MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique

POLYCOPIE :

Algèbre linéaire

Cours et exercices corrigés

Réalisé par:

HAMMOU Amouria

Pour

Première année Math-Informatique

Année Universitaire 2020-2021

Table des matières

Introduction

Ce document est consacré aux cours d'Algèbre linéaire avec exercices corrigés et exercices proposés. Il est à caractère purement pédagogique couvre le programme d'Algèbre linéaire de la première année LMD, Licence Mathématique, Informatique.

Il composé de quatre chapitres, le premier chapitre est consacré a l'étude les espace vectoriels. Le deuxième chapitre aborde l'étude les applications linéaires.

Le chapitre suivant traite l'étude des Matrices et Déterminats.

Le dernier chapitre est consacré a l'étude des systèmes d'équations linéaires.

Nous espérons que ce polycopié répondre aux attentes des étudiants et qu'il les aidera à réussir.

Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Espaces vectoriels de dimension finie

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soit E un ensemble non vide muni d'une opération interne notée $(+)$:

$$\begin{array}{ccccc} (+) & : & E \times E & \to & E \\ & & (u, u') & \mapsto & u + u' \end{array}$$

et d'une opération externe notée $(\bullet)$:

$$\begin{array}{ccccc} (\bullet) & : & \mathbb{K} \times E & \to & E \\ & & (\lambda, u) & \mapsto & \lambda \bullet u \end{array}$$

Définition 1.1 *Un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, \bullet)$ tel que :*

1) $(E, +)$ est un groupe commutatif.

2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, u' \in E : \lambda \bullet (u + u') = (\lambda \bullet u) + (\lambda \bullet u')$.

3) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E : (\lambda + \mu) \bullet u = (\lambda \bullet u) + (\mu \bullet u)$.

4) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E : \lambda \bullet (\mu \bullet u) = (\lambda\mu) \bullet u$.

5) $\forall u \in E, 1_K \bullet u = u$, où 1_K est l'élément neutre de la multiplication dans le corps $\mathbb{K}$.

Les éléments de l'espace vectoriel sont appelés des vecteurs et ceux de $\mathbb{K}$ des scalaires.

Proposition 1.2 *Si E est $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors on a les propriétés suivantes :*

1) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \lambda \bullet 0_E = 0_E$ *et* $0_{\mathbb{K}} \bullet u = 0_E$.

2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, (\lambda \bullet u = 0_E) \Leftrightarrow (\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $u = 0_E)$.

3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, (\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$.

4) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, u' \in E, \lambda(u - u') = \lambda u - \lambda u'$.

Preuve : Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, u' \in E$.

1) $\lambda \bullet 0_E = \lambda(0_E + 0_E) = \lambda 0_E + \lambda 0_E$.

Donc $\lambda 0_E = 0_E$.

$0_{\mathbb{K}} \bullet u = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}})u = 0_{\mathbb{K}}u + 0_{\mathbb{K}}u$.

Donc $0_{\mathbb{K}}u = 0_E$.

2) Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $u = 0_E$, alors d'aprés (1), $\lambda u = 0_E$.

Supposons que $\lambda u = 0_E$ et $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors en notant λ^{-1} l'inverse de λ relativement à la multiplication dans $\mathbb{K}$,

on aura

$u = 1_k u = (\lambda^{-1}\lambda)u = \lambda^{-1}(\lambda u) = \lambda^{-1}0_E = 0_E$.

3) On a

$\lambda u = (\lambda + (-\mu + \mu))u = ((\lambda - \mu) + \mu)u = (\lambda - \mu)u + \mu u$.

Alors $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$.

4) $\lambda u = \lambda(u + (-u' + u')) = \lambda((u - u') + u') = \lambda(u - u') + \lambda u'$.

Donc $\lambda u - \lambda u' = \lambda(u - u')$.

$\square$

Exemple 1.3 $(\mathbb{R}, +, \bullet)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel,* $(\mathbb{C}, +, \bullet)$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel.*

Exemple 1.4 *Soient* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et* $E = \mathbb{R}^n$.

E *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

On définit les deux lois suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} + & : & E \times E & \to & E \\ & & (u, u') & \mapsto & u + u' = (u_1 + u'_1, ..., u_n + u'_n) \end{array}$$

$u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ *et* $u' = (u'_1, u'_2, ..., u'_n)$

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & : & \mathbb{R} \times E & \to & E \\ & & (\lambda, u) & \mapsto & \lambda \bullet u = (\lambda u_1, \lambda u_2, ..., \lambda u_n) \end{array}$$

E *muni de ces deux lois est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Exemple 1.5 *Soient* X *un ensemble non vide et* $E = F(X, \mathbb{R})$ *l'ensemble des applications de* X *dans* $\mathbb{R}$.
E *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel pour les lois interne et externe définies par :*

$\forall (h, h') \in E^2, \forall u \in X : (h \oplus h')(u) = h(u) + h'(u)$.

$\forall h \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in X : (\lambda \odot h)(u) = \lambda \bullet h(u)$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.6 *Soient* $(E, +, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* F *une partie de* E.
On dit que F *est un sous-espace vectoriel de* E *si et seulement si :*

i) $F \neq \emptyset$.

ii) $\forall u, u' \in F : u + u' \in F$.

iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F : \lambda \bullet u \in F$.

Proposition 1.7 *Soient* $(E,+,\bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* F *une partie de* E. *Alors* F *est un sous-espace vectoriel de* E *si et seulement si :*

a) $F \neq \emptyset$.

b) $\forall u, u' \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \lambda u + \mu u' \in F$.

Exemple 1.8 *Montrons que*

$$F = \{(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 : u + u' = 0\},$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1) $F \neq \emptyset$ *car* $o_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$.

2) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *et* $(u_1, u_1', u_1''), (u_2, u_2', u_2'') \in F$.

Alors $u_1 + u_1' = 0$ *et* $u_2 + u_2' = 0$.

