \mathbb{Q}^4 : \left]y_1, z_1\right[\times \left]y_2, z_2\right[\subset O\right\}.$$

Pour tout $(x_1, x_2) \in O$, *il existe donc* (y_1, z_1, y_2, z_2) *telque* $(x_1, x_2) \in \left]y_1, z_1\right[\times \left]y_2, z_2\right[$. *On en déduit que*

$$O = \bigcup_{(y_1,z_1,y_2,z_2)\in I} \left]y_1, z_1\right[\times \left]y_2, z_2\right[.$$

Comme I *est dénombrable (car* $\mathbb{Q}^4$ *est dénombrable), on en déduit que* $O \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On a ainsi montré que la tribu* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *contenant tous les ouverts de* $\mathbb{R}^2$, *et donc contenant la tribu engendrée par les ouverts de* $\mathbb{R}^2$ *(c'est-à-dire* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*). Donc* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. $\emptyset \in \mathcal{M}_1$ *car* $\emptyset = A \times \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *On montre que* $\mathcal{M}_1$ *est stable par passage au complémentaire. Soit* $B \in \mathcal{M}_1$, *on a donc*

$$B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ et } A \times B^c = A \times (\mathbb{R}\backslash B) = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B).$$

L'ensemble $A \times \mathbb{R}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$, *car* A *et* $\mathbb{R}$ *sont des ouverts de* $\mathbb{R}$, *on a donc* $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *D'autre part, puisque* $B \in \mathcal{M}_1$ *on a* $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *Donc,* $A \times B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *Ce qui prouve que* $B^c \in \mathcal{M}_1$. *La famille* $\mathcal{M}_1$ *est stable par union dénombrable. En effet, si* $(B_n)_n$ *une suite de* $\mathcal{M}_1$ *on a*

$$A \times \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A \times B_n) \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right) \text{ car } A \times B_n \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right) \text{ pour tout } n \geqslant 1.$$

On a donc montré que $\mathcal{M}_1$ *est une tribu. Soit* θ *un ouvert de* $\mathbb{R}$, *donc* $\theta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Comme* $A \times \theta$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *on a* $A \times \theta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *Ce qui donne* $\theta \in \mathcal{M}_1$. $\mathcal{M}_1$ *est une tribu contenant les ouverts de* $\mathbb{R}$, *donc* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_1$. *En fin,* $\mathcal{M}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3. *On utilise la même méthode que pour la question précédente pour montrer que* $\mathcal{M}_2$ *est une tribu sur* $\mathbb{R}$ *contenant les ouverts de* $\mathbb{R}$ *et par conséquent on a* $\mathcal{M}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

4. *Les deux questions précédentes affirme que si* $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *alors* $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *On a donc* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *On en déduit*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right),$$

et donc (avec la question 1) on a finalement

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Exercise 4.6 *(Exemple de mesure produit)*

Soient μ *et* ν *deux mesures* $\sigma-$ *finies, non nulles sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *tel que* $\mu \otimes \nu(\Delta) = 0$ *où*

$$\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Montrer qu'il existe $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\mu = \alpha\delta_a \text{ et } \nu = \beta\delta_a,$$

où δ_a *est la mesure de Dirac en* a.

Solution 4.6 *On remarque d'abord que* Δ^c *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *donc* $\Delta^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *De plus on a* $(\Delta^c)_y = (\Delta_y)^c = \{x\}^c$, *alors par les hypothèses et Théorème (4.1) on a*

$$\mu \otimes \nu (\Delta^c) = \int_{\mathbb{R}} \nu(\{x\}^c)\, d\mu = 0,$$

on déduit donc que $\nu(\{x\}^c) = 0$, *pour* $\mu-$*presque par tout* $x \in \mathbb{R}$. *Comme* $\mu(\mathbb{R}) \neq 0$, *il existe donc* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $\nu(\{a\}^c) = 0$. *Ceci donne que* $\nu = \alpha\delta_a$ *avec* $\alpha = \nu(\{a\})$. *Comme* $\nu \neq 0$ *on a* $\alpha > 0$. *D'autre fois, grâce au théorème (4.1) on a*

$$\mu \otimes \nu (\Delta^c) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x\}^c)\, d\nu = 0,$$

comme $\nu = \alpha\delta_a$, *on a donc*

$$\mu \otimes \nu (\Delta^c) = \alpha\mu(\{a\}^c) = 0,$$

on déduit donc $\mu = \beta\delta_a$ *avec* $\beta = \mu(\{a\})$. *En fin, comme* $\mu \neq 0$ *on a* $\beta > 0$.

