Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ibn Badis – Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

Polycopié de cours

Équations Différentielles Ordinaires

Enseigné aux étudiants de la

Troisième année Licence LMD en Mathématiques

Au premier semestre (L3 - S5)

Préparé par :

Zineb Kaisserli

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique (FSEI)
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie

Année Universitaire : 2019 /2020

POLYCOPIÉ

Sommaire

Avant-propos

Le présent document est essentiellement centré sur le thème des équations différentielles ordinaires lesquelles sont des équations différentielles dont la fonction inconnue ne dépend que d'une seule variable. Plus simplement, une équation différentielle ordinaire, notée par EDO, est une équation qui se présente sous forme d'une relation entre une fonction inconnue d'une seule variable et de ses dérivées. Lorsque nous possédons plusieurs relations entre des fonctions inconnues dépendant de la même variable et de leurs dérivées nous parlerons, alors, d'un système d'équations différentielles ordinaires ou plus simplement d'un système différentiel.

Les équations différentielles ordinaires et les systèmes différentiels représentent un sujet d'étude d'une grande importance à la fois en mathématiques pures et appliquées. En effet, en mathématiques pures, l'objectif principal de la théorie des équations différentielles ordinaires est d'établir des résultats purement théoriques qui permettaient de trouver des résultats sur les solutions $\big($existence, unicité, stabilité, $\cdots\big)$ sans les connaître explicitement vu que la résolution explicite de la plupart des EDO reste encore un problème ouvert. Tandis qu'en mathématiques appliquées, les équations différentielles ordinaires sont utilisées pour modéliser des phénomènes et des processus comme des problèmes d'évolution physiques, biologiques ou encore dans la dynamique des populations.

Ce polycopié, consacré aux équations différentielles ordinaires, destiné aux étudiants ayant fait dans leur cursus les matières : Analyse, Algèbre et Topologie, a pour objectif, dans un premier temps, de comprendre la méthodologie de la résolution des différents types d'équations différentielles ordinaires et de les résoudre par la suite, puis, d'illustrer la méthodologie de résolution des systèmes différentiels linéaires et de présenter, en dernier, une introduction sur quelques notions de stabilité des équations différentielles ordinaires et des systèmes différentiels.

C'est pour ces raisons et bien d'autres que chaque chapitre est constitué d'une part de notes de cours, et d'autre part des exercices et des problèmes d'applications suivis de leurs corrigés. Les deux parties sont d'une égale importance. En effet, les notes de cours sont volontairement rédigées dans un style très simple et clair, mais assez théorique suivie par des exemples illustratifs. À quelques exceptions prés, certains résultats sont accompagnés de leur preuve. Ensuite, la partie exercices et problèmes d'applications présente les différents cas possibles que nous pouvons rencontrer et traiter.

Dans ce sens, ce manuscrit est organisé en cinq chapitres comme suit :

- Le premier chapitre regroupe les différentes notions et définitions élémentaires aident à la compréhension des différentes parties présentées le long de ce polycopié. Un certain nombre d'outils permettant de comprendre l'allure des solutions des équations différentielles ordinaires seront présentés dans ce chapitre et illustrés par des exemples. La dernière partie de ce chapitre se focalise sur l'un des principaux résultats des équations différentielles ordinaires, il s'agit du théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz.
- Ce second chapitre présente spécifiquement les différentes techniques qui permettent

la résolution des différents types des équations différentielles ordinaires d'ordre 1. Les problèmes à une condition initiale feront également partie de ce chapitre où deux différentes méthodes de résolution seront proposées.
- Quant au troisième chapitre, nous y présentons les méthodes de résolution des équations différentielles ordinaires d'ordre 2 linéaire ou pas, à coefficients constants ou non avec ou sans conditions initiales.
- Le quatrième chapitre est consacré à l'étude et à la résolution des équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants d'ordre supérieur à 2. Le cas où les EDO sont associés à des conditions initiales est, aussi, traité dans ce chapitre.
- Le cinquième et dernier chapitre se focalise sur la résolution des systèmes différentiels avec ou sans conditions initiales et aussi sur la réduction de l'ordre de certain EDO d'ordre supérieur à 1. Quelques notions sur la théorie de la stabilité au sens de Liapounov sont, aussi, introduite dans ce chapitre.

Le présent document comprend, également, une bibliographie où les différents ouvrages utilisés pour l'élaboration de ce produit sont présentés, suivi par un index des notations lequel clôture ce polycopié.

En dernier, ce polycopié est le fruit des cours et des travaux dirigés enseignés pour les étudiants de la troisième année Licence en Mathématiques durant le premier semestre au sein du département de Mathématiques et Informatique de l'Université Abdelhamid Ibn Badis - Mostaganem, Algérie.

Aussi, tous vos questions, vos remarques, vos commentaires, et même vos critiques, liées au sujet de cet ouvrage, sont accueillis avec plaisir à l'adresse électronique :

zineb.kaisserli@univ-mosta.dz

Chapitre 1

Généralités, définitions et résultats fondamentaux sur les équations différentielles ordinaires d'ordre n

Ce chapitre a pour objectif d'introduire et de rappeler quelques notions et définitions élémentaires sur les équations différentielles ordinaires.

1 Équations différentielles ordinaires d'ordre n

Dans cette section quelques définitions sur les équations différentielles ordinaires d'ordre n sont présentées.

1.1 Définitions d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n

Définition 1.1 *On appelle équation différentielle ordinaire d'ordre n, également notée* EDO*, une équation établissant une relation entre une seule variable réelle* $\big($*par exemple :* $x\big)$*, une fonction inconnue* $\big($*par exemple :* $x \mapsto y(x)\big)$ *et ses n dérivées* $y'(x)$, $y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)$ *du type*

$$\mathscr{F}\left(x;\, y(x),\, y'(x)\,, y''(x), \cdots,\, y^{(n-1)}(x),\, y^{(n)}(x)\right) = 0, \tag{1.1}$$

où $\mathscr{F}$ *est une application de* $\mathrm{I} \times \Lambda_0 \times \Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_n \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Remarque 1.1 *L'ordre de l'*EDO *est celui de la dérivée d'ordre maximum qui y intervient.*

Exemple 1.1 *L'équation*

$$y^{(7)}(x) + 5x\,y^{(3)}(x) - \sin x = 0, \tag{1.2}$$

représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 7 *de variable x et de fonction inconnue y.*

Définition 1.2 *On appelle équation différentielle ordinaire normale d'ordre n, toute équation de la forme*

$$y^{(n)}(x) = f\left(x;\, y(x),\, y'(x)\,, y''(x), \cdots,\, y^{(n-1)}(x)\right), \tag{1.3}$$

où f est une application de $\mathrm{I} \times \Lambda_0 \times \Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_{n-1} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *dans* $\Lambda_n \subseteq \mathbb{R}$.

Exemple 1.2 *La forme normale de l'équation différentielle ordinaire* (1.2) *est*

$$y^{(7)}(x) = \sin x - 5x\,y^{(3)}(x).$$

Définition 1.3 *Une équation différentielle ordinaire d'ordre n est dite* EDO *sans second membre si elle ne contient que des termes en y et de ses dérivées. Autrement, elle est dite* EDO *avec second membre.*

Exemple 1.3 *L'équation*

$$y^{(7)}(x) = \sin x - 5x\, y^{(3)}(x).$$

est une EDO *d'ordre* 7 *avec second membre. Son* EDO *sans second membre associé est*

$$y^{(7)}(x) + 5x\, y^{(3)}(x) = 0.$$

Définition 1.4 *Une équation différentielle ordinaire d'ordre n est à coefficients constants si le coefficient de la fonction inconnue y et les coefficients de toutes ses dérivées ne dépendent pas de x. Autrement, l'*EDO *est dite à coefficients variables.*

Exemple 1.4 *L'équation*

$$y''(x) - 3x\, y'(x) = x^2 \tan x,$$

représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 *à coefficients variables avec second membre.*

Définition 1.5 *Une équation différentielle ordinaire d'ordre n est dite linéaire si la fonction $\mathscr{F}$ est linéaire par rapport à y et à toutes ses dérivées.*

*Autrement dit, l'*EDO *d'ordre n est dite linéaire si elle s'écrit sous la forme*

$$a_n(x)\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = \mathrm{H}(x),$$

où

- *n représente l'ordre de l'équation différentielle ordinaire,*
- *x est la variable réelle,*
- $\forall\, i = \overline{0,\, n}$, $a_i(x)$ *sont appelée les coefficients lesquels peuvent être variables ou constants,*
- *y est la fonction inconnue,*
- $\forall\, i = \overline{1,\, n}$, $y^{(i)}$ *sont les dérivées de la fonction inconnue y par rapport à x,*
- H *est la fonction second membre.*

Exemple 1.5 *La relation $x^2\, y''(x) + 5x\, y'(x) - y^3(x) = 0$ est une équation différentielle ordinaire non-linéaire du second ordre à coefficients variables sans second membre.*

Exemple 1.6 *La relation $\frac{d^2}{dx^2} y(x) - 4\, y(x) = x^2$ est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre* 2 *à coefficients constants avec second membre.*

Remarque 1.2 *La relation* (1.1) *est la forme implicite de l'*EDO*, tandis que la relation* (1.3) *est la forme explicite, résolue ou normale.*

Remarque 1.3 *La variable réelle x est dite variable indépendante ou muette, par contre, y est la fonction inconnue de la variable x dite aussi variable dépendante.*

1.2 Solutions d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n

Définition 1.6 *On appelle solution ou intégrale de l'équation différentielle ordinaire* (1.1) *tout couple* (I, g) *formé d'un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$ *et d'une fonction* g *vérifiant les conditions suivantes :*

i. *g soit n-fois dérivable sur* I.

ii. $\forall x \in \mathrm{I} : \mathscr{F}\left(x; g(x), g'(x), g''(x), \cdots, g^{(n-1)}(x), g^{(n)}(x)\right) = 0.$

Définition 1.7 *Une fonction qui vérifie les conditions* **i.** *et* **ii.** *est appelé solution ou intégrale particulière de l'*EDO (1.1).

Définition 1.8

- *La fonction $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, dont les dérivées d'ordre n existent, est une solution explicite de l'*EDO (1.1) *sur l'intervalle* I *si* $\mathscr{F}\left(x; g(x), g'(x), g''(x), \cdots, g^{(n-1)}(x), g^{(n)}(x)\right)$ *est définie sur* I *et* $\mathscr{F}\left(x; g(x), g'(x), g''(x), \cdots, g^{(n-1)}(x), g^{(n)}(x)\right) = 0$ *sur* I.
- *la fonction $g\left(x; y(x)\right)$, où $x \in \mathrm{I}$ et $y \in \Lambda_0$, est une solution implicite de l'*EDO (1.1) *sur* I *si cette relation définit au moins une fonction $\tilde{g} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ telle que $\tilde{g}$ est une solution explicite de l'*EDO (1.1).

Remarque 1.4 *Intégrer une* EDO *consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions ou de ses intégrales.*

Définition 1.9 *Si* (I, g) *est la solution de l'*EDO (1.1). *Alors, le graphe de g est appelé courbe intégrale de cette équation.*

Remarque 1.5 *Si g est une solution de l'*EDO (1.1) *définie sur* I *; la restriction g_1 de g à tout sous-intervalle de* I, *est aussi une solution de l'*EDO (1.1).

*Inversement, il peut exister des solutions g_2 de l'*EDO (1.1) *prolongeant g.*

Définition 1.10 *Si la seule solution l'*EDO (1.1) *prolongeant g est g elle-même, on dira alors, que g est une solution maximale.*

Définition 1.11 *Si la solution g de l'*EDO (1.1) *ne dépend d'aucune constante $c \in \mathbb{R}$, alors, la solution est dite solution particulière. Autrement, elle est dite solution générale.*

Exemple 1.7 *Soit l'équation différentielle ordinaire du second ordre à coefficients constants sans second membre*

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = g(x) = \cos x + \sin x,$$

représente une solution particulière explicite sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.8 *Soit l'équation différentielle ordinaire du premier ordre*

$$x\, y'(x) = -y(x).$$

Cette équation admet des solutions sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$.

*La solution générale, laquelle est explicite, associée à l'*EDO *est :* $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$y(x) = \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

*La figure ci-dessous (figure 1.1) représente l'ensemble des courbes intégrales de l'*EDO $x\,y'(x) = -y(x)$.

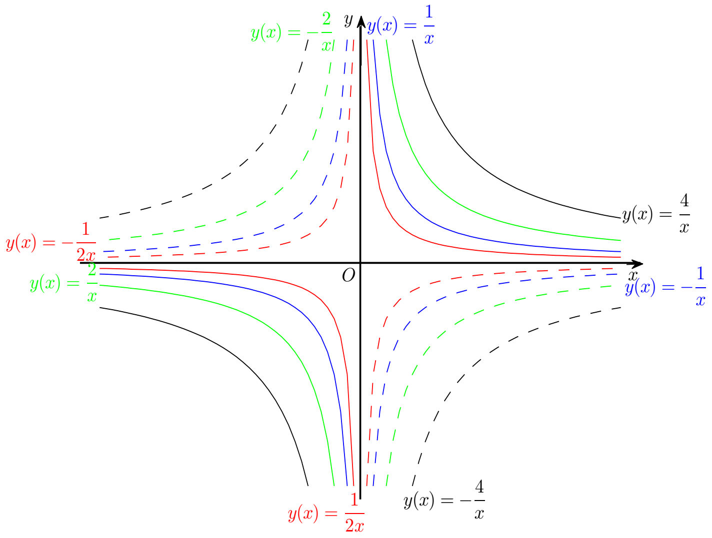

FIGURE 1.1 – Courbes intégrales de l'EDO $x\,y'(x) = -y(x)$.

Exemple 1.9 *L'équation différentielle ordinaire d'ordre* 2 *non linéaire*

$$y^2(x)\,y''(x) + y'(x) = 0,$$

admet comme solution générale

$$\frac{1}{c_1}y(x) - \frac{1}{c_1^2}\ln|1 + c_1 y(x)| = x + c_2, \quad c_1 \in \mathbb{R}^*,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Il est simple de remarquer cette solution générale est implicite.

2 Systèmes différentiels

Quelques notions préliminaires sur les systèmes différentiels seront présentées dans cette section.

2.1 Définition d'un système différentiel

Définition 1.12 *Un système différentiel est une collection de plusieurs* EDO *avec plusieurs fonctions inconnues dépendant de la même variable.*

Plus simplement, un système différentiel scalaire est un système de la forme

$$\begin{cases} \mathscr{F}_1\Big(x;\, y_1(x), \cdots, y_p(x), y_1'(x), \cdots, y_p'(x), \cdots, y_1^{(r)}(x), \cdots, y_p^{(r)}(x)\Big) = 0, \\ \mathscr{F}_2\Big(x;\, y_1(x), \cdots, y_p(x), y_1'(x), \cdots, y_p'(x), \cdots, y_1^{(r)}(x), \cdots, y_p^{(r)}(x)\Big) = 0, \\ \vdots \\ \mathscr{F}_q\Big(x;\, y_1(x), \cdots, y_p(x), y_1'(x), \cdots, y_p'(x), \cdots, y_1^{(r)}(x), \cdots, y_p^{(r)}(x)\Big) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Le système est à q équations différentielles ordinaires et est dit d'ordre r car intervient les dérivées $r^{\text{ième}}$ des p fonctions inconnues $y_1, y_2, \cdots, y_p$ de la variable x.

Exemple 1.10 *Le système suivant représente un système différentiel d'ordre* 4

$$\begin{cases} x^2\, y_1(x) + x\, y_2'(x) + 4\, y_3''(x) = e^x, \\ x\, y_1^{(4)}(x) + y_2(x) + y_2'(x)\, y_3''(x) = 0, \end{cases}$$

où les fonctions inconnues, de la variable x, sont y_1, y_2 et y_3.

2.2 Solutions d'un système différentiel

Définition 1.13 *Le $p-$uple de fonctions $\left(g_1, g_2, \cdots, g_p\right)$ est appelé une solution du système différentiel* (1.4) *si chaque fonction g_i, $i = \overline{1,p}$ et $r-$fois dérivables vérifiant chaque équation $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \cdots, \mathscr{F}_q$.*

Remarque 1.6 *En règle générale, nous considérons seulement le cas où nous avons autant d'équations différentielles ordinaires que de fonctions inconnues. Autrement dit, nous traitons uniquement le cas où $p = q$.*

Définition 1.14 *On appelle trajectoire l'image de la solution d'un système différentiel.*

Remarque 1.7 *Lorsque $p = q = 2$, la trajectoire est une courbe du plan $\left(y_1, y_2\right)$ d'équation paramétrique $\left(y_1(x), y_2(x)\right)$.*

Définition 1.15 *On appelle portrait de phases d'un système différentiel l'ensemble de ses trajectoires.*

Remarque 1.8 *Dans la pratique, tracer le portrait de phases d'un système de dimension* 2*, c'est tracer, dans le plan $\left(y_1, y_2\right)$, suffisamment de trajectoires pour que l'on puisse les imaginer toutes.*

Exemple 1.11 *Le système différentiel d'ordre* 1

$$\begin{cases} y_1'(x) - 2y_1(x) - 3y_2(x) = 0, \\ y_2'(x) - 2y_1(x) - y_2(x) = 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

admet comme solution générale

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1\, e^{-x} + 3c_2\, e^{4x} \\ c_1\, e^{-x} + 2c_2\, e^{4x} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pour différentes valeurs de c_1 et c_2, les solutions du système différentiel (1.5) *sont représentées par la figure* 1.2.

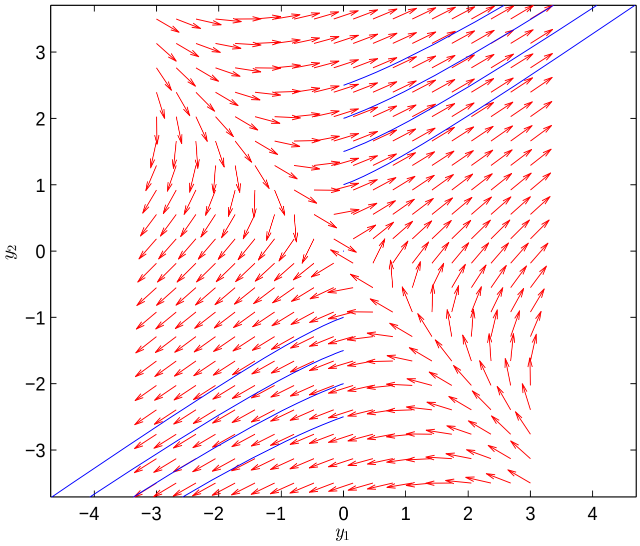

FIGURE 1.2 – Portrait de phase du système (1.5).

3 Réduction d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n à un système différentiel d'ordre 1

Avant de commencer à résoudre des EDO d'ordre quelconque, nous allons nous rendre compte qu'il est possible de réduire l'ordre d'une EDO d'ordre n à un système d'EDO d'ordre 1.

Méthode de résolution 1.1 *Soit l'équation différentielle ordinaire d'ordre n écrite sous la forme normale*

$$y^{(n)}(x) = f\left(x;\, y(x),\, y'(x),\, y''(x),\, \cdots,\, y^{(n-1)}(x)\right),$$

où $f : \mathrm{I} \times \Lambda_0 \times \Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_{n-1} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \Lambda_n \subseteq \mathbb{R}$ *est une application.*

Introduisant le changement de fonctions auxiliaires $y_1, y_2, \cdots, y_n$ *de tel sorte que*

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1(x) & = & y(x), \\ y_2(x) & = & y'(x), \\ y_3(x) & = & y''(x), \\ \vdots & & \\ y_n(x) & = & y^{(n-1)}(x). \end{array}\right. \tag{1.6}$$

En dérivant le système (1.6)*, nous obtenons*

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1'(x) & = & y'(x) \\ y_2'(x) & = & y''(x) \\ y_3'(x) & = & y^{(3)}(x) \\ \vdots & & \\ y_n'(x) & = & y^{(n)}(x) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y_1'(x) & = & y_2(x), \\ y_2'(x) & = & y_3(x), \\ y_3'(x) & = & y_4(x), \\ \vdots & & \\ y_n'(x) & = & y^{(n)}(x), \\ & = & f\left(x;\, y_1(x),\, y_2(x),\, y_3(x),\, \cdots,\, y_n(x)\right), \end{array}\right.$$

ce dernier système représente un système de n EDO *d'ordre* 1*, dit aussi, un système différentiel d'ordre* 1.

En général, on appelle système différentiel normal d'ordre 1 *tout système différentiel de la forme*

$$\begin{cases} y_1'(x) &= f_1\big(x;\, y_1(x),\, y_2(x)\,, y_3(x),\, \cdots,\, y_n(x)\big)\,,\\ y_2'(x) &= f_2\big(x;\, y_1(x),\, y_2(x)\,, y_3(x),\, \cdots,\, y_n(x)\big)\,,\\ \vdots & \\ y_n'(x) &= f_n\big(x;\, y_1(x),\, y_2(x)\,, y_3(x),\, \cdots,\, y_n(x)\big)\,. \end{cases} \tag{1.7}$$

Le système (1.7) peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle vectorielle unique du premier ordre de la forme

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Y}(x) = \mathrm{F}\big(x;\, \mathrm{Y}(x)\big),$$

avec $x \in \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{Y} = \big(y_1,\, y_2,\, \cdots,\, y_n\big) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n \subseteq \mathbb{R}^n$
et $\mathrm{F} = \big(f_1,\, f_2,\, \cdots,\, f_n\big) : \big(\mathrm{I} \times \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n\big)^n \to \mathbb{R}^n$ une application bien définie.

Exemple 1.12 *L'équation différentielle ordinaire d'ordre* 2

$$y''(x) - 3y'(x) + 4y(x) = e^x,$$

peut se transformer en

$$\begin{cases} y_1'(x) &= y_2(x),\\ y_2'(x) &= -4y_1(x) + 3y_2(x) + e^x. \end{cases} \tag{1.8}$$

La forme vectorielle du système différentiel (1.8) *est*

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Y}(x) = \mathrm{F}\big(x;\, \mathrm{Y}(x)\big),$$

avec

$$\mathrm{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dx}\mathrm{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{F}\big(x;\, \mathrm{Y}(x)\big) = \begin{pmatrix} f_1\big(x;\, y_1(x),\, y_2(x)\big) \\ f_2\big(x;\, y_1(x),\, y_2(x)\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ 4y_1(x) + 3y_2(x) + e^x \end{pmatrix}.$$

4 Équations différentielles vectorielles : Problème de Cauchy

Jusqu'à présent, nous avons évoqué les solutions possibles des équations différentielles ordinaires ou des systèmes différentiels sans ajouter des conditions particulières (conditions initiales ou conditions aux limites) lesquelles nous permettent de choisir une solution particulière dans la famille des solutions générales possible.

Le cas où nous associons à une EDO des conditions initiales est défini par un problème de Cauchy.

L'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy est traitée dans cette section.

4.1 Préliminaires et définitions

1. Si $z = (z_1, z_2, \cdots, z_N) \in \mathbb{R}^N$. Alors, l'application $|z| = \max\limits_{1\leq j\leq N} |z_j|$ définie une norme dans $\mathbb{R}^N$.

2. La norme euclidienne est définie par $\forall z \in \mathbb{R}^N : ||z|| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_N^2}$.

3. Une partie non vide Ω de $\mathbb{R}^N$ est un ouvert si et seulement si pour tout point $z \in \Omega$, il existe un nombre $r > 0$ tel que

$$\left\{\tilde{z} \in \mathbb{R}^N : |\tilde{z} - z| < r\right\} \subset \Omega.$$

4. Si $\mathfrak{g} : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$ est une fonction continue, on définit

$$\int_a^b \mathfrak{g}(t)\,dt = \left(\int_a^b \mathfrak{g}_1(t)\,dt, \int_a^b \mathfrak{g}_2(t)\,dt, \cdots, \int_a^b \mathfrak{g}_N(t)\,dt\right) \in \mathbb{R}^N,$$

où $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \cdots, \mathfrak{g}_N)$.

5. $\mathfrak{g}$ est une fonction continue, si et seulement si chaque $\mathfrak{g}_i$, $i = \overline{1, N}$, est continue.

6. Si $\left|\int_a^b \mathfrak{g}_j(t)\,dt\right| \leq \int_a^b \left|\mathfrak{g}_j(t)\right|\,dt$. Alors,

$$\left|\int_a^b \mathfrak{g}(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |\mathfrak{g}(t)|\,dt, \quad \text{où} \quad |\mathfrak{g}(t)| = \max_{1\leq j\leq N} \left|\mathfrak{g}_j(t)\right|.$$

7. Soit $\{u_m\}$ une suite de fonction définie dans $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. Alors,

$$\lim_{m\to+\infty} u_m(t) = u(t), \quad t \in [a, b],$$

existe si et seulement si $\{u_m(t)\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^N$ pour tout $t \in [a, b]$.

8. La suite $\{u_m\}$ converge uniformément vers u dans l'intervalle $[a, b]$ si

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\sup_{t\in[a,b]} |u_m(t) - u(t)|\right) = 0.$$

9. Si les suites $\{u_m\}$ sont continues dans $[a, b]$ et que chaque $\{u_m\}$ converge uniformément vers u. Alors, u est continue dans $[a, b]$.
De plus,

$$\lim_{m\to+\infty}\int_a^b u_m(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt.$$

10. Soit $\mathfrak{g} : \widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$. On dit que la fonction $\mathfrak{g}$ est lipschitzienne dans $\widetilde{\Omega}$ s'il existe $k \geq 0$ tel que

$$|\mathfrak{g}(z) - \mathfrak{g}(\tilde{z})| \leq k\,|z - \tilde{z}|, \quad z, \tilde{z} \in \widetilde{\Omega}.$$

11. Soit $\mathfrak{g} : \widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ avec $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \cdots, \mathfrak{g}_N)$. Alors, $\mathfrak{g}$ est une fonction lipschitzienne si est seulement si

$$\exists k \geq 0 : \max_{1\leq j\leq N}\left|\mathfrak{g}_j(z) - \mathfrak{g}_j(\tilde{z})\right| \leq k\,|z - \tilde{z}|, \quad z, \tilde{z} \in \widetilde{\Omega}.$$

Autrement dit, chacune des N fonctions est lipschitzienne dans $\widetilde{\Omega}$.

12. Soit $\mathfrak{g} : \mathrm{I} \times \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$; $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ et $\widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{M}}$ une application continue. On dit que la fonction $\mathfrak{g}$ est lipschitzienne en z de constante de lipschitz $k \geq 0$, si pour tout $(t, z), (t, \widetilde{z}) \in \mathrm{I} \times \widetilde{\Omega}$, nous avons

$$\|\mathfrak{g}(t; z) - \mathfrak{g}(t; \widetilde{z})\| \leq k \, \|z - \widetilde{z}\| .$$

La fonction $\mathfrak{g}$ est, aussi, dite fonction lipschitzienne par rapport à sa seconde variable.

13. On dit que la fonction $\mathfrak{g}$ est localement lipschitzienne en z si pour tout $(t_0, z_0) \in \mathrm{I} \times \widetilde{\Omega}$, il existe un nombre $\epsilon > 0$ et une constante $k \geq 0$ dépendant éventuellement de(t_0, z_0) tel que

$$\|\mathfrak{g}(t; z) - \mathfrak{g}(t; \widetilde{z})\| \leq k_{(t_0, z_0)} \, \|z - \widetilde{z}\| ,$$

pour tout $(t, z), (t, \widetilde{z}) \in \mathrm{I} \times \widetilde{\Omega}$ où $|t - t_0| < \epsilon$, $|z - z_0| < \epsilon$ et $|\widetilde{z} - z_0| < \epsilon$.

4.2 Problème de Cauchy

Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ un ouvert connexe non vide, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{F} : \mathrm{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ une fonction continue.

On appelle solution de l'équation différentielle ordinaire vectorielle d'ordre 1

$$\mathrm{Y}'(x) = \mathrm{F}\big(x; \mathrm{Y}(x)\big),$$

une fonction Y de classe $\mathscr{C}$ sur un intervalle $\mathrm{J} \subseteq \mathrm{I}$ et à valeurs dans Ω dont la dérivée vérifiée

$$\mathrm{Y}'(x) = \mathrm{F}\big(x; \mathrm{Y}(x)\big), \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathrm{J}.$$

On appelle conditions initiales une égalité de la forme

$$\mathrm{Y}(x_0) = \mathrm{Y}_0; \quad \big(x_0, \mathrm{Y}_0\big) \in \mathrm{I} \times \Omega.$$

Ainsi, le système suivant

$$\begin{cases} \mathrm{Y}'(x) = \mathrm{F}\big(x; \mathrm{Y}(x)\big), \\ \mathrm{Y}(x_0) = \mathrm{Y}_0. \end{cases} \tag{1.9}$$

se nomme problème de Cauchy.

Résoudre un problème de Cauchy revient à trouver un intervalle $\mathrm{J} \subseteq \mathrm{I}$ contenant x_0 et une fonction Y de classe $\mathscr{C}$ sur J à valeurs dans Ω satisfaisant $\mathrm{Y}'(x) = \mathrm{F}\big(x; \mathrm{Y}(x)\big)$.

Le théorème suivant montre que sous certain conditions le problème de Cauchy (1.9) admet une unique solution.

Théorème 1.1 (Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz) *Ω étant une partie ouverte d'un espace réel de Banach $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et F une fonction continûment différentiable de $\mathrm{I} \times \Omega$ dans E.*

Alors, pour tout $x_0 \in \mathrm{I}$ et tout $\mathrm{Y}_0 \in \Omega$, il existe un intervalle ouvert $\mathrm{J} \subseteq \mathrm{I}$ tel que l'équation différentielle ordinaire vectorielle d'ordre 1

$$\mathrm{Y}'(x) = \mathrm{F}\big(x; \mathrm{Y}(x)\big),$$

possède une solution, et une seule, $x \longmapsto \mathrm{Y}(x)$ différentiable sur J et vérifiant $\mathrm{Y}(x_0) = \mathrm{Y}_0$.

Remarque 1.9 *Nous admettons ce théorème dans ce cas général mais nous ferons la démonstration dans le cas particulier de* $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}$. *Le procédé utilisé dans ce cas permettra d'avoir une idée de la démonstration dans le cas le plus général.*

Remarque 1.10 *Nous utiliserons la méthode des approximations successives de Picard pour démontrer le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz.*

Preuve. [du théorème 1.1]
Rappelons que dans le cas unidimensionnel, le problème de Cauchy s'écrit comme

$$\begin{cases} y'(x) = f\left(x;\, y(x)\right), \\ y\left(x_0\right) = y_0, \end{cases} \tag{1.10}$$

où $f : \mathrm{I} \times \Lambda_0 \to \mathbb{R}$ une fonction continument différentiable avec $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ et Λ_0 un ouvert d'un espace de Banach $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}$.

1. **Existence de la solution :**
   Soit $\mathrm{D} = [x_0 - a\,,\, x_0 + a] \times [y_0 - b\,,\, y_0 + b] \subset \mathrm{I} \times \Lambda_0$ un compact avec $a > 0$, $b > 0$.
   On sait que f est continument différentiable sur D, ce qui entraine que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe et est continue sur D. Donc
   $$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x; y)\right| \quad \text{est bornée sur D.}$$
   Posons : $\mathrm{K} = \sup\limits_{(x,y)\in \mathrm{D}} \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x; y)\right|$.
   Appliquons la formule des accroissements finis à la fonction $y \mapsto f\left(x; y(x)\right)$ sur l'intervalle $[y_1\,,\, y_2] \subset [y_0 - b\,,\, y_0 + b]$ et $x \in [x_0 - a\,,\, x_0 + a]$
   $$f\left(x; y_1(x)\right) - f\left(x; y_2(x)\right) = \frac{\partial f}{\partial y}(x; c)\left(y_1(x) - y_2(x)\right) \quad \text{où} \quad c \in [y_1, y_2],$$
   d'où
   $$\left|f(x; y_1) - f(x; y_2)\right| \leq \mathrm{K}\left|y_1 - y_2\right|.$$
   Ainsi, f satisfait à la condition de lipschitz relativement à y dans le domaine D.
   D'autre part, f est continue sur le compact D, autrement dit
   $$\sup_{(x,y)\in \mathrm{D}} \left|f(x; y)\right| = \mathrm{M} < +\infty.$$
   Posons
   $$h = \min\left(a, \frac{b}{\mathrm{M}}\right),$$
   et définissons une suite de fonctions $y_n(x)$ pour $|x - x_0| \leq h$ par
   $$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0, \\ y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t;\, y_0(t)\right) dt, \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t;\, y_1(t)\right) dt, \\ &\vdots \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t;\, y_{n-1}(t)\right) dt. \end{aligned} \tag{1.11}$$

- Le théorème à démontrer consiste à vérifier que $\{y_n(x)\}$ converge pour tout $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ et que la limite $y(x)$ de la suite $\{y_n(x)\}$ est une solution de l'équation $y'(x) = f(x; y(x))$ qui satisfait à la condition $y(x_0) = y_0$. Pour cela, nous allons montrer que $\{y_n(x)\}$ est de Cauchy.

Nous avons

$$\begin{aligned} \left|y_1(x) - y_0(x)\right| &= \left|\int_{x_0}^{x} f\left(t; y_0(t)\right) dt\right|, \\ &\leq \left|\int_{x_0}^{x} \mathrm{M}\, dt\right|, \\ &\leq |x - x_0|\,\mathrm{M}, \\ &\leq h\mathrm{M}, \quad \text{car } x \in [x_0 - h, x_0 + h]. \end{aligned}$$

Pour un bon choix de h, nous aurons

$$h\mathrm{M} \leq b,$$

nous obtenons ainsi,

$$\left|y_1(x) - y_0(x)\right| \leq b, \qquad \text{pour } |x - x_0| \leq h.$$

D'où : $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f\left(t; y_1(t)\right) dt$ peut être défini pour $|x - x_0| \leq h$.

De la même manière, nous pouvons définir $y_2(x), y_3(x), y_4(x), \cdots, y_n(x)$ pour $|x - x_0| \leq h$ et obtenir

$$\left|y_k(x) - y_0(x)\right| \leq h\mathrm{M} \leq b, \quad k = 1, 2, 3, \cdots, n.$$

Utilisons maintenant le fait que f est lipschitzienne par rapport à y, c'est-à-dire

$$\left|y_{k+1}(x) - y_k(x)\right| \leq \mathrm{K}\left|\int_{x_0}^{x} \left|y_k(t) - y_{k-1}(t)\right| dt\right| \quad \text{pour tout} \quad |x - x_0| \leq h.$$

Aussi, nous avons $\left|y_1(x) - y_0(x)\right| \leq b$ et supposons que la propriété

$$\left|y_k(x) - y_{k-1}(x)\right| \leq \frac{b\left(\mathrm{K}|x - x_0|\right)^{k-1}}{(k-1)!}, \quad \text{pour } k \geq 1 \text{ et } |x - x_0| \leq h. \tag{1.12}$$

est vérifié jusqu'à l'ordre n.

La propriété (1.12) est vérifiée pour $n = 1$, montrons qu'elle reste vraie pour l'ordre $n + 1$. Nous avons

$$\begin{aligned} \left|y_{n+1}(x) - y_n(x)\right| &\leq \mathrm{K}\left|\int_{x_0}^{x} \left|y_n(t) - y_{n-1}(t)\right| dt\right|, \\ &\leq \mathrm{K}\left|\int_{x_0}^{x} \frac{b\left(\mathrm{K}|x - x_0|\right)^{n-1}}{(n-1)!} dt\right|, \\ &\leq \frac{b\mathrm{K}^n}{(n-1)!}\left|\int_{x_0}^{x} |x - x_0|^{n-1} dt\right|, \\ &\leq \frac{b\left(\mathrm{K}|x - x_0|\right)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que la propriété (1.12) est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Il ne reste qu'à montrer que la suite $\{y_n(x)\}$ est une suite de Cauchy pour tout $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$. Pour cela, étudions pour tout $m > n$ la quantité $\left|y_m(x) - y_n(x)\right|$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\left|y_m(x) - y_n(x)\right| &\leq \left|y_m(x) - y_{m-1}(x)\right| + \left|y_{m-1}(x) - y_{m-2}(x)\right| + \cdots + \left|y_{n+1}(x) - y_n(x)\right|, \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \left|y_{k+1}(x) - y_k(x)\right|, \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \left(\frac{b\,(\mathrm{K}|x - x_0|)^k}{k!}\right), \\
&\leq b \sum_{k=n}^{m-1} \frac{(\mathrm{K}h)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{m-1} \frac{(\mathrm{K}h)^k}{k!} &= \frac{(\mathrm{K}h)^n}{n!} + \frac{(\mathrm{K}h)^{n+1}}{n!\,(n+1)} + \frac{(\mathrm{K}h)^{n+2}}{n!\,(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{(\mathrm{K}h)^{m-1}}{n!\,(n+1)\cdots(m-1)}, \\
&\leq \frac{(\mathrm{K}h)^n}{n!}\left[1 + (\mathrm{K}h) + (\mathrm{K}h)^2 + \cdots + (\mathrm{K}h)^{m-1-n}\right], \\
&\leq \frac{(\mathrm{K}h)^n}{n!}\,\frac{1}{1 - kh}.
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\mathrm{K}h)^n}{n!} = 0$. Alors,

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ m\to+\infty}} \left|y_m(x) - y_n(x)\right| = 0, \quad \forall x \in [x_0 + h, x_0 - h].$$

Ainsi, la suite $\{y_n(x)\}$ étant convergente $\forall x \in [x_0 + h, x_0 - h]$, on dit, alors, que $\{y_n(x)\}$ converge uniformément vers $y(x)$.
Comme $\forall x \in [x_0 + h, x_0 - h] : y_n(x_0) = y_0$. Nous avons, donc $y(x_0) = y_0$.
De plus, on sait que

(a) Si $y_n(x)$ converge uniformément vers $y(x)$, $\forall x \in \mathrm{I}$ et si $y_n(x)$ est continue. Alors, $y(x)$ est continue sur I.

(b) Si $y_n(x)$ converge uniformément vers $y(x)$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} y_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \left(\lim_{n\to+\infty} y_n(t)\right) dt.$$

Grâce à ces deux résultats, nous pouvons passer à la limite dans la relation de récurrence (1.11) dite formule des approximations successive de Picard. En dernier, nous obtenons

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t; y(t)\right) dt.$$

2. **Unicité de la solution :**
Pour montrer l'unicité de la solution, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.1 (Lemme de Grönwall) *Soit* $f : \mathrm{I} \times \Lambda_0 \to \mathbb{R}$ *une fonction continue localement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable sur* $\mathrm{I} \times \Lambda_0$.

Soit y et z deux solutions du problème de Cauchy (1.10) de donnée initiale y_0 et z_0 respectivement.
L'écart entre les solutions au temps x est estimé de la manière suivante

$$\forall x \in \mathrm{I} : \left|y(x) - z(x)\right| \le e^{\mathrm{K}|x-x_0|} \left|y_0 - z_0\right|.$$

Soit y une solution du problème de Cauchy (1.10) satisfaisant $y'(x) = f\left(x; y(x)\right)$ et $y\left(x_0\right) = y_0$.
Supposons qu'il existe une autre solution z telle que $z(x_0) = y_0$. Alors,

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t; z(t)\right) dt.$$

De plus, nous avons

$$y(x) - z(x) = \int_{x_0}^{x} \Big(f\left(t; y(t)\right) - f\left(t; z(t)\right)\Big) dt.$$

Comme f est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, alors,

$$\left|y(x) - z(x)\right| \le \mathrm{K}_{(x_0, y_0)} \int_{x_0}^{x} \left|y(t) - z(t)\right| dt, \quad \forall x \in [x_0 + h, x_0 - h].$$

En appliquant le lemme de Grönwall, nous obtenons

$$\left|y(x) - z(x)\right| \le \mathrm{K} \int_{x_0}^{x} e^{\mathrm{K}_{(x_0, y_0)}|t-x_0|} \left|y_0 - y_0\right| dt,$$

ce qui implique que

$$\Big|y(x) - z(x)\Big| \le 0.$$

Donc : $y(x) = z(x)$, $\forall |x - x_0| < h$. Autrement dit, le problème de Cauchy (1.10) admet une unique solution, par conséquent le problème (1.9) admet, aussi, une unique solution.

■

Une version simplifiée du théorème de Cauchy-Lipshitz (théorème 1.1) est décrite par le théorème suivant.

Théorème 1.2 *Si dans l'équation*

$$y'(x) = f\left(x; y(x)\right), \tag{1.13}$$

la fonction $f\left(x; y(x)\right)$ et sa dérivée partielle par rapport à y $\left(i.e.; \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ est continue dans un certain domaine D du plan $x\mathscr{O}y$ et si $\left(x_0, y_0\right)$ est un point de ce domaine.

Alors, il existe une solution unique $y(x) = g(x)$ satisfaisant à l'équation (1.13) et à la condition initiale $\left(x_0, y_0\right)$.

Remarque 1.11 *Pour démonter qu'un problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) & = f\left(x; y(x)\right), \\ y(x_0) & = y_0, \end{cases} \tag{1.14}$$

où x, $y \in \mathrm{D}$ avec $\mathrm{D} = \left\{|x - x_0| \le a; \left|y - y_0\right| \le b\right\}$ et $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, admet une unique solution, il suffit de monter que

i) *la fonction f soit continue sur* D.

ii) *la dérivée partielle de la fonction f par rapport à sa seconde variable soit continue et bornée sur* D. *autrement dit :* $\sup_{(x,y)\in D}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < +\infty$.

iii) $\exists M = \sup_{(x,y)\in D}\left|f\left(x;\, y(x)\right)\right|$ *et* $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.

Si les propriétés **i)**, **ii)** *et* **iii)** *sont vérifiées. Alors, il existe une unique solution* $y : J = [x_0 - h, x_0 + h] \to [y_0 - b, y_0 + b]$ *du problème de Cauchy* (1.14) *et la méthode des approximations successives de Picard*

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t;\, y_{n-1}(t)\right) dt, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

converge.

Exemple 1.13 *Soit le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) - x^2 = y^2(x), \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1.15}$$

Montrer que le problème de Cauchy (1.15) *possède une unique solution sur* $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Solution de l'exemple 1.13

Montrons que le problème de Cauchy (1.15) *possède une unique solution* :

Nous avons

$$\begin{aligned} y'(x) - x^2 = y^2(x) \quad &\Rightarrow \quad f\left(x;\, y(x)\right) = y^2(x) + x^2, \\ y(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \left(x_0 = 0 \wedge y_0 = 0\right), \\ D = [-1, 1] \times [-1, 1] \quad &\Rightarrow \quad (a = 1 \wedge b = 1). \end{aligned}$$

i) $f\left(x;\, y(x)\right) = x^2 + y^2(x)$ est une fonction continue sur D.

ii) Comme $f\left(x;\, y(x)\right) = x^2 + y^2(x)$. Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \Rightarrow \sup_{(x,y)\in D}\left|f\left(x;\, y(x)\right)\right| \leq 2.$$

Ainsi, la dérivée partielle de la fonction f par rapport à y est continue et est bornée sur D.

iii) Comme $f\left(x;\, y(x)\right) = x^2 + y^2(x)$. Alors,

$$\begin{aligned} M &= \sup_{(x,y)\in D}\left|f\left(x;\, y(x)\right)\right|, \\ &= 2. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} h &= \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \\ &= \min\left(1, \frac{1}{2}\right), \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc : $J = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et le problème de Cauchy (1.15) admet une unique solution $y : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to [-1, 1]$.

★

5 Exercices

Exercice 1.1 *Montrer que le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = 2t\big(y(t)+1\big), \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

possède une solution unique pour $-1 \le t \le 1$, $-2 \le y \le 2$.

Solution de l'exercice 1.1

Montrons que le problème de Cauchy (1.16) possède une unique solution :

Il suffit de montrer que **i)** f est continue sur D.
ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe et est continue sur D.
iii) $\exists \mathrm{M}$ et $\exists h$.

Nous avons

$$\begin{aligned} y'(t) = 2t\big(y(t)+1\big) &\;\Rightarrow\; f\big(t; y(t)\big) = 2t\big(y(t)+1\big), \\ y(0) = 0 &\;\Rightarrow\; \big(t_0 = 0 \wedge y_0 = 0\big), \\ \big(-1 \le t \le 1 \wedge -2 \le y \le 2\big) &\;\Rightarrow\; (\mathrm{D} = [-1, 1] \times [-2, 2] \wedge a = 1 \wedge b = 2). \end{aligned}$$

i) f est-elle continue sur D ?
$f\big(t; y(t)\big) = 2t\big(y(t)+1\big)$ est une fonction continue sur D.

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe-elle ? et est-elle continue sur D ?
Comme $f\big(t; y(t)\big) = 2t\big(y(t)+1\big)$. Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2t \Rightarrow \sup_{(t,y)\in \mathrm{D}} \left|f\big(t; y(t)\big)\right| \le 2.$$

Ainsi, la dérivée partielle de la fonction f par rapport à y existe et est continue sur D.

iii) $\exists \mathrm{M}$? $\exists h$?
Comme $f\big(t; y(t)\big) = 2t\big(y(t)+1\big)$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= \sup_{(t,y)\in \mathrm{D}} \left|f\big(t; y(t)\big)\right|, \\ &= 6. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} h &= \min\left(a, \frac{b}{\mathrm{M}}\right), \\ &= \min\left(1, \frac{2}{6}\right), \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Donc : $J = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ et le problème de Cauchy (1.16) admet une unique solution $y : \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \to [-2, 2]$.

♦

Exercice 1.2 *Montrer que le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = e^{-x^2} + y^2(x), \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{1.17}$$

possède une solution unique pour $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, $|y| \leq b$ *pour* $b > 0$ *finie.*

Solution de l'exercice 1.2

Montrons que le problème de Cauchy (1.17) admet une unique solution :

Il suffit de montrer que **i)** f est continue sur D.
ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe et est continue sur D.
iii) $\exists$M et $\exists h$.

Nous avons

$$\begin{aligned} y'(x) = e^{-x^2} + y^2(x) \quad &\Rightarrow \quad f\left(x;\, y(x)\right) = e^{-x^2} + y^2(x), \\ y(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \left(x_0 = 0 \wedge y_0 = 0\right), \\ \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \wedge |y| \leq b \text{ pour } b > 0 \text{ finie}\right) \quad &\Rightarrow \quad \left(\mathrm{D} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times [-b, b] \wedge a = \frac{1}{2} \wedge b = b\right). \end{aligned}$$

i) f est-elle continue sur D ?

$f\left(x;\, y(x)\right) = e^{-x^2} + y^2(x)$ est une fonction continue sur D.

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe-elle ? et est-elle continue sur D ?

Comme $f\left(x;\, y(x)\right) = e^{-x^2} + y^2(x)$. Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \Rightarrow \sup_{(x,\, y) \in \mathrm{D}} \left|f\left(x;\, y(x)\right)\right| \leq 2b.$$

Ainsi, la dérivée partielle de la fonction f par rapport à y existe et est continue sur D.

iii) $\exists$M ? $\exists h$?

Comme $f\left(x;\, y(x)\right) = e^{-x^2} + y^2(x)$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= \sup_{(x,\, y) \in \mathrm{D}} \left|f\left(x;\, y(x)\right)\right|, \\ &= 1 + b^2. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} h &= \min\left(a, \frac{b}{\mathrm{M}}\right), \\ &= \min\left(\frac{1}{2}, \frac{b}{1 + b^2}\right). \end{aligned}$$

Pour pouvoir déterminer le minimum, il suffit d'étudier les variations de la fonction $g(b) = \dfrac{b}{1+b^2}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
Nous avons

$$g(b) = \frac{b}{1+b^2} \Rightarrow \forall b \in]0, +\infty[: g'(b) = \frac{1-b^2}{\left(1+b^2\right)^2},$$

ainsi,

$$g'(b) = 0 \Rightarrow b = 1.$$

Les variations de la fonction g sont décrite par la table de variation présentée ci-dessous

b	0		1		$+\infty$
$g'(b)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Donc : les valeurs que peut prendre la fonction g sont comprise entre 0 et $\dfrac{1}{2}$ et s'écrivent sous la forme $\dfrac{b}{1+b^2}$ où $b \in]0, +\infty[$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} h &= \min\left(\frac{1}{2}, \frac{b}{1+b^2}\right), \\ &= \frac{b}{1+b^2}. \end{aligned}$$

Donc : $\mathrm{J} = \left[-\frac{1}{1+b^2}, \frac{1}{1+b^2}\right]$ et le problème de Cauchy (1.17) admet une unique solution $y : \left[-\frac{1}{1+b^2}, \frac{1}{1+b^2}\right] \to [-b, b]$, b>0 finie.