On a :

$\lambda(u_1, u_1', u_1'') + \mu(u_2, u_2', u_2'') = (\lambda u_1 + \mu u_2, \lambda u_1' + \mu u_2', \lambda u_1'' + \mu u_2'')$,

et

$(\lambda u_1 + \mu u_2) + (\lambda u_1' + \mu u_2') = \lambda(u_1 + u_1') + \mu(u_2 + u_2') = \lambda 0 + \mu 0 = 0.$

Donc

$$\lambda(u_1, u_1', u_1'') + \mu(u_2, u_2', u_2'') \in F.$$

Ainsi F *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

Remarque 1 0_E *l'élément neutre dans* E *relativement à la lois* $+$.

Si F *est un sous-espace vectoriel de* E, *alors* $0_E \in F$.

Exemple 1.9 *Soit* E *un* K*-espace vectoriel.*

$\{0_E\}$ *et* E *sont des sous-espaces vectoriels de* E.

Exemple 1.10 *Soient* $(E,+,\bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* F *une partie de* E.

Si $0_E \notin F$, *alors* F *n'est pas un sous-espace vectoriel de* E.

Proposition 1.11 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E. Alors $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de E.*

Preuve :

i) $F \cap G \neq \emptyset$ car $0_E \in F \cap G$.

ii) Soient $u, u' \in F \cap G$,

$u, u' \in F \cap G \Rightarrow u, u' \in F$ et $u, u' \in G$,

$\Rightarrow u + u' \in F$ *et* $u + u' \in G$,

$\Rightarrow u + u' \in F \cap G$.

iii) Soient $u \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$u \in F \cap G \Rightarrow u \in F$ et $u \in G$,

$\Rightarrow \lambda u \in F$ et $\lambda u \in G$,

$\Rightarrow \lambda u \in F \cap G$.

Donc $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

$\square$

Remarque 2 *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E, alors $F \cup G$ n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E.*

Exemple 1.12 *Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$,*

L'ensemble $F = \{\alpha(1,0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$,

l'ensemble $G = \{\alpha(0,1) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

On a $(1,0) \in F$ donc $(1,0) \in F \cup G$ et $(0,1) \in G$ donc $(0,1) \in F \cup G$,

mais $w = (1,0) + (0,1) = (1,1) \notin F \cup G$.

Proposition 1.13 *Soit* $(E,+,\bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*.*

On note $F_1 + F_2 = \{u \in E : \exists (u_1, u_2) \in F_1 \times F_2 : u = u_1 + u_2\}$,

$u_1 + u_2 : (u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$.

$F_1 + F_2$ *est appelé somme de* F_1 *et* F_2*.*

$F_1 + F_2$ *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

Preuve :

i) $F_1 + F_2 \neq \emptyset$ car $0_E = 0_E + 0_E \in F_1 + F_2$.

ii) Soient $u, u' \in F_1 + F_2$.

Donc $\exists (u_1, u_2) \in F_1 \times F_2, (u'_1, u'_2) \in F_1 \times F_2 : u = u_1 + u_2$ et $u' = u'_1 + u'_2$.

On a

$$u + u' = (u_1 + u_2) + (u'_1 + u'_2) = (u_1 + u'_1) + (u_2 + u'_2) \in F_1 + F_2.$$

iii) Soient $u \in F_1 + F_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Donc $\exists (u_1, u_2) \in F_1 \times F_2 : u = u_1 + u_2$.

On a $\lambda u = \lambda(u_1 + u_2) = (\lambda u_1) + (\lambda u_2) \in F_1 + F_2$.

Ainsi $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

$\square$

Proposition 1.14 *Soient* $(E,+,\bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel ,* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*.*

On a alors

1) $F + G = G + F$*.*

2) $F \subset F + G$.

3) $F + \{0_E\} = F$.

4) $F \cup E = E$.

5) $F \cap \{0_E\} = \{0_E\}$.

6) $F \cap E = F$.

Définition 1.15 *Soient* $(E, +, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E.

On dit que F *et* G *sont en somme directe si et seulement si* $F \cap G = \{0_E\}$.

Lorsque F *et* G *sont en somme directe, on note* $F \oplus G$ *au lieu de* $F + G$.

Proposition 1.16 *Soient* $(E, +, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel ,* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*. Alors* F *et* G *sont en somme directe si et seulement si tout élément de* $F+G$ *se décompose d'une façon unique en somme d'un élément de* F *et d'un d'élément de* G.

Preuve :

1) Supposons que F et G soient en somme directe.

Soit $u \in F + G$ supposons que $u = u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$ avec $(u_1, u_2), (u'_1, u'_2) \in F \times G$

On a $u_1 - u'_1 = u'_2 - u_2$

On a $u_1 - u'_1 \in F$ et $u'_2 - u_2 \in G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

Donc $u_1 - u'_1 = u'_2 - u_2 \in F \cap G = \{0_E\}$.

Ainsi

$$\begin{cases} u_1 - u'_1 = 0_E \\ u'_2 - u_2 = 0_E \end{cases} \quad \textit{et par suite} \quad \begin{cases} u_1 = u'_1 \\ u_2 = u'_2 \end{cases}$$

D'où u se décompose d'une façon unique sur F et G.

2) Supposons que tout élément de $F+G$ se décompose d'une façon unique sur F et G.

On a $\{0_E\} \subset F \cap G$.

Soit $u \in F \cap G$ On a $0_E = 0_E + 0_E = u + (-u)$.

D'aprés l'hypothèse $u = 0_E$.

Ainsi $F \cap G \subset \{0_E\}$.

D'où $F \cap G = \{0_E\}$ et par suite F et G sont en somme directe.

$\square$

Définition 1.17 *Soient $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

On dit que F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si

$$\begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

Où 0_E est l'élément neutre dans E relativement à la loi $+$.

Ceci revient à dire que F et G sont en somme directe et $F \oplus G = E$.

Exemple 1.18 *Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sur le corps $\mathbb{R}$.*

$F = \mathbb{R} \times \{0\}$ *et* $G = \{0\} \times \mathbb{R}$

F et G sont deux sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^2$ supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1.19 *Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sur le corps $\mathbb{R}$, on considère les deux ensembles suivants :*

$F = \{(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 : u'' = 0\}$ *et* $G = \{(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 : u = u' = 0\}$

F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ car :

1) $(0,0,0) \in F$.