Exercise 4.7 *Soit* $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$; *calculer*

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy,\quad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx,\quad \int_0^1\int_0^1 |f(x,y)|\, dxdy.$$

Solution 4.7 *On a*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) &= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy = \int_0^1 dx \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx = \int_0^1 dy \left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_0^1 = \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -[\arctan y]_0^1$$

$$\begin{aligned} \int_0^1\int_0^1 |f(x,y)|\, dxdy &= \int_0^1 dy \left[\int_0^y \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx + \int_y^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx\right] \\ &= \int_0^1 dy \left(\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]_0^y + \left[\frac{-x}{(x^2+y^2)^2}\right]_y^1\right) \\ &= \int_0^1 dy \left(\frac{y}{2y^2} - \frac{1}{1+y^2} + \frac{y}{2y^2}\right) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y^2}\right) dy = +\infty. \end{aligned}$$

Remarque 4.3 *Le théorème de Fubni ne s'applique pas car la fonction f n'est pas intégrable sur* $[0,1]\times[0,1]$.

Exercise 4.8 1. *Montrer que*

$$\forall a\in\mathbb{R}_*^+,\ f(x,y)=e^{-xy^2},$$

est intégrable sur $[0,a]\times\mathbb{R}^+$.

2. *Calculer*

$$I(a,y)=\int_0^a e^{-xy^2}\sin x dx,\ \text{pour } a>0 \text{ et } y\geqslant 0.$$

3. *Calculer*

$$\lim_{a\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty} I(a,y)dy.$$

4. *En déduire que*

$$\lim_{a\longrightarrow+\infty}\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^4}dy.$$

(indication : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.*)*

Solution 4.8 1. *f est continue sur* $[0,a]\times\mathbb{R}^+$, *donc mesurable*

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\int_0^a |f(x,y)|\,dxdy &= \int_0^{+\infty}\int_0^a e^{-xy^2}dxdy=\int_0^{+\infty}\left[-\frac{e^{-xy^2}}{y^2}\right]_0^a dy\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-ay^2}}{y^2}dy<+\infty,\end{aligned}$$

en effet :

i) *au voisinage de* 0 :

$$\frac{1-e^{-ay^2}}{y^2}\sim a \text{ et } \int_0^a ady=a^2,$$

ii) *au voisinage de* $+\infty$:

$$\frac{1-e^{-ay^2}}{y^2}\sim\frac{1}{y^2} \text{ et } \int_1^{+\infty}\frac{dy}{y^2}<+\infty.$$

2. *On a*

$$\begin{aligned} I(a,y) &= \int_0^a e^{-xy^2}\sin x dx = \left[-e^{-xy^2}\cos x\right]_0^a - \int_0^a y^2 e^{-xy^2}\cos x dx \\ &= 1 - e^{-ay^2}\cos a - y^2\int_0^a e^{-xy^2}\cos x dx \\ &= 1 - e^{-ay^2}\cos a - y^2\left[\left[e^{-xy^2}\sin x\right]_0^a - y^2\int_0^a e^{-xy^2}\sin x dx\right], \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} I(a,y) &= 1 - e^{-ay^2}\cos a - y^2 e^{-ay^2}\sin a - y^4 I(a,y) \\ &\Longrightarrow\ I(a,y) = \frac{1 - e^{-ay^2}\cos a - y^2 e^{-ay^2}\sin a}{1+y^4}. \end{aligned}$$

3. *On calcule* $\lim\limits_{a\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty} I(a,y)dy$ *: on a*

$$|I(a,y)| \leqslant \frac{2+y^2}{1+y^4}\ \ et\ \ \int_0^{+\infty}\frac{2+y^2}{1+y^4}dy < +\infty.$$

De plus

$$\lim_{a\longrightarrow+\infty} I(a,y) = \frac{1}{1+y^4},$$

d'après le théorème de la convergence dominée

$$\lim_{a\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty} I(a,y)dy = \int_0^{+\infty}\lim_{a\longrightarrow+\infty} I(a,y)dy = \int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^4}.$$

4. *En déduire que*

$$\lim_{a\longrightarrow+\infty}\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^4}dy.$$

La fonction $e^{-xy^2}\sin x$ *est continue sur* $[0,a]\times\mathbb{R}^+$, *donc mesurable et :*

$$\int_0^{+\infty}\int_0^a \left|e^{-xy^2}\sin x\right| dxdy \leqslant \int_0^{+\infty}\int_0^a e^{-xy^2}dxdy,$$

d'près le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty}\int_0^a \left|e^{-xy^2}\sin x\right| dxdy &= \int_0^a\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\sin x dydx \\ &= \int_0^a \sin x\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}dydx, \end{aligned}$$

et on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}dy = \int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{x}y\right)^2}dy = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{x}}du,$$

donc

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{a} e^{-xy^2}\sin x dxdy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{a}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx,$$

d'où

$$\lim_{a\longrightarrow+\infty}\int_0^{a}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\lim_{a\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty} I(a,y)dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^4}.$$

Exercise 4.9 1. *Montrer que*

$$f(x,y) = e^{-y}\sin(2xy),$$

est intégrable sur $[0,1]\times[0,+\infty[$.