♦

6 Problèmes et applications

Problème 1.1 [Généralisation de l'inégalité de Grönwall] *Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité*

$$\forall x \in [a, b], \qquad y(x) \leq \varphi(x) + \int_a^x \psi(t)\, y(t)\, dt.$$

Alors,

$$\forall x \in [a, b], \qquad y(x) \leq \varphi(x) + \int_a^x \psi(t)\varphi(t) \exp\left(\int_t^x \psi(s)\, ds\right) dt. \tag{1.18}$$

Solution du problème 1.1

Montrons l'inégalité (1.18) :

Nous avons

$$y(x) \leq \varphi(x) + \int_a^x \psi(t)\, y(t)\, dt, \qquad x \in [a, b]. \tag{1.19}$$

D'une part, en multipliant cette inégalité par $\psi(x)$, nous obtenons

$$y(x)\,\psi(x) \leq \varphi(x)\,\psi(x) + \psi(x) \int_a^x \psi(t)\, y(t)\, dt, \qquad x \in [a, b]. \tag{1.20}$$

Posons

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^x \psi(t)\, y(t)\, dt \Rightarrow \mathrm{F}'(x) = \psi(x)\, y(x).$$

Ainsi,

$$\mathrm{F}'(x) - \psi(x)\,\mathrm{F}(x) = \psi(x)\, y(x) - \psi(x) \int_a^x \psi(t)\, y(t)\, dt.$$

De l'inégalité (1.20), il s'en suit

$$\mathrm{F}'(x) - \psi(x)\,\mathrm{F}(x) \leq \varphi(x)\,\psi(x), \tag{1.21}$$

et en utilisant la méthode du facteur intégrant, l'inégalité (1.21) devient

$$\mathrm{F}'(x) \exp\left(-\int_a^x \psi(t)\, dt\right) - \psi(x)\,\mathrm{F}(x) \exp\left(-\int_a^x \psi(t)\, dt\right) \leq \varphi(x)\,\psi(x) \exp\left(-\int_a^x \psi(t)\, dt\right),$$

ou plus simplement

$$\left(\mathrm{F}(x) \exp\left(-\int_a^x \psi(t)\, dt\right)\right)' \leq \varphi(x)\,\psi(x) \exp\left(-\int_a^x \psi(t)\, dt\right),$$

l'intégration des deux membre de cette dernière inégalité entre a et x, donne

$$\mathrm{F}(x) \exp\left(-\int_a^x \psi(t)\, dt\right) \leq \int_a^x \varphi(t)\,\psi(t) \exp\left(-\int_a^t \psi(s)\, ds\right) dt.$$

D'autre part de l'inégalité (1.19), nous avons

$$\int_a^x \psi(t)\, y(t)\, dt = \mathrm{F}(x) \geq y(x) - \varphi(x).$$

Ainsi,

$$\big(y(x) - \varphi(x)\big) \exp\left(-\int_a^x \psi(t)\, dt\right) \leq \mathrm{F}(x) \exp\left(-\int_a^x \psi(t)\, dt\right).$$

Ce qui donne

$$\big(y(x) - \varphi(x)\big) \exp\left(-\int_a^x \psi(t)\, dt\right) \leq \int_a^x \varphi(t)\,\psi(t) \exp\left(-\int_a^t \psi(s)\, ds\right) dt,$$

ou encore,

$$y(x) - \varphi(x) \leq \int_a^x \varphi(t)\,\psi(t) \exp\left(-\int_a^t \psi(s)\, ds\right) \exp\left(\int_a^t \psi(u)\, du\right) dt.$$

En dernier, le résultat découle du fait que $\exp\left(-\int_a^t \psi(s)\, ds\right) \leq 1$ car $\psi \geq 0$.

◀

Problème 1.2 [Lemme de Grönwall : version différentielle] *Soit $y : [a,b] \to [0,+\infty[$, avec $a < b$ deux réels, une fonction continue, dérivable sur $[a,b]$ et soient $\varphi, \psi : [a,b] \to [0,+\infty[$ deux fonctions continues telles que*

$$\forall x \in [a,b], \qquad y'(x) \leq \varphi(x)\, y(x) + \psi(x).$$

Alors,

$$\forall x \in [a,b], \qquad y(x) \leq \left(y(a) + \int_a^x \psi(t) dt\right) \exp\left(\int_a^x \varphi(t)\, dt\right). \tag{1.22}$$

Solution du problème 1.2

Montrons l'inégalité (1.22) :

Pour tout $x \in [a,b]$, nous avons

$$y'(x) \leq \varphi(x)\, y(x) + \psi(x) \Rightarrow y'(x) - \varphi(x)\, y(x) \leq \psi(x).$$

En multipliant cette dernière inégalité par $\exp\left(-\int_a^x \varphi(t)\, dt\right)$, il s'en suit

$$\left(y(x) \exp\left(-\int_a^x \varphi(t)\, dt\right)\right)' \leq \psi(x) \exp\left(-\int_a^x \varphi(t)\, dt\right).$$

En l'intégrant entre a et x, nous obtenons

$$y(x) \exp\left(-\int_a^x \varphi(t)\, dt\right) - f(a) \leq \int_a^x \psi(t) \exp\left(-\int_a^t \varphi(s)\, ds\right) dt,$$

ou encore,

$$y(x) \leq \left(f(a) + \int_a^x \psi(t) \exp\left(-\int_a^t \varphi(s)\, ds\right) dt\right) \exp\left(\int_a^x \varphi(t)\, dt\right).$$

En dernier, le résultat découle du fait que $\exp\left(-\int_a^t \varphi(s)\, ds\right) \leq 1$ car $\varphi \geq 0$.

◀

Remarque 1.12 *Le lemme de Grönwall s'interprète en disant qu'à partir d'une inégalité intégrale portant sur y ou une inégalité sur y', nous trouvons une inégalité sur y. Ce lemme sert souvent dans la théorie des équations différentielles, notamment pour obtenir des majorations des solutions.*

Chapitre 2

Équations différentielles ordinaires d'ordre 1

Nous abordons, dans ce chapitre, l'étude et la résolution des différents types des équations différentielles ordinaires d'ordre 1 allant de la plus simple à la plus complexes.

1 Notions préliminaires

L'écriture générale d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 ainsi que sa solution sont décrite dans cette section.

1.1 Définitions d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1

Définition 2.1 *Une équation différentielle ordinaire d'ordre* 1 *est une équation de la forme*

$$\mathscr{F}\left(x;\, y(x),\, y'(x)\right) = 0, \tag{2.1}$$

où $x \in \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ *représente la variable,* $y : \mathrm{I} \to \Lambda_0 \subseteq \mathbb{R}$ *est la fonction inconnue et* $\mathscr{F} : \mathrm{I} \times \Lambda_0 \times \Lambda_1 \to \mathbb{R}$ *est une application bien définie avec* $\Lambda_1 \subseteq \mathbb{R}$.

Définition 2.2 *L'équation différentielle* (2.1) *est dite résoluble par rapport à la dérivée si elle s'écrit sous la forme*

$$y'(x) = f\left(x;\, y(x)\right),$$

où $f : \mathrm{I} \times \Lambda_0 \to \Lambda_1$ *est une application bien définie.*

Exemple 2.1 *Les équations suivantes représentent des équations différentielles ordinaires d'ordre* 1

1. $\dfrac{d}{dx} y(x) = -\dfrac{1}{x} y(x)$.
2. $\left(x - y(x) - 1\right) dy = \left(x + y(x) - 3\right) dx$.
3. $y'(x) + x y(x) = x^3 y^3(x)$.
4. $y(x) - 2x\, y'(x) - \ln y'(x) = 0$.

1.2 Solutions d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1

Définition 2.3 *On appelle solution générale y_g (où encore solution générale explicite) d'une équation différentielle ordinaire d'ordre* 1 *une fonction*

$$y_g(x) = g(x; c),$$

dépendant d'une constante arbitraire c et satisfaisant à l'équation différentielle quelle que soit la valeur concrète de la constante c.

Définition 2.4 *Une égalité de la forme*

$$\phi(x; y, c) = 0,$$

donnant implicitement la solution générale, s'appelle intégrale générale (où encore solution générale implicite) de l'équation différentielle ordinaire d'ordre 1.

Définition 2.5 *On appelle solution particulière toute fonction $y_p(x) = g(x; c_0)$ déduite de la solution générale $y_g(x) = g(x; c)$, en posant dans cette dernière $c = c_0$.*

La relation $\phi(x; y, c_0) = 0$ est dite, alors, une intégrale particulière de l'équation différentielle ordinaire d'ordre 1.

Exemple 2.2 *Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'équation différentielle du premier ordre*

$$y'(x) = -\frac{1}{x} y(x),$$

a pour solution générale $y_g(x) = \dfrac{c}{x}$, $c \in \mathbb{R}$.

$y_p(x) = \dfrac{2}{x}$ *représente l'une des solutions particulières.*

Exemple 2.3 *L'intégrale générale, ou encore la solution générale implicite, de l'équation différentielle ordinaire d'ordre* 1

$$y'(x) = -\frac{x + y(x) + 2}{2x + 2y(x) - 1},$$

est

$$x + 2y(x) + 5\ln|x + y(x) - 3| = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2 Quelques équations différentielles ordinaires d'ordre 1

Dans cette section, nous décrivons des méthodes pour résoudre certaines équations de la forme $y'(x) = f\big(x; y(x)\big)$ où f est une fonction à valeurs réelles, définie sur une partie $\mathrm{I} \times \Lambda_0$ de $\mathbb{R}^2$.

2.1 Équations différentielles ordinaires d'ordre 1 à variables séparées

Définition 2.6 *Soient I et Λ_0 deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.*

Soient $g_1 : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $g_2 : \Lambda_0 \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telle que

$$\forall y \in \Lambda_0 : g_2(y) \neq 0.$$

La relation

$$y'(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(y)}, \tag{2.2}$$

où encore,

$$\frac{d}{dx} y(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(y)},$$

se nomme équation différentielle ordinaire d'ordre 1 *à variables séparées* (*où à variables séparables*).

Méthode de résolution 2.1 *Pour tous $x \in \mathrm{I}$ et $y \in \Lambda_0$, nous avons*

$$\begin{aligned}
y'(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(y)} \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dx} y(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(y)}, \\
&\Rightarrow \quad g_2(y)\, dy(x) = g_1(x)\, dx, \\
&\Rightarrow \quad \int g_2(y)\, dy(x) = \int g_1(x)\, dx, \\
&\Rightarrow \quad \mathrm{G}_2(y) = \mathrm{G}_1(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad y(x) = \mathrm{G}_2^{-1}\big(\mathrm{G}_1(x) + c\big), \quad c \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

car, G_2 est une fonction continue, d'où, l'inverse G_2^{-1} existe.

Ainsi, la solution générale y_g de l'équation (2.2) *est donnée par*

$$y_g(x) = \mathrm{G}_2^{-1}\big(\mathrm{G}_1(x) + c\big), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.4 *Soit l'équation :* $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$,

$$3\, y'(x)\, (x^2 - 1) - 2x\, y(x) = 0. \tag{2.3}$$

Donner la solution générale de l'équation (2.3).

Solution de l'exemple 2.4

Solution générale y_g de l'équation (2.3) :

L'équation (2.3) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 à variables séparées.

Nous avons

$$\begin{aligned}
3\, y'(x)\, (x^2 - 1) - 2x\, y(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y} dy(x) = \frac{1}{3} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx, \\
&\Rightarrow \quad \ln|y(x)| = \frac{1}{3} \ln\left|x^2 - 1\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad y(x) = k\, \left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{3}}, \quad k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc : la solution générale y_g de l'équation (2.3) est

$$y_g(x) = k \sqrt[3]{x^2 - 1}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

★

Remarque 2.1 *Les équations différentielles ordinaires d'ordre* 1 *de la forme*

$$y'(x) = f\left(\frac{a_1\, x + b_1\, y(x) + c_1}{a_2\, x + b_2\, y(x) + c_2}\right),$$

se ramènent, pour $a_1 b_2 - a_2 b_2 = 0$, aux équations différentielles ordinaires d'ordre 1 *à variables séparées en faisant la substitution $t(x) = a_1\, x + b_1\, y(x)$.*

Exemple 2.5 *Considérons l'équation*

$$y'(x) = -\frac{x + y(x) + 2}{2x + 2y(x) - 1}. \tag{2.4}$$

Déterminer son intégrale générale.

Solution de l'exemple 2.5
Intégrale générale de l'équation (2.4) :

L'équation (2.4) est une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 laquelle peut se ramener à une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 à variables séparées, vu que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Posons $t(x) = x + y(x) \Rightarrow t'(x) = y'(x) + 1$. Ainsi, l'équation (2.4) devient

$$\begin{aligned}
y'(x) = -\frac{x + y(x) + 2}{2x + 2y(x) - 1} \quad &\Rightarrow \quad t'(x) - 1 = -\frac{t(x) + 2}{2t(x) - 1}, \\
&\Rightarrow \quad t'(x) = -\frac{t(x) - 3}{2t(x) - 1}, \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{2t(x) - 1}{t(x) - 3} \, d\,t(x) = \int dx, \\
&\Rightarrow \quad 2t(x) + 5\ln|t(x) - 3| = x + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Comme $t(x) = x + y(x)$. Alors, l'intégrale générale de l'équation (2.4) est

$$x + 2y(x) + 5\ln|x + y(x) - 3| = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

★

2.2 Équations différentielles ordinaires d'ordre 1 homogènes

Définition 2.7 *On appelle équation différentielle ordinaire d'ordre* 1 *homogène, toute équation de la forme*

$$y'(x) = g\left(\frac{y(x)}{x}\right), \tag{2.5}$$

où $g : \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to \Lambda_1 \subseteq \mathbb{R}$ *est une fonction continue.*

Remarque 2.2 *L'équation différentielle ordinaire d'ordre* 1 *homogène est une équation différentielle dans laquelle* x *et* y *interviennent que par leurs rapport.*

Méthode de résolution 2.2 *Pour résoudre une équation différentielle ordinaire d'ordre* 1 *homogène, nous passons par deux étapes.*

- Étape 1 : *Elle consiste à faire le changement de variable*

$$y(x) = x\,t(x).$$

En effet,

$$y(x) = x\,t(x) \Rightarrow y'(x) = t(x) + x\,t'(x).$$

En remplaçant y et y' dans l'équation (2.5), nous obtenons

$$\begin{aligned} y'(x) = g\left(\frac{y(x)}{x}\right) \quad &\Rightarrow \quad t(x) + x t'(x) = g(t(x)), \\ &\Rightarrow \quad x\frac{d}{dx}t(x) = g(t(x)) - t(x) \\ &\Rightarrow \quad \frac{dt(x)}{g(t(x)) - t(x)} = \frac{dx}{x}, \end{aligned}$$

laquelle est une EDO *d'ordre* 1 *à variables séparées.*

- Étape 2 : *Consiste à résoudre l'*EDO *à variables séparées*

$$\frac{dt(x)}{g(t(x)) - t(x)} = \frac{dx}{x},$$

en fonction de x.

Ainsi, la solution générale de l'équation (2.5) *est*

$$y_g(x) = x\,t(x), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.6 *Intégrer l'équation*

$$\left(x^2 + y^2(x)\right) y'(x) = x\,y(x). \tag{2.6}$$

Solution de l'exemple 2.6

Intégration de l'équation (2.6) :

L'équation (2.6) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 homogène. Pour sa résolution, posons

$$y(x) = x\,t(x) \Rightarrow y'(x) = t(x) + x\,t'(x).$$

En remplaçant y et y' dans l'équation (2.6), nous obtenons

$$\begin{aligned} \left(x^2 + y^2(x)\right) y'(x) = x\,y(x) \quad &\Rightarrow \quad y'(x) = \frac{x\,y(x)}{x^2 + y^2(x)}, \\ &\Rightarrow \quad y'(x) = \frac{\frac{y(x)}{x}}{1 + \left(\frac{y(x)}{x}\right)^2}, \\ &\Rightarrow \quad t(x) + x\,t'(x) = \frac{t(x)}{1 + t^2(x)}, \\ &\Rightarrow \quad x\,t'(x) = -\frac{t^3(x)}{1 + t^2(x)}, \\ &\Rightarrow \quad -\int \frac{dt(x)}{t^3(x)} - \int \frac{dt(x)}{t(x)} = \frac{dx}{x}, \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{2\,t^2(x)} - \ln|t(x)| = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{2\,t^2(x)} - \ln|x\,t(x)| = c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale générale (ou encore, solution générale implicite) de l'équation (2.6) est

$$c = \frac{x^2}{2\,y^2(x)} - \ln|y(x)|, \quad c \in \mathbb{R}$$

★

Remarque 2.3 *L'équation différentielle ordinaire d'ordre* 1 *homogène* (2.5) *peut être résolue en utilisant les cordonnées polaires.*

En effet, pour

$$x = r\cos\theta \quad \textit{et} \quad y = r\sin\theta,$$

nous aurons,

$$dx = dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta \quad \textit{et} \quad dy = dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta.$$

Ainsi, l'équation $y'(x) = g\left(\frac{y(x)}{x}\right)$, *devient*

$$\begin{aligned} y'(x) = g\left(\frac{y(x)}{x}\right) \quad &\Rightarrow \quad \frac{dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta}{dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta} = g(\tan\theta), \\ &\Rightarrow \quad dr\sin\theta + \cos\theta\, d\theta = g(\tan\theta)(dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta), \\ &\Rightarrow \quad \frac{dr}{r} = \frac{\cos\theta + g(\tan\theta)\sin\theta}{f(\tan\theta)\cos\theta - \sin\theta}\, d\theta, \end{aligned}$$

laquelle est une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 *à variables séparées.*

Exemple 2.7 *En utilisant les cordonnées polaires, déterminer la solution de l'équation*

$$y'(x) = \frac{x + y(x)}{x - y(x)}. \tag{2.7}$$

Solution de l'exemple 2.7

Intégrale générale de l'équation (2.7) *en utilisant les cordonnées polaires* :

L'équation (2.7) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 homogène. Pour sa résolution, posons

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta,$$

ainsi,

$$dx = dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta \quad \text{et} \quad dy = dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta.$$

Donc :

$$\begin{aligned} y'(x) = \frac{x + y(x)}{x - y(x)} \quad &\Rightarrow \quad \frac{dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta}{dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta} = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}, \\ &\Rightarrow \quad \int \frac{dr}{r} = \int d\theta, \\ &\Rightarrow \quad \ln r = \theta + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale générale de l'équation (2.7) est

$$\ln r - \theta = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

★

Remarque 2.4 *Les équations différentielles ordinaires d'ordre* 1 *de la forme*

$$y'(x) = f\left(\frac{a_1\,x + b_1\,y(x) + c_1}{a_2\,x + b_2\,y(x) + c_2}\right),$$

se ramènent, pour $a_1 b_2 - a_2 b_2 \neq 0$, *aux équations différentielles ordinaires d'ordre* 1 *homogènes en faisant la substitution* $x = u + \alpha$ *et* $y(x) = v(u) + \beta$, *où* (α, β) *est le point d'intersection des deux droites* $a_1\,\alpha + b_1\,\beta + c_1 = 0$ *et* $a_2\,\alpha + b_2\,\beta + c_2 = 0$.

Exemple 2.8 *Trouver l'intégrale générale de l'équation*

$$\big(2x + y(x) + 1\big)\,dx + \big(x + 2y(x) - 1\big)\,dy(x) = 0. \tag{2.8}$$

Solution de l'exemple 2.8

Intégrale générale de l'équation (2.8) :

L'équation (2.8) peut, aussi, s'écrire sous la forme

$$y'(x) = -\frac{2x + y(x) + 1}{x + 2y(x) - 1}.$$

Comme $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Alors, l'équation (2.8) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 homogène.

Posons $x = u + \alpha$ et $y(x) = v(u) + \beta$, où (α, β) vérifiant le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha + \beta + 1 &=& 0, \\ \alpha + 2\beta - 1 &=& 0. \end{array}\right. \tag{2.9}$$

La résolution du système (2.9) donne $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$. Ainsi, réalisons le changement $x = u - 1$ et $y(x) = v(u) + 1$ dans l'équation (2.8), laquelle devient

$$v'(u) = -\frac{2u + v(u)}{u + 2v(u)}.$$

Dans l'équation homogène obtenue, posons $v(u) = u\,t(u)$, d'où il vient $v'(u) = t(u) + u\,t'(u)$. Nous obtenons, ainsi,

$$\begin{aligned} v'(u) = -\frac{2u + v(u)}{u + 2v(u)} \quad &\Rightarrow \quad t(u) + u\,t'(u) = -\frac{2 + t(u)}{1 + 2t(u)}, \\ &\Rightarrow \quad u\,t'(u) = -\frac{2t^2(u) + 2t(u) + 2}{1 + 2t(u)}, \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{2t(u) + 1}{t^2(u) + t(u) + 1}\,dt = -\int \frac{du}{u}, \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln|t^2(u) + t(u) + 1| = -\ln|u| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \quad u\sqrt{|t^2(u) + t(u) + 1|} = k, \quad k \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

En dernier, l'intégrale générale de l'équation (2.8) est

$$\sqrt{\left|\big(y(x) - 1\big)^2 + \big(y(x) - 1\big)(x + 1) + (x + 1)^2\right|} = k, \quad k \in \mathbb{R}_+.$$

★

2.3 Équations différentielles ordinaires d'ordre 1 linéaires avec second membre

Définition 2.8 *On appelle équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre* 1 *avec second membre, une équation de la forme*

$$y'(x) = g(x)\,y(x) + h(x), \tag{2.10}$$

où g et h sont deux fonctions continues de $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Remarque 2.5 *L'équation*

$$y'(x) = g(x)\,y(x), \tag{2.11}$$

est dite équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 *sans second membre.*

Méthode de résolution 2.3 *Pour résoudre l'équation* (2.10)*, nous passons par deux étapes.*

- Étape 1 : *Elle consiste à résoudre l'équation* (2.11).
  En effet, l'équation
  $$y'(x) = g(x)\,y(x),$$
  est une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 *à variables séparées. Sa solution générale, notée y_h, est donnée par*
  $$y_h(x) = k\,e^{\mathrm{G}(x)}, \quad k \in \mathbb{R}.$$
- Étape 2 : *Elle consiste à résoudre l'équation* (2.10).
  La méthode est de procéder par la variation de la constante, c'est-à-dire, utiliser $\mathrm{K}(x)$ *au lieu de k, puis le remplacer dans l'équation* (2.10).
  En effet, posons
  $$y(x) = \mathrm{K}(x)\,e^{\mathrm{G}(x)} \Rightarrow y'(x) = \mathrm{K}'(x)\,e^{\mathrm{G}(x)} + \mathrm{K}(x)\,g(x)\,e^{\mathrm{G}(x)}.$$
  En remplaçant y et y' dans l'équation (2.10)*, nous obtenons*
  $$\begin{aligned} y'(x) = g(x)\,y(x) + h(x) \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{K}'(x)\,e^{\mathrm{G}(x)} + \mathrm{K}(x)\,g(x)\,e^{\mathrm{G}(x)} = g(x)\,\mathrm{K}(x)\,e^{\mathrm{G}(x)} + h(x), \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{K}'(x) = h(x)\,e^{-\mathrm{G}(x)}, \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{K}(x) = \mathrm{H}(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$
  où, $\mathrm{H}(x) = \displaystyle\int h(x)\,e^{-\mathrm{G}(x)}\,dx.$

Ainsi, la solution générale y_g de l'équation (2.10) *est*

$$y_g(x) = \big(\mathrm{H}(x) + c\big)\,e^{\mathrm{G}(x)}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Remarque 2.6 *La solution la solution générale y_g de l'équation* (2.10)*, peut aussi s'écrire sous la forme*

$$y_g(x) = \underbrace{c\,e^{\mathrm{G}(x)}}_{y_h(x)} + \underbrace{\mathrm{H}(x)\,e^{\mathrm{G}(x)}}_{y_p(x)}, \qquad c \in \mathbb{R},$$

Et, d'où, le théorème

Théorème 2.1 *La solution générale y_g de l'équation*

$$y'(x) = g(x)\,y(x) + h(x),$$

s'obtient en ajoutant à la solution générale y_h de l'équation sans second membre $y'(x) = g(x)\,y(x)$ une solution particulière y_p de l'équation $y'(x) = g(x)\,y(x) + h(x)$.

En d'autre terme

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Exemple 2.9 *Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}\right\}$, trouver la solution générale de l'équation*

$$y'(x) = \frac{2x}{x^2+1}\,y(x) + \frac{(x^2+1)\sin^3 x}{\cos x}. \tag{2.12}$$

Solution de l'exemple 2.9

Solution générale y_g de l'équation (2.12) :

L'équation (2.12) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre

  Nous avons

$$\begin{aligned} y'(x) = \frac{2x}{x^2+1}\,y(x) \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dy(x)}{y(x)} = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx, \\ &\Rightarrow \quad \ln|y(x)| = \ln(x^2+1) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

  Donc : la solution générale de l'équation sans second membre y_h est

$$y_h(x) = k(x^2+1), \quad k \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : EDO avec second membre (méthode de la variation de la constante)

  Nous avons

$$y(x) = \mathrm{K}(x)\,(x^2+1) \Rightarrow y'(x) = \mathrm{K}'(x)\,(x^2+1) + 2x\,\mathrm{K}(x).$$

  En remplaçant y et y' dans l'équation (2.12), il découle

$$\begin{aligned} (2.12) \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{K}'(x)\,(x^2+1) + 2x\,\mathrm{K}(x) = \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{K}(x)\,(x^2+1) + \frac{(x^2+1)\sin^3 x}{\cos x}, \\ &\Rightarrow \quad \int \mathrm{K}'(x)\,dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,dx. \end{aligned}$$

  Posons

$$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\,dx.$$

  Ainsi

$$\begin{aligned} \int \mathrm{K}'(x)\,dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,dx \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{K}(x) = \int \frac{t^2-1}{t}\,dt, \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{K}(x) = \frac{1}{2}t^2 - \ln|t| + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{K}(x) = \frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (2.12) est : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}\right\}$

$$y_g(x) = c_1(x^2+1) + (x^2+1)\left(\frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x|\right), \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

★

3 Quelques types des équations différentielles ordinaires d'ordre 1 non linéaires particulières

Cette section a pour objective de présenter les méthodes de résolution de certaines équations différentielles ordinaires d'ordre 1 non linéaires particulières.

3.1 Équations de Bernoulli

Définition 2.9 *On appelle équation de Bernoulli toute équation différentielle ordinaire d'ordre* 1 *qui peut s'écrire sous la forme*

$$y'(x) + g_1(x)\, y(x) + g_2(x)\, y^{\alpha}(x) = 0, \tag{2.13}$$

où g_1 et g_2 sont deux fonctions continues sur des intervalles à préciser et α est une constante réelle différente de 0 *et de* 1.

Remarque 2.7 *Pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, l'équation* (2.13) *devient une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre* 1 *sans second membre.*

Remarque 2.8 $y(x) = 0$ *est une solution évidente.*

Méthode de résolution 2.4 *L'équation de Bernoulli* (2.13) *peut se solutionner en la ramenant à la forme linéaire par la transformation*

$$t(x) = y^{1-\alpha}(x) \text{ qui revient à } t'(x) = (1-\alpha)\, y'(x)\, y^{-\alpha}(x).$$

En effet,

$$\begin{aligned} y'(x) + g_1(x)\, y(x) + g_2(x)\, y^{\alpha}(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{y'(x)}{y^{\alpha}(x)} + g_1(x)\, \frac{y(x)}{y^{\alpha}(x)} + g_2(x)\, \frac{y^{\alpha}(x)}{y^{\alpha}(x)} = 0, \\ &\Rightarrow \quad y'(x)\, y^{-\alpha}(x) + g_1(x)\, y^{1-\alpha}(x) + g_2(x) = 0, \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha}\, t'(x) + g_1(x)\, t(x) + g_2(x) = 0, \end{aligned}$$

laquelle est une équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre avec second membre. Sa solution générale t_g s'écrit sous la forme

$$t_g(x) = \big(G_2(x) + c\big) e^{G_1(x)}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

En dernier, la solution générale de l'équation (2.13) *est*

$$y_g(x) = \left| \big(G_2(x) + c\big) e^{G_1(x)} \right|^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.10 *Déterminer la solution générale de l'équation*

$$\big(y'(x) - 2x\, y(x)\big) \sqrt{y(x)} = x^3. \tag{2.14}$$

Solution de l'exemple 2.10

Solution générale y_g de l'équation (2.14) :

L'équation (2.14) représente une équation de Bernoulli avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, car

$$\left(y'(x) - 2x\,y(x)\right)\sqrt{y(x)} = x^3 \Rightarrow y'(x) - 2x\,y(x) = x^3\,y^{-\frac{1}{2}}(x).$$

Comme $\alpha = -\dfrac{1}{2}$. Alors,

$$t(x) = y^{1+\frac{1}{2}}(x) = y^{\frac{3}{2}}(x) \Rightarrow t'(x) = \frac{3}{2}y'(x)\,y^{\frac{1}{2}}(x).$$

En remplaçant y et y' dans l'équation (2.14), nous obtenons

$$\begin{aligned} y'(x) - 2x\,y(x) = x^3\,y^{-\frac{1}{2}}(x) \quad &\Rightarrow \quad y'(x)\,y^{\frac{1}{2}}(x) - 2x\,y(x)\,y^{\frac{1}{2}}(x) = x^3,\\ &\Rightarrow \quad \frac{2}{3}t'(x) - 2x\,t(x) = x^3, \end{aligned} \tag{2.15}$$

qui est une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 linéaire avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre

  Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}t'(x) - 2x\,t(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dt(x)}{t(x)} = 3\int x\,dx,\\ &\Rightarrow \quad \ln|t(x)| = \frac{3}{2}x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

  Ainsi, la solution générale t_h de l'EDO linéaire sans second membre est

$$t_h(x) = k\,e^{\frac{3}{2}x^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : EDO avec second membre (méthode de la variation de la constante)

  Nous avons

$$t(x) = \mathrm{K}(x)\,e^{\frac{3}{2}x^2} \Rightarrow t'(x) = \mathrm{K}'(x)\,e^{\frac{3}{2}x^2} + 3x\,\mathrm{K}(x)\,e^{\frac{3}{2}x^2}.$$

  En remplaçant t et t' dans l'équation (2.15), nous obtenons

$$\begin{aligned} (2.15) \quad &\Rightarrow \quad \frac{2}{3}\mathrm{K}'(x)\,e^{\frac{3}{2}x^2} + 2x\,\mathrm{K}(x)\,e^{\frac{3}{2}x^2} - 2x\,\mathrm{K}(x)\,e^{\frac{3}{2}x^2} = x^3,\\ &\Rightarrow \quad \int \mathrm{K}'(x)\,dx = \frac{3}{2}\int x^3\,e^{-\frac{3}{2}x^2}\,dx,\\ &\Rightarrow \quad \mathrm{K}(x) = -\frac{1}{2}x^2\,e^{-\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}x^2} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

  Donc : la solution générale t_g de l'équation (2.15) est

$$t_g(x) = c_1\,e^{\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Comme $t(x) = y^{\frac{3}{2}}(x)$. Alors, la solution générale y_g de l'équation (2.14) est

$$y_g(x) = \left(c_1\,e^{\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

★

3.2 Équations de Riccati

Définition 2.10 *On appelle équation de Riccati toute équation différentielle ordinaire d'ordre* 1 *qui peut se mettre sous la forme*

$$y'(x) = g_1(x)\, y^2(x) + g_2(x)\, y(x) + h(x), \tag{2.16}$$

où g_1, g_2 et h sont des fonctions continues de $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2.9 *Ce type d'équation n'admet toujours pas de solution dans le cas le plus général. Par contre, Connaissant une solution particulière $y_p(x)$ de l'équation de Riccati, on peut chercher sa solution générale.*

Méthode de résolution 2.5 *Nous nous plaçons dans le cas où l'on connait une solution particulière $y_p(x)$ de l'équation de Riccati.*

Si on arrive à éliminer, par un changement de fonction, le terme indépendant de y $\big($c'est-à-dire : $h(x)\big)$, nous nous ramenons à la résolution d'une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$.

Pour cela, posons

$$y(x) = y_p(x) + z(x) \Rightarrow y'(x) = y_p'(x) + z'(x).$$

En remplaçant y et y' dans l'équation (2.16), nous obtenons

$$\begin{aligned} y'(x) = g_1(x)\, y^2(x) + g_2(x)\, y(x) + h(x) \quad &\Rightarrow \quad y_p'(x) + z'(x) = g_1(x)\, \big(y_p(x) + z(x)\big)^2 + g_2(x) \times \\ &\qquad\qquad \big(y_1(x) + z(x)\big) + h(x), \\ &\Rightarrow \quad y_p'(x) + z'(x) = \left[g_1(x)\, y_1^2(x) + g_2(x)\, y_1(x) + h(x)\right] \\ &\qquad\qquad + \big(2g_1(x)\, y_p(x) + g_2(x)\big)\, z(x) \\ &\qquad\qquad + g_1(x)\, z^2(x), \\ &\Rightarrow \quad z'(x) = \big(2g_1(x)\, y_p(x) + g_2(x)\big)\, z(x) + g_1(x)\, z^2(x), \end{aligned}$$

car y_p est une solution particulière de l'équation de Riccati (2.16), i.e. ;

$$y_p'(x) = g_1(x)\, y_p^2(x) + g_2(x)\, y_p(x) + h(x).$$

L'équation obtenue

$$z'(x) = \big(2g_1(x)\, y_p(x) + g_2(x)\big)\, z(x) + g_1(x)\, z^2(x),$$

est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$, pour sa résolution, nous utiliserons le changement de fonction $t(x) = \dfrac{1}{z(x)}$.

Remarque 2.10 *Pour la résolution de l'équation de Riccati (2.16), il suffit de poser*

$$y(x) = y_p(x) + \frac{1}{t(x)} \Rightarrow y'(x) = y_p'(x) - \frac{t'(x)}{t^2(x)}.$$

En remplaçant y et y' dans l'équation de Riccati (2.16), nous obtenons une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 *de fonction inconnue t. Sa résolution donne une solution de la forme*

$$t_g(x) = ce^{\mathrm{G}(x)} + \widetilde{\mathrm{G}}(x)\, e^{\mathrm{G}(x)}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Et donc, la solution générale de l'équation de Riccati (2.16) est

$$y_g(x) = y_p(x) + \left(ce^{\mathrm{G}(x)} + \widetilde{\mathrm{G}}(x)\, e^{\mathrm{G}(x)}\right)^{-1}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.11 *Trouver la solution générale de l'équation*

$$y'(x) = 2x\,y^2(x) - x\,y(x) - x. \tag{2.17}$$

Solution de l'exemple 2.11

Solution générale y_g de l'équation (2.17) :

L'équation (2.17) représente une équation de Riccati. Nous remarquons que $y_p(x) = 1$ est une solution particulière.

En effet,

$$\big(y_p(x) \text{ est une solution particulière}\big) \Rightarrow \Big(y_p'(x) - 2x\,y_p^2(x) + x\,y_p(x) + x = 0\Big).$$

Nous avons

$$y_p(x) = 1 \Rightarrow y_p'(x) = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y_p'(x) - 2x\,y_p(x)^2 + x\,y_p(x) + x &= 0 - 2x + x + x, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc : $y_p(x) = 1$ définie bien une solution particulière de l'équation (2.17).

Posons

$$y(x) = 1 + \frac{1}{t(x)} \Rightarrow y'(x) = -\frac{t'(x)}{t^2(x)}.$$

En remplaçant y et y' dans l'équation (2.17), nous obtenons

$$\begin{aligned} y'(x) = 2x\,y^2(x) - x\,y(x) - x \quad &\Rightarrow \quad -\frac{t'(x)}{t^2(x)} = 2x\left(1 + \frac{1}{t(x)}\right)^2 + x\left(1 + \frac{1}{t(x)}\right) - x, \\ &\Rightarrow \quad -t'(x) = 2x + 3x\,t(x), \end{aligned} \tag{2.18}$$

qui est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons

$$\begin{aligned} -t'(x) = 3x\,t(x) \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dt(x)}{t(x)} = -3\int x\,dx, \\ &\Rightarrow \quad \ln|t(x)| = -\frac{3}{2}x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

  Ainsi, la solution générale de l'EDO linéaire sans second membre t_h est

$$t_h(x) = k\,e^{-\frac{3}{2}x^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : EDO avec second membre (méthode de la variation de la constante)
  Nous avons

$$t(x) = \mathrm{K}(x)\,e^{-\frac{3}{2}x^2} \Rightarrow t'(x) = \mathrm{K}'(x)\,e^{-\frac{3}{2}x^2} - 3x\,\mathrm{K}(x)\,e^{-\frac{3}{2}x^2}.$$

  En remplaçant t et t' dans l'équation (2.18), il vient

$$\begin{aligned} -t'(x) = 3x\,t(x) + 2x \quad &\Rightarrow \quad -\mathrm{K}'(x)\,e^{-\frac{3}{2}x^2} + 3x\,\mathrm{K}(x)\,e^{-\frac{3}{2}x^2} = 3x\,\mathrm{K}(x)\,e^{-\frac{3}{2}x^2} + 2x, \\ &\Rightarrow \quad \int \mathrm{K}'(x)\,dx = -2\int x\,e^{\frac{3}{2}x^2}\,dx, \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{K}(x) = -\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x^2} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc : la solution générale t_g de l'équation (2.18) est

$$t_g(x) = c_1 e^{-\frac{3}{2}x^2} - \frac{2}{3}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Comme $y(x) = 1 + \frac{1}{t(x)}$. Alors, la solution générale y_g de l'équation (2.17) est

$$y_g(x) = 1 + \left(c_1 e^{-\frac{3}{2}x^2} - \frac{2}{3}\right)^{-1}, \quad c_1 \in \mathbb{R} \text{ et } c_1 e^{-\frac{3}{2}x^2} - \frac{2}{3} \neq 0.$$

★

3.3 Équations de Clairaut

Définition 2.11 *Toute équation différentielle ordinaire d'ordre 1 de la forme*

$$y(x) = x\,y'(x) + g\left(y'(x)\right), \tag{2.19}$$

où g est une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$ continue et dérivable sur $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$, est dite équation de Clairaut.

Méthode de résolution 2.6 *Pour résoudre l'équation de Clairaut (2.19), nous utiliserons le changement de fonction*

$$y'(x) = t(x).$$

Ainsi, l'équation de Clairaut (2.19) devient

$$y(x) = x\,y'(x) + g\left(y'(x)\right) \Rightarrow y(x) = x\,t(x) + g(t(x)).$$

Dérivons cette dernière équation par rapport à x, il vient

$$\begin{aligned} y(x) = x\,t(x) + g(t(x)) \quad &\Rightarrow \quad y'(x) = t(x) + x\,t'(x) + t'(x)\,g'(t(x)), \\ &\Rightarrow \quad t(x) = t(x) + x\,t'(x) + t'(x)g'(t(x)), \\ &\Rightarrow \quad t'(x)\left(x + g'(t(x))\right) = 0, \end{aligned}$$

ainsi, on distingue deux cas :

- <u>Premier cas</u> : *Si $t'(x) = 0$, nous obtenons une solution générale y_g de la forme*

$$y_g(x) = c\,x + g(c), \quad c \in \mathbb{R},$$

  car $t'(x) = 0 \Rightarrow t(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.
- <u>Deuxième cas</u> : *Si $g'(t(x)) + x = 0$ et si la fonction g' est une fonction inversible, nous obtenons une solution singulière y_s de la forme*

$$y_s(x) = x\left(g'\right)^{-1}(-x) + g\left(\left(g'\right)^{-1}(-x)\right),$$

  car $g'(t(x)) + x = 0 \Rightarrow t(x) = \left(g'\right)^{-1}(-x)$.

Remarque 2.11 *La solution générale y_g de l'équation de Clairaut est représentée par une famille de droite.*

Exemple 2.12 *Résoudre l'équation suivante*

$$y(x) = x\,y'(x) + \left(y'(x)\right)^2. \tag{2.20}$$

Solution de l'exemple 2.12

<u>*Solutions de l'équation* (2.20) :</u>

L'équation (2.20) est une équation de Clairaut. Pour sa résolution, posons $t(x) = y'(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} y(x) = x\,y'(x) + \left(y'(x)\right)^2 &\Rightarrow\quad y(x) = x\,t(x) + t^2(x), \\ &\Rightarrow\quad y'(x) = t(x) + x\,t'(x) + 2\,t(x)\,t'(x), \\ &\Rightarrow\quad t'(x)\,(x + 2\,t(x)) = 0. \end{aligned}$$

Deux cas peuvent se présenter

- <u>Premier cas</u> : Si $t'(x) = 0$. Alors, $t(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.
  Donc : la solution générale y_g de l'équation de Clairaut (2.20) est
  $$y_g(x) = c\,x + c^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$
- <u>Deuxième cas</u> : Si $x + 2t(x) = 0$. Alors, $t(x) = -\dfrac{x}{2}$.
  Donc : la solution singulière y_s de l'équation de Clairaut (2.20) est
  $$y_s(x) = -\frac{1}{4}x^2.$$

★

3.4 Équations de Lagrange

Définition 2.12 *Toute équation différentielle ordinaire d'ordre* 1 *de la forme*

$$y(x) = x\,h\left(y'(x)\right) + g\left(y'(x)\right), \tag{2.21}$$

où h et g sont des fonctions continues et dérivables sur un intervalle $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$, est dite équation de Lagrange.

Méthode de résolution 2.7 *Pour résoudre l'équation de Lagrange* (2.21)*, il suffit de poser le changement de variable $u = y'(x)$ avec u une nouvelle variable et x et y sont des fonctions dépendant de la variable u, i.e. ;*

$$y(x) = x\,h\left(y'(x)\right) + g\left(y'(x)\right) \Rightarrow y(x(u)) = x(u)\,h(u) + g(u).$$

Dérivons cette dernière équation par rapport à u

$$y(x(u)) = x(u)\,h(u) + g(u) \Rightarrow \frac{dy(x(u))}{du} = x'(u)\,h(u) + x(u)\,h'(u) + g'(u).$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{dy(x(u))}{du} &= \frac{dy(x(u))}{dx}\,\frac{dx(u)}{du}, \\ &= u\,x'(u). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{dy(x(u))}{du} = x'(u)\,h(u) + x(u)\,h'(u) + g'(u) \quad \Rightarrow \quad u\,x'(u) = x'(u)\,h(u) + x(u)\,h'(u) + g'(u),$$
$$\Rightarrow \quad (u - h(u))\,x'(u) = h'(u)\,x(u) + g'(u).$$

Ainsi, deux cas peuvent se présenter

- Premier cas : *Si $u - h(u) = 0$. Alors, nous obtenons la solution singulière y_s de l'équation de Clairaut*
$$y_s(u) = -\frac{g'(u)}{h'(u)}\,h(u) + g(u),$$
car,
$$u - h(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad h'(u)\,x(u) + g'(u) = 0,$$
$$\Rightarrow \quad x(u) = -\frac{g'(u)}{h'(u)}.$$
- Deuxième cas : *Si $u - h(u) \neq 0$. Alors, nous obtenons une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 de fonction inconnue x et de variable u*
$$x'(u) = \frac{h'(u)}{u - h(u)}\,x(u) + \frac{g'(u)}{u - h(u)}.$$
*Comme la solution générale de l'*EDO *linéaire est*
$$x_g(u) = x_h(u) + x_p(u), \quad c \in \mathbb{R},$$
alors, la solution générale y_g de l'équation de Lagrange (2.21) est
$$y_g(u) = \big(x_h(u) + x_p(u)\big)\,h(u) + g(u), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.13 *Soit l'équation*

$$y(x) = 2x\,y'(x) + \ln y'(x). \tag{2.22}$$

Déterminer sa solution générale.

Solution de l'exemple 2.13

Résolution de l'équation (2.22) :

L'équation (2.22) représente une équation de Lagrange. Pour sa résolution, posons $y'(x) = u$.

Ainsi,

$$y(x) = 2x\,y'(x) + \ln y'(x) \quad \Rightarrow \quad y(x(u)) = 2x(u)\,u + \ln u,$$
$$\Rightarrow \quad u\,x'(x) = 2u\,x'(u) + 2x(u) + \frac{1}{u},$$
$$\Rightarrow \quad -u\,x'(x) = 2x(u) + \frac{1}{u},$$

laquelle est une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 de fonction inconnue x et de variable u (car pour tout x, $y'(x) > 0$). Elle peut, aussi, s'écrire comme

$$x'(u) = -\frac{2}{u}\,x(u) - \frac{1}{u^2}. \tag{2.23}$$

Pour la résolution de l'équation (2.23), nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons

$$
\begin{aligned}
x' = -\frac{2}{u}x \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = -2\int \frac{du}{u},\\
&\Rightarrow \quad \ln|x(u)| = -2\ln|u| + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

  Ainsi, la solution générale de l'EDO linéaire sans second membre (2.23) est

$$x_h(u) = k\,u^{-2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode de la variation de la constante)
  Nous avons

$$x(u) = \mathrm{K}(u)\,u^{-2} \Rightarrow x'(u) = \mathrm{K}'(u)\,u^{-2} - 2\mathrm{K}(u)\,u^{-3}.$$

  En remplaçant x et x' dans l'équation (2.23), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
x'(u) = -\frac{2}{u}x(u) - \frac{1}{u^2} \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{K}'(u)\,u^{-2} - 2\mathrm{K}(u)\,u^{-3} = -\frac{2}{u}\mathrm{K}(u)\,u^{-2} - \frac{1}{u^2},\\
&\Rightarrow \quad \int \mathrm{K}'(u)\,du = -\int du,\\
&\Rightarrow \quad \mathrm{K}(u) = -u + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

  Donc : La solution générale x_g de l'équation (2.23) est

$$x_g(u) = c_1\,u^{-2} - u^{-1}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

En dernier, comme $y(u) = 2x(u)u + \ln u$. Alors, la solution générale y_g de l'équation (2.22) devient

$$y_g(u) = 2c_1\,u^{-1} + \ln u - 2, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

★

4 Problème à condition initiale

Dans cette section, nous allons montrer comment peut-on déterminer la valeur de la constante c en possédant une condition initiale. Pour cette constante vérifiant la condition initiale, la solution de l'EDO est dite solution particulière.

4.1 Méthode directe

Soit le problème de Cauchy

$$
\begin{cases}
y'(x) = f\left(x; y(x)\right), & x \in \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R},\\
y(x_0) = y_0.
\end{cases}
\tag{2.24}
$$

Résoudre le problème de Cauchy (2.24) revient à déterminer la solution générale de l'équation différentielle $y'(x) = f\left(x; y(x)\right)$, puis à remplacer la condition $y(x_0) = y_0$ dans la solution générale à fin d'obtenir la valeur de la constante c.

Exemple 2.14 *Trouver la solution particulière de l'équation*

$$2x\,y(x) - y'(x) = -2x,$$

vérifiant $y(0) = 0$.