Soient $(u_1, u'_1, u''_1), (u_2, u'_2, u''_2) \in F$ *et* $\lambda, \mu \in \mathrm{I\!R}$.

D'où $u''_1 = 0$ *et* $u''_2 = 0$.

On a

$$\lambda(u_1, u'_1, u''_1) + \mu(u_2, u'_2, u''_2) = [(\lambda u_1 + \mu u_2), (\lambda u'_1 + \mu u'_2), (\lambda u''_1 + \mu u''_2)]$$

et

$$(\lambda u''_1 + \mu u''_2) = 0.$$

D'où $\lambda(u_1, u'_1, u''_1) + \mu(u_2, u'_2, u''_2) \in F$.

Donc F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathrm{I\!R}^3$.

2) De même pour G.

3) Montrons que $\mathrm{I\!R}^3 = F \oplus G$.

Soit $u, u', u'' \in \mathrm{I\!R}$,

on a $(u, u', u'') = (u, u', 0) + (0, 0, u'')$.

D'où $\mathrm{I\!R}^3 = F + G$.

$(u, u', u'') \in F \cap G \Rightarrow (u, u', u'') \in F$ *et* $(u, u', u'') \in G$

$\Rightarrow u'' = 0$ *et* $u = u' = 0$

$\Rightarrow (u, u', u'') = (0, 0, 0)$.

Alors $F \cap G \subset \{(0,0,0)\}$ *et comme* $(0,0,0) \in F \cap G$, *alors* $F \cap G = \{(0,0,0)\}$.

D'où $\mathrm{I\!R}^3 = F \oplus G$.

1.3 Dépendance et indépendance linéaires

1.3.1 Familles liées, familles libres

Définition 1.20 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; $n \in \mathbb{N}^\star$; $u_1, ..., u_n \in E$.*

On appelle combinaison linéaire de $u_1, ..., u_n$ tout élément de E tel qu'il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

Définition 1.21 *Si $(u_i)_{i \in E}$ est une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle combinaison linéaire de $(u_i)_{i \in E}$, tout élément u de E tel qu'il existe une partie finie J de E est une famille $(\lambda_i)_{i \in J}$ de $\mathbb{K}$ telles que : $u = \sum_{i \in J} \lambda_i u_i$*

Définition 1.22 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; $n \in \mathbb{N}^\star$; $u_1, ..., u_n \in E$.*

1) *On appelle la famille $\{u_1, ..., u_n\}$ est liée si et seulement si :*

   $\exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n - \{(0, 0, .., 0)\} : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0.$

   On dit également que les vecteurs $\{u_1, ..., u_n\}$ sont linéairement dépendants.

2) *On appelle la famille $\{u_1, ..., u_n\}$ est libre si et seulement si :*

   $\forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : [(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0) \Rightarrow (\forall i \in \{1, ..., n\}) : \lambda_i = 0].$

   On dit aussi que les vecteurs $\{u_1, ..., u_n\}$ sont linéairement indépendants.

Remarque 3 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_1, ..., u_n \in E$.*

On appelle la famille $\{u_1, ..., u_n\}$ est libre si et seulement s'elle n'est pas liée.

Exemple 1.23 *La famille $\{u = (1, 0, 1), u' = (2, 1, -1)\} \subset \mathbb{R}^3$ est libre car :*
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda u + \mu u' = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (\lambda, 0, \lambda) + (2\mu, \mu, -\mu) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (\lambda + 2\mu, \mu, \lambda - \mu) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Exemple 1.24 $E = \mathbb{R}^2, n = 3, u = (1,1), u' = (2,1), u'' = (-1,0)$.
La famille u, u', u'' *est liée puis que* $u - u' - u'' = 0$.

1.4 Sous espace engendré par une partie

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie non vide de E.

Définition 1.25 *On appelle sous-espace vectoriel engendré par* A *et on le note par* $Vect(A)$ *l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de* E *contenant* A.

Proposition 1.26 *1)* $Vect(A)$ *est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de* E *contenant* A.

2) (*a*)*Si* $A \neq \emptyset$, *alors* $Vect(A)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de* A.
(*b*) $Vect(\emptyset) = \{0_E\}$.

Preuve :

1) $Vect(A)$ est un sous-espace vectoriel de E comme intersection de sous-espaces vectoriels de E.

   Par la définition de $Vect(A)$, On a : $A \subset Vect(A)$.

   Soit F un sous-espace vectoriels de E contenant A. Par la définition de $Vect(A)$, on a : $Vect(A) \subset F$.

   Ainsi, $Vect(A)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant A et il est inclus dans tout sous-espace vectoriel de E contenant A.

2) Supposons $A \neq \emptyset$ et notons $C(A)$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

   $C(A) = \{u \in E : \exists n \in \mathbb{N}^\star, \exists (a_1, ..., a_n) \in A^n, \exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : u = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\}$.

   Montrons que $C(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

a) Il est clair que $C(A) \neq \emptyset$.

b) Soient $u, u' \in C(A)$. Alors
$\exists n \in \mathbb{N}^\star, (a_1, ..., a_n) \in A^n, (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : u = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\}$. Et $\exists p \in \mathbb{N}^\star, (b_1, ..., b_p) \in A^n, (\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{K}^n : u' = \sum_{j=1}^p \mu_j b_j\}$.
Posons

$$C_k = \begin{cases} a_k & si \;\; 1 \leq k \leq n \\ b_{k-n} & si \;\; n+1 \leq k \leq n+p \end{cases} \quad et \;\; U'(k) = \begin{cases} \lambda_k & si \;\; 1 \leq k \leq n \\ \mu_{k-n} & si \;\; n+1 \leq k \leq n+p \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, ..., n+p\} \;\; C_k \in A \\ u + u' = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^p \mu_j b_j = \sum_{k=1}^{n+p} U'_k C_k \end{cases}$$

Alors $u + u' \in C(A)$.

c) On montre de même que : $\forall \lambda \in k, \forall u \in C(A), \lambda u \in C(A)$.

Ainsi $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Comme tout élément a de A est combinaison linéaire d'élément de A (il suffit d'écrire $a = 1_k a \in C(A)$.)