2. *Déduire la valeur de*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 y}{y}e^{-y}dy.$$

(indication : $\sin^2 y = \frac{1}{2}(1-\cos 2y)$*).*

Solution 4.9 1. f *est continue sur* $[0,1]\times[0,+\infty[$ *donc mesurable, de plus*

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\int_0^{1}|f(x,y)|\,dxdy &= \int_0^{+\infty}\int_0^{1}\left|e^{-y}\sin(2xy)\right|dxdy\\ &\leqslant \int_0^{+\infty}\int_0^{1}e^{-y}dxdy = \int_0^{+\infty}e^{-y}dy = \left[-e^{-y}\right]_0^{+\infty} = 1,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. *On déduit la valeur de* $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 y}{y}e^{-y}dy$ *: On a*

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\int_0^{1}\left|e^{-y}\sin(2xy)\right|dxdy &= -\int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{-y}\cos(2xy)}{2y}\right]_0^1 dy\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2y}{2y}e^{-y}dy = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 y}{y}e^{-y}dy.\end{aligned}$$

D'autre part et comme f est intégrable, d'après la théorème de Fubini :

$$\int_0^{+\infty}\int_0^1 e^{-y}\sin(2xy)\,dxdy = \int_0^1\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(2xy)\,dydx,$$

on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(2xy)\,dy &= -\left[\frac{e^{-y}}{2x}\cos(2xy)\right]_0^1 - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-y}}{2x}\cos(2xy)\,dy\\
&= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} e^{-y}\cos(2xy)\,dy\\
&= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x}\left[\frac{e^{-y}}{2x}\sin(2xy)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{e^{-y}}{2x}\sin(2xy)\,dy\\
&= \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2}\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(2xy)\,dy.
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(2xy)\,dy = \frac{\frac{1}{2x}}{1+\frac{1}{4x^2}} = \frac{2x}{1+4x^2},$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(2xy)\,dydx &= \int_0^1 \frac{2x}{1+4x^2}\\
&= \left[\frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)\right]_0^1 = \frac{\ln 5}{4},
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 y}{y}e^{-y}dy = \frac{\ln 5}{4}.$$

Bibliographie

[1] **Ansel JP :** *Exercices corrigés en théorie de la mesure et de l'integration 2e cycle universitaire.* ellipses *Paris 1995.*

[2] **J. BASS :** *Cours de mathématique superieure* tome III.

[3] **V. I. Bogachev :** *Measure theory (Volume I),* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[4] **A. Bouziad et J. Calbrix :** *Theorie de la mesure et de l'intégration, 185.* Puli. univ. Rounen, 1993.

[5] **H. Brezis :** *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.*

[6] **Briane M :** *Théorie de l'intégration : cours et exercice licence et master 4e éd, Vuibert Paris, 2006.*

[7] *Cours et exercices en mesure et intégration 3ème année licence réalisé par Mr Medeghri Ahmed et Bouziani Ftima*, 2014-2015.

[8] **T. Gallay :** *Théorie de la mesure et de l'intégration, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2009.*

[9] **J.Genet :** *Mesure et intégration (théorie élémentaire), Vuibert 1976.*

[10] **Guilhem Coq :** *Théorie de la mesure (Exercices corrigés) Université de Poitiers,2009-2010.*

[11] **P. R. Halmos :** *Mesure theory, Springer-Verlag New York Inc., 1974.*

[12] **Khac Kvo :** *Mesure et intégration convolution et analyse de Fourier, Ellipses Pris, 1984.*

[13] **H. König :** *Measure and integration (An advanced course in basic procedures and applications), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.*

[14] **V. Komornik :** *Précis d'analyse réelle : Analyse fonctionnelle, intégrale de Lebesgue, Espaces fonctionnels, ellipses Edition Marketiong S.A., 2002.*

[15] **P. Krée :** *Intégration et théorie de la mesure : une approche géométrique,* ellipses édition marketiong S.A., 1997.

[16] **E. Laamri :** *Mesure et intégration, convolution et transformée de Fourier des fonctions,* Sciences Sup, Dunod, 2007.

[17] L. Meziani : *Mesure et intégration, Université d'Alger, 1977-78.*

[18] **C. Swartz :** *Measure, intégration and function spaces,* World scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1994.

[19] **A. J. Weir :** *Lebesgue integration and mesure,* Cambride university Press, 1973.

[20] **J. Yeh :** *Real analysis (theory of measure and integration)*, 2nd édition, World scientific publishing, London, 2006.

[21] **Xavier MARY :** *Mesure et intégration (notes de cours).*