Solution de l'exemple 2.14

Solution du problème de Cauchy :

Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) &= 2x\,y(x) + 2x, \\ y(0) &= 0. \end{cases} \tag{2.25}$$

L'équation associée au problème (2.25) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons

$$\begin{aligned} y'(x) = 2x\,y(x) \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dy(x)}{y(x)} = 2\int x\,dx, \\ &\Rightarrow \quad \ln|y(x)| = x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

  Ainsi, la solution générale y_h de l'EDO linéaire sans second membre est

$$y_h(x) = k\,e^{x^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode de la variation de la constante)
  Comme $y(x) = K(x)\,e^{x^2}$. Alors, $y'(x) = K'(x)\,e^{x^2} + 2x\,K(x)\,e^{x^2}$.
  En remplaçant y et y' dans l'EDO linéaire avec second membre, nous obtenons

$$\begin{aligned} y'(x) = 2x\,y(x) + 2x \quad &\Rightarrow \quad K'(x)\,e^{x^2} + 2x\,K(x)\,e^{x^2} = 2x\,K(x)\,e^{x^2} + 2x, \\ &\Rightarrow \quad \int K'(x)\,dx = \int 2x\,e^{-x^2}\,dx, \\ &\Rightarrow \quad K(x) = -e^{-x^2} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

  Ainsi, la solution générale y_g de l'EDO linéaire complète est

$$y_g(x) = c_1\,e^{x^2} - 1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Il ne reste qu'à trouver la valeur de la constante c_1. Comme $y_g(x) = c_1\,e^{x^2} - 1$ et $y(0) = 0$, alors, $c_1 = 1$.

Ainsi, la solution particulière y_p du problème (2.25) est

$$y_p(x) = e^{x^2} - 1.$$

★

4.2 Méthode analytique : Méthode des approximations successives de Picard

Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= f\big(t; y(t)\big), \quad t \in [x_0, x[, \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases} \tag{2.26}$$

La méthode des approximations successives de Picard est une méthode analytique qui permet de trouver une solution "approchée" du problème de Cauchy (2.26).

Si $y(x)$ est la solution, elle s'écrit sous la forme

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t; y(t)\right) dt, \tag{2.27}$$

car,

$$\begin{aligned} y'(t) = f\left(t; y(t)\right) \quad &\Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} y'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f\left(t; y(t)\right) dt, \\ &\Rightarrow \quad y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f\left(t; y(t)\right) dt, \\ &\Rightarrow \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t; y(t)\right) dt. \end{aligned}$$

La méthode des approximations successive de Picard consiste à itérer le procédé (2.27), c'est-à-dire,

- Substituer $y_0 = y(x_0)$ sous le signe intégrale afin d'obtenir $y_1(x)$.
- En portant la valeur trouver de y_1 à la place de $y(t)$ dans l'équation (2.27), nous trouvons y_2.

Et ainsi de suite. La formule des approximations successives de Picard est donc

$$\begin{aligned} & y(x_0) = y_0, \\ \forall n \geq 1 \qquad & y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t; y_{n-1}(t)\right) dt. \end{aligned}$$

Remarque 2.12 *En pratique, trouver la solution du problème de Cauchy* (2.26) *par la méthode des approximations successives de Picard revient à*

- Étape 1 : *Déterminer la fonction f et les conditions initiales* (x_0, y_0).
- Étape 2 : *Itérer le formule*

  $$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t; y_{n-1}(t)\right) dt,$$

  de $n = 1$ jusqu'à un ordre n.
- Étape 3 : *Calculer* $\lim_{n \to +\infty} y_n(x)$. *Le résultat obtenu, s'il existe et est bien défini représente la solution du problème de Cauchy* (2.26).

Exemple 2.15 *Trouver par la méthode des approximations successives de Picard la solution de l'équation*

$$y'(x) - y(x) = 0,$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$.

Solution de l'exemple 2.15

Déterminons la solution du problème de Cauchy par la méthode des approximations successives de Picard :

Le problème de Cauchy correspondant est

$$\begin{cases} y'(x) &= y(x), \\ y(0) &= 1. \end{cases} \tag{2.28}$$

Ainsi,

- Étape 1 : La fonction f et la condition initiale
  Nous avons
  1. $y'(x) = y(x) \Rightarrow f\left(x; y(x)\right) = y(x)$.
  2. $y(0) = 1 \Rightarrow \left(x_0 = 0 \wedge y_0 = 1\right)$.
- Étape 2 : Les itérations
  Nous avons

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1: \quad y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t; y_{n-1}(t)\right) dt, \\ &= 1 + \int_0^x y_{n-1}(t)\, dt.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{array}{llll} n=0 & : & y_0(x) & = 1. \\ n=1 & : & y_1(x) & = 1 + \int_0^x dt, \\ & & & = 1 + x. \\ n=2 & : & y_2(x) & = 1 + \int_0^x (1+t) dt, \\ & & & = 1 + x + \frac{1}{2}x^2. \\ n=3 & : & y_3(x) & = 1 + \int_0^x (1 + t + \frac{1}{2}t^2) dt, \\ & & & = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3. \\ & \vdots & & \\ \text{à l'ordre } n & : & y_n(x) & = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n. \end{array}$$

- Étape 3 : Passage à la limite
  A l'ordre n, nous avons

$$\begin{aligned} y_n(x) &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n, \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n\to+\infty} y_n(x), \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \\ &= e^x. \end{aligned}$$

Donc : la solution particulière du problème de Cauchy (2.28) est

$$y_p(x) = e^x.$$

★

5 Exercices

Exercice 2.1 *Résoudre les équations différentielles suivantes*

1 . $\cos x\, y'(x) = \dfrac{y(x)}{\ln y(x)}$.

2 . $2\mathrm{ch} y(x)\, dx - \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right) dy(x) = 0$.

3 . $\dfrac{dy(x)}{dx} = -\dfrac{3x + 3y(x) - 1}{2x + 2y(x)}$.

4 . $y'(x) = \dfrac{2x + y(x) - 1}{4x + 2y(x) + 5}$.

Solution de l'exercice 2.1

Résolution des équations différentielles ordinaires :

1 .

$$\cos x\, y'(x) = \frac{y(x)}{\ln y(x)}. \tag{2.29}$$

L'équation (2.29) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 à variables séparées.

Nous avons

$$\begin{aligned}
(2.29) \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{\ln y(x)}{y(x)}\, dy(x) = \int \frac{dx}{\cos x},\\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\ln y(x)\right)^2 = \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + c, \quad c \in \mathbb{R},\\
&\Rightarrow \quad \ln y = \left|2\ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + 2c\right|^{\frac{1}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (2.29) est

$$y_g(x) = \exp\left[\left|2\ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + c_1\right|^{\frac{1}{2}}\right], \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

2 .

$$2\mathrm{ch} y(x)\, dx - \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right) dy(x) = 0. \tag{2.30}$$

L'équation (2.30) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 à variables séparées.

Nous avons

$$\begin{aligned}
(2.30) \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy(x)}{2\mathrm{ch} y(x)} = \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}},\\
&\Rightarrow \quad \int \frac{dy(x)}{e^{-y(x)} + e^{y(x)}} = \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}\, dx - \frac{1}{2}\int \sqrt{x-1}\, dx,\\
&\Rightarrow \quad \arctan\left(e^{y(x)}\right) = \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (2.30) est

$$y_g(x) = \ln\left|\tan\left(\frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + c\right)\right|, \quad c \in \mathbb{R},$$

avec $\frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + c \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

3 .

$$\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{3x+3y(x)-1}{2x+2y(x)}. \tag{2.31}$$

L'équation (2.31) est une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 laquelle peut se ramener à une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 à variables séparées, vu que $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Posons $t(x) = x + y(x) \Rightarrow t'(x) = 1 + y'(x)$. Ainsi, l'équation (2.31) devient

$$\begin{aligned}
(2.31) \quad &\Rightarrow \quad t'(x) - 1 = -\frac{3t(x)-1}{2t(x)}, \\
&\Rightarrow \quad t'(x) = \frac{1-t(x)}{2t(x)}, \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{2t(x)}{1-t(x)} dt(x) = \int dx, \\
&\Rightarrow \quad -2\int dt(x) - 2\int \frac{dt(x)}{t(x)-1} = \int dx, \\
&\Rightarrow \quad -2t(x) + 2\ln|t(x)-1| = x + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Comme $t(x) = x + y(x)$. Alors, l'intégrale générale de l'équation (2.31) est

$$2\ln|y(x)+x-1| - 3x - 2y(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

4 .

$$y'(x) = \frac{2x+y(x)-1}{4x+2y(x)+5}. \tag{2.32}$$

L'équation (2.32) est une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 laquelle peut se ramener à une EDO d'ordre 1 à variables séparables, vu que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Posons $t(x) = 2x + y(x) \Rightarrow t'(x) = 2 + y'(x)$. Ainsi, l'équation (2.32) devient

$$\begin{aligned}
(2.32) \quad &\Rightarrow \quad t'(x) - 2 = \frac{t(x)-1}{2t(x)+5}, \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{2t(x)+5}{5t(x)+9} dt(x) = \int dx, \\
&\Rightarrow \quad \frac{2}{5}\int dt(x) + \frac{7}{5}\int \frac{dt(x)}{5t(x)+9} = \int dx, \\
&\Rightarrow \quad \frac{2}{5}t(x) + \frac{7}{25}\ln|5t(x)+9| = x + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Comme $t(x) = 2x + y(x)$. Alors, l'intégrale générale de l'équation (2.32) est

$$10y(x) - 5x + 7\ln|5y(x) + 10x + 9| = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

♦

Exercice 2.2 *Intégrer les équations différentielles suivantes*

1 . $x\,y(x)\,y'(x) = y^2(x) - x\sqrt{x^2 - y^2(x)}$.

2 . $y'(x) = \dfrac{x\,y(x) + y^2(x)\,e^{-\frac{x}{y(x)}}}{x^2}$.

3 . $y'(x) = \dfrac{y(x)+2}{x+1} + \tan\left(\dfrac{y(x)-2x}{x+1}\right)$.

4 . $\big(x - 2y(x) + 3\big)\,dy + \big(2x + y(x) - 1\big)\,dx = 0$.

Solution de l'exercice 2.2

Intégration des équations différentielles ordinaires :

1 .

$$x\,y(x)\,y'(x) = y^2(x) - x\sqrt{x^2 - y^2(x)}. \tag{2.33}$$

L'équation (2.33) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 homogène. Pour sa résolution, posons

$$y(x) = x\,t(x) \Rightarrow y'(x) = t(x) + x\,t'(x).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(2.33) \quad &\Rightarrow \quad y'(x) = \frac{y(x)}{x} - \frac{x}{y(x)}\sqrt{1 - \left(\frac{y(x)}{x}\right)^2},\\
&\Rightarrow \quad t(x) + x t'(x) = t(x) - \frac{1}{t(x)}\sqrt{1 - t^2(x)},\\
&\Rightarrow \quad -\int \frac{t(x)}{\sqrt{1 - t^2(x)}}\,dt(x) = \int \frac{dx}{x},\\
&\Rightarrow \quad \sqrt{1 - t^2(x)} = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ avec } c \geq -\ln|x|,\\
&\Rightarrow \quad t(x) = \left|1 - (\ln|x| + c)^2\right|^{\frac{1}{2}}, \quad c \in \mathbb{R} \text{ avec } c \geq -\ln|x|.
\end{aligned}$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (2.33) est

$$y_g(x) = x\left|1 - (\ln|x| + c)^2\right|^{\frac{1}{2}}, \quad c \in \mathbb{R} \text{ avec } c \geq -\ln|x|.$$

2 .

$$y'(x) = \frac{x\,y(x) + y^2(x)\,e^{-\frac{x}{y(x)}}}{x^2}. \tag{2.34}$$

L'équation (2.34) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 homogène. Pour sa résolution, posons

$$y(x) = x\,t(x) \Rightarrow y'(x) = t(x) + x\,t'(x).$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
(2.34) \quad &\Rightarrow \quad y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \frac{y^2(x)}{x^2} e^{-\frac{x}{y(x)}} \\
&\Rightarrow \quad t(x) + x t'(x) = t(x) + t^2(x)\, e^{-\frac{1}{t(x)}}, \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{1}{t^2(x)} e^{\frac{1}{t(x)}}\, dt(x) = \int \frac{dx}{x}, \\
&\Rightarrow \quad -e^{\frac{1}{t(x)}} = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{t(x)} = \ln|-\ln|x| - c|, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (2.34) est

$$y_g(x) = x\big(\ln|-\ln|x| - c|\big)^{-1}, \quad c \in \mathbb{R} \text{ avec } \ln|-\ln|x| - c| \neq 0.$$

3 .

$$y'(x) = \frac{y(x)+2}{x+1} + \tan\left(\frac{y(x)-2x}{x+1}\right). \tag{2.35}$$

Comme $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ et $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Alors, l'équation (2.35) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 homogène.
Posons $x = u + \alpha$ et $y(x) = v(u) + \beta$, où (α, β) vérifiant le système

$$\begin{cases} \beta + 2 & = & 0, \\ \alpha + 1 & = & 0. \end{cases} \tag{2.36}$$

La résolution du système (2.36) donne $(\alpha, \beta) = (-1, -2)$. Ainsi, réalisons le changement $x = u - 1$ et $y(x) = v(u) - 2$ dans l'équation (2.35), nous obtenons

$$v'(u) = \frac{v(u)}{u} + \tan\left(\frac{v(u)}{u} - 2\right). \tag{2.37}$$

Dans l'équation homogène obtenue (2.37), posons $v(u) = u t(u)$, d'où il vient $v'(u) = t(u) + u t'(u)$. Nous aurons, ainsi,

$$
\begin{aligned}
(2.37) \quad &\Rightarrow \quad t(u) + u t'(u) = t(u) + \tan(t(u) - 2), \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{dt(u)}{\tan(t(u) - 2)} = \int \frac{du}{u}, \\
&\Rightarrow \quad \ln|\sin(t(u) - 2)| = \ln|u| + c, \quad c \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad t(u) = \arcsin(k u) + 2, \quad k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (2.35) est

$$y_g(x) = (x+1)\,(\arcsin(k\,(x+1)) + 2) - 2, \quad k \in \mathbb{R}.$$

4 .

$$\big(x-2y(x)+3\big)\,dy+\big(2x+y(x)-1\big)\,dx=0. \tag{2.38}$$

L'équation (2.38) peut s'écrire sous la forme

$$y'(x)=\frac{-2x-y(x)+1}{x-2y(x)+3}.$$

Comme $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$. Alors, l'équation (2.38) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 homogène.
Posons $x=u+\alpha$ et $y(x)=v(u)+\beta$, où (α,β) vérifiant le système

$$\begin{cases} -2\alpha-\beta+1 &= 0, \\ \alpha-2\beta+3 &= 0. \end{cases} \tag{2.39}$$

La résolution du système (2.39) donne $(\alpha,\beta)=\left(-\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$. Ainsi, réalisons le changement $x=u-\frac{1}{5}$ et $y(x)=v(u)+\frac{7}{5}$ dans l'équation (2.38), nous obtenons

$$v'(u)=\frac{-\frac{v(u)}{u}-2}{-2\frac{v(u)}{u}+1}. \tag{2.40}$$

Dans l'équation homogène obtenue (2.40), posons $v(u)=ut(u)$, d'où il vient $v'(u)=t(u)+ut'(u)$. Nous aurons, ainsi,

$$\begin{aligned}
(2.40) \quad &\Rightarrow \quad t(u)+ut'(u)=\frac{-t(u)-2}{-2t(u)+1},\\
&\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\int\frac{2t(u)-1}{t^2(u)-t(u)-1}dt=\int\frac{du}{u},\\
&\Rightarrow \quad \left|t^2(u)-t(u)-1\right|^{-\frac{1}{2}}=k\,u, \quad k\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En dernier, l'intégrale générale de l'équation (2.38) est

$$\left(\left(\frac{5y(x)-7}{5x+1}\right)^2-\left(\frac{5y(x)-7}{5x+1}\right)-1\right)^{-\frac{1}{2}}=k\left(x+\frac{1}{5}\right), \quad k\in\mathbb{R}.$$

♦

Exercice 2.3 *En utilisant les coordonnées polaires, intégrer les équations différentielles suivantes*

1 . $y'(x)=\dfrac{2x\,y(x)}{x^2-y^2(x)}$.

2 . $y'(x)\,\big(x+y(x)\big)-y(x)=0$.

Solution de l'exercice 2.3

Intégration des équations différentielles par l'utilisation des coordonnées polaires :

1 .

$$y'(x) = \frac{2x\,y(x)}{x^2 - y^2(x)}. \tag{2.41}$$

L'équation (2.41) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 homogène. Pour sa résolution, posons

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta,$$

d'où,

$$dx = dr\,\cos\theta - r\,\sin\theta\,d\theta \quad \text{et} \quad dy = dr\,\sin\theta + r\,\cos\theta\,d\theta.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(2.41) \quad \Rightarrow \quad & \frac{dr\,\sin\theta + r\,\cos\theta\,d\theta}{dr\,\cos\theta - r\,\sin\theta\,d\theta} = \frac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)},\\
\Rightarrow \quad & \int \frac{dr}{r} = -\int \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta,\\
\Rightarrow \quad & \ln r = -\ln|\sin\theta| + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En dernier, l'intégrale générale de l'équation (2.41) est

$$r = \frac{k}{\sin\theta}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2 .

$$y'(x)\,\big(x + y(x)\big) - y(x) = 0. \tag{2.42}$$

L'équation (2.42) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 homogène. Pour sa résolution, posons

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta,$$

d'où,

$$dx = dr\,\cos\theta - r\sin\theta\,d\theta \quad \text{et} \quad dy = dr\,\sin\theta + r\,\cos\theta\,d\theta.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(2.42) \quad \Rightarrow \quad & y'(x) = \frac{y(x)}{x + y(x)},\\
\Rightarrow \quad & \frac{dr\,\sin\theta + r\,\cos\theta\,d\theta}{dr\,\cos\theta - r\,\sin\theta\,d\theta} = \frac{r\,\sin\theta}{r\,(\cos\theta + \sin\theta)},\\
\Rightarrow \quad & \int \frac{dr}{r} = -\int \frac{\cos(2\theta) + \sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta,\\
\Rightarrow \quad & \ln r = 2\theta + \cot\theta - \frac{1}{2}\ln|\sin^2\theta| + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En dernier, l'intégrale générale de l'équation (2.42) est

$$r = k\left(\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}} e^{2\theta + \cot\theta}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

♦

Exercice 2.4 *Résoudre les équations différentielles ordinaires suivantes*

1. $2x\,y'(x) - y(x) = 2x^2 \ln x$.

2. $x\,y'(x) + 5y(x) = (2x+5)\,e^{2x}$.

Solution de l'exercice 2.4

Résolution des équations différentielles ordinaires :

1. Soit, pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'équation

$$2x\,y'(x) - y(x) = 2x^2 \ln x. \tag{2.43}$$

L'équation (2.43) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 linéaire avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
  $$2x\,y'(x) - y(x) = 0.$$
  Ainsi,
  $$\begin{aligned} 2x\,y'(x) - y(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dy(x)}{y(x)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}, \\ &\Rightarrow \quad \ln|y(x)| = \frac{1}{2}\ln x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$
  Donc : La solution générale y_h de l'équation sans second membre est
  $$y_h(x) = k\sqrt{x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$
- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode de la variation de la constante)
  Nous avons
  $$y(x) = \mathrm{K}(x)\sqrt{x} \Rightarrow y'(x) = \mathrm{K}'(x)\sqrt{x} + \frac{\mathrm{K}(x)}{2\sqrt{x}}.$$
  En remplaçant y et y' dans l'équation (2.43), nous obtenons
  $$\begin{aligned} (2.43) \quad &\Rightarrow \quad 2x\left(\mathrm{K}'(x)\sqrt{x} + \frac{\mathrm{K}(x)}{2\sqrt{x}}\right) - \mathrm{K}(x)\sqrt{x} = 2x^2 \ln x \\ &\Rightarrow \quad \int \mathrm{K}'(x)\,dx = \int \sqrt{x}\ln x\,dx \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{K}(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Comme $y(x) = \mathrm{K}(x)\sqrt{x}$. Alors, la solution générale y_g de l'équation (2.43) est

$$y_g(x) = c_1\sqrt{x} + \frac{2}{3}x^2 \ln x - \frac{4}{9}x^2, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

2. Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'équation

$$x\,y'(x) + 5y(x) = (2x+5)\,e^{2x}. \tag{2.44}$$

L'équation (2.44) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 linéaire avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
$$x\,y'(x) + 5\,y(x) = 0.$$
  Ainsi,
$$\begin{aligned} x\,y'(x) + 5y(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dy(x)}{y(x)} = -5\int \frac{dx}{x}, \\ &\Rightarrow \quad \ln|y| = -5\ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
  Donc : La solution générale y_h de l'équation sans second membre est
$$y_h(x) = \frac{k}{x^5}, \quad k \in \mathbb{R}.$$
- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode de la variation de la constante)
  Nous avons
$$y(x) = \frac{\mathrm{K}(x)}{x^5} \Rightarrow y'(x) = \frac{\mathrm{K}'(x)}{x^5} - 5\frac{\mathrm{K}(x)}{x^6}.$$
  En remplaçant y et y' dans l'équation (2.44), nous obtenons
$$\begin{aligned} (2.44) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{K}'(x)}{x^4} - 5\frac{\mathrm{K}(x)}{x^5} + 5\frac{\mathrm{K}(x)}{x^5} = (2x+5)\,e^{2x}, \\ &\Rightarrow \quad \int \mathrm{K}'(x)\,dx = 2\int x^5\,e^{2x}\,dx + 5\int x^4\,e^{2x}\,dx \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{K}(x) = x^5\,e^{2x} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Comme $y(x) = \dfrac{\mathrm{K}(x)}{x^5}$. Alors, la solution générale y_g de l'équation (2.44) est

$$y_g(x) = \frac{c_1}{x^5} + e^{2x}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

♦

Exercice 2.5 *Déterminer le type des équations différentielles ordinaires suivantes puis les intégrer*

1. $3x\,y'(x) - (1 + x\sin x)\,y(x) = -y^4(x)\sin x$.

2. $2x\,y'(x)\,y^{-3}(x) - x^2\arcsin x + y^{-2} = 0$.

3. $x\,y'(x) - y^2(x) + (2x+1)\,y(x) = x^2 + 2x$, avec $y_1(x) = x$.

4. $y'(x) + y^2(x) - 2\sin x\,y(x) + \sin^2 x - \cos x = 0$, avec $y_1(x) = \sin x$.

5. $y(x) = x\,y'(x) + \dfrac{1}{y'(x)}$.

6. $y(x) = x\,y'(x) + \dfrac{y'(x)}{1 + y'(x)}$.

7. $y(x) = -x\,y'(x) - \ln y'(x)$.

8. $y(x) - x\left(y'(x) + m\right) - \left(y'\right)^2(x) = 0,\ m \in \mathbb{R}^*.$

Solution de l'exercice 2.5

Intégration des équations différentielles ordinaires :

1. Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'équation

$$3x\,y'(x) - (1 + x\sin x)\ y(x) = -y^4(x)\sin x. \tag{2.45}$$

L'équation (2.45) représente une équation de Bernoulli avec $\alpha = 4$. Pour sa résolution, posons

$$t(x) = y^{1-4}(x) \Rightarrow t'(x) = -3y'(x)\,y^{-4}(x).$$

En remplaçant y et y' dans l'équation (2.45), nous obtenons

$$\begin{aligned}(2.45) \quad &\Rightarrow \quad 3x\,y'(x)\,y^{-4}(x) - (1 + x\sin x)\,y^{-3}(x) = -\sin x,\\ &\Rightarrow \quad x\,t'(x) + (1 + x\sin x)\,t(x) = \sin x. \end{aligned} \tag{2.46}$$

L'équation obtenue est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre

  Nous avons
  $$x\,t'(x) + (1 + x\sin x)\,t(x) = 0.$$
  Ainsi,
  $$\begin{aligned} x\,t'(x) + (1 + x\sin x)\,t(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dt(x)}{t(x)} = -\int \frac{dx}{x} - \int \sin x\,dx,\\ &\Rightarrow \quad \ln|t(x)| = -\ln|x| + \cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
  Donc : La solution générale t_h de l'équation sans second membre associée à l'équation (2.46) est
  $$t_h(x) = \frac{k\,e^{\cos x}}{x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode de la variation de la constante)

  Nous avons
  $$t(x) = \frac{\mathrm{K}(x)\,e^{\cos x}}{x} \Rightarrow t'(x) = \frac{\mathrm{K}'(x)\,e^{\cos x}}{x} - \frac{\mathrm{K}(x)\,\sin x\,e^{\cos x}}{x} - \frac{\mathrm{K}(x)\,e^{\cos x}}{x^2}.$$
  En remplaçant t et t' dans l'équation (2.46), nous obtenons
  $$\begin{aligned}(2.46) \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{K}'(x)\,e^{\cos x} - \mathrm{K}(x)\,\sin x\,e^{\cos x} - \frac{\mathrm{K}(x)\,e^{\cos x}}{x}\\ &\qquad + (1 + x\sin x)\,\frac{\mathrm{K}(x)\,e^{\cos x}}{x} = \sin x,\\ &\Rightarrow \quad \int \mathrm{K}'(x)\,dx = \int \sin x\,e^{-\cos x}\,dx\\ &\Rightarrow \quad \mathrm{K}(x) = e^{-\cos x} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Comme $t(x) = \dfrac{K(x)\, e^{\cos x}}{x}$. Alors, la solution générale t_g de l'équation (2.46) est

$$t_g(x) = \frac{c_1\, e^{\cos x}}{x} + \frac{1}{x}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (2.45) est

$$y_g(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1 + c_1\, e^{\cos x}}}, \quad c_1 \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad c_1 \neq -e^{-\cos x}.$$

2. Soit, pour tout $x \in [-1, 0[\cup]0, 1]$, l'équation

$$2x\, y'(x)\, y^{-3}(x) - x^2 \arcsin x + y^{-2}(x) = 0. \tag{2.47}$$

L'équation (2.47) peut s'écrire sous la forme

$$2x\, y'(x) - x^2 \arcsin x\; y^3(x) + y(x) = 0,$$

laquelle représente une équation de Bernoulli avec $\alpha = 3$. Pour sa résolution, posons

$$t(x) = y^{-2}(x) \Rightarrow t'(x) = -2y'(x)\, y^{-3}(x).$$

En remplaçant y et y' dans l'équation (2.47), nous obtenons

$$-\,x\, t'(x) - x^2 \arcsin x + t(x) = 0. \tag{2.48}$$

L'équation obtenue (2.48) est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
  $$-\,x\, t'(x) + t(x) = 0. \tag{2.49}$$
  Ainsi,
  $$\begin{aligned} (2.49) \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dt(x)}{t} = \int \frac{dx}{x}, \\ &\Rightarrow \quad \ln|t(x)| = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
  Donc : la solution générale t_h de l'équation (2.49) est
  $$t_h(x) = k\,x, \quad k \in \mathbb{R}.$$
- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode de la variation de la constante)
  Nous avons
  $$t(x) = K(x)\, x \Rightarrow t'(x) = K'(x)\, x + K(x).$$
  En remplaçant t et t' dans l'équation (2.48), nous obtenons
  $$\begin{aligned} (2.48) \quad &\Rightarrow \quad -K'(x)\, x^2 - K(x)\, x - x^2 \arcsin x + K(x)\, x = 0, \\ &\Rightarrow \quad \int K'(x)\, dx = -\int \arcsin x\, dx \\ &\Rightarrow \quad K(x) = -x \arcsin x - \sqrt{1 - x^2} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
  Comme $t(x) = K(x)\, x$. Alors, la solution générale t_g de l'équation (2.48) est
  $$t_g(x) = c_1\, x - x^2 \arcsin x - x\sqrt{1 - x^2}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

En dernier, la solution générale de l'équation (2.47) est

$$y_g(x) = \left(c_1\, x - x^2 \arcsin x - x\sqrt{1-x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad c_1 \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad c_1 \neq x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

3 . Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'équation

$$x\, y'(x) - y^2(x) + (2x+1)\ y(x) = x^2 + 2x, \quad \text{avec} \quad y_p(x) = x. \tag{2.50}$$

L'équation (2.50) est une équation de Riccati.
$\Big(y_p(x) = x$ est une solution particulière de l'équation (2.50)$\Big)$

$$\Rightarrow \left(x\, y_p'(x) - y_p^2(x) + (2x+1)\ y_p(x) = x^2 + 2x\right).$$

Nous avons

$$y_p(x) = x \Rightarrow y_p'(x) = 1,$$

ainsi,

$$\begin{aligned} x\, y_p'(x) - y_p^2(x) + (2x+1)\ y_p(x) &= x - x^2 + (2x+1)x, \\ &= x^2 + 2x. \end{aligned}$$

D'où : $y_p(x) = x$ définie bien une solution particulière de l'équation de Riccati (2.50).
Posons le changement de fonction $y(x) = y_p(x) + \dfrac{1}{t(x)}$. Il découle,

$$y(x) = x + \frac{1}{t(x)} \Rightarrow y'(x) = 1 - \frac{t'x)}{t^2(x)}$$

En remplaçant y et y' dans l'équation (2.50), nous obtenons

$$-x\, t'(x) + t(x) - 1 = 0,$$

laquelle représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- <u>Étape 1</u> : EDO sans second membre
  Nous avons

$$-x\, t'(x) + t(x) = 0.$$

  Ainsi,

$$\begin{aligned} -x\, t'(x) + t(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dt(x)}{t(x)} = \int \frac{dx}{x}, \\ &\Rightarrow \quad \ln|t(x)| = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

  Donc : la solution générale t_h de l'EDO linéaire sans second membre est

$$t_h(x) = k\,x, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- <u>Étape 2</u> : EDO avec second membre
  Nous avons

$$t(x) = \mathrm{K}(x)\, x \Rightarrow t'(x) = \mathrm{K}'(x)\, x + \mathrm{K}(x).$$

En remplaçant t et t' dans l'EDO linéaire avec second membre, nous trouvons

$$\begin{aligned} -x\,t'(x)+t(x)-1=0 \quad &\Rightarrow \quad -\mathrm{K}'(x)\,x^2+\mathrm{K}(x)\,x+\mathrm{K}(x)\,x-1=0,\\ &\Rightarrow \quad \int \mathrm{K}'(x)\,dx=-\int \frac{dx}{x^2},\\ &\Rightarrow \quad \mathrm{K}(x)=\frac{1}{x}+c_1, \quad c_1\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc : la solution générale t_g de l'EDO linéaire avec second membre est

$$t_g(x)=c_1\,x+1, \quad c_1\in\mathbb{R}.$$

Par suite, la solution générale y_g de l'équation (2.50) est

$$y_g(x)=x+\frac{1}{c_1\,x+1}, \quad c_1\in\mathbb{R} \quad \text{avec} \quad c_1\,x+1\neq 0.$$

4 . Soit, pour tout x, l'équation

$$y'(x)+y^2(x)-2\sin x\,y(x)+\sin^2 x-\cos x=0, \quad \text{avec} \quad y_p(x)=\sin x. \tag{2.51}$$

L'équation (2.51) est une de Riccati.
$\Big(y_p(x)=\sin x$ est une solution particulière de l'équation (2.51)$\Big)$

$$\Rightarrow \Big(y_p'(x)+y_p^2(x)-2\sin x\,y_p(x)+\sin^2 x-\cos x=0\Big).$$

Nous avons

$$y_p(x)=\sin x \Rightarrow y_p'(x)=\cos x,$$

ainsi,

$$\begin{aligned} y_p'(x)+y_p^2(x)-2\sin x\,y_p(x)+\sin^2 x-\cos x &= \cos x+\sin^2 x-2\sin^2 x+\sin x-\cos x,\\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où : $y_p(x)=\sin x$ est une solution particulière de l'équation de Riccati (2.51).
Posons le changement de fonction $y(x)=y_p(x)+\dfrac{1}{t(x)}$. Il découle,

$$y(x)=\sin x+\frac{1}{t(x)} \Rightarrow y'(x)=\cos x-\frac{t'x)}{t^2(x)}$$

En remplaçant y et y' dans l'équation (2.51), nous obtenons

$$t'(x)-1=0, \tag{2.52}$$

laquelle représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 à variables séparées. Ainsi,

$$\begin{aligned} (2.52) \quad &\Rightarrow \quad \int dt(x)=\int dx,\\ &\Rightarrow \quad t(x)=x+c, \quad c\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc : la solution générale t_h de l'équation (2.52) est

$$t_h(x)=x+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (2.51) est

$$y_g(x)=\sin x+\frac{1}{x+c}, \quad c\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad x+c\neq 0.$$

5. Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'équation

$$y(x) = x\,y'(x) + \frac{1}{y'(x)}. \tag{2.53}$$

L'équation (2.53) représente une équation de Clairaut. Pour sa résolution, posons $t(x) = y'(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(2.53) \quad &\Rightarrow \quad y(x) = x\,t(x) + \frac{1}{t(x)},\\
&\Rightarrow \quad y'(x) = t(x) + x\,t'(x) - \frac{t'(x)}{t^2(x)},\\
&\Rightarrow \quad t'(x)\left(x - \frac{1}{t^2(x)}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Nous distinguons deux cas

- Premier cas : Si $t'(x) = 0$. Alors, $t(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.
  Ainsi, la solution générale y_g de l'équation (2.53) est

$$y_g(x) = c\,x + \frac{1}{c}, \quad c \in \mathbb{R}^*.$$

- Deuxième cas : Si $x - \dfrac{1}{t^2(x)} = 0$. Alors, $t(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$, x>0.
  Ainsi, la solution singulière y_s de l'équation (2.53) est

$$y_s(x) = 2\sqrt{x}, \quad x > 0.$$

6. Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'équation

$$y(x) = x\,y'(x) + \frac{y'(x)}{1 + y'(x)}. \tag{2.54}$$

L'équation (2.54) représente une équation de Clairaut. Pour sa résolution, posons $t(x) = y'(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(2.54) \quad &\Rightarrow \quad y(x) = x\,t(x) + \frac{t(x)}{1 + t(x)},\\
&\Rightarrow \quad y'(x) = t(x) + x\,t'(x) + \frac{t'(x)(1 + t(x)) - t'(x)\,t(x)}{(1 + t(x))^2},\\
&\Rightarrow \quad t'(x)\left(x + \frac{1}{\left(1 + t(x)\right)^2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Nous distinguons deux cas

- Premier cas : Si $t'(x) = 0$. Alors, $t(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.
  Ainsi, la solution générale y_g de l'équation (2.54) est

$$y_g(x) = c\,x + \frac{c}{1 + c}, \quad c \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

- Deuxième cas : Si $x + \dfrac{1}{\left(1 + t(x)\right)^2} = 0$. Alors, $t(x) = -\dfrac{\sqrt{-x} + x}{x}$, x<0.
  Ainsi, la solution singulière y_s de l'équation (2.54) est

$$y_s(x) = 1 - x - 2\sqrt{-x}, \quad x < 0.$$

7 . Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'équation

$$y(x) = -x\, y'(x) - \ln y'(x). \tag{2.55}$$

L'équation (2.55) représente une équation de Lagrange. Pour sa résolution, posons $y'(x) = u$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(2.55) \quad &\Rightarrow \quad y(x(u)) = -x(u)\, u - \ln u, \\
&\Rightarrow \quad x'(u)\, y'(x) = -u\, x'(u) - x(u) - \frac{1}{u}, \\
&\Rightarrow \quad 2u\, x'(u) = -x(u) - \frac{1}{u},
\end{aligned}$$

laquelle représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 linéaire avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
  $$2u\, x'(u) = -x(u).$$
  Ainsi,
  $$\begin{aligned}
  2u\, x'(u) = -x(u) \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dx(u)}{x(u)} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}, \\
  &\Rightarrow \quad \ln|x(u)| = -\frac{1}{2}\ln u + c, \quad c \in \mathbb{R}.
  \end{aligned}$$
  Donc : la solution générale x_h de l'EDO linéaire sans second membre est
  $$x_h(u) = k\, u^{-\frac{1}{2}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$
- Étape 2 : EDO avec second membre
  Nous avons
  $$x(u) = \mathrm{K}(u)\, u^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x'(u) = \mathrm{K}'(u)\, u^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\mathrm{K}(u)\, u^{-\frac{3}{2}}.$$
  En remplaçant x et x' dans l'EDO linéaire, nous obtenons
  $$\begin{aligned}
  2u\, x'(u) = -x(u) - \frac{1}{u} \quad &\Rightarrow \quad \int \mathrm{K}'(u) du = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{3}{2}}\, du, \\
  &\Rightarrow \quad \mathrm{K}(u) = u^{-\frac{1}{2}} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.
  \end{aligned}$$
  Ainsi, la solution générale x_g de l'EDO linéaire est
  $$x_g(x) = c_1\, u^{-\frac{1}{2}} + u^{-1}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation de Lagrange (2.55) est

$$y_g(x) = -c_1\, u^{\frac{1}{2}} + 1 - \ln u, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

8 . Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'équation

$$y(x) - x\left(y'(x) + m\right) - \left(y'\right)^2(x) = 0, \quad m \in \mathbb{R}^*. \tag{2.56}$$

L'équation (2.56) représente une équation de Lagrange. Pour sa résolution, posons $y'(x) = u$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(2.56) \quad &\Rightarrow \quad y(x(u)) - x(u)\,(u+m) - u^2 = 0,\\
&\Rightarrow \quad x'(u)\,y'(x) - (u+m)\,x'(u) - x(u) - 2u = 0,\\
&\Rightarrow \quad m\,x'(u) + x(u) + 2u = 0, \qquad (2.57)
\end{aligned}$$

laquelle est une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 linéaire avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
  $$m\,x'(u) + x(u) = 0, \qquad (2.58)$$
  ainsi,
  $$\begin{aligned}
  (2.58) \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dx(u)}{x(u)} = -\frac{1}{m}\int du,\\
  &\Rightarrow \quad \ln|x(u)| = -\frac{1}{m}u + c, \quad c \in \mathbb{R}.
  \end{aligned}$$
  Donc : la solution générale x_h de l'équation (2.58) est
  $$x_h(u) = k\,e^{-\frac{1}{m}u}, \quad k \in \mathbb{R}.$$
- Étape 2 : EDO avec second membre
  Nous avons
  $$x(u) = \mathrm{K}(u)\,e^{-\frac{1}{m}u} \Rightarrow x'(u) = \mathrm{K}'(u)\,e^{-\frac{1}{m}u} - \frac{1}{m}\mathrm{K}(u)\,e^{-\frac{1}{m}u}.$$
  En remplaçant x et x' dans l'équation (2.57), il découle
  $$\begin{aligned}
  (2.57) \quad &\Rightarrow \quad \int \mathrm{K}'(u)\,du = -\frac{2}{m}\int u\,e^{\frac{1}{m}u}\,du,\\
  &\Rightarrow \quad \mathrm{K}(u) = -2u\,e^{\frac{1}{m}u} + 2m\,e^{\frac{1}{m}u} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.
  \end{aligned}$$
  D'où, la solution générale x_g de l'équation (2.57) est
  $$x_g(u) = c_1\,e^{-\frac{1}{m}u} - 2u + 2m, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation de Lagrange (2.56)est

$$y_g(u) = c_1\,(u+m)\,e^{-\frac{1}{m}u} - u^2 + 2m^2, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

♦

Exercice 2.6 *Trouver les solutions particulières des équations différentielles ordinaires suivantes vérifiant les conditions données*

1. $y'(x) - \tan x\,y(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, avec $y(0) = 0$.

2. $x\,y'(x) + y(x) - e^{-x} = 0$, avec $y = b$ pour $x = a$.

Solution de l'exercice 2.6

Solutions particulières des équations différentielles ordinaires :

1 . Soit, pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} - l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}\right\}$, l'équation

$$y'(x) - \tan x\, y(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad \text{avec} \quad y(0) = 0. \tag{2.59}$$

L'équation (2.59) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 avec second membre et une condition initiale. Pour sa résolution, nous passons par trois étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
  $$y'(x) - \tan x\, y(x) = 0, \tag{2.60}$$
  ainsi,
  $$\begin{aligned}(2.60) \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dy(x)}{y(x)} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx,\\ &\Rightarrow \quad \ln|y(x)| = -\ln|\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$
  Donc : la solution générale y_h de l'équation (2.60) est
  $$y_h(x) = \frac{k}{\cos x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$
- Étape 2 : EDO avec second membre
  Nous avons
  $$y(x) = \frac{K(x)}{\cos x} \Rightarrow y'(x) = \frac{K'(x)}{\cos x} + K(x)\frac{\tan x}{\cos x}.$$
  En remplaçant y et y' dans l'équation (2.59), il s'en suit
  $$\begin{aligned}(2.59) \quad &\Rightarrow \quad \int K'(x)\, dx = \int dx,\\ &\Rightarrow \quad K(x) = x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$
  Ainsi, la solution générale y_g de l'équation (2.59) est
  $$y_g(x) = \frac{c_1}{\cos x} + \frac{x}{\cos x}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$
- Étape 3 : Condition initiale
  Comme $y(0) = 0$ et $y_g(x) = \frac{c_1}{\cos x} + \frac{x}{\cos x}, \quad c_1 \in \mathbb{R}$. Alors, $c_1 = 0$.

En dernier, la solution particulière y_p de l'équation (2.59) avec la condition initiale est
$$y_p(x) = \frac{x}{\cos x}.$$

2 . Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'équation

$$x\,y'(x) + y(x) - e^{-x} = 0, \quad \text{avec} \quad y = b \quad \text{pour} \quad x = a. \tag{2.61}$$

L'équation (2.61) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 avec second membre et une condition initiale. Pour sa résolution, nous passons par trois étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
$$x\,y'(x) + y(x) = 0, \tag{2.62}$$
  ainsi,
$$\begin{aligned}(2.62) \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dy(x)}{y(x)} = -\int \frac{dx}{x},\\ &\Rightarrow \quad \ln|y(x)| = -\ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$
  Donc : la solution générale y_h de l'équation (2.62) est
$$y_h(x) = \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$
- Étape 2 : EDO avec second membre
  Nous avons
$$y(x) = \frac{\mathrm{K}(x)}{x} \Rightarrow y'(x) = \frac{\mathrm{K}'(x)}{x} - \frac{\mathrm{K}(x)}{x^2}.$$
  En remplaçant y et y' dans l'équation (2.61), nous obtenons
$$\begin{aligned}(2.61) \quad &\Rightarrow \quad \int \mathrm{K}'(x)\,dx = \int e^x\,dx,\\ &\Rightarrow \quad \mathrm{K}(x) = e^x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$
  Ainsi, la solution générale y_g de l'équation (2.61) est
$$y_g(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{e^x}{x}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$
- Étape 3 : Condition initiale
  Comme $y(a) = b$ et $y_g(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{e^x}{x}$, $\quad c_1 \in \mathbb{R}$. Alors, $c_1 = ab - e^a$.
  En dernier, la solution particulière y_p de l'équation (2.61) avec la condition initiale est
$$y_p(x) = \frac{e^x + ab - e^a}{x}.$$

♦

Exercice 2.7 *Soit l'équation différentielle :*
$$x'(t) = t\big(x(t) + 1\big), \tag{2.63}$$
avec $x(0) = -1$. *En utilisant la méthode des approximations successives de Picard, déterminer la solution de l'équation* (2.63).

Solution de l'exercice 2.7

Déterminons la solution du problème de Cauchy par la méthode des approximations successives de Picard :

Le problème de Cauchy correspondant est
$$\begin{cases} x'(t) &= t\big(x(t)+1\big),\\ y(0) &= -1.\end{cases} \tag{2.64}$$
Ainsi,

- Étape 1 : La fonction f et la condition initiale
  Nous avons
  1. $x'(t) = t\big(x(t)+1\big) \Rightarrow f\big(t; x(t)\big) = t\big(x(t)+1\big)$.
  2. $x(0) = -1 \Rightarrow \big(t_0 = 0 \wedge x_0 = -1\big)$.
- Étape 2 : Les itérations
  Nous avons

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1: \quad x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s; x_{n-1}(s)\big)\, ds,\\ &= -1 + \int_0^t s\big(x_{n-1}(s)+1\big)\, ds,\\ &= -1 + \frac{t^2}{2!} + \int_0^t s\, x_{n-1}(s)\, ds.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{array}{lcrcl} n=0 & : & x_0(t) & = & -1.\\ n=1 & : & x_1(t) & = & -1 + \frac{t^2}{2!} + \int_0^t s\, x_0(s)\, ds,\\ & & & = & -1 + \frac{t^2}{2!} - \int_0^t s\, ds,\\ & & & = & -1.\\ n=2 & : & x_2(t) & = & -1 + \frac{t^2}{2!} + \int_0^t s\, x_1(s)\, ds,\\ & & & = & -1 + \frac{t^2}{2!} - \int_0^t s\, ds,\\ & & & = & -1.\\ \vdots & : & \vdots & & \\ \text{à l'ordre } n & : & x_n(t) & = & -1.\end{array}$$

- Étape 3 : Passage à la limite
  Comme la suite $\{x_n\}$ est stationnaire. Alors, la solution particulière x_p du problème de Cauchy (2.64) est

$$x_p(t) = -1.$$

♦

6 Problèmes et applications

Problème 2.1 *Soit l'équation différentielle ordinaire*

$$f(x)\, y'(x) + g(x)\, y(x) = h(x), \tag{2.65}$$

où g et h sont des fonctions continues sur des intervalles de $\mathbb{R}$ et désignons par $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalle sur lequel $f(x)$ ne possède pas de racine sur I.

Soit y_h une intégrale particulière non dégénérée de l'équation sans second membre associée à l'équation (2.65) sur I, et soit y_p une intégrale particulière non dégénérée de l'équation (2.65) sur I.

1. *Montrer que la solution générale y_g de l'équation (2.65) sur I est donnée par*

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

2. *Soit l'équation différentielle ordinaire*

$$y'(x) - \frac{1}{x}\,y(x) = -\frac{(x+1)\,e^{-x}}{x} \tag{2.66}$$

   (a) *Quel est le type de l'équation différentielle ordinaire* (2.66) ?

   (b) *Vérifier que la fonction $x \longmapsto e^{-x}$ est une solution particulière de* (2.66).

   (c) *Donner, alors, la solution générale de l'équation différentielle* (2.66).

Solution du problème 2.1

1. *Montrer que la solution générale y_g de l'équation (2.65) sur I est donnée par* :

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

$\Big(y_g$ est une solution générale de l'équation (2.65)$\Big) \Leftrightarrow \Big(f(x)\,y_g'(x) + g(x)\,y_g(x) = h(x)\Big)$.
Nous avons

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) \Rightarrow y_g'(x) = y_h'(x) + y_p'(x).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x)\,y_g'(x) + g(x)\,y_g(x) &= f(x)\left(y_h'(x) + y_p'(x)\right) + g(x)\left(y_h(x) + y_p(x)\right), \\ &= f(x)\,y_h'(x) + g(x)\,y_h(x) + f(x)\,y_p'(x) + g(x)\,y_p(x), \\ &= h(x), \end{aligned}$$

car

- y_h est une solution particulière de l'équation sans second membre associée à l'équation (2.65), alors,
$$f(x)\,y_h'(x) + g(x)\,y_h(x) = 0.$$
- y_p est une solution particulière de l'équation (2.65), alors,
$$f(x)\,y_p'(x) + g(x)\,y_p(x) = h(x).$$

Donc : $y_g(x) = y_h(x) + y_p(x)$ définie bien la solution générale de l'équation (2.65).

2. Soit l'équation différentielle ordinaire

$$y'(x) - \frac{1}{x}\,y(x) = -\frac{(x+1)e^{-x}}{x}$$

   (a) *Type de l'équation différentielle ordinaire* (2.66) :

   L'équation (2.66) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 avec second membre.

(b) *Vérifions que la fonction $x \longmapsto e^{-x}$ est une solution particulière de (2.66) :*

$$\left(y_p(x) = e^{-x} \text{ est une solution particuliére de l'équation (2.66)}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(y_p'(x) - \frac{1}{x}\, y_p(x) = -\frac{(x+1)\, e^{-x}}{x}\right).$$

Nous avons
$$y_p(x) = e^{-x} \Rightarrow y_p'(x) = -e^{-x}.$$

Ainsi,
$$\begin{aligned} y_p'(x) - \frac{1}{x}\, y_p(x) &= -e^{-x} - \frac{1}{x} e^{-x}, \\ &= -\frac{(x+1)\, e^{-x}}{x}. \end{aligned}$$

Donc : $y_p(x) = e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation (2.66).