Donc $A \subset C(A)$.

Soient G un sous-espace vectoriel de E contenant A et $u \in C(A)$.

Alors $\exists n \in \mathbb{N}^\star, (a_1, ..., a_n) \in A^n, (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : u = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\}$.

Comme G contient A et que G est un sous-espace vectoriel de E, alors $u \in G$, ce qui montre de $C(A) \subset G$.

On établit que $C(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

D'où $C(A) = Vect(A)$.

$\square$

Définition 1.27 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E. On appelle sous-espace engendré par la famille $(u_i)_{i \in I}$ et on note $Vect\{(u_i)_{i \in I}\}$, le sous-espace vectoriel engendré par la partie $\{u_i : i \in I\}$ de E.*

1.4.1 Cas particulier

Le sous-espace vectoriel de E engendré par une famille finie non vide $\{u_1, ..., u_n\}$ d'éléments de E est $\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i : (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$.

1.5 Familles génératrices, bases

Définition 1.28 *Une famille de vecteurs $\{u_1, ..., u_n\} = G$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite génératrice de E si et seulement si : $Vect(G) = E$.*

Autrement dit, si et seulement si :

$\forall u \in E : \exists(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

Exemple 1.29 *Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, la famille $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ car :*

$\forall(u, u') \in \mathbb{R}^2 : (u, u') = ue_1 + u'e_2$.

Exemple 1.30 *Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les vecteurs $V_1 = (1, 1)$ et $V_2 = (1, -1)$.*

La famille V_1, V_2 est génératrice de $\mathbb{R}^2$ car :

Soit $(u, u') \in \mathbb{R}^2$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : (u, u') = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$.

On a $(u, u') = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 \Rightarrow (u, u') = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \lambda_1 + \lambda_2 \\ u' = \lambda_1 - \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{u+u'}{2} \\ \lambda_2 = \frac{u-u'}{2} \end{cases}$$

Définition 1.31 *Une famille de vecteurs $\{u_1, ..., u_n\} = G$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite une base de E si et seulement si elle est libre et génératrice de E.*

Proposition 1.32 *Une famille finie $B = \{u_1, ..., u_n\}$ d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite une base de E si et seulement si tout $u \in E$ se décompose d'une façon unique sur les u_i.*

C'est à dire $\forall u \in E, \exists!(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$

Les éléments $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ s'appellent les coordonnées (ou les composantes) de u dans la base B.

λ_i s'appelle la $i^{ème}$ coordonnée (ou composante) de u dans la base B.

Exemple 1.33 *Considérons l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n : n \in \mathbb{N}^\star$.
La famille $\{e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 0, 1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^n$ *appelée la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

1.6 Théorie de la dimension

Définition 1.34 *E un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel est dit de dimension finie si et seulement si E admet au moins une famille génératrice finie.*

Exemple 1.35 $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^\star$ *est de dimension finie. La famille* $\{e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 0, 1)\}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.36 *Soient E un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie n et non réduit à un seul élément. Alors :*

1) *E admet au moins une base finie.*
2) *Toutes les bases de E sont finies et ont le même cardinal. Le cardinal d'une base de E est appelé la dimension de E et est noté* $dim_{\mathbb{K}}(E)$ *ou* $dim(E)$.
   Par convention on a : $dim(\{0\}) = 0$

Exemple 1.37 *Dans* $\mathbb{R}^2$, *la famille* $\{e_1, e_2\}$ *avec* $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.
On a $dim\mathbb{R}^2 = 2$.
En général, $dim\mathbb{R}^n = n(n \in \mathbb{N}^\star)$.

Théorème 1.38 (Théorème de la base incomplète) *Soient E un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie n et non réduit à un seul élément, G une famille libre dans E.*
$G = \{y_1, ..., y_r\}(r \leq n)$.
Il ya au moins une façon de compléter G par $(n - r)$ *vecteurs de E pour obtenir une base de E.*

Proposition 1.39 *Soient E un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n, (n \in \mathbb{N}^\star)$.

1) *Toute famille libre de E est finie et a au plus n éléments.*
2) *Toute famille de E ayant au moins* $(n + 1)$ *éléments est liée.*
3) *Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.*

Proposition 1.40 *Soient E un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n, (n \in \mathbb{N}^\star)$.

1) *Toute famille génératrice de E ayant n éléments est une base de E.*
2) *Toute famille libre de E ayant n éléments est une base de E.*

Proposition 1.41 *Soient E un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et* $dim(F) \leq dim(E)$.

Corollaire 1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $dim(E) \geq 1$, F, G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe.*
On a alors : $dim(F \oplus G) = dim(F) + dim(G)$.

Corollaire 2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $dim(E) \geq 1$, F et G deux sous-espace vectoriels de E.*

$$Si \left\{ \begin{array}{l} F \subset G \\ dim(F) = dim(G) \end{array} \right. \quad Alors \;\; F = G.$$

Théorème 1.42 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $dim(E) \geq 1$. On a pour tous sous-espaces vectoriels F, G de E :*
$dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$.

1.7 Exercices corrigés

Exercice 1 *On définit sur $\mathbb{R}_+^\star$ les opérations :*

$$\oplus : \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star; : u \oplus u' = uu'.$$
$$\otimes : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star; : \lambda \otimes u = u^\lambda.$$

Montrer que $(\mathbb{R}_+^\star, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Solution

1) On a $\forall u, u' \in \mathbb{R}_+^\star : u \oplus u' = uu' \in \mathbb{R}_+^\star$.

   Donc $\oplus$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}_+^\star$.

a) La loi $\oplus$ est commutative car
   $\forall u, u' \in \mathbb{R}_+^\star : u \oplus u' = uu' = u'u \in \mathbb{R}_+^\star$.

   Alors $u \oplus u' = u' \oplus u$.

b) La loi $\oplus$ est associative car :
   $\forall u, u', u'' \in \mathbb{R}_+^\star : u(u' \oplus u'') = u(u'u'') = (uu')u'' \in \mathbb{R}_+^\star$.