(c) *La solution générale de l'équation différentielle (2.66) :*

Il suffit de déterminer la solution générale y_h de l'équation (2.66) sans second membre.
Nous avons
$$\begin{aligned} y'(x) - \frac{1}{x} y(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dy(x)}{y(x)} = \int \frac{dx}{x}, \\ &\Rightarrow \quad \ln|y(x)| = \ln|x| + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc : la solution générale y_h de l'équation (2.66) sans second membre est
$$y_h(x) = k\,x, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (2.66) est
$$y_g(x) = k\,x + e^{-x}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

◀

Problème 2.2

1. *Montrer la relation suivante*
$$\operatorname{Argsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right). \tag{2.67}$$

2. *Soit l'équation*
$$y'(x) + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, y(x) - 1 = 0. \tag{2.68}$$

(a) *Donner le type de l'équation (2.68).*

(b) *Résoudre l'équation (2.68).*

Solution du problème 2.2

1. *Montrons la relation* (2.67) :

   Posons : $z = \text{Argsinh}(x)$, ainsi

$$\begin{aligned} z = \text{Argsinh}(x) &\iff \sinh(z) = x, \\ &\iff \frac{e^z - e^{-z}}{2} = x, \\ &\iff e^{2z} - 2xe^z - 1 = 0, \end{aligned}$$

   pour $t = e^z$, nous obtenons un polynôme de degré 2

$$t^2 - 2xt - 1 = 0,$$

   qui a pour solution

$$t_1 = x + \sqrt{x^2+1} \quad \text{et} \quad t_2 = x - \sqrt{x^2+1}.$$

   Comme $t = e^z$, alors, $z = \ln(t)$. Ainsi,

$$z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

   En dernier,

$$\text{Argsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

2. Soit l'équation

$$y'(x) + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} y(x) - 1 = 0.$$

   (a) *Type de l'équation* (2.68) :
   L'équation (2.68) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 linéaire avec second membre.

   (b) *Résolution de l'équation* (2.68) :
   Pour trouver la solution de l'EDO (2.68), nous passerons par deux étapes.

   - Étape 1 : EDO sans second membre
     Nous avons

$$y'(x) + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} y(x) = 0, \tag{2.69}$$

     ainsi,

$$\begin{aligned} (2.69) \quad &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \\ &\Rightarrow \ln|y| = -\text{Argsinh}(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \ln|y| = -\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

     Donc : la solution générale y_h de l'équation (2.69) est

$$y_h(x) = \frac{k}{x + \sqrt{x^2+1}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : EDO avec second membre
  Nous avons

$$y(x)=\frac{\mathrm{K}(x)}{x+\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow y'(x)=\frac{\mathrm{K}'(x)}{x+\sqrt{x^2+1}}-\frac{\mathrm{K}(x)}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}.$$

  En remplaçant y et y' dans l'équation (2.68), nous obtenons

$$\begin{aligned}
(2.68)\quad &\Rightarrow\quad \int \mathrm{K}'(x)\,dx=\int\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx,\\
&\Rightarrow\quad \mathrm{K}(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Argsinh}(x)+\frac{1}{2}x\,\mathrm{ch}\left(\mathrm{Argsinh}(x)\right)+c_1,\quad c_1\in\mathbb{R},\\
&\Rightarrow\quad \mathrm{K}(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+c_1,\quad c_1\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la solution générale y_g de l'équation (2.68) est

$$y_g(x)=\frac{c_1}{x+\sqrt{x^2+1}}+\frac{x^2+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+x\sqrt{x^2+1}}{2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)},\quad c_1\in\mathbb{R}.$$

◀

Problème 2.3 *Trouver par la méthode des approximations successives de Picard la solution du système différentiel suivant*

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x(t)=y(t), & x(0)=1,\\[2ex] \dfrac{d}{dt}y(t)=-x(t), & y(0)=0.\end{cases}\tag{2.70}$$

Solution du problème 2.3

Déterminons la solution du problème de Cauchy par la méthode des approximations successives de Picard :

Le système (2.70) représente un système d'équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 1 sans second membre avec des conditions initiales.

Pour résoudre le système différentiel avec des conditions initiales (2.70) par la méthode des approximations successives de Picard, nous devrons passer par 3 étapes.

- Étape 1 : Les fonctions f et g et les conditions initiales
  Nous avons

  1. $x'(t)=y(t)\Rightarrow f\big(t;\,x(t),\,y(t)\big)=y(t)$.

  2. $y'(t)=-x(t)\Rightarrow g\big(t;\,x(t),\,y(t)\big)=-x(t)$.

  De plus,

  1. $x(0)=1\Rightarrow\big(t_0=0\wedge x_0=1\big)$.

  2. $y(0)=0\Rightarrow\big(t_0=0\wedge y_0=0\big)$.

- Étape 2 : Les itérations
  Nous avons

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1: \quad x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s; x_{n-1}(s), y_{n-1}(s)\big)\, ds,\\ &= 1 + \int_0^t y_{n-1}(s)\, ds,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1: \quad y_n(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} g\big(s; x_{n-1}(s), y_{n-1}(s)\big)\, ds,\\ &= -\int_0^t x_{n-1}(s)\, ds.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} n=0 \quad : \quad x_0(t) &= 1.\\ : \quad y_0(t) &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=1 \quad : \quad x_1(t) &= 1 + \int_0^t y_0(s)\, ds,\\ &= 1 + \int_0^t 0\, ds,\\ &= 1.\\ y_1(t) &= -\int_0^t x_0(s) ds,\\ &= -\int_0^t ds,\\ &= -t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=2 \quad : \quad x_2(t) &= 1 + \int_0^t y_1(s)\, ds,\\ &= 1 - \int_0^t s\, ds,\\ &= 1 - \frac{1}{2} t^2.\\ y_2(t) &= -\int_0^t x_1(s) ds,\\ &= -\int_0^t ds,\\ &= -t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=3 \quad : \quad x_3(t) &= 1 + \int_0^t y_2(s)\, ds,\\ &= 1 - \int_0^t s\, ds,\\ &= 1 - \frac{1}{2} t^2.\\ y_3(t) &= -\int_0^t x_2(s) ds,\\ &= -\int_0^t \left(1 - \frac{1}{2} s^2\right) ds,\\ &= -t + \frac{1}{3!} t^3.\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} & \vdots & \\ \text{à l'ordre } n \quad : \quad x_n(t) & = & 1 - \dfrac{1}{2!}t^2 + \dfrac{1}{4!}t^4 + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{(2n)!}t^{2n}, \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} t^{2k}. \\ y_n(t) & = & -t + \dfrac{1}{3!}t^3 - \dfrac{1}{5!}t^5 + \cdots + (-1)^{n+1} \dfrac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}, \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{(2k+1)!} t^{2k+1}. \end{array}$$

- Étape 3 : Passage à la limite
  Nous avons

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_n(t) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} t^{2k}, \\ & = & \cos(t), \\ & = & x_p(t). \end{array}$$

De plus,

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\lim_{n \to +\infty} y_n(t) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(2k+1)!} t^{2k+1}, \\ & = & -\sin(t), \\ & = & y_p(t). \end{array}$$

En dernier, la solution particulière (x_p, y_p) du système (2.70) est

$$\big(x_p(t), y_p(t)\big) = \big(\cos(t), -\sin(t)\big).$$

◄

Chapitre 3

Équations différentielles ordinaires d'ordre 2

Dans ce chapitre, la résolution des différents types des équations différentielles ordinaires d'ordre 2 sera traitée.

1 Équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 2 à coefficients variables

Cette section a pour but de présenter les équations différentielles ordinaires d'ordre 2 à coefficients variables ainsi que leurs différentes méthodes de résolution.

1.1 Notions préliminaires

1.1.1 Définitions d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables

Définition 3.1 *Une équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre à coefficients variables est une équation de la forme*

$$\mathrm{A}(x)\, y''(x) + \mathrm{B}(x)\, y'(x) + \mathrm{C}(x)\, y(x) = \mathrm{H}(x), \tag{3.1}$$

où A, B, C *et* H *sont des fonctions continues de* $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *avec* $\mathrm{A}(x) \not\equiv 0$.

Les fonctions A, B *et* C *sont appelées coefficients de l'*EDO *tandis que la fonction* H *représente le second membre de l'*EDO.

Remarque 3.1 *L'équation* (3.1) *peut s'écrire sous la forme*

$$y''(x) + b(x)\, y'(x) + c(x)\, y(x) = h(x), \tag{3.2}$$

où $b(x) = \frac{\mathrm{B}(x)}{\mathrm{A}(x)}$, $c(x) = \frac{\mathrm{C}(x)}{\mathrm{A}(x)}$ *et* $h(x) = \frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{A}(x)}$ *sont des fonctions continues sur des intervalles de* $\mathbb{R}$.

Remarque 3.2 *La relation*

$$y''(x) + b(x)\, y'(x) + c(x)\, y(x) = 0, \tag{3.3}$$

se nomme équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 *à coefficients variables sans second membre. Tandis que la relation* (3.2) [1], *où* $h(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathrm{I}$, *est dite équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre* 2 *à coefficients variables avec second membre.*

1. Tous les résultats présentés dans ce chapitre peuvent être appliquer, d'une manière appropriés, sur l'équation (3.1).

Exemple 3.1 *L'équation*

$$y''(x) + y'(x) + \left(x^2 + 1\right) y(x) = 1,$$

est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 *à coefficients variables avec second membre.*

1.1.2 Solutions d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables

L'équation (3.3) est équivalente au système suivant

$$\begin{cases} z(x) &= y'(x) \\ z'(x) &= y''(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z(x) &= y'(x), \\ z'(x) &= -b(x)\, y'(x) - c(x)\, y(x), \end{cases}$$

en introduisant le changement de fonction auxiliaire $z(x) = y'(x)$.

Posons $v = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$. Alors, $v' = \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c(x) & -b(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

ce qui montre que le système (3.4) admet deux solution $y_1 = y$ et $y_2 = z$. Ces dernières sont aussi solutions de l'équation (3.3).

Donnons maintenant les définitions suivantes lesquelles portent plus de précision sur les solutions y_1 et y_2

Définition 3.2 *On appelle un système fondamental de solution de l'équation* (3.3) *tout couple* $\{y_1, y_2\}$ *constitué de deux solutions particulière de* (3.3) *telles que, pour tout* $x \in \mathrm{I}$, *la famille des deux vecteurs de* $\mathbb{R}^2$ [2]

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix},$$

soit libre dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 3.3 *On appelle wronskien de* $\{y_1, y_2\}$ *l'application*

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_{\{y_1, y_2\}} : \mathrm{I} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathrm{W}_{\{y_1, y_2\}}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Théorème 3.1 *Un système* $\{y_1, y_2\}$ *de solutions de l'équation* (3.3) *est fondamental si, et seulement si, son wronskien est distinct de zéro pour tout* $x \in \mathrm{I}$.

Théorème 3.2 $\{y_1, y_2\}$ *étant un système fondamental de solutions de l'équation* (3.3), *alors, la famille des solutions générales* y_h *de l'équation* (3.3) *est*

$$y_h(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$$

quand c_1 *et* c_2 *parcourent* $\mathbb{R}$ *; elle constitue un sous-espace de l'espace vectoriel* $\mathscr{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, *de dimension* 2, *de base* $\{y_1, y_2\}$.

2. Les résultats présentés dans ce chapitre peuvent s'étendre à l'espace $\mathbb{C}$.

Preuve. [du théorème 3.2]

Soit $y_h(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$. Alors,

$$y_h'(x) = c_1\, y_1'(x) + c_2\, y_2'(x),$$

et

$$y_h''(x) = c_1\, y_1''(x) + c_2\, y_2''(x).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
y_h''(x) + b(x)\, y_h'(x) + c(x)\, y_h(x) &= \left(c_1\, y_1''(x) + c_2\, y_2''(x)\right) + b(x)\, \left(c_1\, y_1'(x) + c_2\, y_2'(x)\right) \\
&\quad + c(x)\, \left(c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)\right), \\
&= c_1\, \left(y_1''(x) + b(x)\, y_1'(x) + c(x)\, y_1(x)\right) \\
&\quad + c_2\, \left(y_2''(x) + b(x)\, y_2'(x) + c(x)\, y_2(x)\right), \\
&= 0,
\end{aligned}$$

vu que $\{y_1, y_2\}$ étant un système fondamental de solutions de l'équation (3.3). Donc, la famille des solutions générales y_h de l'équation (3.3) est bien

$$y_h(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x).$$

■

Exemple 3.2 *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation*

$$x^2\, y''(x) - 3x\, y'(x) + 4\, y(x) = 0,$$

admet comme solution générale

$$y_h(x) = c_1\, x^2 + c_2\, x^2 \ln x, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R},$$

vu que le système $\{y_1(x),\, y_2(x)\} = \{x^2,\, x^2 \ln x\}$ forme un système fondamental.

Définition 3.4 *On appelle solution particulière d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables avec second membre de la forme (3.2) toute fonction y_p définie sur I vérifiant cette équation.*

Exemple 3.3 *La fonction $y_p(x) = x^3$ définie une solution particulière de l'équation différentielle*

$$x^2\, y''(x) - 3x\, y'(x) + 4\, y(x) = x^3.$$

Définition 3.5 *On appelle solution générale y_g d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables avec second membre de la forme (3.2) la famille paramétrée à 2 paramètres de solutions y_h et y_p.*

Autrement dit,

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x), \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.4 *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation*

$$x^2\, y''(x) - 3x\, y'(x) + 4\, y(x) = x^3,$$

admet comme solution générale

$$y_g(x) = c_1\, x^2 + c_2\, x^2 \ln x + x^3, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

1.2 Intégration d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables sans second membre

Rappelons qu'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables sans second membre s'écrit sous la forme

$$y''(x) + b(x)\, y'(x) + c(x)\, y(x) = 0. \tag{3.5}$$

Il n'existe pas de méthode générale permettant de trouver sous forme finie la solution générale d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables sans second membre. Pour cette raison, dans ce qui suit, nous présenterons de manière, permettons, dans certains cas de déterminer la solution générale d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables sans second membre.

1.2.1 Si on connait deux solutions particulières y_1 et y_2 de l'équation (3.5) linéairement indépendantes

Théorème 3.3 *Si l'on connait deux solutions particulières de l'équation (3.5) linéairement indépendantes, alors, la solution générale y_h de l'équation (3.5) s'écrit sous la forme*

$$y_h(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Preuve. [du théorème 3.3]

Soient y_1 et y_2 deux solutions particulières de l'équation (3.5) linéairement indépendantes.

Comme les deux solutions sont linéairement indépendantes, alors, le wronskien est différent de zéro quelque soit x dans I. Autrement dit, le système $\{y_1, y_2\}$ forme un système fondamental.

Donc : la solution générale y_h de l'équation (3.5) est

$$y_h(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

Exemple 3.5 *Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation*

$$x^2\, y''(x) - 3x\, y'(x) + 4\, y(x) = 0. \tag{3.6}$$

1. *Vérifier que $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^2 \ln x$ sont deux solutions particulières de l'équation (3.6).*
2. *Donner la solution générale y_h de l'équation (3.6).*

Solution de l'exemple 3.5

L'équation (3.6) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables sans second membre.

1. *Vérifions que $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^2 \ln x$ sont deux solutions particulières de l'équation (3.6)* :

   Soit $y_1(x) = x^2$. y_1 définie bien une solution particulière de l'équation (3.6) car

$$\begin{aligned} x^2\, y_1''(x) - 3x\, y_1'(x) + 4\, y_1(x) &= x^2\,(2) - 3x\,(2x) + 4\left(x^2\right), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Soit $y_2(x) = x^2 \ln x$. y_2 est une solution particulière de l'équation (3.6) vu que

$$\begin{aligned} x^2\, y_2''(x) - 3x\, y_2'(x) + 4\, y_2(x) &= x^2\,(2\ln x + 3) - 3x\,(2x\ln x + x) + 4\left(x^2 \ln x\right), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc : $y_1(x) = x^2$ et $y_2(x) = x^2 \ln x$ sont deux solutions particulières de l'équation (3.6).

2. *Solution générale de l'équation* (3.6) :

Il suffit de vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, le wronskien entre y_1 et y_2 est différent de zéro. En effet,

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_{\{y_1, y_2\}}(x) &= \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \ln x \\ 2x & 2x\ln x + x \end{vmatrix}, \\ &= x^3. \end{aligned}$$

Comme $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors, $\mathrm{W}_{\{y_1, y_2\}}(x) \neq 0, \forall x$. Ainsi, la solution générale y_h de l'équation (3.6) est

$$y_h(x) = c_1\, x^2 + c_2\, x^2 \ln x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

★

1.2.2 Si on connait une solution particulière y_1 de l'équation (3.5)

Théorème 3.4 *Si l'on connait une solution particulière y_1 de l'équation* (3.5)*, alors, la solution générale y_h de l'équation* (3.5) *laquelle se ramène à des quadrature s'écrit comme*

$$y_h(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

où

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int b(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\, dx.$$

Preuve. [du théorème 3.4]

Supposons que $y_1(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathrm{I}$ est une solution particulière de l'équation (3.5).

Cherchons les conditions que doit vérifier la fonction z pour que la fonction $x \longmapsto y_h(x) = y_1(x)\, z(x)$ soit une solution de l'équation (3.5).

Nous avons

$$y_h(x) = y_1(x)\, z(x),$$

donc

$$y_h'(x) = y_1'(x)\, z(x) + y_1(x)\, z'(x),$$

et

$$y_h''(x) = y_1''(x)\, z(x) + 2\, y_1'(x)\, z'(x) + y_1(x)\, z''(x),$$

d'où

$$\begin{aligned} y_h''(x) + b(x)\, y_h'(x) + c(x)\, y_h(x) = 0 \iff\ & y_1''(x)\, z(x) + 2\, y_1'(x)\, z'(x) + y_1(x)\, z''(x) \\ & + b(x)\left(y_1'(x)\, z(x) + y_1(x)\, z'(x)\right) \\ & + c(x)\, y_1(x)\, z(x) = 0 \\ \iff\ & y_1(x)\, z''(x) + \left(2\, y_1'(x) + b(x)\, y_1(x)\right) z'(x) \\ & + \left(y_1''(x) + b(x)\, y_1'(x) + c(x)\, y_1(x)\right) z(x) = 0, \\ \iff\ & y_1(x)\, z''(x) + \left(2\, y_1'(x) + b(x)\, y_1(x)\right) z'(x) = 0, \end{aligned}$$

vu que y_1 est une solution particulière de l'équation (3.5).

Pour $t(x) = z(x)$, on obtient une équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$y_1(x)\, t'(x) + \left(2\, y_1'(x) + b(x)\, y_1(x)\right)\, t(x) = 0,$$

sa résolution donne

$$\begin{aligned} y_1(x)\, t'(x) = -2\, y_1'(x) - b(x)\, y_1(x) \quad &\Longrightarrow \quad \int \frac{dt(x)}{t(x)} = -2 \int \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} dx - \int b(x) dx, \\ &\Longrightarrow \quad \ln|t(x)| = \ln|y_1(x)|^2 - \int b(x) dx, \\ &\Longrightarrow \quad t(x) = c_2\, \frac{e^{-\int b(x)dx}}{y_1^2(x)}, \quad c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Et donc,

$$z(x) = c_1 + c_2 \int \frac{e^{-\int b(x)dx}}{y_1^2(x)} dx, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où,

$$y_h(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_1(x) \int \frac{e^{-\int b(x)dx}}{y_1^2(x)} dx, \quad c_1\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Posons $y_2(x) = y_1(x) \displaystyle\int \frac{e^{-\int b(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$. y_2 est une solution particulière de l'équation (3.5) et vérifions que les deux solutions particulières y_1 et y_2 forment un système fondamental.

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_{\{y_1, y_2\}}(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1(x) \displaystyle\int \frac{e^{-\int b(x)dx}}{y_1^2(x)} dx \\ y_1'(x) & y_1'(x) \displaystyle\int \frac{e^{-\int b(x)dx}}{y_1^2(x)} dx + \frac{e^{-\int b(x)dx}}{y_1(x)} \end{vmatrix}, \\ &= e^{-\int b(x)dx}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{W}_{\{y_1, y_2\}}(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathrm{I}$.

Donc, si l'on connait une solution particulière y_1 de l'équation (3.5), alors, la seconde solution particulière est

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int b(x)dx}}{y_1^2(x)} dx,$$

et la solution générale y_h de l'équation (3.5) est

$$y_h(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

■

Exemple 3.6 *Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation*

$$x^2\, y''(x) - 3x\, y'(x) + 4\, y(x) = 0. \tag{3.7}$$

1. *Vérifier que $x \mapsto x^2$ est une solution particulière de l'équation (3.7).*
2. *Donner la solution générale y_h de l'équation (3.7).*

Solution de l'exemple 3.6

L'équation (3.7) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables sans second membre.

1. *Vérifions que $x \mapsto x^2$ est une solution particulière de l'équation* (3.7) :

   Soit $y_1(x) = x^2$. y_1 définit bien une solution particulière de l'équation (3.7) car

$$\begin{aligned} x^2\, y_1''(x) - 3x\, y_1'(x) + 4\, y_1(x) &= x^2\,(2) - 3x\,(2x) + 4\left(x^2\right), \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. *Solution générale y_h de l'équation* (3.7) :

   Pour trouver la solution générale de l'équation (3.7), il suffit de déterminer la deuxième solution particulière y_2. En effet, $y_1(x) = x^2$ et $b(x) = -3\dfrac{x}{x^2} = -\dfrac{3}{x}$, alors,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int b(x)dx}}{y_1^2(x)}\, dx, \\ &= x^2 \int \frac{e^{3\int \frac{dx}{x}}}{x^4}\, dx, \\ &= x^2 \ln x. \end{aligned}$$

   Finalement, la solution générale y_h de l'équation (3.7) est

$$y_h(x) = c_1\, x^2 + c_2\, x^2 \ln x, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

★

1.3 Intégration d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables avec second membre : Méthode de la variation des constantes

Soit l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables avec second membre

$$y''(x) + b(x)\, y'(x) + c(x)\, y(x) = h(x). \tag{3.8}$$

La méthode de la variation des constantes permet de connaitre la solution générale y_g de l'équation complète (équation (3.8)) connaissant la solution générale y_h de l'équation sans second membre (équation (3.5)).

Théorème 3.5 *Soit $y_h(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$, $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$, la solution générale de l'équation sans second membre* (3.5). *Alors, la solution générale y_g de l'équation complète* (3.8) *s'écrit sous la forme*

$$y_g(x) = \mathrm{C}_1(x)\, y_1(x) + \mathrm{C}_2(x)\, y_2(x),$$

où les fonctions C_1 et C_2 sont les solutions du système

$$\begin{cases} \mathrm{C}_1'(x)\, y_1(x) + \mathrm{C}_2'(x)\, y_2(x) &= 0, \\ \mathrm{C}_1'(x)\, y_1'(x) + \mathrm{C}_2'(x)\, y_2'(x) &= h(x). \end{cases}$$

Preuve. [du théorème 3.5]

Soit $y_g(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)$ la solution générale de l'équation complète (3.8). Dérivons la solution générale y_g de l'équation complète (3.8)

$$y'_g(x) = C'_1(x)\, y_1(x) + C_1(x)\, y'_1(x) + C'_2(x)\, y_2(x) + C_2(x)\, y'_2(x).$$

Choisissons les fonctions C_1 et C_2 de manière que soit satisfaite l'égalité

$$C'_1(x)\, y_1(x) + C'_2(x)\, y_2(x) = 0.$$

Ceci étant, la dérivée première y'_g devient

$$y'_g(x) = C_1(x)\, y'_1(x) + C_2(x)\, y'_2(x).$$

Dérivons maintenant cette expression, nous trouvons y''_g

$$y''_g(x) = C'_1(x)\, y'_1(x) + C_1(x)\, y''_1(x) + C'_2(x)\, y'_2(x) + C_2(x)\, y''_2(x)$$

Substituons y_g, y'_g et y''_g dans l'équation (3.8)

$$\begin{aligned} y''_g(x) + b(x)\, y'_g(x) + c(x)\, y_g(x) = h(x) \iff\ & C_1(x)\left(y''_1(x) + b(x)\, y'_1(x) + c(x)\, y_1(x)\right) \\ & + C_2(x)\left(y''_2(x) + b(x)\, y'_2(x) + c(x)\, y_2(x)\right) \\ & + C'_1(x)\, y'_1(x) + C'_2(x)\, y'_2(x) = h(x), \\ \iff\ & C'_1(x)\, y'_1(x) + C'_2(x)\, y'_2(x) = h(x), \end{aligned}$$

vu que y_1 et y_2 sont deux solutions particulières de l'équation sans second membre (3.5).

Ainsi, $y_g(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)$ est une solution générale de l'équation (3.8) pourvu que les fonctions C_1 et C_2 satisfaisant aux équations

$$\begin{cases} C'_1(x)\, y_1(x) + C'_2(x)\, y_2(x) &= 0, \\ C'_1(x)\, y'_1(x) + C'_2(x)\, y'_2(x) &= h(x). \end{cases}$$

Or, le déterminant de ce système est le wronskien des fonctions linéairement indépendantes y_1 et y_2, donc, il n'est pas nul ; nous trouvons C'_1 et C'_2 comme fonctions de x en résolvant le système précédent

$$C'_1(x) = \psi_1(x) \quad \text{et} \quad C'_2(x) = \psi_2(x).$$

En intégrant, nous trouvons

$$C_1(x) = \int \psi_1(x)\, dx + d_1 \quad \text{et} \quad C_2(x) = \int \psi_2(x)\, dx + d_2,$$

où d_1 et d_2 sont des constantes réelles d'intégration.

Substituant les expressions de C_1 et C_2 dans la solution générale y_g, on trouve, finalement, une intégrale dépendant de deux constantes réelles arbitraires d_1 et d_2, autrement dit, la solution générale de l'équation complète (3.8).

■

Remarque 3.3 *Si l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables avec second membre est écrite sous la forme*

$$A(x)\, y''(x) + B(x)\, y'(x) + C(x)\, y(x) = H(x),$$

alors, le système de la variation des constantes devient

$$\begin{cases} C'_1(x)\, y_1(x) + C'_2(x)\, y_2(x) &= 0, \\ C'_1(x)\, y'_1(x) + C'_2(x)\, y'_2(x) &= \dfrac{H(x)}{A(x)}. \end{cases}$$

Exemple 3.7 *Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation*

$$x^2\, y''(x) + 3x\, y'(x) + y(x) = 1 + x^2. \tag{3.9}$$

Trouver la solution générale de l'équation (3.9) sachant que $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$ est une solution particulière de l'équation sans second membre associée à l'équation (3.9).

Solution de l'exemple 3.7

Résolution de l'équation (3.9) :

L'équation (3.9) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre

  Nous avons

  $$x^2\, y''(x) + 3x\, y'(x) + y(x) = 0.$$

  $$\left(y_1(x) = \frac{1}{x} \text{ est une solution particulière de l'équation (3.9)}\right)$$
  $$\Rightarrow \left(x^2\, y_1''(x) + 3x\, y_1'(x) + y_1(x) = 0\right).$$

  Comme

  $$\begin{aligned} y_1(x) = \frac{1}{x} \quad &\Rightarrow \quad y_1'(x) = -\frac{1}{x^2}, \\ &\Rightarrow \quad y_1''(x) = \frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

  Alors,

  $$\begin{aligned} x^2\, y_1''(x) + 3x\, y_1'(x) + y_1(x) &= x^2\left(\frac{2}{x^3}\right) + 3x\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

  D'où : $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$ est une solution particulière de l'EDO sans second membre associée à l'équation (3.9).

  Comme $b(x) = \dfrac{\mathrm{B}(x)}{\mathrm{A}(x)} = \dfrac{3}{x}$ et $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$, alors,

  $$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int b(x)dx}}{y_1^2(x)} dx, \\ &= \frac{1}{x} \int \frac{e^{-3\int \frac{1}{x}dx}}{\frac{1}{x^2}} dx, \\ &= \frac{1}{x} \ln x. \end{aligned}$$

  En dernier, la solution générale y_h de l'EDO sans second membre associée à l'équation (3.9) est

  $$y_h(x) = c_1 \frac{1}{x} + c_2 \frac{1}{x} \ln x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode de la variation des constantes)
  Nous avons
  $$y_1(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y_1'(x) = -\frac{1}{x^2},$$
  et
  $$y_2(x) = \frac{1}{x}\ln x \quad \Rightarrow \quad y_2'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2},$$
  de plus,
  $$h(x) = \frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{A}(x)} = \frac{1+x^2}{x^2},$$
  ainsi, le système de la variation des constantes devient
  $$\begin{cases} \mathrm{C}_1'(x)\,y_1(x) + \mathrm{C}_2'(x)\,y_2(x) = 0 \\ \mathrm{C}_1'(x)\,y_1'(x) + \mathrm{C}_2'(x)\,y_2'(x) = h(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{C}_1'(x)\left(\frac{1}{x}\right) + \mathrm{C}_2'(x)\left(\frac{1}{x}\ln x\right) = 0 \\ \mathrm{C}_1'(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \mathrm{C}_2'(x)\left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1+x^2}{x^2} \end{cases},$$
  $$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{C}_1'(x) &= -(1+x^2)\ln x \\ \mathrm{C}_2'(x) &= 1+x^2 \end{cases},$$
  $$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{C}_1(x) = -x\ln x + x - \frac{1}{3}x^3\ln x + \frac{1}{9}x^3 + d_1,\ d_1 \in \mathbb{R} \\ \mathrm{C}_2(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + d_2, \quad d_2 \in \mathbb{R} \end{cases}.$$
  En dernier, la solution générale y_g de l'équation (3.9) est
  $$y_g(x) = d_1\frac{1}{x} + d_2\frac{1}{x}\ln x + 1 + \frac{1}{9}x^2, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

★

2 Équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2.1 Notions préliminaires

2.1.1 Définitions d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 3.6 *Une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre est une équation de la forme*

$$\mathrm{A}\,y''(x) + \mathrm{B}\,y'(x) + \mathrm{C}\,y(x) = \mathrm{H}(x), \tag{3.10}$$

où A, B *et* C *sont des constantes réelles avec* $\mathrm{A} \neq 0$ *et* H *est une fonction continue bien définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.

Définition 3.7 *L'équation* (3.10) *peut s'écrire sous la forme*

$$y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = h(x), \tag{3.11}$$

où $b = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ *et* $c = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$ *sont deux constantes réelles et* $h(x) = \frac{1}{\mathrm{A}}\mathrm{H}(x)$ *est une fonction continue bien définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.

Remarque 3.4 *La relation*

$$\mathrm{A}\, y''(x) + \mathrm{B}\, y'(x) + \mathrm{C}\, y(x) = 0, \tag{3.12}$$

où encore,

$$y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) = 0, \tag{3.13}$$

se nomme équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 *à coefficients constants sans second membre.*

Exemple 3.8 *L'équation*

$$y''(x) + 3y'(x) - 2y(x) = x\, e^x,$$

est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 *à coefficients constants avec second membre. Son* EDO *linéaire d'ordre* 2 *à coefficients constants sans second membre associée est*

$$y''(x) + 3y'(x) - 2y(x) = 0.$$

2.1.2 Solutions d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 3.8 *La solution générale y_h de l'équation* (3.12) $\big($*ou encore* (3.13)$\big)$ *est donnée par*

$$y_h(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x), \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R},$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions particulières linéairement indépendantes de l'équation (3.12) $\big($*ou encore* (3.13)$\big)$.

Exemple 3.9 *L'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre* 2 *à coefficients variables sans second membre*

$$y''(x) - 4\, y'(x) + 13\, y(x) = 0$$

admet comme solution générale

$$y_h(x) = c_1 \cos(3x)\, e^{2x} + c_2 \sin(3x)\, e^{2x}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$$

Définition 3.9 *La solution générale y_g de l'équation* (3.10) $\big($*ou encore* (3.11)$\big)$ *est donnée par*

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

où y_h représente la solution générale de l'équation (3.12) $\big($*ou encore* (3.13)$\big)$ *et y_p est la solution particulière de l'équation* (3.10) $\big($*ou encore* (3.11)$\big)$.

Exemple 3.10 *La solution générale y_g de l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre* 2 *à coefficients variables avec second membre*

$$y''(x) + y'(x) - 2\, y(x) = 8 \sin(2x),$$

est

$$y_g(x) = c_1\, e^{-2x} + c_2\, e^x - \frac{2}{5} \cos(2x) - \frac{6}{5} \sin(2x), \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R},$$

où $y_p(x) = -\frac{2}{5} \cos(2x) - \frac{6}{5} \sin(2x)$ *et* $y_h(x) = c_1\, e^{-2x} + c_2\, e^x, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$.

2.2 Intégration d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre

Soit l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre

$$\mathrm{A}\,y''(x)+\mathrm{B}\,y'(x)+\mathrm{C}\,y(x)=0, \tag{3.14}$$

où A, B et C sont des constantes réelles avec $\mathrm{A}\neq 0$.

Méthode de résolution 3.1 *L'équation (3.14) possède des solutions définies sur $\mathbb{R}$ et l'ensemble des fonctions y telles que $(\mathbb{R}, y)$ soit solution de (3.14) est un espace vectoriel de dimension 2, dont nous devrons trouver une base.*

Soit r un nombre réel et soit y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=e^{rx}$. Supposons que $(\mathbb{R}, y)$ soit une solution de (3.14). Alors,

$$\begin{aligned} y(x)=e^{rx} \quad &\Rightarrow \quad y'(x)=r\,e^{rx},\\ &\Rightarrow \quad y''(x)=r^2\,e^{rx}. \end{aligned}$$

En appliquant cette solution à l'équation (3.14), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathrm{A}\,y''(x)+\mathrm{B}\,y'(x)+\mathrm{C}\,y(x)=0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{A}\,r^2\,e^{rx}+\mathrm{B}\,r\,e^{rx}+\mathrm{C}\,e^{rx}=0,\\ &\Rightarrow \quad \left(\mathrm{A}\,r^2+\mathrm{B}\,r+\mathrm{C}\right)e^{rx}=0. \end{aligned}$$

Puisque $\forall x\in\mathbb{R} : e^{rx}\neq 0$, alors, $y(x)=e^{rx}$ satisfait l'équation (3.14) si et seulement si

$$\mathrm{A}\,r^2+\mathrm{B}\,r+\mathrm{C}=0. \tag{3.15}$$

Le polynôme (3.15) est appelé le polynôme caractéristique de l'équation (3.14).

Ainsi, pour résoudre l'équation différentielle ordinaire (3.14), nous devrons trouver les racines du le polynôme caractéristique (3.15).

Le discriminent Δ est donc

$$\Delta=\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC},$$

ainsi, 3 cas peuvent se présenter

- **Premier cas :** *Si $\Delta>0$*
  Dans ce cas, nous obtenons deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Alors, la solution y_h de l'équation (3.14) est donnée par

  $$y_h(x)=c_1\,e^{r_1 x}+c_2\,e^{r_2 x}, \quad c_1, c_2\in\mathbb{R}.$$

- **Deuxième cas :** *Si $\Delta=0$*
  Dans ce cas, une racine réelle double $r=r_1=r_2$ est obtenue. Alors, la solution y_h de l'équation (3.14) est

  $$y_h(x)=c_1\,e^{rx}+c_2\,x\,e^{rx}, \quad c_1, c_2\in\mathbb{R}.$$

- **Troisième cas :** *Si $\Delta<0$*
  Dans ce cas, nous obtenons une racine complexe conjuguée $r_1=\overline{r_2}$ de la forme

  $$\begin{aligned} r_1 &= \alpha+i\beta = \frac{-\mathrm{B}+i\sqrt{\widetilde{\Delta}}}{2\mathrm{A}},\\ r_2 &= \alpha-i\beta = \frac{-\mathrm{B}-i\sqrt{\widetilde{\Delta}}}{2\mathrm{A}}, \end{aligned}$$

  où $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$ et $\Delta=i^2\widetilde{\Delta}$ avec $\widetilde{\Delta}\in\mathbb{R}_+^*$. Alors, la solution y_h de l'équation (3.14) est

  $$y_h(x)=e^{\alpha x}\left(c_1\cos(\beta x)+c_2\sin(\beta x)\right), \quad c_1, c_2\in\mathbb{R}.$$

Exemple 3.11 *Soit l'équation*

$$y''(x) - 9y(x) = 0. \tag{3.16}$$

Trouver la solution générale y_h de l'équation (3.16).

Solution de l'exemple 3.11

Solution générale y_g de l'équation (3.16) :

L'équation (3.16) est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre. Pour sa résolution, nous construisons le polynôme caractéristique

$$r^2 - 9 = 0,$$

lequel admet deux solutions réelles distinctes $r_1 = -3$ et $r_2 = 3$. Ainsi, la solution générale y_h de l'équation (3.16) est

$$y_h(x) = c_1\, e^{-3x} + c_2\, e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

★

2.3 Intégration d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables avec second membre

Soit l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre

$$\mathrm{A}\, y''(x) + \mathrm{B}\, y'(x) + \mathrm{C}\, y(x) = \mathrm{H}(x), \tag{3.17}$$

où A, B et C sont des constantes réelles avec $\mathrm{A} \neq 0$ et H représente une fonction continue bien définit sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour résoudre l'équation (3.17), nous pouvons procéder par l'une des deux méthodes suivantes.

2.3.1 Première méthode : Méthode de la variation des constantes

Méthode de résolution 3.2 *Soit y_h la solution générale de l'équation différentielle ordinaire sans second membre associée à l'équation* (3.17)*. Elle est donnée par*

$$y_h(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.18}$$

Résoudre l'équation (3.17) *par la méthode de la variation des constantes revient à remplacer les constantes c_1 et c_2 dans la solution* (3.18) *par des fonctions C_1 et C_2 respectivement.*

Donc : la solution générale y_g de l'équation (3.17) *est*

$$y_g(x) = \mathrm{C}_1(x)\, y_1(x) + \mathrm{C}_2(x)\, y_2(x),$$

où les fonctions C_1 et C_2 satisfaisant le système

$$\begin{cases} \mathrm{C}_1'(x)\, y_1(x) + \mathrm{C}_2'(x)\, y_2(x) &= 0, \\ \mathrm{C}_1'(x)\, y_1'(x) + \mathrm{C}_2'(x)\, y_2'(x) &= \dfrac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{A}}. \end{cases}$$

Exemple 3.12 *Soit l'équation*

$$y''(x) - 9\,y(x) = 2\,e^{3x}. \tag{3.19}$$

Trouver la solution générale y_g de l'équation (3.19).

Solution de l'exemple 3.12

Résolution de l'équation (3.19) :

L'équation (3.19) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  L'équation différentielle ordinaire sans second membre associée à l'équation (3.19) est $y''(x) - 9\,y(x) = 0$. Ainsi, d'après l'exemple 3.11, nous avons

$$y_h(x) = c_1\,e^{-3x} + c_2\,e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode de la variation des constantes)
  Comme $y_h(x) = c_1\,e^{-3x} + c_2\,e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} y_1(x) = e^{-3x} &\Rightarrow y_1'(x) = -3e^{-3x},\\ y_2(x) = e^{3x} &\Rightarrow y_2'(x) = 3e^{3x}. \end{aligned}$$

  De plus, $\mathrm{A} = 1$ et $\mathrm{H}(x) = 2\,e^{3x}$.
  Ainsi, le système de la variation des constantes devient

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{C}_1'(x)\,y_1(x) + \mathrm{C}_2'(x)\,y_2(x) &=& 0,\\ \mathrm{C}_1'(x)\,y_1'(x) + \mathrm{C}_2'(x)\,y_2'(x) &=& \dfrac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{A}}, \end{array}\right.
\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{C}_1'(x)\,e^{-3x} + \mathrm{C}_2'(x)\,e^{3x} &=& 0,\\ \mathrm{C}_1'(x)\left(-3e^{-3x}\right) + \mathrm{C}_2'(x)\left(3e^{3x}\right) &=& 2e^{3x}, \end{array}\right.\\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{C}_1'(x)\,e^{-6x} + \mathrm{C}_2'(x) &=& 0,\\ -\mathrm{C}_1'(x)\,e^{-6x} + \mathrm{C}_2'(x) &=& \dfrac{2}{3}, \end{array}\right.\\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{C}_1'(x) &=& -\dfrac{1}{3}\,e^{6x},\\ \mathrm{C}_2'(x) &=& \dfrac{1}{3}, \end{array}\right.\\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{C}_1(x) &=& -\dfrac{1}{18}\,e^{6x} + d_1, \quad d_1 \in \mathbb{R},\\ \mathrm{C}_2(x) &=& \dfrac{1}{3}x + d_2', \quad d_2' \in \mathbb{R}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (3.19) est

$$\begin{aligned} y_g(x) &= \mathrm{C}_1(x)\,y_1(c) + \mathrm{C}_2(x)\,y_2(x),\\ &= d_1\,e^{-3x} + d_2\,e^{3x} + \frac{1}{3}x\,e^{3x}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

★

2.3.2 Deuxième méthode : Méthode des coefficients indéterminés

Méthode de résolution 3.3 *On sait que la solution générale y_g de l'équation* (3.17) *s'écrit comme*

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

où y_h représente la solution générale de l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre associée à l'équation (3.17) et y_p est la solution particulière de l'équation (3.17).

L'objectif de cette méthode est de déterminer la solution particulière y_p de l'équation (3.17). L'idée est de poser une fonction avec des coefficients à déterminer mais qui est semblable où similaire à celle de $\frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{A}}$ $\left(\text{ou à } \frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{A}(x)} \text{ dans le cas des équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 2 à coefficients variables avec second membre}\right)$. Par substitution dans l'équation (3.17), nous déterminons les valeurs des coefficients inconnues.

Remarque 3.5 *Cette méthode peut être utilisée uniquement lorsque la fonction $\frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{A}}$ $\left(\text{ou encore } \frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{A}(x)}\right)$ est constituée de somme ou produit de fonctions polynomiale et/ou des fonctions du type* $\cos(\alpha x)$, $\sin(\beta x)$, $e^{\gamma x}, \cdots$.

Remarque 3.6 *Cette méthode peut échouer s'il y a un chevauchement entre la solution générale y_h de l'équation sans second membre et la solution particulière y_p avec les coefficients à déterminer.*

Exemple 3.13 *Soit l'équation*

$$y''(x) - 9\,y(x) = 2\,e^{3x}. \tag{3.20}$$

Trouver la solution générale y_g de l'équation (3.20).

Solution de l'exemple 3.13

Solution générale y_g de l'équation (3.20) :

L'équation (3.20) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre

  Nous avons
  $$y''(x) - 9\,y(x) = 0.$$
  Ainsi, d'après l'exemple 3.11, il s'en suit
  $$y_h(x) = c_1\,e^{-3x} + c_2\,e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode des coefficients indéterminés)

  Comme $y_h(x) = c_1\,e^{-3x} + c_2\,e^{3x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ et $\frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{A}} = 2\,e^{3x}$ (autrement dit, le second membre est identique à l'une des solutions particulières de l'EDO sans second membre). Alors,
  $$y_p(x) = (ax + b)\,e^{3x}.$$
  Nous avons
  $$\begin{aligned} y_p(x) = (ax+b)\,e^{3x} \quad &\Rightarrow \quad y_p'(x) = (3ax + 3b + a)\,e^{3x}, \\ &\Rightarrow \quad y_p''(x) = (9ax + 9b + 6a)\,e^{3x}. \end{aligned}$$
  D'où
  $$\begin{aligned} y_p''(x) - 9\,y_p(x) = 2\,e^{3x} \quad &\Rightarrow \quad (9ax + 9b + 6a)\,e^{3x} - 9(ax+b)\,e^{3x} = 2\,e^{3x}, \\ &\Rightarrow \quad a = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$y_p(x) = \frac{1}{3} x\, e^{3x}.$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (3.20) est

$$y_g(x) = c_1\, e^{-3x} + c_2\, e^{3x} + \frac{1}{3} x\, e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

★

Remarque 3.7 *Le tableau ci-dessous récapitule certains cas possible que la fonction* $\frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{A}}$ $\left(\textit{ou encore } \frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{A}(x)}\right)$ *peut être considérer et la forme de la solution particulière* $y_p(x)$.

Forme de $\frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{A}}$ $\left(\text{ou encore } \frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{A}(x)}\right)$	Forme de $y_p(x)$
10	a
$2x^2+3$	ax^2+bx+c
x^7+5x^3	$ax^7+bx^6+cx^5+dx^4+ex^3+fx^2+gx+h$
e^{4x}	$a\,e^{4x}$
$(x^2+1)\,e^{5x}$	$(ax^2+bx+c)\,e^{5x}$
$\cos(6x)$	$a\cos(6x)+b\sin(6x)$
$\sin(13x)$	$a\sin(13x)+b\cos(13x)$
$\sin(3x)\,e^{-x}$	$a\sin(3x)\,e^{-x}+b\cos(3x)\,e^{-x}$
$x^3\cos(5x)e^{8x}$	$(ax^3+bx^2+cx+d)\cos(5x)e^{8x}+(ex^3+fx^2+gx+h)$
	$\times\sin(5x)e^{8x}$

3 Quelques types d'équations différentielles ordinaires du second ordre se ramenant à des équations différentielles ordinaires du premier ordre

L'intégration de certaines équations différentielles ordinaires du second ordre peut se ramener à celle d'équations différentielles ordinaires du premier ordre. Dans ce qui suit, nous traiterons deux types de ce genre d'EDO.

3.1 Type 1 : Équation différentielle ordinaire ne contenant pas explicitement la fonction inconnue y

Définition 3.10 *L'équation différentielle ordinaire du second ordre de la forme*

$$\mathscr{F}\left(x;\ y'(x),\ y''(x)\right) = 0, \tag{3.21}$$

où $\mathscr{F} : \mathrm{I} \times \Lambda_1 \times \Lambda_2 \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue,* $x \in \mathrm{I}$ *est dite la variable et* $y : \Lambda_0 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est la fonction inconnue deux fois continument différentiable, peut se ramener à une équation différentielle ordinaire du premier ordre du genre*

$$\mathscr{F}\left(x;\ z(x),\ z'(x)\right) = 0, \tag{3.22}$$

où $z(x) = y'(x)$ *est la solution de l'équation différentielle ordinaire du premier ordre* (3.22).

Méthode de résolution 3.4 *Pour résoudre l'équation* (3.21)*, il suffit de poser* $z(x) = y'(x)$ *et* $z'(x) = y''(x)$. *Ainsi, l'équation* (3.21) *se transforme en une équation différentielle ordinaire du premier ordre de la forme* (3.22).

L'utilisation de l'une des méthodes présentées dans le chapitre 2 *permet de résoudre l'équation* (3.22).

En dernier, l'intégration de la solution z *de l'équation* (3.22) *donne la solution* y *de l'équation* (3.21).