   Alors $u(u' \oplus u'') = (u \oplus u')u''$.

c) L'élément neutre dans $\mathbb{R}_+^\star$ relativement à la loi $\oplus$ est $1 \in \mathbb{R}_+^\star$.

d) Le symétrique de tout élément u de $\mathbb{R}_+^\star$ relativement à la loi $\oplus$ est $\frac{1}{u} \in \mathbb{R}_+^\star$.

D'où $(\mathbb{R}_+^\star, \oplus)$ est un groupe abélien.

2) $\forall u \in \mathbb{R}_+^\star, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \otimes u = u^\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$.

a) Soit $u, u' \in \mathbb{R}_+^\star$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors

$$\lambda \otimes (u \oplus u') = \lambda \otimes (uu')$$

$$= (uu')^\lambda$$

$$= u^\lambda (u')^\lambda$$

$$= u^\lambda \oplus (u')^\lambda$$

$$= (\lambda \otimes u) \oplus (\lambda \otimes u').$$

b) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}_+^\star$.

Alors

$$(\lambda + \mu) \otimes u = (u)^{\lambda+\mu}$$

$$= (u)^\lambda (u)^\mu$$

$$= u^\lambda \oplus (u)^\mu$$

$$= (\lambda \otimes u) \oplus (\mu \otimes u).$$

c) Soient $\lambda, \mu \in \mathrm{I\!R}$ et $u \in \mathrm{I\!R}_+^\star$.

Alors

$$\lambda \otimes (\mu \otimes u) = \lambda \otimes ((u)^\mu)$$

$$= ((u)^\mu)^\lambda$$

$$= (u)^{\lambda\mu}$$

$$= (\lambda\mu) \otimes u.$$

d) $\forall u \in \mathrm{I\!R}_+^\star : 1 \otimes u = (u)^1 = u.$

Alors $(\mathrm{I\!R}_+^\star, \oplus, \otimes)$ est un $\mathrm{I\!R}$-espace vectoriel.

Exercice 2 *Dans l'espace vectoriel $\mathrm{I\!R}^4$, on considère l'ensemble suivant :*

$$F = \{(u, u', v, v') \in \mathrm{I\!R}^4 : u + 3v = u', v = 2v'\},$$

1) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{I\!R}^4$.

2) Trouver $dim(F)$.

3) Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathrm{I\!R}^4$ engendré par les vecteurs : $v_1 = (1, -1, 3, 0), v_2 = (0, 0, 1, -2)$. Quelle est la dimension de G?

4) Montrer que $\mathrm{I\!R}^4 = F \oplus G$.

Solution

1) $F = \{(u, u', v, v') \in \mathbb{R}^4 : u + 3v = u', v = 2v'\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

i) $(0, 0, 0, 0) \in F \Rightarrow F \neq \emptyset, car(0 + 3 \cdot 0 = 0, 0 = 2 \cdot 0)$.

ii) $\forall U = (u, u', v, v'), V = (u_1, u_1', v_1, v_1') \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\lambda(u, u', v, v') + \mu(u_1, u_1', v_1, v_1') \in F$,

c'est à dire que $(\lambda u + \mu u_1, \lambda u' + \mu u_1', \lambda v + \mu v_1, \lambda v' + \mu v_1') \in F$

$$\Rightarrow \begin{cases} U \in F \Rightarrow (u + 3v = u', v = 2v') \\ \\ V \in F \Rightarrow (u_1 + 3v_1 = u_1', v_1 = 2v_1') \\ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda U \in F \Rightarrow (\lambda u + 3\lambda v = \lambda u', \lambda v = 2\lambda v') \\ \mu V \in F \Rightarrow (\mu u_1 + 3\mu v_1 = \mu u_1', \mu v_1 = 2\mu v_1') \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda u + \mu u_1 + 3(\lambda v + \mu v_1) = \lambda u' + \mu u_1', \lambda v + \mu v_1 = 2(\lambda v' + \mu v_1')$,

c'est à dire $\lambda(u, u', v, v') + \mu(u_1, u_1', v_1, v_1') \in F$,

d'òu le résultat.

2) $F = \{(u, u', v, v') \in \mathbb{R}^4 : u = u' - 6v', v = 2v'\}$

$= \{(u' - 6v', u', 2v', v') : (u', v') \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{u'(1, 1, 0, 0) + v'(-6, 0, 2, 1) : (u', v') \in \mathbb{R}^2\}$.

Donc $F = Vect\{u_1, u_2\}$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$\lambda u_1 + \mu u_2 = (0, 0, 0, 0)$

$\Rightarrow (\lambda - 6\mu, \lambda, 2\mu, \mu) = (0, 0, 0, 0)$

$\Rightarrow \lambda = \mu = 0$.

$\{u_1, u_2\}$ est une famille génératrice de F et elle est libre.

Donc $\{u_1, u_2\}$ est une base de F et par suite $dim(F) = 2$.

3) $G = Vect\{v_1 = (1, -1, 3, 0), v_2 = (0, 0, 1, -2)\}$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$\lambda v_1 + \mu v_2 = (0, 0, 0, 0)$

$\Rightarrow (\lambda, -\lambda, 3\lambda + \mu, -2\mu) = (0, 0, 0, 0)$

$\Rightarrow \lambda = \mu = 0$.

Donc $\{v_1, v_2\}$ est libre.

Ainsi $\{v_1, v_2\}$ est une base de G.

Donc $dim(G) = 2$.

4) Montrons que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

$(u, u', v, v') \in F \oplus G \Leftrightarrow (u, u', v, v') = (u_1, u_1', v_1, v_1') + (u_2, u_2', v_2, v_2') : (u_1, u_1', v_1, v_1') \in F$
et

$(u_2, u_2', v_2, v_2') \in G \Leftrightarrow (u, u', v, v') = (\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu v_1 + \xi v_2) : \lambda, \mu, \nu, \xi \in \mathbb{R}$

$\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ est une famille gènèratrice de $F + G$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$:

$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 v_1 + \lambda_4 v_2) = (0, 0, 0, 0)$
$\Rightarrow (\lambda_1 - 6\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_3, 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4, \lambda_2 - 2\lambda_4)$
$= (0, 0, 0, 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 6\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

D' où $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ est libre.

Ainsi $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ est une base de $F + G$.