Exemple 3.14 *Intégrer l'équation suivante*

$$y''(x) + \left(y'(x)\right)^2 = 0. \tag{3.23}$$

Solution de l'exemple 3.14

Intégration de l'équation (3.23) :

L'équation (3.23) est une équation différentielle ordinaire non linéaire d'ordre 2 sans second membre. Pour sa résolution, posons

$$z(x) = y'(x) \Rightarrow z'(x) = y''(x).$$

Ainsi,

$$(3.23) \Leftrightarrow z'(x) + z^2(x) = 0.$$

Donc,

$$\begin{aligned} z'(x) + z^2(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\int \frac{dz(x)}{z^2(x)} = \int dx, \\ &\Leftrightarrow \quad z(x) = \frac{1}{x + c_1}, \quad c_1 \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad c_1 \neq -x. \end{aligned}$$

Comme $z(x) = y'(x)$, alors, $\forall c_1 \in \mathbb{R}$ avec $c_1 \neq -x$, nous avons

$$y(x) = \int \frac{1}{x + c_1} dx.$$

En dernier, nous obtenons

$$y_g(x) = \ln|x + c_1| + c_2, \quad \text{où} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad c_1 \neq -x.$$

★

3.2 Type 2 : Équation différentielle ordinaire ne contenant pas explicitement la variable indépendante x

Définition 3.11 *L'équation différentielle ordinaire du second ordre indépendante de la variable $x \in \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ de la forme*

$$\mathrm{G}\big(y(x),\, y'(x),\, y''(x)\big) = 0, \tag{3.24}$$

où $\mathrm{G} : \Lambda_0 \times \Lambda_1 \times \Lambda_2 \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bien définie et $y : \Lambda_0 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continument différentiable représentant la solution de l'équation (3.24), peut se transformer en une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 de la forme

$$\mathrm{G}\big(y(x),\, z(y),\, z(y)z'(y)\big) = 0, \tag{3.25}$$

où $z(y) = y'(x)$ est une fonction continue sur $\Lambda_1 \subseteq \mathbb{R}$ représentant la solution de l'équation différentielle ordinaire du premier ordre (3.25).

Méthode de résolution 3.5 *Comme l'équation (3.24) ne contient pas la variable x, alors, pour sa résolution, il suffit de poser $z(y) = y'(x)$. Ainsi,*

$$\begin{aligned} y'(x) = z(y) \quad &\Leftrightarrow \quad y''(x) = \frac{d}{dx}\big(z(y)\big), \\ &\Leftrightarrow \quad y''(x) = \frac{dz(y)}{dy}\,\frac{dy(x)}{dx}, \\ &\Leftrightarrow \quad y''(x) = z'(y)\, z(y). \end{aligned}$$

En remplaçant $y'(x)$ et $y''(x)$ dans l'équation (3.24), nous obtenons l'équation (3.25). L'utilisation de l'une des méthodes présentées dans le chapitre 2 permet de résoudre l'équation (3.25).

En dernier, l'intégration de la solution $z(y)$ de l'équation (3.25) donne implicitement ou explicitement la solution $y(x)$ de l'équation (3.24).

Exemple 3.15 *Intégrer l'équation suivante*

$$y^2(x)\, y''(x) + y'(x) = 0. \tag{3.26}$$

Solution de l'exemple 3.15

Intégration de l'équation (3.26) :

L'équation (3.26) représente une équation différentielle ordinaire non linéaire d'ordre 2 sans second membre.

Il est clair que l'équation (3.26) ne dépend pas de la variable réelle x, donc, pour sa résolution, nous posons

$$y'(x) = z(y) \Leftrightarrow y''(x) = z(y)\, z'(y).$$

En remplacent $y'(x)$ et $y''(x)$ par $z(y)$ et $z(y)\,z'(y)$ respectivement, l'équation (3.26) devient

$$y^2\, z(y)\, z'(y) + z(y) = 0. \tag{3.27}$$

Nous remarquons que $z(y) = 0$ est une soliton évidente de l'équation (3.27), ce qui implique que $y_g(x) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation (3.26).

Pour $z(y) \neq 0$, l'équation (3.27) devient

$$y^2\, z'(y) + 1 = 0,$$

laquelle est une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 à variables séparées, sa solution générale est

$$z(y) = \frac{1 + c_1 y}{y}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Comme $y'(x) = z(y)$. Alors,

$$\begin{aligned}
z(y) = \frac{1 + c_1 y}{y} \quad &\Rightarrow \quad y'(x) = \frac{1 + c_1 y(x)}{y(x)}, \quad c_1 \in \mathbb{R},\\
&\Rightarrow \quad \int \frac{y(x)}{1 + c_1 y(x)} \, dy(x) = \int dx, \quad c_1 \in \mathbb{R},\\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{c_1} \int dy(x) - \frac{1}{c_1} \int \frac{dy(x)}{1 + c_1 y(x)} = \int dx, \quad c_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En dernier, l'intégrale générale de l'équation (3.26) est

$$\frac{1}{c_1} y(x) - \frac{1}{c_1^2} \ln|1 + c_1 y(x)| = x + c_2, \quad c_1 \in \mathbb{R}^*, \, c_2 \in \mathbb{R}.$$

★

4 Problèmes à conditions initiales

Un problème à conditions initiales est composé d'une équation différentielle d'ordre 2 et de deux conditions initiales (une condition sur la fonction inconnue et une autre sur sa dérivée) comme suit

$$\begin{cases}
y''(x) = f\left(x; \, y(x), \, y'(x)\right), \quad x \in \mathrm{I} = [x_0, \mathrm{X}[,\\
y(x_0) = y_0,\\
y'(x_0) = y_1,
\end{cases}$$

où $f : \mathrm{I} \times \Lambda_0 \times \Lambda_1 \to \mathbb{R}$ est une fonction bien définie avec $\Lambda_0 \times \Lambda_1 \subseteq \mathbb{R}^2$.

L'existence et l'unicité de la solution d'un problème à conditions initiales est assurée par le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz (théorème 1.1).

Exemple 3.16 *Résoudre le problème à conditions initiales*

$$\begin{cases}
y''(x) + y'(x) - 12\, y'(x) = 0,\\
y(0) = 0,\\
y'(0) = 1.
\end{cases} \tag{3.28}$$

Solution de l'exemple 3.16

<u>*Résolution du problème* (3.28)</u> :

Le problème (3.28) est un problème à conditions initiales composé d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre et de deux conditions initiales.

Pour trouver la solution du problème (3.28), il faut, d'abord, chercher la solution de l'EDO associée au problème (3.28).

Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est

$$r^2 + r - 12 = 0 \Longleftrightarrow (r+4)(r-3) = 0.$$

Ainsi, la solution de l'EDO est

$$y_h(x) = c_1\, e^{-4x} + c_2\, e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme

$$y_h(x) = c_1\, e^{-4x} + c_2\, e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

alors,

$$y_h'(x) = -4c_1\, e^{-4x} + 3c_2\, e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Et donc,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ -4c_1 + 3c_2 = 1, \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = -\dfrac{1}{7}, \\ c_2 = \dfrac{1}{7}. \end{cases}
\end{aligned}$$

En dernier, la solution y_p du problème (3.28) est

$$y_p(x) = -\frac{1}{7}\, e^{-4x} + \frac{1}{7}\, e^{3x}.$$

★

5 Exercices

Exercice 3.1 *Soit l'équation différentielle ordinaire définie sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{0, \dfrac{\pi}{2} + l\pi \mid l \in \mathbb{Z}\right\}$ *par*

$$\cos(x)\, y''(x) + \sin(x)\, y'(x) - \cos^3(x)\, y(x) = 0. \tag{3.29}$$

Trouver la solution de l'équation (3.29) *sachant qu'elle admet des intégrales particulières du type* $e^{\alpha \sin(x)}$.

Solution de l'exercice 3.1

Solution de l'équation (3.29) :

L'équation (3.29) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables sans second membre.

$\left(\tilde{y}(x) = e^{\alpha \sin(x)}\right.$ est une solution particulière de l'équation $\left.(3.29)\right) \Leftrightarrow$

$$\left(\cos(x)\, \tilde{y}''(x) + \sin(x)\, \tilde{y}'(x) - \cos^3(x)\, \tilde{y}(x) = 0\right).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(x) = e^{\alpha \sin(x)} \quad &\Rightarrow \quad \tilde{y}'(x) = \alpha \cos(x)\, e^{\alpha \sin(x)}, \\
&\Rightarrow \quad \tilde{y}''(x) = -\alpha \sin(x)\, e^{\alpha \sin(x)} + \alpha^2 \cos^2(x)\, e^{\alpha \sin(x)}.
\end{aligned}$$

En remplaçant $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ et $\tilde{y}''$ dans l'équation (3.29), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\cos(x)\, \tilde{y}''(x) + \sin(x)\, \tilde{y}'(x) - \cos^3(x)\, \tilde{y}(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \left(\alpha^2 - 1\right) \cos^3(x)\, e^{\alpha \sin(x)} = 0, \\
&\Rightarrow \quad (\alpha = -1) \vee (\alpha = 1).
\end{aligned}$$

Posons $y_1(x) = e^{-\sin(x)}$ et $y_2(x) = e^{\sin(x)}$. y_1 et y_2 sont deux solutions particulières de l'équation (3.29). Il reste à montrer que les deux solutions particulières y_1 et y_2 sont linéairement indépendants.

Nous avons

$$\begin{aligned} W_{\{y_1,y_2\}}(x) &= \begin{vmatrix} e^{-\sin(x)} & e^{\sin(x)} \\ -\cos(x)\, e^{-\sin(x)} & \cos(x)\, e^{\sin(x)} \end{vmatrix}, \\ &= 2\cos^2(x) \neq 0, \quad \forall \mathbb{R} \backslash \left\{0, \frac{\pi}{2} + l\pi | l \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, les deux solutions particulières y_1 et y_2 sont linéairement indépendants.

D'où : la solution générale y_h de l'équation (3.29) est

$$y_h(x) = c_1\, e^{-\sin(x)} + c_2\, e^{\sin(x)}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

♦

Exercice 3.2 *Soit l'équation*

$$y''(x) - \frac{2x}{x^2+1}\, y'(x) + 2\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}\, y(x) = 0. \tag{3.30}$$

Déterminer la solution générale de l'équation (3.30) *sachant quelle admet un polynôme comme une solution particulière.*

Solution de l'exercice 3.2

Solution générale de l'équation (3.30) :

$\left(y_1 \text{ est une solution particulière de l'équation (3.30)}\right) \Leftrightarrow$

$$\left(y_1''(x) - \frac{2x}{x^2+1}\, y_1'(x) + 2\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}\, y_1(x) = 0\right).$$

Nous remarquons que si $y_1(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$. Alors, $a = 0$ laquelle est une solution triviale.

Aussi, si $y_1(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, $a = b = 0$ laquelle est aussi une solution triviale.

Posons

$$\begin{aligned} y_1(x) = a\,x^2 + b\,x + c \quad &\Rightarrow \quad y_1'(x) = 2a\,x + b, \\ &\Rightarrow \quad y_1''(x) = 2a. \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant y_1, y_1' et y_1'' dans l'équation (3.30), il découle

$$y_1(x) = x^2 + 1.$$

Il reste à déterminer la deuxième solution particulière y_2.

Nous avons $y_1(x) = x^2 + 1$ et $b(x) = -\dfrac{2x}{x^2+1}$. Ainsi

$$\begin{aligned} y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int b(x)}}{y_1^2(x)} dx \quad &\Rightarrow \quad y_2(x) = (x^2+1) \int \frac{e^{\int \frac{2x}{x^2+1}}}{(x^2+1)^2} dx, \\ &\Rightarrow \quad y_2(x) = (x^2+1) \int \frac{dx}{x^2+1}, \\ &\Rightarrow \quad y_2(x) = (x^2+1)\arctan(x). \end{aligned}$$

En dernier, la solution générale y_h de l'équation (3.30) est

$$y_h(x) = c_1\left(x^2+1\right) + c_2\left(x^2+1\right)\arctan(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

♦

Exercice 3.3 *Déterminer, sur* $\mathbb{R}\backslash\left\{0, \dfrac{\pi}{2}+l\pi | l \in \mathbb{Z}\right\}$, *la solution générale de l'équation*

$$x^2\, y''(x) - 6x\, y'(x) + 12\, y(x) = x^5 \tan^2 x, \tag{3.31}$$

sachant que $y_1(x) = x^3$ *est une solution particulière de l'*EDO *sans second membre associée à l'équation* (3.31).

Solution de l'exercice 3.3

Solution générale y_g *de l'équation* (3.31) :

l'équation (3.31) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables avec second membre.

Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
  $$x^2\, y''(x) - 6x\, y'(x) + 12\, y(x) = 0. \tag{3.32}$$
  $\big(y_1(x) = x^3$ est une solution particulière de l'équation (3.32)$\big)$
  $\Leftrightarrow \big(x^2 y_1''(x) - 6x y_1'(x) + 12 y_1(x) = 0\big)$.
  $y_1(x) = x^3$ définie bien une solution particulière de l'équation (3.32) car
  $$\begin{aligned} x^2 y_1''(x) - 6x y_1'(x) + 12 y_1(x) &= x^2(6x) - 6x(3x^2) + 12x^3, \\ &= 0. \end{aligned}$$
  Comme $y_1(x) = x^3$, $\mathrm{A}(x) = x^2$ et $\mathrm{B}(x) = -6x$. Alors,
  $$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int \frac{\mathrm{B}(x)}{\mathrm{A}(x)} dx}}{y_1^2(x)} dx, \\ &= x^3 \int \frac{e^{6\int \frac{dx}{x}}}{x^6} dx, \\ &= x^4. \end{aligned}$$
  Ainsi, la solution générale y_h de l'équation (3.32) est
  $$y_h(x) = c_1\, x^3 + c_2\, x^4, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode de la variation des constantes)
  Nous avons
  $$y_1(x) = x^3 \Leftrightarrow y_1'(x) = 3x^2,$$
  et
  $$y_2(x) = x^4 \Leftrightarrow y_1'(x) = 4x^3,$$
  de plus,
  $$\left(\mathrm{A}(x) = x^2 \wedge \mathrm{H}(x) = x^5 \tan^2 x\right) \Leftrightarrow \left(h(x) = \frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{A}(x)} = x^3 \tan^2 x\right).$$

Ainsi, le système de la variation des constantes devient

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) = h(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)\, x^3 + C_2'(x)\, x^4 = 0 \\ C_1'(x)\,(3x^2) + C_2'(x)\,(4x^3) = x^3 \tan^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) + x\, C_2'(x) = 0 \\ 3C_1'(x) + 4x\, C_2'(x) = x \tan^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -x \tan^2 x \\ C_2'(x) = \tan^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = -x \tan x - \ln|\cos x| \\ \qquad\qquad + \dfrac{x^2}{2} + d_1, \quad d_1 \in \mathbb{R}, \\ C_2(x) = \tan x - x + d_2, \quad d_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc : la solution générale y_g de l'équation (3.31) est

$$y_g(x) = d_1\, x^3 + d_2\, x^4 - x^3 \ln|\cos x| - \frac{1}{2} x^5, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

Remarque 3.8 *Comme $h(x) = x^3 \tan^2 x$, alors, la méthode des coefficients indéterminées ne peut pas être utilisée.*

♦

Exercice 3.4 *On cherche à résoudre, dans $\left]-\frac{1}{4}, +\infty\right[$, l'équation*

$$(4x-1)^2\, y''(x) - 2(4x-1)\, y'(x) + 8y(x) = 0. \tag{3.33}$$

Trouver la solution générale de l'équation (3.33) en posant $e^t = 4x - 1$.

Solution de l'exercice 3.4

Solution générale de l'équation (3.33) :

L'équation (3.33) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables sans second membre.

Comme $e^t = 4x - 1$. Alors, $x = \dfrac{e^t + 1}{4}$ et $y(x) = y\left(\dfrac{e^t+1}{4}\right)$.

Ainsi, posons : $y(x) = z(t)$, il découle

$$\begin{aligned} z(t) = y(x) \quad &\Rightarrow z(t) = y\left(\frac{e^t+1}{4}\right), \\ &\Rightarrow z'(t) = \frac{e^t}{4}\, y'\left(\frac{e^t+1}{4}\right), \\ &\Rightarrow z''(t) = \frac{e^t}{4}\, y'\left(\frac{e^t+1}{4}\right) + \frac{e^{2t}}{16}\, y''\left(\frac{e^t+1}{4}\right). \end{aligned}$$

En substituant y, y' et y'' dans l'équation (3.33), nous obtenons

$$\begin{aligned} (4x-1)^2 y''(x) - 2(4x-1) y'(x) + 8y(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad e^{2t} y''\left(\frac{e^t+1}{4}\right) - 2e^t y'\left(\frac{e^t+1}{4}\right) + 8y\left(\frac{e^t+1}{4}\right) = 0, \\ &\Rightarrow \quad 16\, z''(t) - 16\, z'(t) - 8\, z'(t) + 8\, z(t) = 0, \\ &\Rightarrow \quad 2\, z''(t) - 3\, z'(t) + z(t) = 0, \end{aligned} \tag{3.34}$$

laquelle est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre.

Pour sa résolution, construisons le polynôme caractéristique associé, lequel est

$$2r^2 - 3r + 1 = 0.$$

Ainsi,

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow \left(r - \frac{1}{2}\right)\left(r - 1\right) = 0.$$

Donc : la solution générale z_h de l'équation (3.34) est

$$z_h(t) = c_1\, e^{\frac{1}{2}t} + c_2\, e^t, \quad \text{avec} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme $e^t = 4x - 1$ et $y(x) = z(t)$, alors, la solution générale y_h de l'équation (3.33) est

$$y_h(x) = c_1 \sqrt{4x-1} + c_2\,(4x-1), \quad \text{avec} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

♦

Exercice 3.5 *Soit, pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation*

$$y''(x) - 2\,y'(x) + (1+m^2)\,y(x) = (1+4m^2)\cos(mx). \tag{3.35}$$

Déterminer sa solution générale.

Solution de l'exercice 3.5

Résolution de l'équation (3.35) :

L'équation (3.35) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre.

Pour sa résolution, nous passons par deux étapes. Cependant, deux cas peuvent se présenter.

Premier cas : Si $m = 0$, l'équation (3.35) devient

$$y''(x) - 2\,y'(x) + y(x) = 1. \tag{3.36}$$

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
  $$y''(x) - 2\,y'(x) + y(x) = 0, \tag{3.37}$$
  son polynôme caractéristique associé est
  $$r^2 - 2\,r + 1 = 0,$$
  qui peut aussi s'écrire sous la forme
  $$(r-1)^2 = 0.$$
  Ainsi, le polynôme caractéristique admet une racine réelle double $r_1 = r_2 = 1$.
  Donc : la solution générale y_h de l'équation (3.37) est
  $$y_h(x) = c_1\, e^x + c_2\, x\, e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode des coefficients indéterminées)
  Comme $h(x) = 1$, alors, posons
  $$y_p(x) = a \Rightarrow y'_p(x) = y''_p(x) = 0.$$
  En remplaçant y_p, y'_p et y''_p dans l'équation (3.36), nous obtenons
  $$a = 1.$$
  Donc : la solution particulière y_p de l'équation (3.36) est
  $$y_p(x) = 1.$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (3.36) est
$$y_p(x) = c_1\, e^x + c_2\, xe^x + 1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Deuxième cas : Si $m \in \mathbb{R}^*$

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
  $$y''(x) - 2\, y'(x) + (1 + m^2)\, y(x) = 0. \tag{3.38}$$
  Le polynôme caractéristique associé à l'équation (3.38) est
  $$r^2 - 2\, r + (1 + m^2) = 0.$$
  Comme le discriminant est $\Delta = (2mi)^2$, alors, le polynôme caractéristique admet une racine complexe conjugué $r_1 = \overline{r_2} = 1 + i\, m$.
  Ainsi, la solution générale y_h de l'équation (3.38) est
  $$y_h(x) = e^x \big(c_1\, \cos(mx) + c_2\, \sin(mx)\big), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode des coefficients indéterminées)
  Comme $h(x) = (1 + 4m^2) \cos(mx)$, alors, posons
  $$\begin{aligned} y_p(x) = a\cos(mx) + b\sin(mx) \quad &\Rightarrow \quad y'_p(x) = -am\sin(mx) + bm\cos(mx), \\ &\Rightarrow \quad y''_p(x) = -am^2\cos(mx) - bm^2\sin(mx). \end{aligned}$$
  En remplaçant y_p, y'_p et y''_p dans l'équation (3.35), nous obtenons
  $$a = 1 \quad \text{et} \quad b = -2m.$$
  Donc : la solution particulière y_p de l'équation (3.35) est
  $$y_p(x) = \cos(mx) - 2m\sin(mx).$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (3.35) est
$$y_p(x) = e^x \big(c_1\, \cos(mx) + c_2\, \sin(mx)\big) + \cos(mx) - 2m\sin(mx), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

♦

Exercice 3.6 *Résoudre l'équation*
$$x\, y''(x) = y'(x)\, \ln\left(\frac{y'(x)}{x}\right). \tag{3.39}$$

Solution de l'exercice 3.6

<u>*Solution générale de l'équation* (3.39)</u> :

L'équation (3.39) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 non linéaire. Pour sa résolution, posons

$$y'(x) = z(x) \Rightarrow y''(x) = z'(x).$$

Ainsi, en remplaçant y' et y'' par z et z' dans l'équation (3.39), nous obtenons

$$\begin{aligned}
(3.39) \quad &\Rightarrow \quad x\,z'(x) = z(x)\ln\left(\frac{z(x)}{x}\right),\\
&\Rightarrow \quad z'(x) = \frac{z(x)}{x}\ln\left(\frac{z(x)}{x}\right),
\end{aligned}$$

laquelle est une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 homogène, pour sa résolution, posons

$$z(x) = x\,t(x) \Rightarrow z'(x) = t(x) + x\,t'(x).$$

Donc :

$$\begin{aligned}
z'(x) = \frac{z(x)}{x}\ln\left(\frac{z(x)}{x}\right) \quad &\Rightarrow \quad t(x) + x\,t'(x) = t(x)\ln\left(t(x)\right),\\
&\Rightarrow \quad x\,t'(x) = t(x)\ln\left(t(x)\right) - t(x),\\
&\Rightarrow \quad \int \frac{1}{t(x)}\frac{1}{\ln\left(t(x)\right)-1}\,dt(x) = \int \frac{dx}{x},\\
&\Rightarrow \quad \ln\Big(\ln\big(t(x)\big)-1\Big) = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

D'où : la solution générale de l'EDO d'ordre 1 homogène est

$$z_g(x) = x\,e^{k_1 x+1}, \quad k_1 \in \mathbb{R}.$$

Comme $y'(x) = z(x)$ et $z(x) = x\,e^{k_1 x+1}, \quad k_1 \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}
y'(x) = x\,e^{kx+1} \quad &\Rightarrow \quad \int dy(x) = \int x\,e^{k_1 x+1}\,dx,\\
&\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{k_1}xe^{k_1 x+1} - \frac{1}{k_1^2}e^{k_1 x+1} + k_2, \quad k_1 \in \mathbb{R}^* \text{ et } k_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (3.39) est

$$y(x) = \frac{1}{k_1}xe^{k_1 x+1} - \frac{1}{k_1^2}e^{k_1 x+1} + k_2, \quad k_1 \in \mathbb{R}^* \text{ et } k_2 \in \mathbb{R}.$$

♦

Exercice 3.7 *Intégrer l'équation*

$$\left(y''(x)\right)^2 = 1 + \left(y'(x)\right)^2. \tag{3.40}$$

Solution de l'exercice 3.7

Intégration de l'équation (3.40) :

L'équation (3.40) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 non linéaire.

Il est clair que l'équation (3.40) ne dépend pas de la fonction inconnue $y(x)$, donc, pour sa résolution, posons

$$y'(x) = z(x) \Longleftrightarrow y''(x) = z'(x).$$

De plus, l'équation (3.40) peut s'écrire sous la forme

$$y''(x) = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}. \tag{3.41}$$

En remplaçant y' et y'' par z et z', respectivement, dans l'équation (3.41), nous trouvons

$$z'(x) = \sqrt{1 + z^2(x)},$$

laquelle représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 à variables séparées. Sa solution générale z_g est

$$z_g(x) = \sinh(x + c_1), \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Comme $z(x) = y'(x)$, alors, la solution générale y_g de l'équation (3.40) est

$$y(x) = \cosh(x + c_1) + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

♦

Exercice 3.8 *Déterminer l'intégrale générale de l'équation suivante*

$$y^2(x)\, y''(x) + y'(x) = 0. \tag{3.42}$$

Solution de l'exercice 3.8

Solution générale de l'équation (3.42) :

L'équation (3.42) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 non linéaire.

Comme l'équation (3.42) ne dépend pas de la variable x, alors, pour sa résolution, posons

$$\begin{aligned} y'(x) = z(y) \quad \Rightarrow y''(x) \quad &= y'(x)\, z'(y), \\ &= z(y)\, z'(y). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (3.42) \quad &\Leftrightarrow \quad y^2\, z(y)\, z'(y) + z(y) = 0, \\ &\Leftrightarrow \quad y^2\, z'(y) + 1 = 0, \end{aligned}$$

laquelle représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 à variables séparées. Sa solution générale z_g est

$$z_g(y) = \frac{1 + c_1\, y}{y}, \quad c_1 \in \mathbb{R}^*.$$

Comme $y'(x) = z(y)$. Alors,

$$\begin{aligned}
z(y) = \frac{1+c_1 y}{y} \quad &\Rightarrow \quad y'(x) = \frac{1+c_1 y(x)}{y(x)}, \quad c_1 \in \mathbb{R}^*,\\
&\Rightarrow \quad \int \frac{y(x)}{1+c_1 y(x)}\, dy(x) = \int dx, \quad c_1 \in \mathbb{R}^*,\\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{c_1}\int dy(x) - \frac{1}{c_1}\int \frac{dy(x)}{1+c_1 y(x)} = \int dx, \quad c_1 \in \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

En dernier, l'intégrale générale de l'équation (3.42) est

$$\frac{1}{c_1} y(x) - \frac{1}{c_1^2} \ln\left|1+c_1 y(x)\right| = x + c_2, \quad c_1 \in \mathbb{R}^*,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

♦

Exercice 3.9 *Intégrer l'équation*

$$y''(x) - \left(y'(x)\right)^2 + y(x)\left(y'(x)\right)^3 = 0. \tag{3.43}$$

Solution de l'exercice 3.9

Intégration de l'équation (3.43) :

L'équation (3.43) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 non linéaire.

Il est clair que l'équation (3.43) ne dépend pas de la variable x, donc, pour sa résolution, posons

$$y'(x) = z(y) \Leftrightarrow y''(x) = z(y)z'(y).$$

En remplacent y' et y'' par z et z', respectivement, l'équation (3.43) devient

$$z(y)z'(y) - z^2(y) + y\, z^3(y) = 0. \tag{3.44}$$

Nous remarquons que $z = 0$ est une soliton évidente de l'équation (3.44), ce qui implique que $y(x) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation (3.43).

Pour $z \neq 0$, l'équation (3.44) devient

$$z' - z + y z^2 = 0,$$

laquelle est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$. Sa solution générale z_g est

$$z_g(y) = \frac{1}{y - 1 + c_1 e^{-y}}, \quad c_1 \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad c_1 \neq (1-y)e^y.$$

Comme $z(y) = y'(x)$, alors, pour tout $c_1 \in \mathbb{R}$ avec $c_1 \neq (1-y)e^y$, nous avons

$$\begin{aligned}
z(y) = \frac{1}{y-1+c_1 e^{-y}} \quad &\Rightarrow \quad y'(x) = \frac{1}{y-1+c_1 e^{-y}}, \quad c_1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad c_1 \neq (1-y)e^y,\\
&\Rightarrow \quad \int \left(y - 1 + c_1 e^{-y}\right) dy(x) = \int dx, \quad c_1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad c_1 \neq (1-y)e^y.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale générale de l'équation (3.43) est

$$x = -c_1 e^{-y} + c_2 + \frac{1}{2} y^2 - y, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad c_1 \neq (1-y)e^y.$$

♦

Exercice 3.10 *Pour l'équation différentielle suivante, trouver la solution qui vérifie les conditions indiquées*

$$\left(1+x^2\right) y''(x) - 2x\, y'(x) = 0, \tag{3.45}$$

avec $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 3$.

Solution de l'exercice 3.10

Solution de l'équation (3.45) vérifiant les conditions données :

L'équation (3.45) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables sans second membre. Les conditions associées sont des conditions initiales.

Pour résoudre l'équation (3.45), posons

$$y'(x) = z(x) \Rightarrow y''(x) = z'(x).$$

Ainsi,

$$(3.45) \Rightarrow \left(1+x^2\right) z'(x) - 2x\, z(x) = 0,$$

laquelle est une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 à variables séparées. Sa solution générale z_g est

$$z_g(x) = c_1\left(1+x^2\right), \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Comme $z(x) = y'(x)$, alors,

$$y'(x) = c_1\left(1+x^2\right), \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

qui a pour solution générale y_g

$$y_g(x) = c_1\left(x+\frac{1}{3}x^3\right) + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$. Alors $\begin{cases} c_1 = 3, \\ c_2 = 0, \end{cases}$. Ainsi, la solution particulière y_p de l'EDO (3.43) vérifiant les conditions données est

$$y_p(x) = 3x + x^3.$$

♦

Exercice 3.11 *Déterminer, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, *la solution du problème suivant*

$$\begin{cases} y''(x) - \ln x = 0, \\ y(1) = -\dfrac{3}{4}, \\ y'(1) = 0. \end{cases} \tag{3.46}$$

Solution de l'exercice 3.11

Solution du problème (3.46) :

Le problème (3.46) est constitué d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre et des conditions initiales sur la fonction y et sa première dérivée.

Pour la résolution du problème (3.46), nous passons par trois étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
$$y''(x) = 0. \tag{3.47}$$
  Le polynôme caractéristique associée à l'EDO (3.47) est
$$r^2 = 0.$$
  Ainsi,
$$r_1 = r_2 = 0.$$
  Donc : la solution générale y_h de l'équation (3.47) est
$$y_h(x) = c_1 + c_2\, x, \quad \text{avec} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode de la variation des constantes)
  Nous avons
$$y_1(x) = 1 \Rightarrow y_1'(x) = 0,$$
  et
$$y_2(x) = x \Rightarrow y_2'(x) = 1.$$
  De plus, $h(x) = \ln x$. Ainsi, le système de la variation des constantes devient
$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = & 0, \\ C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) = & h(x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\, x & = & 0, \\ \quad +C_2'(x) & = & \ln x, \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = & -x \ln x, \\ C_2'(x) = & \ln x, \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = & -\frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2 + d_1,\ d_1 \in \mathbb{R}, \\ C_2'(x) = & x \ln x - x + d_2,\ d_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
  Ainsi, La solution générale y_g de l'EDO associée au problème (3.46) est
$$y_g(x) = d_1 + d_2\, x + \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2, \quad \text{avec} \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$
- Étape 3 : Conditions initiales
  Nous avons
$$y_g(x) = d_1 + d_2\, x + \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2, \quad \text{avec} \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R},$$
  donc
$$y_g'(x) = d_2 + x \ln x - x, \quad \text{avec} \quad d_2 \in \mathbb{R}.$$
  Ainsi
$$\begin{cases} y(1) = -\dfrac{3}{4} \\ y'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{3}{4} \\ d_2 - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = -1 \\ d_2 = 1 \end{cases}.$$
  En dernier, la solution du problème de Cauchy (3.46) est
$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2 + x - 1.$$

♦

6 Problèmes et application

Problème 3.1 (Circuit RLC) *Dans cun circuit RLC en régime libre lorsque nous fermons le circuit et que le condensateur* C *se décharge dans ce circuit, la tension u aux borne du condensateur est régie par l'équation*

$$u''(t) + 2m\omega_0\, u'(t) + \omega_0^2\, u(t) = 0, \tag{3.48}$$

avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$ *et* $m = \dfrac{\mathrm{R}}{2}\sqrt{\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{L}}} > 0$.

Intégrer l'équation (3.48)*, ensuite, exprimer la solution si le condensateur est chargé à l'instant* $t = 0s$.

Solution du problème 3.1

Intégration de l'équation (3.48) :

L'équation (3.48) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre.

Pour sa résolution, construisons le polynôme caractéristique

$$r^2 + 2m\omega_0\, r + \omega_0^2 = 0, \tag{3.49}$$

dont le discriminant est

$$\Delta = 4\omega_0^2\left(m^2 - 1\right).$$

Ainsi, trois cas peuvent se présenter

- Premier cas : Si $m > 1$

  Dans ce cas, $\Delta > 0$, ainsi, l'équation (3.49) admet deux racines réelles distinctes

$$r_1 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2-1} \quad \text{et} \quad r_2 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2-1}.$$

D'où : la solution générale u_h de l'équation (3.48) est

$$u_h(t) = c_1\, e^{\left(-m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2-1}\right)t} + c_2\, e^{\left(-m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2-1}\right)t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Si, dans ce cas, le condensateur est chargé à $t = 0s$, nous avons $u_h(0) = \mathrm{E}$, de plus, le courant est nul, i.e. ; $i(0) = 0$.

Or,

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathrm{C}\frac{du_h(t)}{dt} \\ &= \mathrm{C}\Bigg(c_1\left(-m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2-1}\right)e^{\left(-m\omega_0-\omega_0\sqrt{m^2-1}\right)t} \\ &\quad + c_2\left(-m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2-1}\right)e^{\left(-m\omega_0+\omega_0\sqrt{m^2-1}\right)t}\Bigg). \end{aligned}$$

Donc,

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(0) &=& \mathrm{E} \\ i(0) &=& 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} c_1 + c_2 &=& \mathrm{E}, \\ \left(-m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2-1}\right)c_1 + \left(-m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2-1}\right)c_2 &=& 0, \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} c_1 &=& \dfrac{\mathrm{E}\left(\sqrt{m^2-1} - m\right)}{2\sqrt{m^2-1}}, \\[2ex] c_2 &=& \dfrac{\mathrm{E}\left(\sqrt{m^2-1} + m\right)}{2m}. \end{array}\right.$$

En conclusion, lorsque $t = 0s$, la solution u de l'équation (3.48) est

$$u(t) = \frac{\mathrm{E}\left(\sqrt{m^2-1}-m\right)}{2\sqrt{m^2-1}}\, e^{\left(-m\omega_0-\omega_0\sqrt{m^2-1}\right)t} + \frac{\mathrm{E}\left(\sqrt{m^2-1}+m\right)}{2m}\, e^{\left(-m\omega_0+\omega_0\sqrt{m^2-1}\right)t}.$$

- Deuxième cas : Si $m = 1$
Dans ce cas, $\Delta = 0$, ainsi, l'équation (3.49) admet une racine réelle double

$$r_1 = r_2 = -\omega_0.$$

D'où : la solution générale u_h de l'équation (3.48) est

$$u_h(t) = c_1\, e^{-\omega_0 t} + c_2\, t\, e^{-\omega_0 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Si, dans ce cas, le condensateur est chargé à $t = 0s$, nous avons $u_h(0) = \mathrm{E}$ et le courant est nul, i.e. ; $i(0) = 0$.
Or,

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathrm{C}\frac{du_h(t)}{dt} \\ &= \mathrm{C}\Big(c_1\,(-\omega_0)\, e^{-\omega_0 t} + c_2\,(1+\omega_0\, t)\, e^{-\omega_0 t}\Big), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(0) &=& \mathrm{E} \\ i(0) &=& 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} c_1 &=& \mathrm{E}, \\ -\omega_0\, c_1 + c_2 &=& 0, \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} c_1 &=& \mathrm{E}, \\ c_2 &=& \mathrm{E}\omega_0. \end{array}\right.$$

En dernier, à l'instant $t = 0s$ la solution u de l'équation (3.48) est

$$u(t) = (1+\omega_0\, t)\, e^{-\omega_0 t}.$$

- Troisième cas : Si $m < 1$
Dans ce cas, $\Delta < 0$, ainsi, l'équation (3.49) admet une racine complexe conjuguée

$$r_1 = \overline{r_2} = -m\omega_0 + i\,\omega_0\sqrt{1-m^2}, \quad \text{avec} \quad \alpha = -m\omega_0 \text{ et } \beta = \omega_0\sqrt{1-m^2}.$$

D'où, la solution générale u_h de l'équation (3.48) est

$$u_h(t) = e^{-m\omega_0 t}\left(c_1 \cos\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}\, t\right) + c_2 \sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}\, t\right)\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Si, dans ce cas, le condensateur est chargé à $t = 0s$, nous avons $u_h(0) = \mathrm{E}$ et le courant est nul, i.e. ; $i(0) = 0$.
Or,

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathrm{C}\frac{du_h(t)}{dt}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \\ &= \mathrm{C}\, e^{-m\omega_0 t}\Bigg(-m\omega_0\left(c_1 \cos\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}\, t\right) + c_2 \sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}\, t\right)\right) \\ &\quad -c_1\,\omega_0\sqrt{1-m^2}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}\, t\right) + c_2\,\omega_0\sqrt{1-m^2}\cos\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}\, t\right)\Bigg), \\ &\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{cases} u(0) &= \mathrm{E} \\ i(0) &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 &= \mathrm{E}, \\ -m\omega_0 c_1 + \omega_0\sqrt{1-m^2}c_2 &= 0, \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 &= \mathrm{E}, \\ c_2 &= \dfrac{m\mathrm{E}}{\sqrt{1-m^2}}. \end{cases}$$

Finalement, pour $\Delta < 0$ la solution u à l'instant $t = 0s$ de l'équation (3.48) est

$$u(t) = e^{-m\omega_0 t}\left(\mathrm{E}\cos\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}\,t\right) + \frac{m\mathrm{E}}{\sqrt{1-m^2}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}\,t\right)\right).$$

◀

Problème 3.2 (Équation de Bessel et série entière) *L'équation donnée par*

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right)y(x) = 0 \tag{3.50}$$

où k est une constante est dite équation de Bessel. Elle se rencontre dans un grand nombre de problèmes de mécaniques et d'électricité.

Chercher les solutions de cette équation sous la forme d'une série entière de la forme

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Solution du problème 3.2

Solution générale y_h de l'équation (3.50) :

L'équation (3.50) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables sans second membre.

Nous avons

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n\geq 0}(m+n)\,a_n\,x^{n+m-1},$$
$$\Rightarrow y''(x) = \sum_{n\geq 0}(m+n)\,(n+m-1)\,a_n\,x^{n+m-2}.$$

En remplaçant y, y' et y'' dans l'équation (3.50), nous obtenons

$$\sum_{n\geq 0}\left((n+m)^2 - k^2\right)a_n\,x^{n+m-2} + \sum_{n\geq 0} a_n\,x^{n+m} = 0$$

.

- Si $k^2 = (n+m)^2$, alors, la solution évidente $y_h(x) = 0$ est obtenue.
- Si $k^2 \neq (n+m)^2$, alors, après développement, nous obtenons

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{k^2 - (m+n+2)^2}, \quad a_0\left(m^2 - k^2\right) = 0 \quad \text{et} \quad a_1 = 0.$$

Donc : deux cas peuvent se présenter :

■ Si $m = k$, alors,

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(2k+n+2)} \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(2k+n)}.$$

- Si $n = 2p+1$, alors, $a_{2p+1} = 0$ vu que $a_1 = 0$.
- Si $n = 2p$, alors,

$$a_{2p} = -\frac{a_{2p-2}}{2p(2k+2p)}, \cdots, a_2 = -\frac{a_0}{2(2k+2)}.$$

Donc :

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \frac{a_0}{p!\,(k+1)\,(k+2)\cdots(k+p)}$$

Ainsi, la première solution particulière y_1 est

$$y_1(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{a_0}{2^{2p}\, p!\,(k+1)\,(k+2)\cdots(k+p)} x^{2p+k}.$$

■ Si $m = -k$, nous obtenons la deuxième solution particulière y_2 laquelle est

$$y_2(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{a_0}{2^{2p}\, p!\,(1-k)\,(2-k)\cdots(p-k)} x^{2p-k}.$$

y_1 et y_2 étant deux solutions particulières linéairement indépendantes, nous aurons, donc

$$y_h(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{a_0}{2^{2p}\, p!} \left(\frac{c_1}{(k+1)\cdots(k+p)} x^{2p+k} + \frac{c_2}{(1-k)\cdots(p-k)} x^{2p-k} \right) \quad c_1\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Si $k = n > 0$ et $a_0 = \dfrac{1}{2^n\, n!}$, nous obtenons la fonction de Bessel d'ordre n

$$\mathrm{J}_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{n+2p}\, p!\,(n+p)!} x^{2p+n}.$$

◀

Problème 3.3 *Considérons l'équation*

$$t^2\, x''(t) + 4t\, x'(t) + (2-t^2)\, x(t) - 1 = 0. \tag{3.51}$$

1. *Montrer qu'il existe une fonction réelle $\tilde{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$, et une seule, qui soit développable en série entière en t et qui soit solution de l'équation (3.51).*
2. *Montrer que la fonction x_1 définie sur $\mathbb{R}^*$ en posant pour chaque élément t de $\mathbb{R}^*$*

$$x_1(t) = \frac{\cosh(t)}{t^2},$$

est une solution particulière de l'équation sans second membre associée à l'équation (3.51).

3. *Déterminer la solution générale x_g de l'équation (3.51).*

Solution du problème 3.3

L'équation (3.51) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables avec second membre.

1. *Montrons qu'il existe une fonction réelle $\tilde{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$, et une seule, qui soit développable en série entière en t et qui soit solution de l'équation* (3.51) :

Si $\tilde{x}$ est une fonction réelle développable en série entière sur $\mathbb{R}^*$ laquelle est solution de l'équation (3.51), alors, posons

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n,$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombre réels. Ainsi,

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n \quad\Rightarrow\quad \tilde{x}'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, t^{n-1},$$
$$\Rightarrow\quad \tilde{x}''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, t^{n-2}.$$

En remplaçant $\tilde{x}$, $\tilde{x}'$ et $\tilde{x}''$ dans l'équation (3.51), nous obtenons

$$(3.51) \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, t^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, t^n + (2-t^2)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n - 1 = 0,$$

soit encore,

$$(-1+2a_0) + 6a_1\, t + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\big(n(n-1)+4n+2\big)a_n - a_{n-2}\right] t^n = 0.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2},\\ a_1 &= 0, \end{aligned}$$

et pour tout entier n supérieur ou égale à 2, nous aurons

$$a_n = \frac{1}{n^2+3n+2}\, a_{n-2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}\, a_{n-2},$$

donc

$$\begin{aligned} a_n &= 0 && \text{si} \quad n \text{ est impair},\\ a_n &= \frac{1}{(n+2)!} && \text{si} \quad n \text{ est pair}. \end{aligned}$$

Or, nous pouvons voir que ces coefficients définissent une série entière dont le rayon de convergence est $+\infty$. Donc, nous aurons

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{[2(n+1)]!},$$

par suite

$$t^2\, \tilde{x}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!},$$

et

$$t^2\, \tilde{x}(t) + 1 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!}.$$

Or,

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!} = \cosh(t).$$

En dernier, pour tout élément $t \in \mathbb{R}^*$, nous avons

$$\tilde{x}(t) = \frac{\cosh(t) - 1}{t^2}.$$

2. *Montrons que la fonction* $x_1(t) = \dfrac{\cosh(t)}{t^2}$ *définie sur* $\mathbb{R}^*$ *est une solution particulière de l'équation sans second membre associée à l'équation* (3.51) :

$$\left(x_1(t) = \frac{\cosh(t)}{t^2} \text{ est une solution particulière de l'équation sans second membre associée à l'équation (3.51)}\right) \Leftrightarrow \left(t^2 x_1''(t) + 4t\, x_1'(t) + (2-t^2)\, x_1(t) = 0\right).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} x_1(t) = \frac{\cosh(t)}{t^2} \quad &\Rightarrow \quad x_1'(t) = \frac{\sinh(t)}{t^2} - \frac{2\cosh(t)}{t^3}, \\ &\Rightarrow \quad x_1''(t) = \frac{\cosh(t)}{t^2} + 6\frac{\cosh(t)}{t^4} - 4\frac{\sinh(t)}{t^3}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} t^2 x_1''(t) + 4t\, x_1'(t) + (2-t^2)\, x_1(t) &= \cosh(t) + 6\frac{\cosh(t)}{t^2} - 4\frac{\sinh(t)}{t} + 4\frac{\sinh(t)}{t} \\ &\quad -8\frac{\cosh(t)}{t^2} + 2\frac{\cosh(t)}{t^2} - \cosh(t), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc : pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x_1(t) = \dfrac{\cosh(t)}{t^2}$ définie bien une solution particulière de l'équation sans second membre associée à l'équation (3.51).

3. *Déterminons la solution générale x_g de l'équation* (3.51) :

L'équation (3.51) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients variables avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
  $$t^2 x''(t) + 4t\, x'(t) + (2-t^2)\, x(t) = 0. \tag{3.52}$$
  Comme $x_1(t) = \dfrac{\cosh(t)}{t^2}$ et $b(t) = \dfrac{\mathrm{B}(t)}{\mathrm{A}(t)} = \dfrac{4}{t}$, alors,
  $$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{\cosh(t)}{t^2} \int \frac{t^4 e^{-4\int \frac{dt}{t}}}{\cosh^2(t)} dt, \\ &= \frac{\cosh(t)}{t^2} \int \frac{dt}{\cosh^2(t)}, \\ &= \frac{\cosh(t)}{t^2} \tanh(t). \end{aligned}$$
  Ainsi, la solution générale x_h de l'équation (3.52) est
  $$x_h(t) = c_1 \frac{\cosh(t)}{t^2} + c_2 \frac{\sinh(t)}{t^2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode de la variation des constantes)
  Nous avons
  $$x_1(t) = \frac{\cosh(t)}{t^2} \Rightarrow x_1'(t) = \frac{\sinh(t)}{t^2} - 2\frac{\cosh(t)}{t^3},$$
  et
  $$x_2(t) = \frac{\sinh(t)}{t^2} \Rightarrow x_2'(t) = \frac{\cosh(t)}{t^2} - 2\frac{\sinh(t)}{t^3},$$
  de plus
  $$\Big(\mathrm{A}(t) = t^2 \wedge h(t) = 1\Big) \Rightarrow \Big(h(t) = \frac{1}{t^2}\Big).$$
  Ainsi, le système de la variation des constantes devient
  $$\begin{cases} \mathrm{C}_1'(t)\,\dfrac{\cosh(t)}{t^2} + \mathrm{C}_2'(t)\,\dfrac{\sinh(t)}{t^2} = 0, \\ \mathrm{C}_1'(t)\Big(\dfrac{\sinh(t)}{t^2} - 2\dfrac{\cosh(t)}{t^3}\Big) + \mathrm{C}_2'(t)\Big(\dfrac{\cosh(t)}{t^2} - 2\dfrac{\sinh(t)}{t^3}\Big) = \dfrac{1}{t^2}. \end{cases} \tag{3.53}$$
  $$(3.53) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{C}_1'(t) = -\sinh(t) \\ \mathrm{C}_2'(t) = \cosh(t), \end{cases}$$
  $$\Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{C}_1(t) = -\cosh(t) + d_1, \quad d_1 \in \mathbb{R}, \\ \mathrm{C}_2(t) = \sinh(t) + d_2, \quad d_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En dernier, la solution générale x_g de l'équation (3.51) est
$$x_g(t) = d_1\frac{\cosh(t)}{t^2} + d_2\frac{\sinh(t)}{t^2} - \frac{1}{t^2}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

◄

Chapitre 4

Équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre supérieur à 2 à coefficients constants

La résolutions des équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre supérieur à 2 à coefficients constants sera traitée dans ce chapitre.

1 Notions préliminaires et définitions

1.1 Définitions d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre supérieur à 2 à coefficients constants

Définition 4.1 *On appelle équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre n à coefficients constants, toute équation de la forme*

$$\mathrm{A}_n\, y^{(n)}(x) + \mathrm{A}_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + \mathrm{A}_2\, y''(x) + \mathrm{A}_1\, y'(x) + \mathrm{A}_0\, y(x) = \mathrm{H}(x), \tag{4.1}$$

où $\mathrm{A}_i \in \mathbb{R}$, $\forall\, i = \overline{0, n-1}$, $\mathrm{A}_n \in \mathbb{R}^*$ *et* H *une fonction bien définie de* $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Définition 4.2 *L'équation* (4.1) *peut s'écrire sous la forme*

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = h(x), \tag{4.2}$$

où $a_i = \dfrac{\mathrm{A}_i}{\mathrm{A}_n} \in \mathbb{R}$, $\forall\, i = \overline{0, n-1}$ *et* $h(x) = \dfrac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{A}_n}$ *une fonction bien définie de* $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Remarque 4.1 *La relation*

$$\mathrm{A}_n\, y^{(n)}(x) + \mathrm{A}_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + \mathrm{A}_2\, y''(x) + \mathrm{A}_1\, y'(x) + \mathrm{A}_0\, y(x) = 0, \tag{4.3}$$

ou encore,

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0, \tag{4.4}$$

est appelée équation différentielle ordinaire d'ordre n linéaire à coefficients constants sans second membre.

Exemple 4.1 *L'équation*

$$y^{(7)}(x) + 3\, y^{(2)}(x) - y(x) = x\cos x,$$

représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 7 *linéaire à coefficients constants avec second membre. Son* EDO *sans second membre associée est*

$$y^{(7)}(x) + 3\, y^{(2)}(x) - y(x) = 0.$$

1.2 Solutions d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre supérieur à 2 à coefficients constants

Définition 4.3 *La solution générale y_h de l'équation (4.3) $\big($ou encore (4.4)$\big)$ est donnée par*

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i(x), \quad c_i \in \mathbb{R},$$

où les y_i, $i = \overline{1, n}$, sont les n solutions particulières linéairement indépendantes de l'équation (4.3) $\big($ou encore (4.4)$\big)$.

Définition 4.4 *La solution générale y_g de l'équation (4.1) $\big($ou encore (4.2)$\big)$ est donnée par*

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

où y_h représente la solution générale de l'équation (4.3) $\big($ou encore (4.4)$\big)$ et y_p est la solution particulière de l'équation (4.1) $\big($ou encore (4.2)$\big)$.

Exemple 4.2 *L'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 3 à coefficients constants avec second membre*

$$y^{(3)}(x) + 7\,y^{(2)}(x) + 14\,y'(x) + 8\,y(x) = x,$$

admet comme solution générale

$$y_g(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-2x} + c_3\, e^{-4x} + \frac{1}{8}x - \frac{7}{32}, \qquad c_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,3},$$

où $y_h(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-2x} + c_3\, e^{-4x}$ avec $c_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,3}$ et $y_p(x) = \dfrac{1}{8}x - \dfrac{7}{32}$.

2 Méthode de résolution des équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre supérieur à 2 à coefficients constants

Résoudre l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre n à coefficients constants

$$\mathrm{A}_n\, y^{(n)}(x) + \mathrm{A}_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + \mathrm{A}_2\, y''(x) + \mathrm{A}_1\, y'(x) + \mathrm{A}_0\, y(x) = \mathrm{H}(x),$$

où $\mathrm{A}_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{0, n-1}$, $\mathrm{A}_n \in \mathbb{R}^*$ et H une fonction bien définie de $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, revient à résoudre l'équation sans second membre associée puis chercher une solution particulière de l'équation complète.

2.1 Intégration de l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre supérieur à 2 à coefficients constants sans second membre

Soit l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre supérieur à 2 à coefficients constants sans second membre

$$\mathrm{A}_n\, y^{(n)}(x) + \mathrm{A}_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + \mathrm{A}_2\, y''(x) + \mathrm{A}_1\, y'(x) + \mathrm{A}_0\, y(x) = 0, \tag{4.5}$$

où A_i, $i = \overline{0, n}$ sont des constantes réelles avec $\mathrm{A}_n \neq 0$.

Méthode de résolution 4.1 *Pour résoudre l'équation différentielle ordinaire* (4.5)*, nous devrons construire le polynôme caractéristique*[1]

$$A_n r^n + A_{n-1} r^{n-1} + \cdots + A_1 r + A_0 = 0. \tag{4.6}$$

Ainsi, plusieurs cas peuvent se présenter, parmi eux

- **Premier cas :** *Si les* n *racines du polynôme* (4.6) *sont réelles distinctes* ($r_i \neq r_j$, $\forall i, j = \overline{1, n}$ *et* $i \neq j$)*. Alors, la solution générale* y_h *de l'équation* (4.5) *est*

$$y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_{n-1} e^{r_{n-1} x} + c_n e^{r_n x}, \quad c_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, n}.$$

- **Deuxième cas :** *Si par exemple, le polynôme caractéristique* (4.6) *admet une racine réelle de multiplicité* $k < n$ *et* $n-k$ *racines réelles distinctes. Alors, la solution générale* y_h *de l'équation* (4.5) *est*

$$\begin{aligned} y_h(x) =& c_1 e^{r_1 x} + c_2\, x\, e^{r_1 x} + \cdots + c_k\, x^{k-1} e^{r_1 x} + c_{k+1} e^{r_{k+1} x} \cdots + c_{n-1} e^{r_{n-1} x} + c_n e^{r_n x}, \\ & c_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

- **Troisième cas :** *Si par exemple, le polynôme caractéristique* (4.6) *admet* k *racines complexes conjuguées, une racine réelle de multiplicité* m *et* $n-m-2k$ *racines réelles distinctes. Alors, la solution générale* y_h *de l'équation* (4.5) *est*

$$\begin{aligned} y_h(x) =& e^{\alpha_1 x}\left(c_1 \cos\left(\beta_1 x\right) + c_2 \sin\left(\beta_1 x\right)\right) + e^{\alpha_2 x}\left(c_3 \cos\left(\beta_2 x\right) + c_4 \sin\left(\beta_2 x\right)\right) + \cdots \\ & + e^{\alpha_k x}\left(c_{2k-1} \cos\left(\beta_k x\right) + c_{2k} \sin\left(\beta_k x\right)\right) + c_{2k+1} e^{r_{2k+1} x} + \cdots + c_{2k+m}\, x^{m-1} e^{r_{2k+1} x} \\ & + c_{2k+m+1} e^{r_{2k+m+1} x} + \cdots + c_n e^{r_n x}, \quad c_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Remarque 4.2 *Soit le polynôme*

$$A_n r^n + A_{n-1} r^{n-1} + \cdots + A_2 r^2 + A_1 r + A_0 = 0, \tag{4.7}$$

où $A_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i = \overline{0, n-1}$ *et* $A_n \in \mathbb{Z}^*$*. Alors,* $r = \dfrac{p}{q}$ *est une racine rationnelle du polynôme* (4.7) *où* p *est un multiple de* A_0 *et* q *est un multiple de* A_n*.*

Exemple 4.3 *Soit à résoudre, dans* $\mathbb{R}$*, l'équation*

$$3\, y^{(3)}(x) + 5\, y''(x) + 10\, y'(x) - 4\, y(x) = 0. \tag{4.8}$$

Solution de l'exemple 4.3

L'équation (4.8) est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 3 à coefficients constants sans second membre.

Le polynôme caractéristique associé à l'équation (4.8) est

$$3\, r^3 + 5\, r^2 + 10\, r - 4 = 0.$$

Nous avons

$$\begin{array}{lll} A_0 = -4 & \text{ses multiples dans } \mathbb{Z} \text{ sont} & \pm 1\,;\pm 2\,;\pm 4, \\ A_3 = +3 & \text{ses multiples dans } \mathbb{Z} \text{ sont} & \pm 1\,;\pm 3. \end{array}$$

1. La même procédure que celle du chapitre 3 est utilisée pour déterminer le polynôme caractéristique.

Nous remarquons que $\dfrac{p}{q} = \dfrac{1}{3}$ est une racine du polynôme caractéristique. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
3\,r^3 + 5\,r^2 + 10\,r - 4 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(r - \frac{1}{3}\right)\left(r + 1 - i\sqrt{3}\right)\left(r + 1 + i\sqrt{3}\right) = 0,\\
&\Leftrightarrow \quad \left(r_1 = \frac{1}{3} \wedge r_2 = \overline{r_3} = -1 + i\sqrt{3}\right).
\end{aligned}
$$

En dernier, la solution générale y_h de l'équation (4.8) est

$$
y_h(x) = c_1\, e^{\frac{1}{3}x} + e^{-x}\left(c_2 \cos\left(\sqrt{3}x\right) + c_3 \sin\left(\sqrt{3}x\right)\right), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.
$$

★

2.2 Intégration de l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre supérieur à 2 à coefficients constants avec second membre

Soit l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre supérieur à 2 à coefficients constants avec second membre

$$
\mathrm{A}_n\, y^{(n)}(x) + \mathrm{A}_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + \mathrm{A}_2\, y''(x) + \mathrm{A}_1\, y'(x) + \mathrm{A}_0\, y(x) = \mathrm{H}(x), \tag{4.9}
$$

où $\mathrm{A}_i \in \mathbb{R}$, $\forall\, i = \overline{0, n-1}$, $\mathrm{A}_n \in \mathbb{R}^*$ et H une fonction bien définie de $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour résoudre l'équation (4.9), nous pouvons procéder par l'une des deux méthodes suivantes.

2.2.1 Première méthode : Méthode de la variation des constantes

Méthode de résolution 4.2 *On sait que la solution générale y_h de l'équation différentielle ordinaire sans second membre associée à l'équation (4.9) s'écrit sous la forme*

$$
y_h(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \cdots + c_{n-1}\, y_{n-1}(x) + c_n\, y_n(x), \quad c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}. \tag{4.10}
$$

Résoudre l'équation (4.9) par la méthode de la variation des constantes revient à remplacer les constantes $c_1, \cdots, c_n$ dans la solution (4.10) par des fonctions $\mathrm{C}_1, \cdots, \mathrm{C}_n$ respectivement.

Donc : la solution générale y_g de l'équation (4.9) est

$$
y_g(x) = \mathrm{C}_1(x)\, y_1(x) + \mathrm{C}_2(x)\, y_2(x) + \cdots + \mathrm{C}_{n-1}(x)\, y_{n-1}(x) + \mathrm{C}_n(x)\, y_n(x), \quad d_1, \cdots, d_n \in \mathbb{R},
$$

où les fonctions $\mathrm{C}_1, \cdots, \mathrm{C}_n$ satisfaisant le système

$$
\begin{cases}
\mathrm{C}_1'(x)\, y_1(x) + \cdots + \mathrm{C}_n'(x)\, y_n(x) & = & 0,\\
\mathrm{C}_1'(x)\, y_1'(x) + \cdots + \mathrm{C}_n'(x)\, y_n'(x) & = & 0,\\
\vdots & & \\
\mathrm{C}_1'(x)\, y_1^{(n-2)}(x) + \cdots + \mathrm{C}_n'(x)\, y_n^{(n-2)}(x) & = & 0,\\
\mathrm{C}_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + \mathrm{C}_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x) & = & \dfrac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{A}_n}.
\end{cases}
$$

Exemple 4.4 *Soit à résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation*

$$
y^{(4)}(x) + 4\, y^{(3)}(x) + 4\, y''(x) = 1. \tag{4.11}
$$

Solution de l'exemple 4.4

Solution générale de l'équation (4.11) :

L'équation (4.11) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 4 à coefficients constants avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
  $$y^{(4)}(x) + 4\,y^{(3)}(x) + 4y''(x) = 0,$$
  le polynôme caractéristique associé est
  $$r^4 + 4\,r^3 + 4\,r^2 = 0.$$
  Ainsi,
  $$r^4 + 4\,r^3 + 4\,r^2 = 0 \Leftrightarrow (r_1 = r_2 = 0 \wedge r_3 = r_4 = -2)\,.$$
  Donc : la solution générale y_h de l'EDO linéaire sans second membre est
  $$y_h(x) = c_1 + c_2\,x + c_3\,e^{-2x} + c_4\,x\,e^{-2x}, \quad c_1,\,c_2,\,c_3,\,c_4 \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode de la variation des constantes)
  Nous avons
  $$\begin{array}{lllllll}
  y_1(x) = 1 & ; & y_2(x) = x & ; & y_3(x) = e^{-2x} & ; & y_4(x) = x\,e^{-2x}. \\
  y_1'(x) = 0 & ; & y_2'(x) = 1 & ; & y_3'(x) = -2\,e^{-2x} & ; & y_4'(x) = (1-2x)\,e^{-2x}. \\
  y_1''(x) = 0 & ; & y_2''(x) = 0 & ; & y_3''(x) = 4\,e^{-2x} & ; & y_4''(x) = (-4+4x)\,e^{-2x}. \\
  y_1^{(3)}(x) = 0 & ; & y_2^{(3)}(x) = 0 & ; & y_3^{(3)}(x) = -8\,e^{-2x} & ; & y_4^{(3)}(x) = (12-8x)\,e^{-2x}. \\
  \mathrm{H}(x) = 1 & ; & \mathrm{A}_4 = 1. & & & &
  \end{array}$$
  Ainsi, le système de la variation des constantes devient
  $$\left\{\begin{array}{ll}
  \mathrm{C}_1'(x)\,y_1(x) + \mathrm{C}_2'(x)\,y_2(x) + \mathrm{C}_3'(x)\,y_3(x) + \mathrm{C}_4'(x)\,y_4(x) & = 0, \\
  \mathrm{C}_1'(x)\,y_1'(x) + \mathrm{C}_2'(x)\,y_2'(x) + \mathrm{C}_3'(x)\,y_3'(x) + \mathrm{C}_4'(x)\,y_4'(x) & = 0, \\
  \mathrm{C}_1'(x)\,y_1''(x) + \mathrm{C}_2'(x)\,y_2''(x) + \mathrm{C}_3'(x)\,y_3''(x) + \mathrm{C}_4'(x)\,y_4''(x) & = 0, \\
  \mathrm{C}_1'(x)\,y_1^{(3)}(x) + \mathrm{C}_2'(x)\,y_2^{(3)}(x) + \mathrm{C}_3'(x)\,y_3^{(3)}(x) + \mathrm{C}_4'(x)\,y_4^{(3)}(x) & = \dfrac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{A}_4}.
  \end{array}\right. \tag{4.12}$$

$$(4.12) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{C}_1'(x) & + & \mathrm{C}_2'(x)\,x & + & \mathrm{C}_3'(x)\,e^{-2x} & + & \mathrm{C}_4'(x)\,x\,e^{-2x} & = & 0, \\
 & & \mathrm{C}_2'(x) & + & \mathrm{C}_3'(x)\,(-2e^{-2x}) & + & \mathrm{C}_4'(x)\,(1-2x)\,e^{-2x} & = & 0, \\
 & & & & \mathrm{C}_3'(x)\,(4e^{-2x}) & + & \mathrm{C}_4'(x)\,(-4+4x)\,e^{-2x} & = & 0, \\
 & & & & \mathrm{C}_3'(x)\,(-8e^{-2x}) & + & \mathrm{C}_4'(x)\,(12-8x)\,e^{-2x} & = & 1,
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}
\mathrm{C}_1'(x) & = & -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{4}, \\
\mathrm{C}_2'(x) & = & \dfrac{1}{4}, \\
\mathrm{C}_3'(x) & = & \dfrac{1}{4}(1-x)\,e^{2x}, \\
\mathrm{C}_4'(x) & = & \dfrac{1}{4}\,e^{2x},
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} C_1(x) & = & -\dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{1}{4}x + d_1, \quad d_1 \in \mathbb{R}, \\ C_2(x) & = & \dfrac{1}{4}x + d_2, \quad d_2 \in \mathbb{R}, \\ C_3(x) & = & -\dfrac{1}{8}x\, e^{2x} + \dfrac{3}{16}e^{2x} + d_3, \quad d_3 \in \mathbb{R}, \\ C_4(x) & = & \dfrac{1}{8}e^{2x} + d_4, \quad d_4 \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (4.11) est

$$y_g(x) = \tilde{d}_1 + \tilde{d}_2\, x + d_3\, e^{-2x} + d_4\, x\, e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2, \quad \tilde{d}_1, \tilde{d}_2\, d_3, d_4 \in \mathbb{R}.$$

★

2.2.2 Deuxième méthode : Méthode des coefficients indéterminés

La solution générale y_g de l'équation (4.9) est décrite par le théorème suivant.

Théorème 4.1 *La solution générale y_g de l'équation (4.9) est obtenue en sommant la solution générale y_h de l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre supérieure à 2 à coefficients constants sans second membre associée à l'équation (4.9) et une solution particulière y_p de l'équation (4.9).*

Autrement dit

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Méthode de résolution 4.3 *Pour chercher la solution particulière y_p de l'équation (4.9), l'idée est de poser une fonction avec des coefficients à déterminer mais qui est semblable où similaire à celle de $\dfrac{H(x)}{A_n}$. Par substitution dans l'équation (4.9), nous déterminons les valeurs des coefficients inconnues.*

Remarque 4.3 *Cette méthode peut être utilisée uniquement lorsque la fonction $\dfrac{H(x)}{A_n}$ est constituée de somme ou produit de fonctions polynomiale et/ou des fonctions du type* $\cos(\alpha x)$, $\sin(\beta x)$, $e^{\gamma x}, \cdots$.

Remarque 4.4 *Cette méthode peut échouer s'il y a un chevauchement entre la solution générale y_h de l'équation sans second membre et la solution particulière y_p avec les coefficients à déterminer.*

Exemple 4.5 *Soit à résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation*

$$y^{(4)}(x) + 4\, y^{(3)}(x) + 4y''(x) = 1. \tag{4.13}$$

Solution de l'exemple 4.5

Solution générale de l'équation (4.13) :

L'équation (4.13) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 4 à coefficients constants avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
  $$y^{(4)}(x)+4\,y^{(3)}(x)+4y^{(2)}(x)=0.$$
  D'après l'exemple 4.4, la solution générale y_h de l'EDO linéaire sans second membre associée à l'équation (4.13) est
  $$y_h(x)=c_1+c_2\,x+c_3\,e^{-2x}+c_4\,x\,e^{-2x},\quad c_1,\,c_2,\,c_3,\,c_4\in\mathbb{R}.$$
- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode des coefficients indéterminés)
  Comme $h(x)=1$, $y_1(x)=1$ et $y_2(x)=x$, alors, posons
  $$y_p(x)=ax^2+bx+c.$$
  Ainsi,
  $$\begin{aligned} y_p(x)=ax^2+bx+c \quad &\Rightarrow\quad y_p'(x)=2ax+b,\\ &\Rightarrow\quad y_p''(x)=2a,\\ &\Rightarrow\quad y_p^{(3)}(x)=y_p^{(4)}(x)=0.\end{aligned}$$
  En remplaçant y_p, y_p', y_p'', $y_p^{(3)}$ et $y_p^{(4)}$ dans l'équation (4.13), nous obtenons
  $$y_p(x)=\frac{1}{8}x^2.$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (4.13) est
$$y_g(x)=c_1+c_2\,x+c_3\,e^{-2x}+c_4\,x\,e^{-2x}+\frac{1}{8}x^2,\quad c_1,\,c_2,\,c_3,\,c_4\in\mathbb{R}.$$

★

3 Problèmes à conditions initiales

Un problème à conditions initiales est composé d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre supérieurs à 2 à coefficients constants de la forme
$$\mathrm{A}_n\,y^{(n)}(x)+\mathrm{A}_{n-1}\,y^{(n-1)}(x)+\cdots+\mathrm{A}_2\,y''(x)+\mathrm{A}_1\,y'(x)+\mathrm{A}_0\,y(x)=\mathrm{H}(x),$$
où $\mathrm{A}_i\in\mathbb{R}$, $\forall i=\overline{0,n-1}$, $\mathrm{A}_n\in\mathbb{R}^*$ et H une fonction bien définie de $\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et de n conditions initiales sur la fonction inconnue y et sur ses $n-1$ premières dérivées y', y'', $\cdots$, $y^{(n-1)}$
$$\begin{cases} y(x_0) &= y_0,\\ y'(x_0) &= y_1,\\ &\vdots\\ y^{(n-2)}(x_0) &= y_{n-2},\\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}.\end{cases}$$
L'existence et l'unicité d'un problème à conditions initiales découle du théorème théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz (théorème 1.1).

Exemple 4.6 *Soit à résoudre*

$$\begin{cases} y^{(4)}(t) - y(t) = 0, \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \\ y^{(3)} = 1. \end{cases} \tag{4.14}$$

Solution de l'exemple 4.6

<u>*Résolution du problème* (4.14) :</u>

Le problème (4.14) représente un problème à conditions initiales. L'équation associée est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 4 à coefficients constants sans second membre.

Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est

$$r^4 - 1 = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} r^4 - 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad (r^2-1)(r^2+i) = 0, \\ &\Rightarrow \quad \left(r_1 = 1 \wedge r_2 = -1 \wedge r_3 = \overline{r_4} = i\right). \end{aligned}$$

Donc : la solution générale de l'équation différentielle ordinaire associée au problème (4.14) est

$$y_h(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Il reste à chercher les valeurs des constantes c_1, c_2, c_3 et c_4. Comme

$$y_h(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Alors,

$$\begin{array}{rcll} y_h'(x) &=& c_1\, e^x - c_2\, e^{-x} - c_3 \sin x + c_4 \cos x, & c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}, \\ y_h''(x) &=& c_1\, e^x + c_2\, e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x, & c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}, \\ y_h^{(3)}(x) &=& c_1\, e^x - c_2\, e^{-x} + c_3 \sin x - c_4 \cos x, & c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} y(0) &=& 0 \\ y'(0) &=& 0 \\ y''(0) &=& 0 \\ y^{(3)}(0) &=& 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 &=& 0 \\ c_1 - c_2 + c_4 &=& 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 &=& 0 \\ c_1 - c_2 - c_4 &=& 1 \end{cases},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 &=& \frac{1}{4} \\ c_2 &=& -\frac{1}{4} \\ c_3 &=& 0 \\ c_4 &=& -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

En dernier, la solution y_p du problème de Cauchy (4.14) est

$$y_p(x) = \frac{1}{4}\, e^x - \frac{1}{4}\, e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x.$$

★

4 Exercices

Exercice 4.1 *Intégrer les équations différentielles ordinaires suivantes*

1. $y^{(3)}(x) + y''(x) = 3.$
2. $y^{(3)}(x) + y(x) = x.$

Solution de l'exercice 4.1

Intégration des équations différentielles ordinaires :

1.
$$y^{(3)}(x) + y''(x) = 3. \tag{4.15}$$

L'équation (4.15) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 3 linéaire à coefficients constants avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
  $$y^{(3)}(x) + y''(x) = 0. \tag{4.16}$$
  Le polynôme caractéristique associé à l'équation (4.16) est
  $$r^3 + r^2 = 0,$$
  ainsi
  $$\begin{aligned} r^3 + r^2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad r^2(r+1) = 0, \\ &\Rightarrow \quad \big(r_1 = -1 \wedge r_2 = r_3 = 0\big). \end{aligned}$$
  D'où : la solution générale y_h de l'équation (4.16) est
  $$y_h(x) = c_1\, e^{-x} + c_2 + c_3\, x, \qquad \text{avec} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode de la variation des constantes)
  Nous avons
  $$\begin{array}{lclcl} y_1(x) = e^{-x} & ; & y_2(x) = 1 & ; & y_3(x) = x, \\ y_1'(x) = -e^{-x} & ; & y_2'(x) = 0 & ; & y_3'(x) = 1, \\ y_1''(x) = e^{-x} & ; & y_2''(x) = 0 & ; & y_3''(x) = 0, \end{array}$$
  de plus,
  $$\mathrm{H}(x) = 3 \quad ; \quad \mathrm{A}_3 = 1.$$
  Ainsi, le système de la variation des constantes devient
  $$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{C}_1'(x)\, e^{-x} + \mathrm{C}_2'(x) + \mathrm{C}_3'(x)\, x & = & 0 \\ \mathrm{C}_1'(x)\, (-e^{-x}) + \mathrm{C}_3'(x) & = & 0 \\ \mathrm{C}_1'(x)\, e^{-x} & = & 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{C}_1'(x) & = & 3e^{x}, \\ \mathrm{C}_2'(x) & = & -3x - 3, \\ \mathrm{C}_3'(x) & = & 3, \end{array} \right.$$
  $$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{C}_1(x) & = & 3e^{x} + d_1, \quad d_1 \in \mathbb{R}, \\ \mathrm{C}_2(x) & = & -\frac{3}{2}x^2 - 3x + c_4, \quad c_4 \in \mathbb{R}, \\ \mathrm{C}_3(x) & = & 3x + c_5, \quad c_2 \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (4.15) est

$$y_g(x) = d_1\, e^{-x} + d_2 + d_3\, x + \frac{3}{2}\, x^2, \quad \text{avec} \quad d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}.$$

2.

$$y^{(3)}(x) + y(x) = x. \tag{4.17}$$

L'équation (4.17) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 3 linéaire à coefficients constants avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
  $$y^{(3)}(x) + y(x) = 0. \tag{4.18}$$
  Le polynôme caractéristique associé à l'équation (4.18) est
  $$r^3 + 1 = 0.$$
  Ainsi
  $$\begin{aligned} r^3 + 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \left(r+1\right)\left(r - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{1} i\right)\left(r - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{1} i\right) = 0, \\ &\Rightarrow \quad \left(r_1 = -1 \wedge r_2 = \overline{r_3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{1} i\right). \end{aligned}$$
  Donc : la solution générale y_h de l'équation (4.18) est
  $$y_h(x) = c_1\, e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}\left(c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + c_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right), \quad \text{avec} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$
- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode des coefficients indéterminés)
  Posons
  $$\begin{aligned} y_p(x) = ax + b \quad &\Rightarrow \quad y_p'(x) = a, \\ &\Rightarrow \quad y_p''(x) = y_p'''(x) = 0. \end{aligned}$$
  En substituant y_p et y_p''' dans l'équation (4.17), nous obtenons
  $$a = 1,$$
  ainsi,
  $$y_p(x) = x.$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (4.17) est

$$y_g(x) = c_1\, e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}\left(c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + c_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right) + x, \quad \text{avec} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

♦

Exercice 4.2 *Trouver la solution des équations différentielles ordinaires suivantes*

1. $y^{(4)}(x) + 4y^{(3)}(x) + 4y''(x) = 1.$

2. $y^{(4)}(x) - 6y^{(3)}(x) + 9y''(x) - 6y'(x) + 8y(x) = \cos(x)$.

Solution de l'exercice 4.2

Résolution des équations différentielles ordinaires :

1.
$$y^{(4)}(x) + 4y^{(3)}(x) + 4y''(x) = 1. \tag{4.19}$$

L'équation (4.19) représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 4 linéaire à coefficients constants avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
$$y^{(4)}(x) + 4y^{(3)}(x) + 4y''(x) = 0. \tag{4.20}$$
  Le polynôme caractéristique associé à l'équation (4.20) est
$$r^4 + 4r^3 + 4r^2 = 0,$$
  ainsi :
$$\begin{aligned} r^4 + 4r^3 + 4r^2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad r^2(r+2)^2 = 0, \\ &\Rightarrow \quad \big(r_1 = r_2 = -2 \wedge r_3 = r_4 = 0\big). \end{aligned}$$
  Donc : la solution générale y_h de l'équation (4.20) est
$$y_h(x) = c_1\, e^{-2x} + c_2\, xe^{-2x} + c_3 + c_4\, x, \quad \text{avec} \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode de la variation des constantes)
  Nous avons
$$\begin{array}{llllllll} y_1(x) = e^{-2x} & ; & y_2(x) = xe^{-2x} & ; & y_3(x) = 1 & ; & y_4(x) = x, \\ y_1'(x) = -2e^{-2x} & ; & y_2'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} & ; & y_3'(x) = 0 & ; & y_4'(x) = 1, \\ y_1''(x) = 4e^{-2x} & ; & y_2''(x) = -4e^{-2x} + 4xe^{-2x} & ; & y_3''(x) = 0 & ; & y_4''(x) = 0, \\ y_1'''(x) = -8e^{-2x} & ; & y_2'''(x) = 12e^{-2x} - 8xe^{-2x} & ; & y_3'''(x) = 0 & ; & y_4'''(x) = 0, \end{array}$$
  de plus
$$\big(\mathrm{H}(x) = 3 \wedge \mathrm{A}_4 = 1\big) \Rightarrow \big(h(x) = 3\big).$$
  Ainsi, le système de la variation des constantes devient
$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{C}_1'(x)\, e^{-2x} + \mathrm{C}_2'(x)\, xe^{-2x} + \mathrm{C}_3'(x) + \mathrm{C}_4'(x)\, x & = & 0, \\ \mathrm{C}_1'(x)\ (-2)\, e^{-2x} + \mathrm{C}_2'(x)\ (1-2x)\, e^{-2x} + \mathrm{C}_4'(x) & = & 0, \\ \mathrm{C}_1'(x)\ (4)\, e^{-2x} + \mathrm{C}_2'(x)\ (-4+4x)\, e^{-2x} & = & 0, \\ \mathrm{C}_1'(x)\ (-8)\, e^{-2x} + \mathrm{C}_2'(x)\ (12-8x)\, e^{-2x} & = & 1. \end{array} \right. \tag{4.21}$$

$$(4.21) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{C}_1'(x) & = & \dfrac{1}{4} e^{2x}, \\ \mathrm{C}_2'(x) & = & \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}x\right) e^{2x}, \\ \mathrm{C}_3'(x) & = & \dfrac{1}{4}, \\ \mathrm{C}_4'(x) & = & -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}x, \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} C_1(x) & = & \frac{1}{8}e^{2x} + d_1, \quad d_1 \in \mathbb{R}, \\ C_2(x) & = & \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{8}x\right) e^{2x} + d_2, \quad d_2 \in \mathbb{R}, \\ C_3(x) & = & \frac{1}{4}x + c_5, \quad c_5 \in \mathbb{R}, \\ C_4(x) & = & -\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x^2 + c_6, \quad c_6 \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (4.19) est

$$y_g(x) = d_1\, e^{-2x} + d_2\, xe^{-2x} + d_3 + d_4\, x + \frac{1}{8}x^2, \quad \text{avec} \quad d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}.$$

2.

$$y^{(4)}(x) - 6y^{(3)}(x) + 9y''(x) - 6y'(x) + 8y(x) = \cos(x). \tag{4.22}$$

L'équation (4.22) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 4 à coefficients constants avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
$$y^{(4)}(x) - 6y^{(3)}(x) + 9y''(x) - 6y'(x) + 8y(x) = 0. \tag{4.23}$$
  Le polynôme caractéristique associé à l'équation (4.23) est
$$r^4 - 6r^3 + 9r^2 - 6r + 8 = 0.$$
  Ainsi,
$$\begin{aligned} r^4 - 6r^3 + 9r^2 - 6r + 8 = 0 \quad &\Rightarrow \quad (r-2)(r-4)(r-i)(r+i) = 0, \\ &\Rightarrow \quad \left(r_1 = 2 \wedge r_2 = 4 \wedge r_3 = \overline{r_4} = i\right). \end{aligned}$$
  D'où : la solution générale y_h de l'équation (4.23) est
$$y_h(x) = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{4x} + c_3\, \cos(x) + c_4\, \sin(x), \quad \text{avec} \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode des coefficients indéterminés)
  Comme $h(x) = \cos(x)$, $y_3(x) = \cos(x)$ et $y_4(x) = \sin(x)$. Alors, posons
$$\begin{aligned} y_p(x) = (ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin x \quad &\Rightarrow \quad y_p'(x) = (cx+d+a)\cos x + (-ax-b+c)\sin x, \\ &\Rightarrow \quad y_p''(x) = (-ax-b+2c)\cos x + (-cx-d-2a)\sin x, \\ &\Rightarrow \quad y_p^{(3)}(x) = (-cx-d-3a)\cos x + (ax+b-3c)\sin x, \\ &\Rightarrow \quad y_p^{(4)}(x) = (ax+b-4c)\cos x + (cx+d+4a)\sin x. \end{aligned}$$
  En substituant y_p, y_p', y_p'', $y^{(3)}$ et $y_p^{(4)}$ dans l'équation (4.22), nous obtenons
$$a = \frac{3}{85} \quad \text{et} \quad c = \frac{7}{170},$$
  ainsi,
$$y_p(x) = \frac{3}{85}x\cos(x) + \frac{7}{170}x\sin(x).$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (4.22) est

$$y_g(x) = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{4x} + \left(c_3 + \frac{3}{85}x\right)\cos(x) + \left(c_2 + \frac{7}{170}x\right)\sin(x), \quad \text{avec} \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

♦

Exercice 4.3 *Résoudre l'équation différentielle ordinaire suivante*

$$y^{(5)}(x) - 6y^{(4)}(x) + 15y^{(3)}(x) - 20y''(x) + 14y'(x) - 4y(x) = e^x. \tag{4.24}$$

Solution de l'exercice 4.3

Solution générale de l'équation (4.24) :

L'équation (4.24) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 5 à coefficients constants avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
  $$y^{(5)}(x) - 6y^{(4)}(x) + 15y^{(3)}(x) - 20y''(x) + 14y'(x) - 4y(x) = 0. \tag{4.25}$$
  Le polynôme caractéristique associé à l'équation (4.25) est
  $$r^5 - 6r^4 + 15r^3 - 20r^2 + 14r - 4 = 0.$$
  Ainsi
  $$\begin{aligned} r^5 - 6r^4 + 15r^3 - 20r^2 + 14r - 4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad (r-1)^2(r-2)\big(r-(1+i)\big)\big(r-(1-i)\big) = 0, \\ &\Rightarrow \quad \big(r_1 = r_2 = 1 \wedge r_3 = 2 \wedge r_4 = \overline{r_5} = 1+i\big). \end{aligned}$$
  Donc : la solution générale y_h de l'équation (4.25) est
  $$y_h(x) = c_1\, e^x + c_2\, xe^x + c_3\, e^{2x} + e^x\big(c_4 \cos(x) + c_5 \sin(x)\big), \quad \text{avec} \quad c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}.$$
- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode des coefficients indéterminés)
  Comme $h(x) = e^x$, $y_1(x) = e^x$ et $y_2(x) = x\,e^x$. Alors, posons
  $$y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x.$$
  En substituant y_p, y_p', y_p'', $y^{(3)}$, $y_p^{(4)}$ et $y_p^{(5)}$ dans l'équation (4.24), nous obtenons
  $$a = -\frac{1}{2}, \quad \forall b, c \in \mathbb{R},$$
  ainsi, pour $b = c = 0$, nous aurons,
  $$y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2\, e^x.$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (4.24) est

$$y_g(x) = c_1\, e^x + c_2\, xe^x + c_3\, e^{2x} + e^x\big(c_4 \cos(x) + c_5 \sin(x)\big) - \frac{1}{2}x^2\, e^x, \quad \text{avec} \quad c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}.$$

♦

Exercice 4.4 *Déterminer la solution du problème à conditions initiales suivant*

$$\begin{cases} z^{(3)}(t)+6z^{(2)}(t)+11z'(t)+6z(t)=e^{-t}, \\ z(0)=0, \\ z'(0)=1, \\ z^{(2)}(0)=1. \end{cases} \tag{4.26}$$

Solution de l'exercice 4.4

Résolution du problème (4.26) :

Le problème (4.26) est constitué d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 3 à coefficients constants avec second membre et des conditions initiales sur la fonction z et ses deux premières dérivées.

Pour la résolution du problème (4.26), nous passons par trois étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
  $$z^{(3)}(t)+6z^{(2)}(t)+11z'(t)+6z(t)=0. \tag{4.27}$$
  Le polynôme caractéristique associée à l'EDO (4.27) est
  $$r^3+6r^2+11r+6=0,$$
  ainsi,
  $$\begin{aligned} r^3+6r^2+11r+6=0 &\Rightarrow (r+3)(r+2)(r+1)=0, \\ &\Rightarrow \big(r_1=-3 \wedge r_2=-2 \wedge r_3=-1\big). \end{aligned}$$
  Donc : la solution générale z_h de l'équation (4.27) est
  $$z_h(t)=c_1e^{-3t}+c_2e^{-2t}+c_3e^{-t}, \quad \text{avec} \quad c_1,\, c_2,\, c_3 \in \mathbb{R}.$$
- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode des coefficients indéterminées)
  Soit la solution particulière
  $$z_p(t)=(at+b)e^{-t}.$$
  En substituant $z_p(t)$, $z_p'(t)$ et $z_p''(t)$ dans l'équation complète associée au problème (4.26), nous obtenons pour $b=0$,
  $$z_p(t)=\frac{1}{2}te^{-t}.$$
  D'où : la solution générale z_g de l'EDO associée au problème (4.26) est
  $$z_g(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+c_3e^{-3t}+\frac{1}{2}te^{-t}, \quad \text{avec} \quad c_1,\, c_2,\, c_3 \in \mathbb{R}.$$
- Étape 3 : Conditions initiales
  Comme
  $$z_g(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+c_3e^{-3t}+\frac{1}{2}te^{-t}, \quad \text{avec} \quad c_1,\, c_2,\, c_3 \in \mathbb{R},$$

alors
$$z_g'(t) = \left(-c_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right) e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} - 3c_3 e^{-3t}, \quad \text{avec} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$
et
$$z_g''(t) = \left(c_1 - 1 + \frac{1}{2}t\right) e^{-t} + 4c_2 e^{-2t} + 9c_3 e^{-3t}, \quad \text{avec} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$
Ainsi
$$\begin{cases} z(0) &= 0 \\ z'(0) &= 1 \\ z^{(2)}(0) &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 &= 0, \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= -\frac{1}{2}, \\ c_1 + 4c_2 + 9c_3 &= 2, \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 &= \dfrac{9}{4}, \\ c_2 &= -4, \\ c_3 &= \dfrac{7}{4}. \end{cases}$$
En dernier, la solution particulière du problème (4.26) est
$$z_p(t) = \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{2}t\right)e^{-t} - 4\,e^{-2t} + \frac{7}{4}e^{-3t}.$$

♦

5 Problèmes et applications

Problème 4.1 *Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'équation différentielle ordinaire*
$$x^3\, y^{(3)}(x) - 6x^2\, y^{(2)}(x) + 15x\, y^{(1)}(x) - 15\, y(x) = x^4. \tag{4.28}$$

Trouver la solution de l'équation (4.28) sachant que l'équation sans second membre associée admet des solutions particulières du type x^m, $m \in \mathbb{R}^*$.

Solution du problème 4.1

Solution générale de l'équation (4.28) :

L'équation (4.28) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 3 à coefficients variables avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre

  Nous avons
$$x^3\, y^{(3)}(x) - 6x^2\, y^{(2)}(x) + 15x\, y^{(1)}(x) - 15\, y(x) = 0. \tag{4.29}$$

$$\Big(\tilde{y}(x) = x^m \text{ est une solution particulière de l'équation (4.29)}\Big)$$
$$\Leftrightarrow \Big(x^3\, \tilde{y}^{(3)}(x) - 6x^2\, \tilde{y}^{(2)}(x) + 15x\, \tilde{y}^{(1)}(x) - 15\, \tilde{y}(x) = 0\Big).$$

Ainsi,
$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) = x^m \quad &\Rightarrow \quad \tilde{y}'(x) = m\, x^{m-1}, \\ &\Rightarrow \quad \tilde{y}''(x) = m(m-1)\, x^{m-2}, \\ &\Rightarrow \quad \tilde{y}^{(3)}(x) = m(m-1)(m-2)\, x^{m-2}. \end{aligned}$$

En remplaçant $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ et $\tilde{y}^{(3)}$ dans l'équation (4.29), nous obtenons

$$\begin{aligned}
(4.29) \quad &\Rightarrow \quad \big(m(m-1)(m-2)-6m(m-1)+15m-15\big)x^m = 0,\\
&\Rightarrow \quad (m-1)(m-3)(m-5)=0,\\
&\Rightarrow \quad (m_1 = 1 \wedge m_2 = 3 \wedge m_3 = 5).
\end{aligned}$$

Posons : $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^3$ et $y_3(x) = x^5$. Les fonctions y_1, y_2 et y_3 sont des solutions particulières de l'équation (4.29). De plus,

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}_{\{y_1,y_2,y_3\}}(x) &= \begin{vmatrix} x & x^3 & x^5 \\ 1 & 3x^2 & 5x^4 \\ 0 & 6x & 20x^3 \end{vmatrix},\\
&= 16x^6 \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^*,
\end{aligned}$$

ce qui assure que les solutions particulières sont linéairement indépendantes. Ainsi, la solution générale y_h de l'équation (4.29) est

$$y_h(x) = c_1\,x + c_2\,x^3 + c_3\,x^5, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : EDO avec second membre
  Comme $\mathrm{A}_3(x) = x^3$ et $\mathrm{H}(x) = x^4$. Alors, la méthode des coefficients indéterminés peut être utiliser. Pour cela, posons

$$\begin{aligned}
y_p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad &\Rightarrow \quad y_p'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d,\\
&\Rightarrow \quad y_p''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c,\\
&\Rightarrow \quad y_p^{(3)}(x) = 24ax + 6b.
\end{aligned}$$

En remplaçant y_p et ses dérivées dans l'équation (4.28), nous obtenons

$$a = -\frac{1}{3},$$

donc

$$y_p(x) = -\frac{1}{3}x^4.$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (4.28) est

$$y_g(x) = c_1\,x + c_2\,x^3 + c_3\,x^5 - \frac{1}{3}x^4, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

◀

Problème 4.2

I- *Considérons l'équation différentielle suivante*

$$y^{(3)}(x) - 3y^{(2)}(x) + 3y'(x) - y(x) = 0, \tag{4.30}$$

et on note par $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions solutions de l'équation (4.30) *sur l'intervalle* $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$.

1. *Démontrer que si y_1, y_2 et y_3 sont des éléments de $\mathscr{S}$, alors, $y_1 + y_2 + y_3$ est un élément de $\mathscr{S}$.*

2. *Démontrer que si y_1 est un élément de $\mathscr{S}$ et si $\beta \in \mathbb{R}^*$, alors, βy_1 est un élément de $\mathscr{S}$.*
3. *Démontrer que si y_1 est un éléments de $\mathscr{S}$, alors, y_1' est un élément de $\mathscr{S}$.*
4. *Démontrer que la fonction exponentielle est un élément de $\mathscr{S}$. Qu'en est-il des fonctions xe^x et x^2e^x ?*
5. *Déduire la solution générale de l'équation* (4.30).

II- *Déterminer la solution générale de l'équation suivante*

$$y^{(3)}(x) - 3y^{(2)}(x) + 3y'(x) - y(x) = 4x\cos x.$$

III- *Soit g une élément quelconque de $\mathscr{S}$. Définissons la fonction f par*

$$f(x) = e^{-x}g(x).$$

1. *Démontrer que :* $\forall x \in \mathrm{I}$, $f^{(3)}(x) = 0$.
2. *Déterminer une expression de la fonction f.*

Solution du problème 4.2

I- Soit l'équation différentielle suivante

$$y^{(3)}(x) - 3y^{(2)}(x) + 3y'(x) - y(x) = 0, \tag{4.31}$$

et soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des ces fonctions solutions sur l'intervalle $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$.
L'équation (4.31) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 3 à coefficients constants sans second membre.

1. *Démontrons que si y_1, y_2 et y_3 sont des éléments de $\mathscr{S}$, alors, $y_1 + y_2 + y_3$ est un élément de $\mathscr{S}$* :

On sait que

$$\Big(\tilde{y}(x) \text{ est un élément de } \mathscr{S}\Big) \Leftrightarrow \Big(\tilde{y}^{(3)}(x) - 3\tilde{y}^{(2)}(x) + 3\tilde{y}'(x) - \tilde{y}(x) = 0\Big).$$

Posons $\tilde{y}(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)$, ainsi,

$$\begin{aligned}
\tilde{y}^{(3)}(x) - 3\tilde{y}^{(2)}(x) + 3\tilde{y}'(x) - \tilde{y}(x) &= \big(y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)\big)^{(3)} - 3\big(y_1(x) + y_2(x) \\
&\quad + y_3(x)\big)^{(2)}(x) + 3\big(y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)\big)' \\
&\quad - \big(y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)\big), \\
&= \big(y_1^{(3)}(x) - 3y_1^{(2)}(x) + 3y_1'(x) - y_1(x)\big) \\
&\quad + \big(y_2^{(3)}(x) - 3y_2^{(2)}(x) + 3y_2'(x) - y_2(x)\big) \\
&\quad + \big(y_3^{(3)}(x) - 3y_3^{(2)}(x) + 3y_3'(x) - y_3(x)\big), \\
&= 0,
\end{aligned}$$

car y_1, y_2 et y_3 sont des éléments de $\mathscr{S}$.
Donc : la fonction $y_1 + y_2 + y_3$ définit bien un élément de $\mathscr{S}$.

2. *Démontrons que si y_1 est un élément de $\mathscr{S}$ et si $\beta \in \mathbb{R}^*$, alors, βy_1 est un élément de $\mathscr{S}$* :

$$\Big(\beta y_1(x) \text{ est un élément de } \mathscr{S}\Big) \Leftrightarrow \Big(\beta y_1^{(3)}(x) - 3\beta y_1^{(2)}(x) + 3\beta y_1'(x) - \beta y_1(x) = 0\Big).$$

Nous avons : pour tout $\beta \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} \beta y_1^{(3)}(x) - 3\beta y_1^{(2)}(x) + 3\beta y_1'(x) - \beta y_1(x) &= \beta\Big(y_1^{(3)}(x) - 3y_1^{(2)}(x) + 3y_1'(x) - y_1(x)\Big), \\ &= 0, \end{aligned}$$

car y_1 est un élément de $\mathscr{S}$. Ainsi, la fonction βy_1 est un élément de $\mathscr{S}$.

3. *Démontrons que si y_1 est un éléments de $\mathscr{S}$, alors, y_1' est un élément de $\mathscr{S}$* :

$$\Big(y_1'(x) \text{ est un élément de } \mathscr{S}\Big) \Leftrightarrow \Big(\left(y_1'\right)^{(3)}(x) - 3\left(y_1'\right)^{(2)}(x) + 3\left(y_1'\right)'(x) - \left(y_1'\right)(x) = 0\Big).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \left(y_1'\right)^{(3)}(x) - 3\left(y_1'\right)^{(2)}(x) + 3\left(y_1'\right)'(x) - \left(y_1'\right)(x) &= \Big(y_1^{(3)}\Big)'(x) - 3\Big(y_1^{(2)}\Big)'(x) \\ &\quad +3\left(y_1'\right)'(x) - \left(y_1\right)'(x), \\ &= \Big(y_1^{(3)}(x) - 3y_1^{(2)}(x) + 3y_1(x) - y_1(x)\Big)', \\ &= 0, \end{aligned}$$

ainsi, si y_1 est un élément de $\mathscr{S}$, alors, y_1' l'est aussi.

4. *Démontrons que les fonctions e^x, $x\,e^x$ et $x^2\,e^x$ sont des élément de $\mathscr{S}$* :

On sait que

$$\Big(y_i(x),\ i = \overline{1,3} \text{ est un élément de } \mathscr{S}\Big) \Leftrightarrow \Big(y_i^{(3)}(x) - 3y_i^{(2)}(x) + 3y_i'(x) - y_i(x) = 0\Big).$$

- Posons $y_1(x) = e^x$, donc, $y_1'(x) = y_1''(x) = y_1^{(3)}(x) = e^x$.
  Ainsi,

$$\begin{aligned} y_1^{(3)}(x) - 3y_1^{(2)}(x) + 3y_1'(x) - y_1(x) &= e^x - 3e^x + 3e^x - e^x, \\ &= 0. \end{aligned}$$

  D'où : $y_1(x) = e^x$ est un élément de $\mathscr{S}$.
- Posons $y_2(x) = x\,e^x$, donc,

$$\begin{aligned} y_2(x) = x\,e^x &\Rightarrow y_2'(x) = e^x + x\,e^x, \\ &\Rightarrow y_2''(x) = 2\,e^x + x\,e^x, \\ &\Rightarrow y_2^{(3)}(x) = 3\,e^x + x\,e^x. \end{aligned}$$

  Ainsi,

$$\begin{aligned} y_2^{(3)}(x) - 3y_2^{(2)}(x) + 3y_2'(x) - y_2(x) &= \left(3\,e^x + x\,e^x\right) - 3\left(2\,e^x + x\,e^x\right) + 3\left(e^x + x\,e^x\right) \\ &\quad - \left(x\,e^x\right), \\ &= 0. \end{aligned}$$

  Ce qui prouve que $y_2(x) = x\,e^x$ est un élément de $\mathscr{S}$.