D' où $dim(F+G)=4$.

On a $(F+G\subset \mathbb{R}^4)$ *et* $dim(F+G)=dim(\mathbb{R}^4)$.

Donc $F\oplus G=\mathbb{R}^4$.

Exercice 3 *Montrer que l'ensemble*

$$F=\{(u,u',u'')\in \mathbb{R}^3 : u-2u'+u''=0\}$$

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ *et determiner sa dimension.*

Solution

1) Montrons que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

i) $F\neq\emptyset$ car $0_{\mathbb{R}^3}\in F$.

ii) Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $(u_1,u_1',u_1''),(u_2,u_2',u_2'')\in F$.

Donc $u_1-2u_1'+u_1''=0$ et $u_2-2u_2'+u_2''=0$.

On a
$\lambda(u_1,u_1',u_1'')+\mu(u_2,u_2',u_2'')=(\lambda u_1+\mu u_2,\lambda u_1'+\mu u_2',\lambda u_1''+\mu u_2'')$.

D'autre part, $(\lambda u_1+\mu u_2)-2(\lambda u_1'+\mu u_2')+(\lambda u_1''+\mu u_2'')$
$=\lambda(u_1-2u_1'+u_1'')+\mu(u_2-2u_2'+u_2'')=\lambda 0+\mu 0=0$.

Donc $\lambda(u_1,u_1',u_1'')+\mu(u_2,u_2',u_2'')\in F$.

Ainsi F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2)

i) $F=\{(u_1,u_1',u_1'')\in\mathbb{R}^3 : u_1-2u_1'+u_1''=0\}$

$=\{(u_1,u_1',u_1'')\in\mathbb{R}^3 : u_1=2u_1'-u_1''\}$

$=(2u_1'-u_1'',u_1',u_1'')\in\mathbb{R}^3 : (u_1',u_1'')\in\mathbb{R}^2$

$=u_1'(2,1,0)+u_1''(-1,0,1) : (u_1',u_1'')\in\mathbb{R}^2$

$Vct\{(2,1,0),(-1,0,1)\}$

Ainsi $\{(2,1,0),(-1,0,1)\}$ est génératrice de F.

ii) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\lambda(2,1,0) + \mu(-1,0,1) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (-2\lambda - \mu, \lambda, \mu) = (0,0,0)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\lambda - \mu = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda = \mu = 0$.

Donc $\{(2,1,0), (-1,0,1)\}$ est libre et par suite, c'est une base de F et $dim(F) = 2$.

1.8 Exercices proposés

Exercice 4 *Déterminer la dimension de chacun des sous espaces vectoriels suivants :*

1) F est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les deux vecteurs $\{V_1 = (0,1,-2), V_2 = (1,3,-1)\}$.

2) G est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les deux vecteurs $\{U_1 = (0,1,2,1), U_2 = (0,-1,1,2), U_3 = (1,2,0,-1), U_4 = (1,2,3,2)\}$.

3) $H = \{(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 : u' = 2u\}$.

Exercice 5 *On considère dans $\mathbb{R}^3$, le sous ensemble F défini par :*

$$F = \{(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 : 2u + u' - u'' = 0\}$$

1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Donner une base de F, quelle est sa dimension ?

3) F est-il égale à $\mathbb{R}^3$?

Exercice 6 *On considère dans $\mathbb{R}^4$, le sous ensemble F défini par :*

$$F = \{(u, u', u'', u''') \in \mathbb{R}^4 : (u + u'' = 0)^{(}u' + u''' = 0)\}$$

1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2) Donner une base de F, déduire sa dimension.

Exercice 7 *1) Montrer que la famille $\{(1,2), (-1,1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.*

2) quelle sont les familles libre parmis les familles suivantes :

$$F1 = \{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,1)\}, F2 = \{(0,1,1,0),(1,1,1,0),(2,1,1,0)\}.$$

3) Montrer que la famille $\{(1,2),(-1,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$,
et que la famille $F1 = \{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

Chapitre 2

Applications linéaires

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, ($\mathbb{K}$= $\mathbb{R}$= $\mathbb{C}$).

2.1 Généralités

Définition 2.1 *Soient* $(E, +, \bullet)$ *et* $(F, \oplus, \otimes)$ *deux espaces vectoriels sur le même corps* $\mathbb{K}$ *et* $h : E \to F$ *une application.*

1) On dit que h *est une application linéaire si et seulement si :*

i) $\forall u, u' \in E : h(u + u') = h(u) \oplus h(u')$.

ii) $\forall u' \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$: $h(\lambda u') = \lambda \otimes h(u')$.

On note $L_{\mathbb{K}}(E, F)$ *l'ensemble des applications linéaires de* E *dans* F.

On dit également que h *est un morphisme de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriels.*

2) Une application linéaire bijective est dit isomorphisme.

3) Une application linéaire de E *dans lui-même est dite endomorphisme de* E*. L'ensemble des endomorphismes de* E *est noté* $L_k(E)$.

4) Un isomorphisme de E *dans lui-même est dit automorphisme de* E.

5) Une application linéaire de E *dans* $\mathbb{K}$ *est dite forme linéaire.*

Proposition 2.2 *Soient* $(E, +, \bullet)$ *et* $(F, \oplus, \otimes)$ *deux* $\mathbb{K}$ *espaces vectoriels et* h *une application de* E *dans* F.

Alors h est linéaire si et seulement si :
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \forall u, u' \in E : h(\alpha u + \beta u') = (\alpha \otimes h(u)) \oplus (\beta \otimes h(u'))$.

Remarque 4 *Soient $(E, +, \bullet)$ et $(F, \oplus, \otimes)$ deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels pour toute application linéaire de E dans F, on a : $f(0_E) = 0_F$.*

Preuve : On a

$$f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E) \Rightarrow f(0_E) = 0_F.$$

□

Exemple 2.3 *Soit l'application*

$$\begin{array}{rccc} h & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (u, u', u'') & \mapsto & h(u, u', u'') = (-u + u' + u'', u - u' + u''). \end{array}$$

Montrons que h est linèaire :

a) Soient $(u_1, u_1', u_1''), (u_2, u_2', u_2'') \in \mathbb{R}^3$.

$h\left[(u_1, u_1', u_1'') + (u_2, u_2', u_2'')\right] = h(u_1 + u_2, u_1' + u_2', u_1'' + u_2'')$

$= (-(u_1 + u_2) + (u_1' + u_2') + (u_1'' + u_2''), (u_1 + u_2) - (u_1' + u_2') + (u_1'' + u_2''))$

$= (-u_1 + u_1' + u_1'', u_1 - u_1' + u_1'') + (-u_2 + u_2' + u_2'', u_2 - u_2' + u_2'')$

$= h(u_1, u_1', u_1'') + h(u_2, u_2', u_2'')$.

b) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3$.

$h(\lambda(u, u', u'')) = h(\lambda u, \lambda u', \lambda u'')$

$= (-\lambda u + \lambda u' + \lambda u'', \lambda u - \lambda u' + \lambda u'')$

$= (\lambda(-u + u' + u''), \lambda(u - u' + u''))$

$= \lambda(-u + u' + u'', u - u' + u'')$

$= \lambda h(u, u', u'')$.

Donc h est linèaire.

Exemple 2.4 *Soit l'application*

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (u,u',u'') & \mapsto & f(u,u',u'') = (u, u'+1, u''), \end{array}$$

on a $f(1,0,0) = (1,1,0),\ f(0,1,0) = (0,2,0)$

et $f[(1,0,0)+(0,1,0)] = f(1,1,0) = (1,2,0) \neq f(1,0,0) + f(0,1,0)$.

Donc f *n'est pas linéaire.*

2.1.1 Noyau et image d'une application linéaire

Soient $(E,+,\bullet)$ et $(F,\oplus,\otimes)$ deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels et h une application de E dans F.

Proposition 2.5 *1) Pour tout sous-espace vectoriel E_1 de E, l'image directe $h(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.*

2) Pour tout sous-espace F_1 de F, l'image réciproque $h^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 2.6 *1) On appelle noyau de h, et on note $ker(h)$ le sous-espace vectoriel de E défini par :*

$$ker(h) = h^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E : h(t) = 0_F\}.$$

2) On dit que image de h, et on note $Im(h)$ le sous-espace vectoriel de h défini par :

$$Im(h) = f(E) = \{h(u) : u \in E\}.$$

Exemple 2.7 *Soit l'application linéaire*

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (u,u') & \mapsto & f(u,u') = (-u', 2u+u', u), \end{array}$$

on a

$ker(f) = \{(u,u') \in \mathbb{R}^2 : f(u,u') = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$= \{(u,u') \in \mathbb{R}^2 : (-u', 2u+u', u) = (0,0,0)\}$

$= \{(u,u') \in \mathbb{R}^2 : u = 0 \ \text{ et } \ u' = 0\}$

$= \{(0,0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

On a $Im(f) = \{f(u,u') : (u,u') \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{(-u', 2u+u', u) : (u,u') \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{u'(-1,1,0) + u(0,2,1) : (u,u') \in \mathbb{R}^2\}$

$= Vect\{V_1, V_2\}$ *avec* $V_1 = (-1,1,0), V_2 = (0,2,1)$

De plus, $\{V_1, V_2\}$ *est libre.*

D'où $\{V_1, V_2\}$ *est une base de* $Im(f)$ *et par suite* $dim(Im(f)) = 2$.

Proposition 2.8 *1) h est injective si et seulement si* $ker(h) = 0_E$.

2) h est surjective si et seulement si $Im(h) = F$.

Exemple 2.9 *Pour l'application linéaire*

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (u,v) & \mapsto & f(u,v) = (-v, 2u+v, u), \end{array}$$

on a trouvé que $ker(f) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Donc f est injective.

2.2 Opérations sur les applications linéaires

1) Soient $(E, +, \bullet)$ et $(F, \oplus, \otimes)$ deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels et $h : E \to F$, $h' : E \to F$ deux applications linéaires.

   Les applications $h \oplus h'$ et $\alpha \otimes h$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ définies par :

   $\forall u \in E : (h \oplus h')(u) = h(u) \oplus h'(u)$ et $(\alpha \otimes h)(u) = \alpha \otimes h(u)$ sont linéaires de E dans F.

   On vérifie que $(L_k(E,F), \ominus, \odot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2) Soient $(E, +, \bullet)$ $(F, \oplus, \otimes)$ et $(G, \ominus, \odot)$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

   $h : E \to F$ et $h' : F \to G$ des applications linéaires.

Alors $h' \circ h$ est une application linéaire de E dans G.

3) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $h : E \to F$ une application linéaire.

   Si h est un isomorphisme de E dans F, alors h^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

2.3 Cas de la dimension finie

Définition 2.10 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et h une application linéaire de E dans F. On dit que le rang de h et on le note $rg(h)$, l'entier naturel défini par : $rg(h) = dim(Im(h))$.*

Théorème 2.11 (théorème du rang) *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et h une application linéaire de E dans F.*

Alors on a : $dim(E) = rg(h) + dim(ker(h))$.

Proposition 2.12 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et h une application linéaire de E dans F. Alors*

1) $(h\ \ injective) \Leftrightarrow rg(h) = dim(E)$.

2) $(h\ \ surjective) \Leftrightarrow rg(h) = dim(F)$.

Théorème 2.13 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et h un endomorphisme de E $(h \in L_k(E))$. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) h est injectif.

2) h est surjectif.

3) h est bijectif.

2.4 Exercices corrigés

Exercice 8 *Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les deux vecteurs suivants :*
$V_1 = (a, 1, 0), V_2 = (0, 0, 1)$, où $a \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que V_1 et V_2 sont linéairement indépendants.

2) Montrer que le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs V_1 *et* V_2 *est défini par :*

$$F = \{(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 : u = au'\}$$

donner sa dimension.

3) Soit le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ *suivant :*
$G = \{(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 : u + u' + u'' = 0, u'' = 2u'\}$,

trouver la dimension de G.

déterminer les valeurs de a *pour lesquelles on a* $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Solution

1) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$$
$$\Rightarrow (\alpha a, \alpha, \beta) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha a = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0, \end{cases}$$

D'où v_1 et v_2 sont linéairement indépendants.