- Posons $y_3(x) = x^2 e^x$, alors,

$$\begin{aligned} y_3(x) = x^2 e^x \quad &\Rightarrow \quad y_3'(x) = 2x e^x + x^2 e^x, \\ &\Rightarrow \quad y_3''(x) = 2 e^x + 4x e^x + x^2 e^x, \\ &\Rightarrow \quad y_3^{(3)}(x) = 6 e^x + 6x e^x + x^2 e^x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y_3^{(3)}(x) - 3y_3^{(2)}(x) + 3y_3'(x) - y_3(x) &= \left(6 e^x + 6x e^x + x^2 e^x\right) - 3\left(2 e^x + 4x e^x + x^2 e^x\right) \\ &\quad +3\left(2x e^x + x^2 e^x\right) - \left(x^2 e^x\right), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Et donc, $y_3(x) = x^2 e^x$ est un élément de $\mathcal{S}$.

En conclusion, les fonctions e^x, $x e^x$ et $x^2 e^x$ sont des éléments de $\mathcal{S}$.

5. *Déduction de la solution générale y_h de l'équation* (4.31) :

Comme l'équation (4.31) est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 3 et comme les fonctions e^x, $x e^x$ et $x^2 e^x$ sont des éléments de $\mathcal{S}$, alors, il suffit de vérifier qu'elles sont linéairement indépendantes.

Pour cela, calculons le worskien W. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{W}(x) &= \begin{vmatrix} e^x & x e^x & x^2 e^x \\ e^x & e^x + x e^x & 2x e^x + x^2 e^x \\ e^x & 2 e^x + x e^x & 2 e^x + 4x e^x + x^2 e^x \end{vmatrix}, \\ &= 2 e^x \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi, les fonction e^x, $x e^x$ et $x^2 e^x$ sont des éléments de $\mathcal{S}$ linéairement indépendantes, d'où, la solution générale y_h de l'équation (4.31) est

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

II- Soit l'équation

$$y^{(3)}(x) - 3y^{(2)}(x) + 3y'(x) - y(x) = 4x \cos(x). \tag{4.32}$$

Déterminons la solution générale de l'équation (4.32) :

L'équation (4.32) représente une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 3 à coefficients constants avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : EDO sans second membre
  Nous avons
$$y^{(3)}(x) - 3y^{(2)}(x) + 3y'(x) - y(x) = 0. \tag{4.33}$$
  De la question **I. 5.**, nous déduirons que la solution générale y_h de l'équation (4.33) est
$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$
- Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode des coefficients indéterminées)
  Comme $h(x) = 4x \cos(x)$, alors, posons
$$y_p(x) = \left(ax + b\right) \cos(x) + \left(cx + d\right) \sin(x),$$

ainsi

$$y_p'(x) = \big(cx + d + a\big)\cos(x) + \big(-ax - b + c\big)\sin(x),$$

$$y_p''(x) = \big(-ax - b + 2c\big)\cos(x) + \big(-cx - d - 2a\big)\sin(x),$$

et

$$y_p^{(3)}(x) = \big(-cx - d - 3a\big)\cos(x) + \big(ax + b - 3c\big)\sin(x).$$

En substituant y_p, y_p', y_p'' et $y_p^{(3)}$ dans l'équation (4.32), nous obtenons

$$a = 1, \quad b = 3, \quad c = 1 \quad \text{et} \quad d = 0.$$

Ainsi, la solution particulière y_p de l'équation (4.32) est

$$y_p(x) = (x+3)\cos(x) + x\sin(x).$$

En dernier, la solution générale y_g de l'équation (4.32) est

$$y_g(x) = c_1\, e^x + c_2\, x\, e^x + c_3\, x^2\, e^x + (x+3)\cos(x) + x\sin(x), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

III- Soit g une élément quelconque de $\mathscr{S}$. Définissons la fonction f par

$$f(x) = e^{-x} g(x). \tag{4.34}$$

1. *Démontrons que :* $\forall x \in \mathrm{I},\ f^{(3)}(x) = 0$:

Nous avons

$$\begin{aligned} f(x) = e^{-x} g(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = -e^{-x} g(x) + e^{-x} g'(x), \\ &\Rightarrow \quad f''(x) = e^{-x} g(x) - 2e^{-x} g'(x) + e^{-x} g''(x), \\ &\Rightarrow \quad f^{(3)}(x) = -e^{-x} g(x) + 3e^{-x} g'(x) - 3e^{-x} g''(x) + e^{-x} g^{(3)}(x), \\ &\qquad\qquad = \big(g^{(3)}(x) - 3g''(x) + 3g'(x) - g(x)\big)\, e^{-x}, \end{aligned}$$

or, la fonction g est un élément de $\mathscr{S}$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathrm{I} \,:\, f^{(3)}(x) = 0.$$

2. *Expression de la fonction f* :

Comme

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathrm{I} \,:\, f^{(3)}(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad f''(x) = a, \quad a \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad f'(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f a pour expression

$$f(x) = \frac{1}{2} a x^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

◀

Chapitre 5

Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Ce chapitre a pour objectif de traiter les méthodes de résolution des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants vu qu'ils sont présent dans un grand nombre de problèmes.

1 Notions préliminaires et définitions

Dans cette section, les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants ainsi que leurs formes de solutions sont présentés.

1.1 Définitions d'un système différentiel linéaire à coefficients constants

Définition 5.1 *Soient* I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$, $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *une matrice carrée réelle d'ordre* $n\in\mathbb{N}^*$ *à coefficients constants dans* $\mathbb{R}$ *et* $x\mapsto f_i(x)$, $i=1,\cdots,n$, *n fonctions continues sur* I, *à images dans* $\mathbb{R}$. *Le systèmes*

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1'(x) & = & a_{11}\,y_1(x)+a_{12}\,y_2(x)+\cdots+a_{1n}\,y_n(x)+f_1(x),\\ y_2'(x) & = & a_{21}\,y_1(x)+a_{22}\,y_2(x)+\cdots+a_{2n}\,y_n(x)+f_2(x),\\ & \vdots & \\ y_n'(x) & = & a_{n1}\,y_1(x)+a_{n2}\,y_2(x)+\cdots+a_{n}\,y_n(x)+f_n(x),\end{array}\right. \tag{5.1}$$

se nomme système différentiel ordinaire d'ordre 1 *linéaire à coefficients constants aux fonctions inconnues* y_i, $i=1,\cdots,n$ *et de variable réelle* x.

Remarque 5.1 *Lorsque les fonctions* $f_i\equiv 0$, $\forall i=\overline{1,n}$, *le système* (5.1) *est dit système différentiel ordinaire d'ordre* 1 *linéaire à coefficients constants sans second membre.*

Lorsqu'il existe au moins une fonction tel que $\forall x\in\mathrm{I}: f_i(x)\neq 0$, *on dit que le système* (5.1) *est un système différentiel ordinaire d'ordre* 1 *linéaire à coefficients constants avec second membre.*

Exemple 5.1 *Le système*

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1'(x) & = & y_1(x)+3y_2(x)+5y_3(x)+e^x,\\ y_2'(x) & = & 3y_1(x)-y_2(x)+2y_3(x),\\ y_3'(x) & = & y_1(x)+y_2(x)-y_3(x),\end{array}\right. \tag{5.2}$$

est un système différentiel linéaire d'ordre 1 *à coefficients constants avec second membre.*

Définition 5.2 *La forme matricielle associée au système (5.1) est*

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

ou encore

$$\mathrm{Y}'(x) = \mathrm{AY}(x) + \mathrm{F}(x),$$

avec

$$\mathrm{Y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}, \mathrm{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{F}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.2 *La forme matricielle du système (5.2) est*

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.2 Solutions d'un système différentiel linéaire à coefficients constants

Définition 5.3 *Un système $\{\mathscr{Y}_1, \mathscr{Y}_2, \cdots, \mathscr{Y}_n\}$, où $\mathscr{Y}_i : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$, $\forall i = \overline{1, n}$, est dit un ensemble fondamental si pour tout $x \in \mathrm{I}$, la famille des n vecteurs de $\mathbb{R}^n$*

$$\begin{pmatrix} \mathscr{Y}_1(x) \\ \mathscr{Y}_1'(x) \\ \vdots \\ \mathscr{Y}_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathscr{Y}_2(x) \\ \mathscr{Y}_2'(x) \\ \vdots \\ \mathscr{Y}_2^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \mathscr{Y}_{n-1}(x) \\ \mathscr{Y}_{n-1}'(x) \\ \vdots \\ \mathscr{Y}_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \mathscr{Y}_n(x) \\ \mathscr{Y}_n'(x) \\ \vdots \\ \mathscr{Y}_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix},$$

soit libre dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 5.4 *Le $n-$uple de fonctions $(\mathscr{Y}_1, \mathscr{Y}_2, \cdots, \mathscr{Y}_n)$ est appelé une solution du système différentiel $\mathrm{Y}'(x) = \mathrm{AY}(x)$ si chaque fonction $\mathscr{Y}_i$, $i = \overline{1, n}$ et n fois dérivables, vérifiant le système $\mathrm{Y}'(x) = \mathrm{AY}(x)$ et forment un ensemble fondamental.*

Théorème 5.1 *Soient $\mathscr{Y}_1, \mathscr{Y}_2, \cdots, \mathscr{Y}_n$ un ensemble fondamental de solution du système $\mathrm{Y}'(x) = \mathrm{AY}(x)$ sur un intervalle I. Alors, la solution générale Y_h du système $\mathrm{Y}'(x) = \mathrm{AY}(x)$ est*

$$\mathrm{Y}_h(x) = c_1\mathscr{Y}_1 + c_2\mathscr{Y}_2 + \cdots + c_n\mathscr{Y}_n, \quad c_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, n}.$$

Théorème 5.2 *Soit Y_p une solution particulière du système $\mathrm{Y}'(x) = \mathrm{AY}(x) + \mathrm{F}(x)$ et soit Y_h la solution générale du système $\mathrm{Y}'(x) = \mathrm{AY}(x)$.*

Alors, la solution générale Y_g du système $\mathrm{Y}'(x) = \mathrm{AY}(x) + \mathrm{F}(x)$ est

$$\mathrm{Y}_g(x) = \mathrm{Y}_h(x) + \mathrm{Y}_p(x), \quad c_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, n}.$$

Exemple 5.3 *Le système*

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} Y(x) + \begin{pmatrix} 3x \\ e^{-x} \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

admet comme solution générale

$$Y_g(x) = \begin{pmatrix} d_1 e^{-2x} + d_2 e^{-5x} + \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{6}{5} x - \frac{27}{50} \\ d_1 e^{-2x} - 2 d_2 e^{-5x} + \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{3}{5} x - \frac{27}{50} \end{pmatrix}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

La solution particulière Y_p *du système* (5.3) *est*

$$Y_p(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{6}{5} x - \frac{27}{50} \\ \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{3}{5} x - \frac{27}{50} \end{pmatrix},$$

cependant, la solution générale Y_h *du système sans second membre est*

$$Y_h(x) = \begin{pmatrix} d_1 e^{-2x} + d_2 e^{-5x} \\ d_1 e^{-2x} - 2 d_2 e^{-5x} \end{pmatrix}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

2 Résolution des systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

La résolution des systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants sera traitée dans cette section. Pour trouver la solution du système différentiel (5.1), nous devrons d'abord chercher la solution du système différentiel sans second membre associé, puis chercher la solution particulière du système différentiel complet.

2.1 Résolution des systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants sans second membre

Soit le système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants sans second membre

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(x) & = & a_{11} y_1(x) + a_{12} y_2(x) + \cdots + a_{1n} y_n(x), \\ y_2'(x) & = & a_{21} y_1(x) + a_{22} y_2(x) + \cdots + a_{2n} y_n(x), \\ & \vdots & \\ y_n'(x) & = & a_{n1} y_1(x) + a_{n2} y_2(x) + \cdots + a_{nn} y_n(x), \end{array} \right. \tag{5.4}$$

où a_{ij}, $\forall i, j = 1, \cdots, n$ sont des constantes réelles.

Le système différentiel (5.4) peut s'écrire sous la forme matricielle

$$Y'(x) = AY(x),$$

où Y est le vecteur inconnu et $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Méthode de résolution 5.1 *Le système différentiel* (5.4) *possède des solutions définies sur* $\mathbb{R}$ *et l'ensemble des fonctions* $\mathscr{Y}$ *telles que* $(\mathbb{R}, \mathscr{Y})$ *soit solution de* (5.4) *est un espace vectoriel de dimension* n*, dont nous devrons trouver une base.*

Pour cela, cherchons la solution du système différentiel (5.4) *sous la forme*

$$y_1 = v_1 e^{\lambda x}, \quad y_2 = v_2 e^{\lambda x}, \quad \cdots, \quad y_n = v_n e^{\lambda x}. \tag{5.5}$$

Nous devrons déterminer les constantes $v_1, v_2, \cdots, v_n, \lambda$ *de sorte que les fonctions* $v_1\, e^{\lambda x}$, $v_2\, e^{\lambda x}, \cdots, v_n\, e^{\lambda x}$ *vérifiant le système différentiel* (5.4). *En les portant dans le système différentiel* (5.4), *nous obtenons*

$$\begin{cases} \lambda\, v_1\, e^{\lambda x} &= (a_{11}\, v_1 + a_{12}\, v_2 + \cdots + a_{1n}\, v_n)\; e^{\lambda x}, \\ \lambda\, v_2\, e^{\lambda x} &= (a_{21}\, v_1 + a_{22}\, v_2 + \cdots + a_{2n}\, v_n)\; e^{\lambda x}, \\ & \vdots \\ \lambda\, v_n\, e^{\lambda x} &= (a_{n1}\, v_1 + a_{n2}\, v_2 + \cdots + a_{nn}\, v_n)\; e^{\lambda x}. \end{cases}$$

Simplifions par $e^{\lambda x}$ *et rapportons tout les termes dans le premier membre et mettant en évidence les coefficients* $v_1, v_2, \cdots, v_n$, *nous obtenons*

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\, v_1 + a_{12}\, v_2 + \cdots + a_{1n}\, v_n &= 0, \\ a_{21}\, v_1 + (a_{22}-\lambda)\, v_2 + \cdots + a_{2n}\, v_n &= 0, \\ & \vdots \\ a_{n1}\, v_1 + a_{n1}\, v_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)\, v_n &= 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Choisissons $v_1, v_2, \cdots, v_n$ *et* λ *de manière que soit vérifié le système* (5.6). *Ce système est un système linéaire d'équations algébriques par rapport à* $v_1, v_2, \cdots, v_n$. *Formons le déterminant du système* (5.6)

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}. \tag{5.7}$$

Si λ *est tel que le déterminant* Δ *est différent de zéro, le système* (5.6) *ne possède qu'une solution nulle* $v_1 = v_2 = \cdots = v_n = 0$, *et par conséquent les formules* (5.5) *ne donnent que les solutions triviales*

$$y_1(x) = y_2(x) = \cdots = y_n(x) \equiv 0.$$

Donc, nous ne pourrons obtenir des solutions non triviales que pour les valeurs de λ pour lesquelles le déterminant (5.7) s'annule. Nous obtenons une équation du $n-$ième degré pour le déterminer λ

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5.8}$$

Cette équation est appelée équation caractéristique du système (5.4), ses racines sont appelées racine de l'équation caractéristique.

Il est clair que les racines de l'équation caractéristique du déterminant (5.8) sont les valeurs propres de la matrice A. Ainsi, déterminer la solution générale du système (5.4) revient à trouver les valeurs propres et leurs vecteurs propres associés linéairement indépendants. Autrement dit, examiner si la matrice A est diagonalisable ou pas, et donc, deux cas peuvent se distinguer.

1. **Premier cas :** Si la matrice A est diagonalisable

Méthode de résolution 5.2 *Dans ce cas, il suffit de chercher las valeurs propres* λ_i, $i=\overline{1,\,n}$ *de la matrice* A *et les vecteurs propres associés* V_i, $i=\overline{1,\,n}$ *et ensuite exprimer la solution générale* Y_h *du système différentiel* (5.4) *selon la nature des valeurs propres obtenues.*

a) Si la matrice A admet n valeurs propres réelles distinctes :
Soient λ_i, $i=\overline{1,\,n}$, *les* n *valeurs propres réelles distinctes de la matrice* A *et soient* V_i, $i=\overline{1,\,n}$, *les* n *vecteurs propres linéairement indépendants associés.*
Alors, la solution générale Y_h *du système différentiel* (5.4) *est*

$$Y_h(x)=c_1\,e^{\lambda_1 x}V_1+c_2\,e^{\lambda_2 x}V_2+\cdots+c_n\,e^{\lambda_n x}V_n,\quad c_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,\,n}.$$

b) Si la matrice A admet une valeur propre réelle de multiplicité $k<n$ et $n-k$ valeurs propres réelles distinctes :
Soit λ_1 *une valeur propre réelle de multiplicité* $k<n$ *de la matrice* A *laquelle admet* k *vecteurs propres,* V_i, $i=\overline{1,\,k}$, *linéairement indépendants et soient* λ_i, $i=\overline{k+1,\,n}$ *des valeurs propres réelles distinctes associées aux vecteurs propres* V_i, $i=\overline{k+1,\,n}$.
Alors, la solution générale Y_h *du système différentiel* (5.4) *est*

$$Y_h(x)=c_1e^{\lambda_1 x}V_1+c_2xe^{\lambda_1 x}V_2+\cdots+c_kx^{k-1}e^{\lambda_1 x}V_k+c_{k+1}e^{\lambda_{k+1}x}V_{k+1}+\cdots+c_ne^{\lambda_n x}V_n,$$

avec $c_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,\,n}$.

c) Si la matrice A admet $k<\dfrac{n}{2}$ valeurs propres complexes conjuguées, une valeur propre réelle de multiplicité $m<n-2k$ et $n-m-2k$ valeurs propres réelles distinctes :
Soient λ_i, $i=\overline{1,\,2k}$, *des valeurs propres complexes de la matrice* A *associées aux vecteurs propres* V_i, $i=\overline{1,\,2k}$, *et soient* λ_{2k+1} *une valeur propre réelle de multiplicité* m *laquelle admet* m *vecteurs propres* V_i, $i=\overline{1,\,m}$, *linéairement indépendants et soient* λ_i, $i=\overline{2k+m+1,\,n}$, *des valeurs propres réelles distinctes associées aux vecteurs propres* V_i, $i=\overline{2k+m+1,\,n}$.
Comme dans ce cas nous avons k *valeurs propres complexes conjuguées, alors, elles s'écrivent sous la forme*

$$\lambda_i=\alpha_i+i\beta_i,\qquad i=\overline{1,\,k},$$

et les vecteurs propres associés

$$V_i=\Re(V_i)+i\Im(V_i),\qquad i=\overline{1,\,k}.$$

Ainsi, la solution générale Y_h *du système différentiel* (5.4) *est*

$$\begin{aligned}Y_h(x)\;=\;&c_1e^{\alpha_1 x}\Big(\Re(V_1)\cos(\beta_1x)-\Im(V_1)\sin(\beta_1x)\Big)+c_2e^{\alpha_1 x}\Big(\Im(V_1)\cos(\beta_1x)\\&+\Re(V_1)\sin(\beta_1x)\Big)+\cdots+c_{2k-1}e^{\alpha_k x}\Big(\Re(V_k)\cos(\beta_kx)-\Im(V_k)\sin(\beta_kx)\Big)\\&+c_{2k}e^{\alpha_k x}\Big(\Re(V_k)\cos(\beta_kx)-\Im(V_k)\sin(\beta_kx)\Big)+c_{2k+1}e^{\lambda_{2k+1}x}V_{2k+1}\\&+\cdots+c_{2k+m}x^{m-1}e^{\lambda_{2k+1}x}V_{2k+m}+c_{2k+m+1}e^{\lambda_{2k+m+1}x}V_{2k+m+1}+\cdots\\&+c_ne^{\lambda_n x}V_n,\end{aligned}$$

avec $c_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,\,n}$.

Exemple 5.4 *Trouver la solution du système différentiel*

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1'(x) & = & 6y_1(x) - y_2(x), \\ y_2'(x) & = & 5y_1(x) + 4y_2(x). \end{array}\right. \tag{5.9}$$

Solution de l'exemple 5.4
Résolution du système différentiel (5.9) :

Le système (5.9) est un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants sans second membre. Il peut s'écrire sous la forme

$$Y'(x) = A\,Y(x),$$

avec

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}, \quad Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour la résolution du système (5.9), nous devrons chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A.

- Les valeurs propres de la matrice A :
  Nous avons

$$\begin{aligned} \det\left(A - \lambda\,\mathrm{Id}\right) = 0 \quad & \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \\ & \Rightarrow \quad \left(\lambda - 5 - 2i\right)\left(\lambda - 5 + 2i\right) = 0, \\ & \Rightarrow \quad \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = 5 + 2i. \end{aligned}$$

  Ainsi, la matrice A admet une valeur propre complexe conjuguée $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = 5 + 2i$.
- Les vecteurs propres associés :
  Nous avons

$$\begin{aligned} A\tilde{V} = \lambda_1 \tilde{V} \quad & \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} 6a - b & = & (5+2i)a, \\ 5a + 4b & = & (5+2i)b, \end{array}\right. \\ & \Rightarrow \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} a \\ (1-2i)a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \end{aligned}$$

  ainsi, pour des raison de simplification, nous prenons $a = 1$. D'où

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 5 + 2i \quad & \Rightarrow \quad \left(\alpha = 5 \wedge \beta = 2\right). \\ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} \quad & \Rightarrow \quad \left(\Re(V_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \Im(V_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

En dernier, la solution générale Y_h du système est (5.9)

$$Y_h(x) = c_1\, e^{5x}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(2x) - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\sin(2x)\right) + c_2\, e^{5x}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\cos(2x) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin(2x)\right),$$

avec $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$, ou encore,

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos(2x)\, e^{5x} + c_2 \sin(2x)\, e^{5x} \\ c_1\left(\cos(2x) + 2\sin(2x)\right) e^{5x} + c_2\left(-2\cos(2x) + \sin(2x)\right) e^{5x} \end{pmatrix}, \; c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

★

2. **Deuxième cas :** Si la matrice A n'est pas diagonalisable

Méthode de résolution 5.3 *Dans le cas ou la matrice* A *n'est pas diagonalisable, c'est-à-dire, la matrice* A *possède une valeur propre réelle* λ_i *de multiplicité* n *admettent que* $p < n$ *vecteurs propres linéairement indépendants, nous somme amené à utiliser l'exponentielle de la matrice* A.

Pourquoi l'exponentielle de la matrice A ?

Nous souhaitons résoudre l'équation vectorielle $Y'(x) = AY(x)$.

Nous avons

$$\begin{aligned} Y'(x) = AY(x) \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dY(x)}{Y(x)} = A\int dx, \\ &\Rightarrow \quad Y(x) = e^{Ax}k, \quad k \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

En fin, pour trouver la solution générale Y_h*, il suffit de calculer* e^{Ax}.

Nous avons

$$\begin{aligned} Ax &= \left(\lambda_i \,\mathrm{Id} + A - \lambda_i \,\mathrm{Id}\right)x, \\ &= \lambda_i \,\mathrm{Id}\, x + \left(A - \lambda_i \,\mathrm{Id}\right)x. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} e^{Ax} &= e^{\lambda_i \,\mathrm{Id}\, x}\, e^{\left(A-\lambda_i \,\mathrm{Id}\right)x}, \\ &= e^{\lambda_i x}\,\mathrm{Id}\, e^{\left(A-\lambda_i \,\mathrm{Id}\right)x}, \end{aligned}$$

Ainsi,

$$e^{Ax} = e^{\lambda_i x}\,\mathrm{Id}\left[\mathrm{Id} + \left(A-\lambda_i \,\mathrm{Id}\right)x + \frac{\left(A-\lambda_i \,\mathrm{Id}\right)^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\left(A-\lambda_i \,\mathrm{Id}\right)^q}{q!}x^q\right],$$

où λ_i *est une valeur propre réelle de multiplicité* n *de la matrice* A *possédant* p *vecteurs propres linéairement indépendants et*

$$\begin{aligned} q &= n - p, \\ &= \dim(A) - \dim\left(\ker\left(A - \lambda_i \,\mathrm{Id}\right)\right). \end{aligned}$$

En dernier, la solution générale Y_h *du système* (5.4) *est*

$$Y_h(x) = e^{\lambda_i x}\,\mathrm{Id}\left[\mathrm{Id} + \left(A-\lambda_i \,\mathrm{Id}\right)x + \frac{\left(A-\lambda_i \,\mathrm{Id}\right)^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\left(A-\lambda_i \,\mathrm{Id}\right)^q}{q!}x^q\right]k, \quad k \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 5.5 *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} y_1'(x) &= 2y_1(x) + y_2(x) + 6y_3(x), \\ y_2'(x) &= 2y_2(x) + 5y_3(x), \\ y_3'(x) &= 2y_3(x). \end{cases} \tag{5.10}$$

Trouver la solution générale du système différentiel (5.10).

Solution de l'exemple 5.5
Résolution du système différentiel (5.10) :

Le système (5.10) est un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants sans second membre, il est équivalent à

$$Y'(x) = A\,Y(x),$$

avec

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{pmatrix}, \quad Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour la résolution du système (5.10), nous devrons chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A.

- Les valeurs propres de la matrice A :
  Nous avons

$$\begin{aligned} \det\big(A - \lambda\,\mathrm{Id}\big) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \\ &\Rightarrow \quad \big(2-\lambda\big)^3 = 0, \\ &\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2. \end{aligned}$$

  Ainsi, la matrice A admet une seul valeur propre de multiplicité 3.
- Les vecteurs propres associés :
  Nous avons

$$AV = \lambda V \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2a + b + 6c & = & 2a, \\ 2b + 5c & = & 2b, \\ 2c & = & 2c, \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad V = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*,$$

  ainsi, la valeur propre $\lambda = 2$ de multiplicité 3 admet un seul vecteur propre, c'est pour cette raison, nous devons passer par le calcul de l'exponentielle de la matrice A.
- Exponentielle de la matrice A :
  Nous avons

$$Y_h(x) = e^{\lambda_i x}\,\mathrm{Id}\left[\mathrm{Id} + \big(A - \lambda_i\,\mathrm{Id}\big)x + \frac{\big(A - \lambda_i\,\mathrm{Id}\big)^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\big(A - \lambda_i\,\mathrm{Id}\big)^q}{q!}x^q\right]k, \quad k \in \mathbb{R}^n,$$

  avec $\lambda_i = 2$ et $q = 2$.
  Ainsi, la solution générale Y_h du système (5.10) est

$$Y_h(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & x\,e^{2x} & \big(6x + \frac{5}{2}x^2\big)\,e^{2x} \\ 0 & e^{2x} & 5x\,e^{2x} \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R},$$

  ou encore

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1\,e^{2x} + k_2\,x\,e^{2x} + k_3\,\big(6x + \frac{5}{2}x^2\big)\,e^{2x} \\ k_2\,e^{2x} + k_3\,5x\,e^{2x} \\ k_3\,e^{2x} \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R},$$

★

2.2 Résolution des systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre

Soit le système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficient constant avec second membre

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1'(x) & = & a_{11}\, y_1(x) + a_{12}\, y_2(x) + \cdots + a_{1n}\, y_n(x) + f_1(x), \\ y_2'(x) & = & a_{21}\, y_1(x) + a_{22}\, y_2(x) + \cdots + a_{2n}\, y_n(x) + f_2(x), \\ & \vdots & \\ y_n'(x) & = & a_{n1}\, y_1(x) + a_{n2}\, y_2(x) + \cdots + a_{nn}\, y_n(x) + f_n(x), \end{array}\right. \tag{5.11}$$

où a_{ij}, $\forall i,\ j = 1, \cdots, n$ sont des constantes réelles et $f_i : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1, n}$ sont des fonctions continues, dites fonctions second membre, avec $\exists i \mid f_i \not\equiv 0$.

L'équation vectorielle associée au système différentiel (5.11) est

$$\mathrm{Y}'(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(x) + \mathrm{F}(x)$$

où Y est le vecteur de fonctions inconnues, $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et F est le vecteur de fonctions second membre.

Pour trouver la solution générale Y_g du système (5.11), connaissant la solution générale Y_h du système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficient constant sans second membre associée au système (5.11), nous utiliserons la méthode de la variation des constantes.

Méthode de résolution 5.4 *La solution générale* Y_h *de l'équation vectorielle* $\mathrm{Y}'(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(x)$ *peut toujours s'écrire sous la forme*

$$\mathrm{Y}_h(x) = \phi(x)\, k, \quad k \in \mathbb{R}^n,$$

où ϕ *est la matrice fondamentale contenant les solutions.*

Comme ϕ *est une matrice fondamentale, alors,*

$$\phi'(x) = \mathrm{A}\,\phi(x).$$

En remplaçant le vecteur des constantes k *par un vecteur de fonction* K *dans l'équation vectorielle sans second membre, nous obtenons*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Y}(x) = \phi(x)\, k & \Rightarrow & \mathrm{Y}(x) = \phi(x)\,\mathrm{K}(x), \\ & \Rightarrow & \mathrm{Y}'(x) = \phi'(x)\,\mathrm{K}(x) + \phi(x)\,\mathrm{K}'(x). \end{array}$$

Ainsi, l'équation vectorielle complète devient

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Y}'(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(x) + \mathrm{F}(x) & \Rightarrow & \phi'(x)\,\mathrm{K}(x) + \phi(x)\,\mathrm{K}'(x) = \mathrm{A}\,\phi(x)\,\mathrm{K}(x) + \mathrm{F}(x), \\ & \Rightarrow & \mathrm{A}\,\phi(x)\,\mathrm{K}(x) + \phi(x)\,\mathrm{K}'(x) = \mathrm{A}\,\phi(x)\,\mathrm{K}(x) + \mathrm{F}(x), \\ & \Rightarrow & \mathrm{K}'(x) = \phi^{-1}(x)\,\mathrm{F}(x), \\ & \Rightarrow & \displaystyle\int \mathrm{K}'(x)\, dx = \int \phi^{-1}(x)\,\mathrm{F}(x)\, dx, \\ & \Rightarrow & \mathrm{K}(x) = \Phi(x) + d, \quad d \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

En dernier, la solution générale Y_g *du système* (5.11) *est*

$$\mathrm{Y}_g(x) = \phi(x)\big(\Phi(x) + d\big), \quad d \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 5.6 *Déterminer la solution générale du système différentiel suivant*

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} Y(x) + \begin{pmatrix} 3x \\ e^{-x} \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Solution de l'exemple 5.6

Résolution du système différentiel (5.12) :

L'équation (5.12) représente un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

Nous avons

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(x) = \begin{pmatrix} 3x \\ e^{-x} \end{pmatrix}.$$

- Étape 1 : Système différentiel sans second membre
  Nous avons

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} Y(x). \tag{5.13}$$

1. Les valeurs propres de la matrice A :
   Nous avons

$$\begin{aligned} \det\left(A - \lambda \, Id\right) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \\ &\Rightarrow \quad (\lambda+2)(\lambda+5) = 0, \\ &\Rightarrow \quad \left(\lambda_1 = -2 \wedge \lambda_2 = -5\right). \end{aligned}$$

   Ainsi, la matrice A admet deux valeurs propres réelles distinctes.

2. Les vecteurs propres associés :
   - Pour $\lambda_1 = -2$: Nous avons

$$\begin{aligned} A\tilde{V} = \lambda_1 \tilde{V} \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} -3a + b &= -2a, \\ 2a - 4b &= -2b, \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \end{aligned}$$

     ainsi, pour des raison de simplification, nous prenons $a = 1$. D'où

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   - Pour $\lambda_2 = -5$: Nous avons

$$\begin{aligned} A\tilde{V} = \lambda_2 \tilde{V} \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} -3a + b &= -5a, \\ 2a - 4b &= -5b, \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \end{aligned}$$

     ainsi, pour des raison de simplification, nous prenons $a = 1$. D'où

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

En dernier, la solution générale Y_h du système est (5.13)

$$Y_h(x) = c_1\, e^{-2x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\, e^{-5x}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

ou encore,

$$Y_h(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-5x}\\ e^{-2x} & -2e^{-5x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{5.14}$$

- Étape 2 : Système différentiel avec second membre
  D'après la solution (5.14), nous avons

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-5x}\\ e^{-2x} & -2e^{-5x}\end{pmatrix} \Rightarrow \phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2x} & \frac{1}{3}e^{2x}\\ \frac{1}{3}e^{5x} & -\frac{1}{3}e^{5x}\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} K(x) &= \int \phi^{-1}(x)\, F(x)\, dx,\\ &= \begin{pmatrix} 2\int x\, e^{2x}\, dx + \frac{1}{3}\int e^{x}\, dx\\ \int x\, e^{5x}\, dx - \frac{1}{3}\int e^{4x}\, dx\end{pmatrix},\\ &= \begin{pmatrix} x\, e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{x} + d_1\\ \frac{1}{5}x\, e^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} - \frac{1}{12}e^{4x} + d_2\end{pmatrix}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

En dernier, la solution générale Y_g du système différentiel (5.12) est

$$\begin{aligned} Y_g(x) &= \phi(x)\, K(x),\\ &= \begin{pmatrix} d_1\, e^{-2x} + d_2\, e^{-5x} + \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{6}{5}x - \frac{27}{50}\\ d_1\, e^{-2x} - 2d_2\, e^{-5x} + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{3}{5}x - \frac{27}{50}\end{pmatrix}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

★

3 Problèmes à conditions initiales

Un problème à conditions initiales est composé d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre de la forme

$$\begin{cases} y_1'(x) &= a_{11}\, y_1(x) + a_{12}\, y_2(x) + \cdots + a_{1n}\, y_n(x) + f_1(x),\\ y_2'(x) &= a_{21}\, y_1(x) + a_{22}\, y_2(x) + \cdots + a_{2n}\, y_n(x) + f_2(x),\\ &\vdots\\ y_n'(x) &= a_{n1}\, y_1(x) + a_{n2}\, y_2(x) + \cdots + a_{nn}\, y_n(x) + f_n(x),\end{cases} \tag{5.15}$$

où a_{ij}, $\forall i, j = 1, \cdots, n$, sont des constantes réelles et $f_i : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1, n}$ sont des fonctions continues avec $\exists i \,|\, f_i \not\equiv 0$ et de n conditions initiales sur les fonctions inconnues $y_1, \cdots, y_n$

$$\begin{cases} y_1(x_0) &= y_{0,1},\\ y_2(x_0) &= y_{0,2},\\ &\vdots\\ y_{n-1}(x_0) &= y_{0,n-1},\\ y_n(x_0) &= y_{0,n}.\end{cases} \tag{5.16}$$

Le système différentiel (5.15) et les conditions initiales (5.16) peuvent s'écrire, respectivement, comme

$$Y'(x) = AY(x) + F(x), \tag{5.17}$$

$$Y(x_0) = Y_0 \tag{5.18}$$

où $Y(x)$ est le vecteur de fonctions inconnues, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F(x)$ est le vecteur de fonctions second membre, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$ et $Y_0 \in \mathbb{R}^n$.

L'existence et l'unicité d'un problème à conditions initiales découle du théorème suivant que nous l'admettons

Théorème 5.3 *Soit* I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$, $x \mapsto F(x)$ *une fonction continue de* I *dans* $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Alors, pour tout* $x_0 \in I$ *et tout* $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, *l'équation différentielle vectorielle* (5.17) *a une solution, et une seule,* $x \mapsto Y(x)$ *définie dans* I *et de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I *telle que* (5.18) *soit vérifiée.*

Exemple 5.7 *Déterminer la solution du système différentiel suivant*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1'(x) & = & -3y_1(x) + y_2(x) + 3x, \\ y_2'(x) & = & 2y_1(x) - 4y_2(x) + e^{-x}, \end{array}\right. \tag{5.19}$$

vérifiant les conditions initiales

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1(0) & = & \dfrac{271}{100}, \\ y_2(0) & = & -\dfrac{1}{25}. \end{array}\right. \tag{5.20}$$

Solution de l'exemple 5.7

Solution du système différentiel (5.19) *vérifiant les conditions* (5.20) :

D'après l'exemple 5.6, la solution générale du système différentiel (5.19) est

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1\, e^{-2x} + d_2\, e^{-5x} + \dfrac{1}{4} e^{-x} + \dfrac{6}{5} x - \dfrac{27}{50} \\ d_1\, e^{-2x} - 2d_2\, e^{-5x} + \dfrac{1}{2} e^{-x} + \dfrac{3}{5} x - \dfrac{27}{50} \end{pmatrix}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1(0) & = & \dfrac{271}{100}, \\ y_2(0) & = & -\dfrac{1}{25}. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d_1 + d_2 + \dfrac{1}{4} - \dfrac{27}{50} = \dfrac{271}{100}, \\ d_1 - 2d_2 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{27}{50} = -\dfrac{1}{25}, \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d_1 = 2, \\ d_2 = 1. \end{array}\right.$$

Donc, la solution du système différentiel (5.19) satisfaisant les conditions (5.20) est

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\, e^{-2x} + e^{-5x} + \dfrac{1}{4} e^{-x} + \dfrac{6}{5} x - \dfrac{27}{50} \\ 2\, e^{-2x} - 2\, e^{-5x} + \dfrac{1}{2} e^{-x} + \dfrac{3}{5} x - \dfrac{27}{50} \end{pmatrix}.$$

4 Réduction de l'ordre des équations différentielles ordinaires d'ordre n

Soit l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre n à coefficients constants avec second membre

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}\,y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1\,y'(x)+a_0\,y(x)=f(x), \tag{5.21}$$

où $n\in\mathbb{N}^*$, $a_i\in\mathbb{R}$, $\forall i=\overline{0,\,n-1}$ et $f:\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction bien définie.

L'équation (5.21) peut, toujours, se transformer en un système différentiel de n équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 1 à n inconnues.

Méthode de résolution 5.5 *Pour transformer l'équation* (5.21) *en un système différentiel, nous devrons introduire le changement de fonctions auxiliaires* $y_1, y_2, \cdots, y_n$.

En effet, posons

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1(x) & = & y(x)\\ y_2(x) & = & y'(x)\\ & \vdots & \\ y_{n-1}(x) & = & y^{(n-2)}(x)\\ y_n(x) & = & y^{(n-1)}(x)\end{array}\right. . \tag{5.22}$$

La dérivation du système (5.22)*, donne*

$$(5.22)\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcl} y_1'(x) & = & y'(x)\\ y_2'(x) & = & y''(x)\\ & \vdots & \\ y_{n-1}'(x) & = & y^{(n-1)}(x)\\ y_n'(x) & = & y^{(n)}\\ & = & f(x)-a_{n-1}\,y^{(n-1)}(x)-\cdots-a_1\,y'(x)-a_0\,y(x)\end{array}\right. .$$

Ainsi, par l'utilisation du système (5.22)*, l'équation* (5.21) *est équivalente au système différentiel suivant*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1'(x) & = & y_2(x),\\ y_2'(x) & = & y_3(x),\\ & \vdots & ,\\ y_{n-1}'(x) & = & y_n(x),\\ y_n'(x) & = & f(x)-a_{n-1}\,y_n(x)-\cdots-a_1\,y_2(x)-a_0\,y_1(x),\end{array}\right.$$

lequel peut aussi s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} y_1'(x)\\ y_2'(x)\\ y_3'(x)\\ \vdots\\ y_{n-1}'(x)\\ y_n'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(x)\\ y_2(x)\\ y_3(x)\\ \vdots\\ y_{n-1}(x)\\ y_n(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ f(x)\end{pmatrix}.$$

Exemple 5.8 *Soit l'équation*

$$y^{(3)}(x)+6y^{(2)}(x)+11y'(x)+6y(x)=e^{-x}. \tag{5.23}$$

1. *Transformer l'équation* (5.23) *en un système différentiel.*

2. *Déterminer la solution générale du système obtenu.*

3. *Déduire la solution générale* y_g *de l'équation* (5.23).

Solution de l'exemple 5.8

L'équation (5.23) est une équation différentielle ordinaire d'ordre 3 à coefficients constants avec second membre.

1. *Transformation de l'équation* (5.23) *en un système différentiel* :

Posons

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1(x) & = & y(x) \\ y_2(x) & = & y'(x) \\ y_3(x) & = & y''(x) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y_1'(x) & = & y'(x), \\ y_2'(x) & = & y''(x), \\ y_3'(x) & = & y'''(x), \\ & = & -6y''(x) - 11y'(x) - 6y(x) + e^{-x}. \end{array}\right.$$

Ainsi, l'équation (5.23) est équivalente au système différentiel suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1'(x) & = & y_2(x), \\ y_2'(x) & = & y_3(x), \\ y_3'(x) & = & -6y_1(x) - 11y_2(x) - 6y_3(x) + e^{-x}. \end{array}\right. \tag{5.24}$$

2. *Résolution du système* (5.24) :

Le système (5.24) est un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre. Il peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{Y}'(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(x) + \mathrm{F}(x),$$

où

$$\mathrm{Y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Pour la résolution du système différentiel (5.24), nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : Système différentiel sans second membre

  Nous avons

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}. \tag{5.25}$$

  1. *Les valeurs propres de la matrice* A :

     Nous avons

$$\begin{aligned} \det\left(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{Id}\right) = 0 \quad & \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & -11 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0, \\ & \Rightarrow \left(\lambda+1\right)\left(\lambda+2\right)\left(\lambda+3\right) = 0, \\ & \Rightarrow \left(\lambda_1 = -1 \wedge \lambda_2 = -2 \wedge \lambda_3 = -3\right). \end{aligned}$$

     Ainsi, la matrice A admet trois valeurs propres réelles distinctes.

2. *Les vecteurs propres associés* :
   - Pour $\lambda_1 = -1$: Nous avons

$$A\tilde{V} = \lambda_1 \tilde{V} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b & = & -a, \\ c & = & -b, \\ -6a - 11b - 6c & = & -c, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*,$$

ainsi, pour des raison de simplification, nous prenons $a = 1$. D'où

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   - Pour $\lambda_2 = -2$: Nous avons

$$A\tilde{V} = \lambda_2 \tilde{V} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b & = & -2a, \\ c & = & -2b, \\ -6a - 11b - 6c & = & -2c, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} a \\ -2a \\ 4a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*,$$

ainsi, pour des raison de simplification, nous prenons $a = 1$. D'où

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   - Pour $\lambda_3 = -3$: Nous avons

$$A\tilde{V} = \lambda_3 \tilde{V} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b & = & -3a, \\ c & = & -3b, \\ -6a - 11b - 6c & = & -3c, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} a \\ -3a \\ 9 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*,$$

ainsi, pour des raison de simplification, nous prenons $a = 1$. D'où

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la solution générale Y_h du système différentiel (5.25) est

$$Y_h(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} = c_1\, e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3\, e^{-3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

ou encore,

$$Y_h(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-2x} & e^{-3x} \\ -e^{-x} & -2\,e^{-2x} & -3\,e^{-3x} \\ e^{-x} & 4\,e^{-2x} & 9\,e^{-3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \tag{5.26}$$

- Étape 2 : Système différentiel avec second membre
  D'après la formule (5.26), nous avons

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-2x} & e^{-3x} \\ -e^{-x} & -2\,e^{-2x} & -3\,e^{-3x} \\ e^{-x} & 4\,e^{-2x} & 9\,e^{-3x} \end{pmatrix} \Rightarrow \phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 3e^{t} & \frac{5}{2}e^{t} & \frac{1}{2}e^{t} \\ -3e^{2t} & -4e^{2t} & -e^{2t} \\ e^{3t} & \frac{3}{2}e^{3t} & \frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{K}(x) &= \int \phi^{-1}(x)\,\mathrm{F}(x)\,dx, \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\int dx \\ -\int e^{x}\,dx \\ \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + d_1 \\ -e^{x} + d_2 \\ \frac{1}{4}e^{2x} + d_3 \end{pmatrix}, \quad d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En dernier, la solution générale Y_g du système différentiel (5.24) est

$$\mathrm{Y}_g(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(d_1 + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\right)e^{-t} & + & d_2e^{-2t} & + & d_3e^{-3t} \\ \left(-d_1 - \frac{1}{2}t + \frac{5}{4}\right)e^{-t} & - & 2d_2e^{-2t} & - & 3d_3e^{-3t} \\ \left(d_1 + \frac{1}{2}t - \frac{7}{4}\right)e^{-t} & + & 4d_2e^{-2t} & + & 9d_3e^{-3t} \end{pmatrix}, \quad d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}.$$

3. *Déduction de la solution générale y_g de l'équation* (5.23) :

Comme $y(x) = y_1(x)$, alors, la solution générale y_g de l'équation (5.23) est

$$y_g(x) = y_1(x) = \left(d_1 + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\right)e^{-t} + d_2e^{-2t} + d_3e^{-3t}, \quad d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}.$$

★

5 Notion sur la théorie de la stabilité de Liapounov

Dans cette partie, on s'intéresse essentiellement à présenter quelques notions et résultats sur la stabilité des équations différentielles ordinaire et systèmes différentiels.

5.1 Position du problème

Comme les solutions de la plupart des équations différentielles et des systèmes différentiels ne s'expriment pas au moyen des fonctions élémentaires ou par des quadratures, nous avons recours également à des méthodes d'intégration approchée. Le défaut de ces méthodes, c'est qu'elles ne donnent qu'une solution particulière ; pour obtenir d'autres solutions particulières, il faut faire tous les calculs. Connaissant une solution particulière, on ne peut pas se prononcer sur le caractère des autres solutions.

En effet, soit le système d'équations différentielles ordinaires

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & f_1\big(t; x(t), y(t)\big), \\ y'(t) & = & f_2\big(t; x(t), y(t)\big), \end{array}\right. \tag{5.27}$$

et soient $x(t)$ et $y(t)$ les solutions de ce système satisfaisant aux conditions initiales

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(0) & = & x_0, \\ y(0) & = & y_0. \end{array}\right. \tag{5.28}$$

Soient, encore, $\overline{x}(t)$ et $\overline{y}(t)$ les solutions du système (5.27) satisfaisant aux conditions initiales

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{x}(0) & = & \overline{x}_0, \\ \overline{y}(0) & = & \overline{y}_0. \end{array}\right.$$

Définition 5.5 *les solutions $x(t)$ et $y(t)$ satisfaisant aux équations (5.27) et aux conditions initiales (5.28) sont dites stables au sens de Liapounov lorsque $t \to +\infty$ si, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait pour tout $t > 0$ les inégalités*

$$\left\{\begin{array}{lcl} |\overline{x}(t) - x(t)| & < & \varepsilon, \\ |\overline{y}(t) - y(t)| & < & \varepsilon, \end{array}\right. \tag{5.29}$$

dès que les conditions initiales satisfont aux inégalités

$$\left\{\begin{array}{lcl} |\overline{x}_0 - x_0| & < & \delta, \\ |\overline{y}_0 - y_0| & < & \delta. \end{array}\right. \tag{5.30}$$

Remarque 5.2 *De la définition 5.5, nous pouvons conclure des inégalitaires (5.29) et (5.30) que les solutions varient peu, quel que soit t positif, lorsque les conditions initiales varient peu.*

Si, de plus, le système différentiel est celui d'un mouvement, le caractère du mouvement varie peu lorsque les conditions initiales varient peu si les solutions sont stables.

Examinons, la remarque précédente, sur un exemple d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

Exemple 5.9 *Soit l'équation*

$$y'(t) = -y(t) + 1. \tag{5.31}$$

La solution de l'équation (5.31) vérifiant la condition $y(0) = 1$ est-elle stable ?

Solution de l'exemple 5.9

Étude de la stabilité de l'équation (5.31) :

L'équation (5.31) est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 à variables séparées. Sa solution générale y_g est

$$y_g(t) = c\,e^{-t} + 1, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{5.32}$$

En utilisant la condition initiale $y(0) = 1$, la solution de l'équation (5.31) devient

$$y(x) = 1.$$

Trouvons, maintenant, une solution particulière satisfaisant à la condition initiale

$$\overline{y}(0) = \overline{y}_0.$$

En remplaçant cette condition initiale dans la solution générale (5.32), nous obtenons la solution particulière

$$\overline{y}(t) = \left(\overline{y}_0 - 1\right) e^{-t} + 1.$$

Il est évident que la solution $y(t) = 1$ est stable. En effet,

$$\begin{aligned} \overline{y}(t) - y(t) &= \left(\left(\overline{y}_0 - 1\right) e^{-t} + 1\right) - 1, \\ &= \left(\overline{y}_0 - 1\right) e^{-t} \to 0, \text{ lorsque } t \to +\infty \end{aligned}$$

L'inégalité (5.29) est donc vérifiée quel que soit ε dès que l'on a

$$\overline{y}_0 - 1 = \delta < \varepsilon.$$

★

Dans ce qui suit, nous allons présenter comment peut-on déterminer si un système différentiel linéaire à coefficients constants sans second membre est stable.

Méthode de résolution 5.6 *Considérons le système différentiel linéaire d'ordre* 1 *à coefficients constants sans second membre*

$$\begin{cases} x'(t) &= c\,x(t) + g\,y(t), \\ y'(t) &= a\,x(t) + b\,y(t), \end{cases} \tag{5.33}$$

avec $g \neq 0$ *et les conditions initiales*

$$\begin{cases} x(0) &= x_0, \\ y(0) &= y_0. \end{cases} \tag{5.34}$$

Voyons à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients pour que la solution $x(t) = 0$ *et* $y(t) = 0$ *du système* (5.33) *soit stable.*

Pour cela, nous devrons examiner la solution générale du système (5.33)*. En effet, le système* (5.33) *est équivalent au système*

$$\mathrm{Z}'(t) = \mathrm{A}\mathrm{Z}(t),$$

où

$$\mathrm{Z}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} c & g \\ a & b \end{pmatrix}.$$

L'équation caractéristique associée au système (5.33) *est*

$$\lambda^2 - (b+c)\lambda - (ag - bc) = 0. \tag{5.35}$$

Désignons les racines de l'équation caractéristique (5.35) *par* λ_1 *et* λ_2*, lesquelles représentent aussi les valeurs propres de la matrice* A*. Les différents cas qui peuvent se présenter sont*

1. Les racines de l'équation caractéristique (5.35) sont réelle, négatives et distinctes :

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Dans ce cas, la solution générale du système différentiel (5.33) *est*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, e^{\lambda_2 t} \\ c_1\, \dfrac{\lambda_1 - c}{g}\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, \dfrac{\lambda_2 - c}{g}\, e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

La solution vérifiant les conditions initiales (5.34) *est*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{cx_0 + g y_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\, e^{\lambda_1 t} + \dfrac{x_0\lambda_1 - cx_0 - y_0 g}{\lambda_1 - \lambda_2}\, e^{\lambda_2 t} \\ \dfrac{(cx_0 + g y_0 - x_0\lambda_2)(\lambda_1 - c)}{(\lambda_1 - \lambda_2) g}\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, \dfrac{(x_0\lambda_1 - cx_0 - y_0 g)(\lambda_2 - c)}{(\lambda_1 - \lambda_2) g}\, e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \tag{5.36}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Il résulte de cette solution particulière que, pour tout $\varepsilon > 0$*, nous pouvons choisir* x_0 *et* y_0 *suffisamment petits tels que l'on ait pour tous les* $t > 0$

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad |y(t)| < \varepsilon,$$

étant donné que

$$e^{\lambda_1 t} < 1 \quad \textit{et} \quad e^{\lambda_2 t} < 1.$$

Ainsi, dans ce cas la solution $x(t) = 0$ *et* $y(t) = 0$ *est stable.*

2. Une racine de l'équation caractéristique (5.35) est nulle et l'autre racine est réelle négatives :

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 < 0.$$

Dans ce cas, la solution générale du système différentiel (5.33) *est*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2\, e^{\lambda_2 t} \\ c_1\, \dfrac{c}{g} + c_2\, \dfrac{\lambda_2 - c}{g}\, e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

et, comme précédemment, la solution est stable.

3. L'équation caractéristique (5.35) admet une racine réelle négative de multiplicité 2 :

$$\lambda_1 = \lambda_2 < 0.$$

Dans ce cas, la solution générale du système différentiel (5.33) *est*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, t\, e^{\lambda_1 t} \\ c_1\, \dfrac{\lambda_1 - c}{g}\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, \dfrac{1 + \lambda_1 t - ct}{g}\, e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Étant donné que

$$t\, e^{\lambda_1 t} \to 0 \quad \textit{et} \quad e^{\lambda_1 t} \to 0 \quad \textit{lorsque} \quad t \to 0,$$

on aura pour c_1 et c_2 suffisamment petits (c'est-à-dire, lorsque x_0 et y_0 sont suffisamment petits)

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad |y(t)| < \varepsilon,$$

quel que soit $t > 0$. Donc, la solution est stable.

4. L'équation caractéristique (5.35) admet une racine nulle de multiplicité 2 :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Dans ce cas, la solution générale du système différentiel (5.33) est

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2\, t \\ c_1 \dfrac{-c}{g} + c_2 \dfrac{1 - c\,t}{g} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Il est claire que, si petit que soit $c_2 \neq 0$, x et y tendent vers l'infinie lorsque $t \to \infty$, c'est-à-dire que la solution est instable.

5. L'une des racines de l'équation caractéristique (5.35) soit positive :

$$\lambda_1 > 0, \quad \forall \lambda_2.$$

De la solution (5.36), il résulte que si petits que soient x_0 et y_0, si

$$c x_0 + g\, y_0 - x_0 \lambda_2 \neq 0,$$

autrement dit, si $c_1 \neq 0$, alors, $|x(t)| \Rightarrow \infty$ lorsque $t \to \infty$.
Par conséquent, la solution est instable dans ce cas aussi.

6. L'équation caractéristique (5.35) admet une racine complexe conjuguée où la partie réelle est négative :

$$\left.\begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & \alpha + i\beta \\ \lambda_2 & = & \alpha - i\beta \end{array}\right\} \alpha < 0.$$

Dans ce cas la solution du système (5.33) est

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\, e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2\, e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ c_1\, e^{\alpha t} \left(\dfrac{\alpha - c}{g} \cos(\beta t) + \dfrac{\beta}{g} \sin(\beta t) \right) + c_2\, e^{\alpha t} \left(\dfrac{\beta}{g} \cos(\beta t) + \dfrac{\alpha - c}{g} \sin(\beta t) \right) \end{pmatrix}, \tag{5.37}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Il est évident que pour tout $\varepsilon > 0$ l'on peut prendre x_0 et y_0 de sorte que l'on ait $|c_1| < \varepsilon$, $|c_2| < \varepsilon$ et $\dfrac{|\alpha - c| + |\beta|}{d} < \varepsilon$ et donc

$$|x(t)| < \varepsilon \quad \textit{et} \quad |y(t)| < \varepsilon.$$

Ainsi, la solution est stable.

7. Les racines de l'équation caractéristique (5.35) sont des nombre imaginaires purs :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lambda_1 & = & i\beta \\ \lambda_2 & = & -i\beta\end{array}\right\}\alpha<0.$$

Dans ce cas la solution du système (5.33) *est*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\cos(\beta t)+c_2\sin(\beta t) \\ c_1\left(\dfrac{\alpha-c}{g}\cos(\beta t)+\dfrac{\beta}{g}\sin(\beta t)\right)+c_2\left(\dfrac{\beta}{g}\cos(\beta t)+\dfrac{\alpha-c}{g}\sin(\beta t)\right)\end{pmatrix}, \quad c_1, c_2\in\mathbb{R},$$

c'est-à-dire que $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions périodiques de t. De la même manière que précédemment, nous pouvons vérifier que dans ce cas la solution est stable.

8. L'équation caractéristique (5.35) admet une racine complexe conjuguée de partie réelle strictement positive :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lambda_1 & = & \alpha+i\beta \\ \lambda_2 & = & \alpha-i\beta\end{array}\right\}\alpha>0.$$

Il résulte de la solution (5.37) *que si petits que soient x_0 et y_0 $\big($ c'est-à-dire, que pour des $c_1\neq 0$ et $c_2\neq 0$ arbitrairement petits$\big)$ les quantités $|x(t)|$ et $|y(t)|$ peuvent prendre des valeurs arbitrairement grandes lorsque t croît, étant donné que $e^{\alpha t}\to\infty$ lorsque $t\to\infty$.*

Et donc, dans ce cas, la solution est instable

Remarque 5.3 *Pour donner un critère général de stabilité de la solution du système* (5.33), *nous procéderons comme suit.*

Écrivons les racines de l'équation caractéristique (5.35) *sous forme complexe*

$$\begin{array}{rcl}\lambda_1 & = & \lambda_1^* + i\lambda_1^{**}, \\ \lambda_2 & = & \lambda_2^* + i\lambda_2^{**},\end{array}$$

$\big($ *si les racines sont réelle,* $\lambda_1^{**}=0$ *et* $\lambda_2^{**}=0\big)$.

Nous représentons les racines de l'équation caractéristique (5.35) *par des points dans le plan de la variable complexe. En partant des huit cas examinés ci-dessus, on peut formuler la condition de stabilité de la solution du système différentiel* (5.33) *comme suit :*

Si aucune des deux racines λ_1 et λ_2 de l'équation caractéristique (5.35) ne se trouve à droite de l'axe imaginaire et si une racine au moins est différente de zéro, la solution est stable ; s'il y a une racine à droite de l'axe imaginaire ou si les deux racines sont nulles, la solution est instable.

A. Liapounov a étudié la question de la stabilité des solutions des systèmes différentiels sous des hypothèses assez générales, dans cette matière, nous nous contentons de ce qui a été présenté précédemment.

Exemple 5.10 *Étudier la stabilité du système différentiel*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & -x(t)-9y(t), \\ y'(t) & = & x(t)-y(t),\end{array}\right. \tag{5.38}$$

vérifiant la condition initiale

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(0) & = & 0, \\ y(0) & = & 0.\end{array}\right. \tag{5.39}$$

Solution de l'exemple 5.10

Stabilité du système (5.38) :

Le système (5.38) est un système d'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 à coefficients constants sans second membre. Il admet comme solution générale

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \left(\cos(3t) - \sin(3t)\right) e^{-t} + c_2 \left(\cos(3t) + \sin(3t)\right) e^{-t} \\ c_1 \left(-\frac{1}{3}\right) \sin(3t)\, e^{-t} + c_2 \left(\frac{1}{3}\right) \cos(3t)\, e^{-t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \tag{5.40}$$

où les valeurs propres sont $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = -1 + 3i$.

La solution du système différentiel (5.38) vérifiant les conditions (5.39) est

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.41}$$

Comme les valeurs propres sont de parties réelles strictement négative et que l'unique solution du système différentiel (5.38) vérifiant les conditions (5.39) est nulle, alors, la solution du système (5.38) est stable au sens de Liapounov

★

6 Exercices

Exercice 5.1 *Trouver la solution générale du système différentiel suivant*

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} Y'(x) + \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}. \tag{5.42}$$

Solution de l'exercice 5.1

Solution générale Y_g *du système différentiel* (5.42) :

L'équation (5.42) représente un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

Nous avons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}.$$

- Étape 1 : Système différentiel sans second membre

  Nous avons

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} Y(x). \tag{5.43}$$

  1. Les valeurs propres de la matrice A :

     Nous avons

$$\begin{aligned} \det\left(A - \lambda \mathrm{Id}\right) = 0 \quad &\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \\ &\Rightarrow \left(\lambda+1\right)^2 \left(\lambda - 5\right) = 0, \\ &\Rightarrow \left(\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \wedge \lambda_3 = 5\right). \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice A admet une valeur propre réelle double et une valeur propre réelle.

2. Les vecteurs propres associés :
   – Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$: Nous avons

$$\begin{aligned} A\tilde{V} = \lambda_1 \tilde{V} \quad & \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a - 2b + 2c & = & -a, \\ -2a + b - 2c & = & -b, \\ 2a - 2b + c & = & -c \end{array} \right. \\ & \Rightarrow \quad 2a - 2b + 2c = 0 \\ & \Rightarrow \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} a \\ a + c \\ c \end{pmatrix}, \quad a, c \in \mathbb{R}^*, \end{aligned}$$

ainsi, pour des raison de simplification, nous prenons $a = 1$ et $c = 1$. D'où

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   – Pour $\lambda_3 = 5$: Nous avons

$$\begin{aligned} A\tilde{V} = \lambda_3 \tilde{V} \quad & \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a - 2b + 2c & = & 5a, \\ -2a + b - 2c & = & 5b, \\ 2a - 2b + c & = & 5c \end{array} \right. \\ & \Rightarrow \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \end{aligned}$$

ainsi, pour des raison de simplification, nous prenons $a = 1$. D'où

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En dernier, la solution générale Y_h du système est (5.43)

$$Y_h(x) = c_1\, e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\, x\, e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\, e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

ou encore,

$$Y_h(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & e^{5x} \\ e^{-x} & x\, e^{-x} & -e^{5x} \\ 0 & x\, e^{-x} & e^{5x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \tag{5.44}$$

- Étape 2 : Système différentiel avec second membre
  D'après la formule (5.44), nous avons

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & e^{5x} \\ e^{-x} & x e^{-x} & -e^{5x} \\ 0 & x e^{-x} & e^{5x} \end{pmatrix} \Rightarrow \phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} e^{x} & \frac{1}{3} e^{x} & -\frac{1}{3} e^{x} \\ -\frac{1}{3x} e^{x} & \frac{1}{3x} e^{x} & \frac{2}{3x} e^{x} \\ \frac{1}{3} e^{-5x} & -\frac{1}{3} e^{-5x} & \frac{1}{3} e^{-5x} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}(x) &= \int \phi^{-1}(x)\,\mathrm{F}(x)\,dx, \\
&= \begin{pmatrix} \int 0\,dx \\ \int 0\,dx \\ \int e^{-6x}\,dx \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ -\dfrac{1}{6}e^{-6x} + d_3 \end{pmatrix}, \quad d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En dernier, la solution générale Y_g du système différentiel (5.42) est

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y}_g(x) &= \phi(x)\,\mathrm{K}(x), \\
&= \begin{pmatrix} d_1\,e^{-x} + d_3\,e^{5x} - \dfrac{1}{6}e^{-x} \\ d_1\,e^{-x} + d_2\,x\,e^{-x} - d_3\,e^{5x} + \dfrac{1}{6}e^{-x} \\ d_2\,x\,e^{-x} + d_3\,e^{5x} - \dfrac{1}{6}e^{-x} \end{pmatrix}, \quad d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

♦

Exercice 5.2 *Déterminer la solution du système différentiel suivant*

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = y_3(x), \\ y_3'(x) = y_1(x) - 3\,y_2(x) + 3\,y_3(x). \end{cases} \tag{5.45}$$

Solution de l'exercice 5.2

Résolution du système différentiel (5.45) :

Le système (5.45) représente un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants sans second membre.Il peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{Y}'(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(x),$$

où

$$\mathrm{Y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}.$$

Pour la résolution du système (5.45), nous devrons chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A.

- Les valeurs propres de la matrice A :
  Nous avons

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{Id}) = 0 \quad &\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \\
&\Rightarrow (\lambda - 1)^3 = 0, \\
&\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice A admet une valeur propre réelle triple $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

- Les vecteurs propres associés :
Nous avons

$$A\tilde{V} = \lambda_1 \tilde{V} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} b & = & a, \\ c & = & b, \\ a - 3b + 3c & = & c, \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*,$$

ainsi, pour des raison de simplification, nous prenons $a = 1$. D'où

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La valeur propre $\lambda = 1$ de multiplicité 3 admet un seul vecteur propre, c'est pour cette raison, nous devons passer par le calcul de l'exponentielle de la matrice A.

- Exponentielle de la matrice A :
Nous avons

$$Y_h(x) = e^{\lambda_i x}\,\mathrm{Id} \left[\mathrm{Id} + (A - \lambda_i \mathrm{Id})x + \frac{(A - \lambda_i \mathrm{Id})^2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{(A - \lambda_i \mathrm{Id})^q}{q!} x^q \right] c, \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

avec $\lambda_i = 1$ et $q = 2$.
Ainsi, la solution générale Y_h du système (5.45) est

$$Y_h(x) = \begin{pmatrix} \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2\right) e^x & \left(x - x^2\right) e^x & \frac{1}{2}x^2 e^x \\ \frac{1}{2}x^2 e^x & \left(1 - x - x^2\right) e^x & \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) e^x \\ \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) e^x & \left(-3x - x^2\right) e^x & \left(1 + 2x + \frac{1}{2}x^2\right) e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

♦

Exercice 5.3 *Soit le système différentiel*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & y(t) + 1, \\ y'(t) & = & x(t) + 1. \end{array} \right. \tag{5.46}$$

1. *Trouver la solution générale du système différentiel* (5.46).
2. *Transformer le système différentiel* (5.46) *en une équation différentielle ordinaire.*
3. *Déduire la solution de l'*EDO *obtenue.*

Solution de l'exercice 5.3

1. <u>*Résolution du système différentiel* (5.46) :</u>

   L'équation (5.46) représente un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.
   Nous avons
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Étape 1 : Système différentiel sans second membre
Nous avons
$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & y(t), \\ y'(t) & = & x(t). \end{array}\right. \tag{5.47}$$

1. Les valeurs propres de la matrice A :
Nous avons
$$\begin{aligned} \det\left(\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{Id}\right)=0 \quad &\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \\ &\Rightarrow \quad \lambda^2-1=0, \\ &\Rightarrow \quad \left(\lambda_1=1 \wedge \lambda_2=-1\right). \end{aligned}$$
Ainsi, la matrice A admet deux valeurs propres réelles distinctes.

2. Les vecteurs propres associés :
   – Pour $\lambda_1=1$: Nous avons
$$\begin{aligned} \mathrm{A}\tilde{\mathrm{V}}=\lambda_1\tilde{\mathrm{V}} \quad &\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} b & = & a, \\ a & = & b, \end{array}\right. \\ &\Rightarrow \quad a=b, \\ &\Rightarrow \quad \tilde{\mathrm{V}}=\left(\begin{array}{c} a \\ a \end{array}\right), \quad a\in\mathbb{R}^*, \end{aligned}$$
   ainsi, pour des raison de simplification, nous prenons $a=1$. D'où
$$\mathrm{V}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$
   – Pour $\lambda_2=-1$: Nous avons
$$\begin{aligned} \mathrm{A}\tilde{\mathrm{V}}=\lambda_2\tilde{\mathrm{V}} \quad &\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} b & = & -a, \\ a & = & -b, \end{array}\right. \\ &\Rightarrow \quad \tilde{\mathrm{V}}=\left(\begin{array}{c} a \\ -a \end{array}\right), \quad a\in\mathbb{R}^*, \end{aligned}$$
   ainsi, pour des raison de simplification, nous prenons $a=1$. D'où
$$\mathrm{V}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

En dernier, la solution générale $\begin{pmatrix}x_h\\y_h\end{pmatrix}$ du système est (5.47)
$$\begin{pmatrix}x_h(t)\\y_h(t)\end{pmatrix}=c_1\,e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2\,e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \quad c_1, c_2\in\mathbb{R},$$
ou encore,
$$\begin{pmatrix}x_h(t)\\y_h(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t & e^{-t}\\ e^t & -e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}, \quad c_1, c_2\in\mathbb{R}. \tag{5.48}$$

- Étape 2 : Système différentiel avec second membre
  D'après la formule (5.48), nous avons

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow \phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{t} & -\frac{1}{2}e^{t} \end{pmatrix}.$$

  Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{K}(t) &= \int \phi^{-1}(t)\,\mathrm{F}(t)\,dt, \\ &= \begin{pmatrix} \int e^{-t}\,dt \\ \int 0\,dt \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} -e^{-t} + d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En dernier, la solution générale $\begin{pmatrix} x_g \\ y_g \end{pmatrix}$ du système différentiel (5.46) est

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_g(t) \\ y_g(t) \end{pmatrix} &= \phi(t)\,\mathrm{K}(t), \\ &= \begin{pmatrix} d_1\,e^{t} + d_2\,e^{-t} - 1 \\ d_1\,e^{t} - d_2\,e^{-t} - 1 \end{pmatrix}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. *Transformation du système différentiel (5.46) en une équation différentielle ordinaire* :

Du système (5.46), nous avons, d'une part,

$$x'(t) = y(t) + 1, \tag{5.49}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} y'(t) = x(t) + 1 \quad &\Rightarrow \quad y''(t) = x'(t), \\ &\Rightarrow \quad y''(t) = y(t) + 1, \end{aligned}$$

laquelle est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 avec second membre.

3. *Déduction de la solution de l'équation différentielle ordinaire obtenue* :

Comme la solution générale $\begin{pmatrix} x_g \\ y_g \end{pmatrix}$ du système (5.46) est

$$\begin{pmatrix} x_g(t) \\ y_g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1\,e^{t} + d_2\,e^{-t} - 1 \\ d_1\,e^{t} - d_2\,e^{-t} - 1 \end{pmatrix}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

Alors, la solution générale y_g de l'EDO obtenue est

$$y_g(t) = d_1\,e^{t} - d_2\,e^{-t} - 1, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

♦

Exercice 5.4 *Soit le problème*

$$\begin{cases} x'(t) &= y(t), \\ y'(t) &= -x(t), \\ \\ x(0) &= 1, \\ y(0) &= 0. \end{cases} \tag{5.50}$$

1. *Trouver la solution du problème* (5.50).
2. *Transformer le problème* (5.50) *en un problème d'*EDO *avec des conditions initiales.*
3. *Déduire la solution du problème obtenu.*

Solution de l'exercice 5.4

1. *Résolution du problème* (5.50) :

   Le problème (5.50) représente un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants sans second membre avec des conditions initiales. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.
   Nous avons
   $$Z'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

   - Étape 1 : Système différentiel sans second membre
     Nous avons
     $$\begin{cases} x'(t) &= y(t), \\ y'(t) &= x(t). \end{cases} \tag{5.51}$$

     1. Les valeurs propres de la matrice A :
        Nous avons
        $$\begin{aligned} \det\left(A - \lambda \,\mathrm{Id}\right) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \\ &\Rightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0, \\ &\Rightarrow \quad \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i, \quad \left(\alpha = 0 \wedge \beta = 1\right). \end{aligned}$$

        Ainsi, la matrice A admet une valeur propre complexe conjuguée.
     2. Les vecteurs propres associés :
        – Pour $\lambda_1 = i$: Nous avons
        $$\begin{aligned} A\tilde{V} = \lambda_1 \tilde{V} \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} b &= ia, \\ -a &= ib, \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad b = ia, \\ &\Rightarrow \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} a \\ ia \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \end{aligned}$$

        ainsi, pour des raison de simplification, nous prenons $a = 1$. D'où
        $$V_1 = \overline{V_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En dernier, la solution générale $Z_h = \begin{pmatrix} x_h \\ y_h \end{pmatrix}$ du système est (5.51)

$$Z_h(t) = \begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = c_1 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(t) \right) + c_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(t) \right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

ou encore,

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) \\ -c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Étape 2 : Les conditions initiales
  Nous avons
  $$\begin{pmatrix} x_h(0) \\ y_h(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
  Ainsi, la solution du problème est
  $$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$

2. *Transformation du problème* (5.50) *en un problème d'*EDO *avec des conditions initiales* :

Nous avons

$$\begin{aligned} x'(t) = y(t) \quad &\Rightarrow \quad x''(t) = y'(t), \\ &\Rightarrow \quad x''(t) = -x(t), \end{aligned}$$

laquelle est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre.
Les conditions initiales sont

$$\begin{cases} x(0) &= 1, \\ x'(0) &= 0. \end{cases}$$

3. *Déduction de la solution du problème obtenu* :

D'après la première question, la solution de l'EDO obtenue avec les conditions initiales est

$$x(t) = \cos(t).$$

♦

Exercice 5.5 *Soit le problème à conditions initiales*

$$\begin{cases} z^{(3)}(t) + 6z^{(2)}(t) + 11z'(t) + 6z(t) = e^{-t}, \\ z(0) = 0, \\ z'(0) = 1, \\ z^{(2)}(0) = 1. \end{cases} \tag{5.52}$$

1. *Déterminer la solution du problème* (5.52).

2. *En utilisant un changement de fonctions, transformer l'équation différentielle ordinaire associée au problème* (5.52) *en un système d'*EDO *d'ordre* 1. *Préciser les conditions initiales du système obtenu.*

3. *Déduire la solution du système obtenu.*

Solution de l'exercice 5.5

1. *Déterminons la solution du problème* (5.52) :

D'après l'exercice 4.4, la solution du problème (5.52) est

$$z_p(t) = \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{2}t\right)e^{-t} - 4\,e^{-2t} + \frac{7}{4}e^{-3t}.$$

2. *Transformation de l'EDO associée au problème* (5.52) *et des conditions initiales* :

Posons

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_1(t) & = & z(t) \\ z_2(t) & = & z'(t) \\ z_3(t) & = & z''(t) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} z_1'(t) & = & z'(t), \\ z_2'(t) & = & z''(t), \\ z_3'(t) & = & z'''(t), \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} z_1'(t) & = & z_2(t), \\ z_2'(t) & = & z_3(t), \\ z_3'(t) & = & -6z_1(t) - 11z_2(t) - 6z_3(t) + e^{-t}. \end{array}\right.$$

De plus, comme

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_1(t) & = & z(t) \\ z_2(t) & = & z'(t) \\ z_3(t) & = & z''(t) \end{array}\right. , \quad \text{alors,} \quad \left\{\begin{array}{lcl} z_1(0) & = & 0, \\ z_2(0) & = & 1, \\ z_3(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

Ainsi, le problème (5.52) peut se transformer en

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_1'(t) & = & z_2(t), \\ z_2'(t) & = & z_3(t), \\ z_3'(t) & = & -6z_1(t) - 11z_2(t) - 6z_3(t) + e^{-t}, \\ & & \\ z_1(0) & = & 0, \\ z_2(0) & = & 1, \\ z_3(0) & = & 1, \end{array}\right. \tag{5.53}$$

lequel est problème constitué d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre et des conditions initiales.

3. *Déduction de la solution du système obtenu* :

Comme

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_1(t) & = & z(t), \\ z_2(t) & = & z'(t), \\ z_3(t) & = & z''(t), \end{array}\right.$$

et

$$z_p(t) = \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{2}t\right)e^{-t} - 4\,e^{-2t} + \frac{7}{4}e^{-3t}.$$

Alors, la solution du problème obtenu (5.53) est

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}t + \frac{9}{4}\right)e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{7}{4}e^{-3t} \\ \left(-\frac{1}{2}t - \frac{7}{4}\right)e^{-t} + 8e^{-2t} - \frac{21}{4}e^{-3t} \\ \left(\frac{1}{2}t + \frac{5}{4}\right)e^{-t} - 16e^{-2t} + \frac{63}{4}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

♦

Exercice 5.6 *Soit le problème à conditions initiales*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) &=& x(t)+y(t),\\ y'(t) &=& 4\,y(t),\\ \\ x(0) &=& 0,\\ y(0) &=& 0. \end{array}\right. \tag{5.54}$$

1. *Déterminer la solution du problème* (5.54)*.*
2. *Le système différentiel associé au problème* (5.54) *est-il stable ?*

Solution de l'exercice 5.6

1. Déterminons la solution du problème (5.54) :

   Le problème (5.54) est constitué d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants sans second membre et des conditions initiales. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.
   Le système différentiel associé au problème (5.54) est équivalent à $X'(t) = AX(t)$ avec

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}.$$

   - Étape 1 : Système différentiel sans second membre
     Nous avons

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) &=& x(t)+y(t),\\ y'(t) &=& 4\,y(t). \end{array}\right.$$

     1. Les valeurs propres de la matrice A :
        Nous avons

$$\begin{aligned} \det\left(A-\lambda \mathrm{Id}\right)=0 \quad &\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1\\ 0 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0,\\ &\Rightarrow \quad (1-\lambda)(4-\lambda)=0,\\ &\Rightarrow \quad (\lambda_1=1 \wedge \lambda_2=4). \end{aligned}$$

        Ainsi, la matrice A admet deux valeurs propres réelle distinctes.
     2. Les vecteurs propres associés :
        – Pour $\lambda_1 = 1$: Nous avons

$$\begin{aligned} A\tilde{V}=\lambda_1\tilde{V} \quad &\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& a,\\ 4b &=& b, \end{array}\right.\\ &\Rightarrow \quad b=0, \forall a\in\mathbb{R}^*,\\ &\Rightarrow \quad \tilde{V}=\begin{pmatrix} a\\ 0\end{pmatrix}, \quad a\in\mathbb{R}^*, \end{aligned}$$

        ainsi, pour des raison de simplification, nous prenons $a = 1$. D'où

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

– Pour $\lambda_2 = 4$: Nous avons

$$\mathrm{A}\tilde{\mathrm{V}} = \lambda_2 \tilde{\mathrm{V}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a+b &= 4a, \\ 4b &= 4b, \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad b = 3a,$$
$$\Rightarrow \quad \tilde{\mathrm{V}} = \begin{pmatrix} a \\ 3a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*,$$

ainsi, pour des raison de simplification, nous prenons $a = 1$. D'où

$$\mathrm{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En dernier, la solution générale du système différentiel associé au problème (5.54) est

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\, e^{t} + c_2\, e^{4t} \\ 3c_2\, e^{4t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{5.55}$$

- Étape 2 : Conditions initiales
En utilisant les conditions initiales associé au problème (5.54), la solution générale (5.55) devient

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. *Le système différentiel associé au problème* (5.54) *est-il stable*?

Comme l'unique solution du problème (5.54) est nulle et que les valeurs propres sont réelles purement positives et distinctes, alors, le système est instable.

♦

7 Problèmes et applications

Problème 5.1 *Trouver la solution générale du système d'équations différentielles ordinaires*

$$\begin{cases} 2y_1'(x) + y_2'(x) - 3y_1(x) - y_2(x) &= x, \\ y_1'(x) + y_2'(x) - 4y_1(x) - y_2(x) &= e^x, \end{cases} \tag{5.56}$$

où y_1 et y_2 sont deux fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$.

Solution du problème 5.1

Solution générale du système (5.56) :

Le système (5.56) est un système différentiel ordinaire linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre.

Le système (5.56) est équivalent au système

$$\begin{cases} y_1'(x) = -y_1(x) + x - e^x, & (5.57a) \\ y_2'(x) = 5y_1(x) + y_2(x) + 2e^x - x, & (5.57b) \end{cases}$$

L'équation (5.57a) est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 a coefficients constants avec second membre que nous pouvons l'intégrer directement.

L'EDO sans second membre associée à l'équation (5.57a) est

$$y_1'(x) = -y_1(x),$$

sa solution générale est de la forme

$$y_1(x) = c_1\, e^{-x}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

En appliquant la méthode de la variation de la constante, nous obtenons

$$C_1'(x) = x\, e^{x} - e^{2x},$$

d'où

$$C_1(x) = x\, e^{x} - e^{x} - \frac{1}{2} e^{2x} + d_1, \quad d_1 \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, la solution générale de l'équation (5.57a) est

$$y_1(x) = d_1\, e^{-x} + x - 1 - \frac{1}{2} e^{x}, \quad d_1 \in \mathbb{R}.$$

En portant ce dernier résultat dans l'équation (5.57b), nous obtenons

$$y_2'(x) - y_2(x) = 4\,x - 5 - \frac{1}{2}\, e^{x} + 5\, c_1\, e^{-x},$$

qui est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 avec second membre. sa solution générale est

$$y_2(x) = -\frac{5}{2}\, d_1\, e^{-x} + d_2\, e^{x} - 4\,x + 1 - \frac{1}{2}\, x\, e^{x}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

En dernier, la solution générale du système (5.56) est

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1\, e^{-x} + x - 1 - \frac{1}{2} e^{x} \\ -\frac{5}{2}\, d_1\, e^{-x} + d_2\, e^{x} - 4\,x + 1 - \frac{1}{2}\, x\, e^{x} \end{pmatrix}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

◀

Problème 5.2 *Trouver la solution du système différentiel suivant*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(x) + y_2'(x) - y_2(x) & = & \sin x, \\ y_1'(x) - y_2'(x) + y_1(x) & = & x, \end{array} \right. \tag{5.58}$$

où y_1 et y_2 sont deux fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$.

Solution du problème 5.2

Le système proposé (5.58) est un système d'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre. Il est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(x) & = & -\frac{1}{2} y_1(x) + \frac{1}{2} y_2(x) + \frac{1}{2}(x + \sin x), \\ y_2'(x) & = & \frac{1}{2} y_1(x) + \frac{1}{2} y_2(x) + \frac{1}{2}(-x + \sin x), \end{array} \right. \tag{5.59}$$

où encore, à,

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+\sin x) \\ \frac{1}{2}(-x+\sin x) \end{pmatrix},$$

où

$$\mathrm{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{F}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+\sin x) \\ \frac{1}{2}(-x+\sin x) \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer la solution générale du systeme (5.59), nous passons par deux étapes.

- Étape 1 : Système différentiel sans second membre
  Nous avons

$$\begin{cases} y_1'(x) &= -\frac{1}{2}y_1(x) + \frac{1}{2}y_2(x), \\ y_2'(x) &= \frac{1}{2}y_1(x) + \frac{1}{2}y_2(x). \end{cases} \tag{5.60}$$

  1. Les valeurs propres de la matrice A :
     Nous avons

$$\begin{aligned} \det\left(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{Id}\right) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \\ &\Rightarrow \quad \lambda^2 - \frac{1}{2} = 0, \\ &\Rightarrow \quad \left(\lambda_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

     Ainsi, la matrice A admet deux valeurs propres réelles distinctes.

  2. Les vecteurs propres associés :
     – Pour $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:
       Nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{A}\tilde{\mathrm{V}} = \lambda_1 \tilde{\mathrm{V}} \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b &= -\frac{\sqrt{2}}{2}a, \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b &= -\frac{\sqrt{2}}{2}b, \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad b = \left(1 - \sqrt{2}\right)a, \\ &\Rightarrow \quad \tilde{\mathrm{V}} = \begin{pmatrix} a \\ \left(1-\sqrt{2}\right)a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \end{aligned}$$

       ainsi, pour des raison de simplification, nous prenons $a = 1$. D'où

$$\mathrm{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

– Pour $\lambda_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: Nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{A}\tilde{\mathrm{V}} = \lambda_2 \tilde{\mathrm{V}} \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}b & = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a, \\ \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}b & = \dfrac{\sqrt{2}}{2}b, \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad b = \left(1+\sqrt{2}\right)a, \\ &\Rightarrow \quad \tilde{\mathrm{V}} = \begin{pmatrix} a \\ \left(1+\sqrt{2}\right)a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \end{aligned}$$

ainsi, pour des raison de simplification, nous prenons $a = 1$. D'où

$$\mathrm{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

En dernier, la solution générale $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ du système (5.60) est

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = c_1\, e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} + c_2\, e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

ou encore,

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} & e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \\ \left(1-\sqrt{2}\right)e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} & \left(1+\sqrt{2}\right)e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{5.61}$$

- Étape 2 : Système différentiel avec second membre
  D'après la formule (5.61), nous avons

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} & e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \\ \\ \left(1-\sqrt{2}\right)e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} & \left(1+\sqrt{2}\right)e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \end{pmatrix} \Rightarrow \phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\, e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} & -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\, e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \\ \\ -\dfrac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\, e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} & \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\, e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{K}(t) &= \int \phi^{-1}(t)\,\mathrm{F}(t)\,dt, \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{2}}{4}\displaystyle\int x\, e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\,dx + \dfrac{1}{4}\displaystyle\int \sin x\, e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\,dx \\ \dfrac{1-\sqrt{2}}{4}\displaystyle\int x\, e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\,dx + \dfrac{1}{4}\displaystyle\int \sin x\, e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\,dx \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}x - \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{6}\cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{12}\sin x\right) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} + d_1 \\ \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}x + \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} - \dfrac{1}{6}\cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{12}\sin x\right) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} + d_2 \end{pmatrix}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En dernier, la solution générale $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ du système différentiel (5.58) est

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} &= \phi(t)\,\mathrm{K}(t), \\
&= \begin{pmatrix} d_1\, e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} + d_2\, e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} - 1 + x - \frac{1}{3}\cos x \\ d_1\left(1-\sqrt{2}\right) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} + d_2\left(1+\sqrt{2}\right) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} + 1 - \frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{3}\sin x \end{pmatrix}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

◀

Problème 5.3 *Considérons le système différentiel suivant*

$$\begin{cases} y_1''(x) + 4\,y_2(x) &= 0, \\ y_2''(x) - 4\,y_1(x) &= 0. \end{cases} \tag{5.62}$$

où y_1 et y_2 sont deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. *Trouver la solution générale du système différentiel* (5.62).
2. *Parmi les solutions du système différentiel* (5.62)*, quelles sont celles qui prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$.*

Solution du problème 5.3

1. *Résolution du système différentiel* (5.62) :

   Le système (5.62) est un système d'équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre. Pour sa résolution, nous devrons d'abord le transformer en un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants sans second membre.

   Pour cela, posons
$$y_1'(x) = y_3(x) \quad \text{et} \quad y_2'(x) = y_4(x),$$
   où y_3 et y_4 sont deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, ainsi,
$$\begin{cases} y_1'(x) &= y_3(x) \\ y_2'(x) &= y_4(x) \\ y_3'(x) &= y_1''(x) \\ y_4'(x) &= y_2''(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'(x) &= y_3(x), \\ y_2'(x) &= y_4(x), \\ y_3'(x) &= -4\,y_2(x), \\ y_4'(x) &= 4\,y_1(x), \end{cases}$$
   lequel est un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants sans second membre, il peut, aussi, s'écrire sous la forme
$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \\ y_4'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ y_4(x) \end{pmatrix}, \tag{5.63}$$
   avec
$$\mathrm{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ y_4(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Trouver la solution générale du système différentiel (5.62) revient à résoudre le système différentiel (5.63).

1. Les valeurs propres de la matrice A :
   Nous avons

$$\begin{aligned}
\det\left(\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{Id}\right)=0 \quad &\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \\
&\Rightarrow \quad \lambda^4+16=0, \\
&\Rightarrow \quad \left(\lambda_1=\overline{\lambda}_2=\sqrt{2}+i\sqrt{2} \wedge \lambda_3=\overline{\lambda}_4=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

   Ainsi, la matrice A admet deux valeurs propres complexes conjuguées.

2. Les vecteurs propres associés :
   – Pour $\lambda_1=\overline{\lambda}_2=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$:
     Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}\tilde{\mathrm{V}}=\lambda_1\tilde{\mathrm{V}} \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} c &= \left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)a, \\ d &= \left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)b, \\ -4b &= \left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)c, \\ 4a &= \left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)d, \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} b &= (-i)\,a, \\ c &= \left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)a, \\ d &= \left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)a, \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \tilde{\mathrm{V}} = \begin{pmatrix} a \\ (-i)\,a, \\ \left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)a \\ \left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)a \end{pmatrix}, \quad a\in\mathbb{R}^*,
\end{aligned}$$

     ainsi, pour des raison de simplification, nous prenons $a=1$. D'où

$$\mathrm{V}_1=\overline{\mathrm{V}}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ \sqrt{2}+i\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-i\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

   – Pour $\lambda_3=\overline{\lambda}_4=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$:
     Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}\tilde{\mathrm{V}}=\lambda_3\tilde{\mathrm{V}} \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} c &= \left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)a, \\ d &= \left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)b, \\ -4b &= \left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)c, \\ 4a &= \left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)d, \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} b &= i\,a, \\ c &= \left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)a, \\ d &= \left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)a, \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \tilde{\mathrm{V}} = \begin{pmatrix} a \\ i\,a, \\ \left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)a \\ \left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)a \end{pmatrix}, \quad a\in\mathbb{R}^*,
\end{aligned}$$

ainsi, pour des raison de simplification, nous prenons $a = 1$. D'où

$$V_3 = \overline{V}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -\sqrt{2}+i\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-i\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Donc : la solution générale du système (5.63) est

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ y_4(x) \end{pmatrix} = c_1\, e^{\sqrt{2}(1+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ \sqrt{2}+i\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-i\sqrt{2} \end{pmatrix} + c_2\, e^{\sqrt{2}(1-i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ \sqrt{2}-i\sqrt{2} \\ \sqrt{2}+i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$+c_3\, e^{\sqrt{2}(-1+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -\sqrt{2}+i\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}+i\sqrt{2} \end{pmatrix} + c_4\, e^{\sqrt{2}(-1-i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -\sqrt{2}-i\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}+i\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}.$$

Les solutions du système (5.62) sont donc

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\, e^{\sqrt{2}(1+i)x} + c_2\, e^{\sqrt{2}(1-i)x} + c_3\, e^{\sqrt{2}(-1+i)x} + c_4\, e^{\sqrt{2}(-1-i)x} \\ -c_1\, i\, e^{\sqrt{2}(1+i)x} + c_2\, i\, e^{\sqrt{2}(1-i)x} + c_3\, i\, e^{\sqrt{2}(-1+i)x} - c_4\, i\, e^{\sqrt{2}(-1-i)x} \end{pmatrix},$$

avec $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$.

2. *Les solutions réelles du système différentiel* (5.62) :

Les solutions réelles du système différentiel (5.62) s'obtiennent en exprimant le fait que

$$y_1(x) = \overline{y_1(x)} \quad \text{et} \quad y_2(x) = \overline{y_2(x)},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Après de simple calcul, nous obtenons les conditions $c_1 = \overline{c}_2$ et $c_3 = \overline{c}_4$.

Donc : les solutions réelles du système différentiel (5.62) ont la forme

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{2}x}\Big(k_1 \cos\big(\sqrt{2}x\big) - k_2 \sin\big(\sqrt{2}x\big)\Big) + e^{\sqrt{-2}x}\Big(k_3 \cos\big(\sqrt{2}x\big) + k_4 \sin\big(\sqrt{2}x\big)\Big) \\ e^{\sqrt{2}x}\Big(k_2 \cos\big(\sqrt{2}x\big) + k_1 \sin\big(\sqrt{2}x\big)\Big) + e^{\sqrt{-2}x}\Big(k_4 \cos\big(\sqrt{2}x\big) - k_3 \sin\big(\sqrt{2}x\big)\Big) \end{pmatrix},$$

où k_1, k_2, k_3 et $k_4 \in \mathbb{R}$.

◀

Bibliographie

[1] **Ahmad, S., and Ambrosetti, A.,** (2014), *A textbook on ordinary differential equations.* Springer International Publishing Switzerland.

[2] **Azoulay, E.,** (1983), *Mathématiques.* DEUG B, Première et deuxième années, Cours et exercices, Tome 1, McGraw-Hill, Paris.

[3] **Belaïdi, B.,** (2015, *Analyse mathématique : Exercices corrigés.* $1^{ère}$ réimpression, Officie des Publications Universitaires, Algérie.

[4] **Calvo, B., Doyen, J., Calvo, A., and Boschet, F.,** (1971), *Exercices d'analyse.* $1^{ère}$ Cycle scientifique préparation aux grandes écoles, $2^{ème}$ Année, Armand Colin, Collection U, Paris.

[5] **Calvo, B., Doyen, J., Calvo, A., and Boschet, F.,** (1977), *Cours d'analyse* III. $1^{ère}$ Cycle de l'enseignement supérieur et classes préparatoires scientifiques, Armand Colin, Collection U, Paris.

[6] **Chatterji, S.D.,** (1998), *Cours d'analyse* 3. Équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.

[7] **Danko, P., Popov, A., and Kogevnikova, T.,** (1985), *Exercices et problèmes des mathématiques supérieures.* $2^{ème}$ partie, $2^{ème}$ édition, Éditions MIR, Moscou.

[8] **Doneddu, A.,** (1981), *Fonctions vectorielles. Séries. Équations différentielles.* Tome 5, $2^{ème}$ éditions revue, Vuibert. Paris.

[9] **Ferrigno, S., Marx, D., and Auller-Gueudin, A.,** (2013), *Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur.* Tout le cours en fiches, Licence - Prépas - IUT, Dunod, Paris.

[10] **Hazi, M.,** (2006), *S.E.M* 300 *par ses examens : Analyse et Algèbre de première année des Université et Grandes Écoles Scientifiques.* Tome 2, Officie des Publications Universitaires, Algérie.

[11] **Mehbali, M.,** (1993), *Mathématiques : Fonction d'une variable réelle.* Résumés de cours, Exercices corrigés, $1^{ère}$ Année Universitaire, Officie des Publications Universitaires, Algérie.

[12] **Pac, J-L.,** (2012), *Systèmes dynamiques.* Cours et exercices corrigés, Dunod, Paris.

[13] **Piskounov, N.,** (1970), *Calcul différentiel et intégral.* Tome II, $4^{ème}$ édition, Éditions MIR, Moscou.

Index des notations

Dans tout ce polycopié, les notations suivantes seront utilisées. En cas de modification, elles seront redéfinies conformément aux différentes articulations de la partie.

EDO	:	Équations Différentielles Ordinaires.
$\mathbb{N}$	:	Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	:	Ensemble des entiers naturels privé de zéro.
$\mathbb{Z}$	:	Ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}\setminus\{\beta\}$	:	Ensemble des nombres réels privé de $\beta \in \mathbb{R}$.
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$	:	Ensemble des nombres réels non nuls.
$\mathbb{R}_+^*$	:	Ensemble des nombres réels strictement positifs.
$\mathbb{R}^n$	:	Ensemble des vecteurs réels à n composants, $n \in \mathbb{N}^*$.
$\mathbb{R}^{n\times n}$	:	Ensemble des matrices réelles à $n \times n$ composantes, $n \in \mathbb{N}^*$.
$\mathbb{C}$	:	Ensemble des nombres complexes.
I, J	:	Intervalles de $\mathbb{R}$.
$\Lambda_i \subseteq \mathbb{R}$	:	Ouvert borné de $\mathbb{R}$.
Ω_i	:	Ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
$\mathscr{C}^n(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^j)$	:	Espace des fonctions n fois continument différentiable de $\mathbb{R}^i$ à $\mathbb{R}^j$, i, j, $n \in \mathbb{N}^*$.
x, t	:	Variables réelles.
$z = (z_1, z_2, \cdots, z_N)$	:	Variable réelle de $\mathbb{R}^N$.
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$	:	Matrice réelle de taille $N \times N$.
$\lvert x \rvert$	:	Valeur absolue de x.
$\lVert z \rVert$	:	Norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$.
y	:	Fonction continue n fois dérivable à une variable réelle x, $n \in \mathbb{N}$.
y_i	:	Fonction continue n fois dérivable à une variable réelle x, $i \in \mathbb{N}^*$.
$y'(x) = \frac{d}{dx} y(x)$	:	Dérivée première de la fonction y par rapport à x.
$y''(x) = \frac{d^2}{dx^2} y(x)$	:	Dérivée seconde de la fonction y par rapport à x.
$y^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} y(x)$	:	Dérivée $n-i\grave{e}me$ de la fonction y par rapport à x, $n \in \mathbb{N}^*$.

$\mathscr{F}, f, f_i$	:	Fonction réelle continue et dérivable à plusieurs variables, $i \in \mathbb{N}^*$.
$\dfrac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2)$	:	Dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x_2.
$\mathrm{Y}(x) = \big(y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\big)$	:	Fonction réelle vectorielle à une variable réelle x, $n \in \mathbb{N}^*$.
$\mathrm{F}\big(x; \mathrm{Y}(x)\big)$	:	Fonction réelle vectorielle à plusieurs variables réelles.
y_h	:	Solution d'une EDO de fonction inconnue y sans second membre.
y_s	:	Solution singulière d'une EDO de fonction inconnue y.
y_p	:	Solution particulière d'une EDO de fonction inconnue y.
y_g	:	Solution générale d'une EDO de fonction inconnue y.
Id	:	Matrice identité.
$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\mathrm{N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{N}1} & \cdots & a_{\mathrm{NN}} \end{vmatrix}$	:	Déterminant de la matrice A.
λ_i	:	Valeur propre de la matrice A avec $i = \overline{1, \mathrm{N}}$.
V_i	:	Vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre λ_i avec $i = \overline{1, \mathrm{N}}$.
$\Re(\tilde{z})$	:	Partie réelle du nombre complexe $\tilde{z}$.
$\Im(\tilde{z})$	:	Partie imaginaire du nombre complexe $\tilde{z}$.