2) Montrons que $Vect\{v_1, v_2\} = F$.

$$(u, u', u'') \in F \Rightarrow (u, u', u'') = (au', u', u'')$$

$$\Rightarrow (u, u', u'') = u'(a, 1, 0) + u''(0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow (u, u', u'') = u'v_1 + u''v_2$$

$$\Rightarrow (u, u', u'') \in Vect\{v_1, v_2\}.$$

D'où $F \subset Vect\{v_1, v_2\}$.

$(u,u',u'') \in Vect\{v_1,v_2\} \Rightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R} : (u,u',u'') = \alpha v_1 + \beta v_2$

$$\Rightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R} : (u,u',u'') = (\alpha a,\alpha,\beta)$$

$$\Rightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R} : \begin{cases} u = \alpha a \\ u' = \alpha \\ u'' = \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R} : \begin{cases} u = au' \\ u' = \alpha \\ u'' = \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = au' \Rightarrow (u,u',u'') \in F.$$

Ainsi $Vect\{v_1,v_2\} \subseteq F$.

D'où $F = Vect\{v_1,v_2\}$.

$\{v_1,v_2\}$ est une famille génératrice de F et comme elle est libre, alors $\{v_1,v_2\}$ est une base de F.

D'où $dim(F) = 2$.

3) $G = \{(u,u',u'') \in \mathbb{R}^3 : u + u' + u'' = 0, u'' = 2u'\}$

$= \{(u,u',u'') \in \mathbb{R}^3 : u + 3u' = 0, u'' = 2u'\}$

$= \{(u,u',u'') \in \mathbb{R}^3 : u = -3u', u'' = 2u'\}$

$= \{(-3u',u',2u') : u' \in \mathbb{R}\}$

$= \{u'(-3,1,2) : u' \in \mathbb{R}\}$.

$G = Vect\{(-3,1,2)\}$

Donc $Dim(G) = 1$.

Déterminons les valeurs de a pour lesquelles on a $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

$F \cap G = \{(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 : u = au', u + u' + u'' = 0, u'' = 2u'\}$

$= \{(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 : u = au', au' + u' + 2u' = 0, u'' = 2u'\}$

$= \{(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 : u = au', (a + 3)u' = 0, u'' = 2u'\}$

Si $a \neq -3$, alors $F \cap G = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Si $a = -3$, $F \cap G = \{(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 : u = -3u', u'' = 2u'\}$

$= \{(-3u', u', 2u') : u' \in \mathbb{R}\}$

$= \{u'(-3, 1, 2) : u' \in \mathbb{R}\}$

$= Vect\{(-3, 1, 2)\}$.

Si $a = 3, dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G) = 2 + 1 - 1 = 2.$

Ainsi $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ pour $a \neq 3$.

Exercice 9 *Soit l'application*

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (u, u', u'') & \mapsto & f(u, u', u'') = (u' + u'', u + u' + u'', u) \end{array}$$

1) Montrer que f est linéaire.

2) Déterminer $ker f$ et $Im f$. Préciser leurs dimensions. f est-elle injective ? surjective ?

Solution

1) f est linéaire si et seulement si $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall (u_1, u_1', u_1''), (u_2, u_2', u_2'') \in \mathbb{R}^3$;

$f(\lambda(u_1, u_1', u_1'') + \mu(u_2, u_2', u_2'')) = \lambda f(u_1, u_1', u_1'') + \mu f(u_2, u_2', u_2'')$

$f(\lambda(u_1, u_1', u_1'') + \mu(u_2, u_2', u_2'')) = f(\lambda u_1 + \mu u_2, \lambda u_1' + \mu u_2', \lambda u_1'' + \mu u_2'')$

$= (\lambda u_1' + \mu u_2' + \lambda u_1'' + \mu u_2'', \lambda u_1 + \mu u_2 + \lambda u_1' + \mu u_2' + \lambda u_1'' + \mu u_2'', \lambda u_1 + \mu u_2)$

$= (\lambda u_1' + \lambda u_1'', \lambda u_1 + \lambda u_1' + \lambda u_1'', \lambda u_1) + (\mu u_2' + \mu u_2'', \mu u_2 + \mu u_2' + \mu u_2'', \mu u_2)$

$= \lambda(u'_1 + u''_1, u_1 + u'_1 + u''_1, u_1) + \mu(u'_2 + u''_2, u_2 + u'_2 + u''_2, u_2)$

$= \lambda f(u_1, u'_1, u''_1) + \mu f(u_2, u'_2, u''_2)$

d'où f est linéaire.

2) $ker f = \{(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 : f(u, u', u'') = (0, 0, 0)\}$

$= \{(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 : (u' + u'', u + u' + u'', u) = (0, 0, 0)\}$

$= \{(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 : u' + u'' = 0, u = 0\}$

$= \{(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 : u'' = -u', u = 0\}$

$= \{(0, u', -u') : u' \in \mathbb{R}\}$

$= \{u'(0, 1, -1) : u' \in \mathbb{R}\}$.

Donc $ker f = Vect\{(0, 1, -1)\}$.

$ker f$ est le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(0, 1, -1)$.

Donc $dim(ker f) = 1$.

$Im f = \{f(u, u', u'') : (u, u', u'') \in \mathbb{R}^3\}$

$= \{(u' + u'', u + u' + u'', u) : (u, u', u'') \in \mathbb{R}^3\}$

$= \{(u' + u'')(1, 1, 0) + u(0, 1, 1) : (u, u', u'') \in \mathbb{R}^3\}$

$= Vect\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

$Im f$ est le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les deux vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$.

On vérifie que $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$ sont linéairement indépendants.

Donc $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ est une base de $Im f$.

D'où $dim(Im f) = 2$.

Comme $ker f \neq \{(0, 0, 0)\}$, alors f n'est pas injective.

On a $dim(Im f) = 2 < 3 = dim(\mathbb{R}^3)$.

Donc $Imf \neq \mathbb{R}^3$ et donc f n'est pas surjective.

Exercice 10 *Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
Considérons l'endomorphisme $f \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$f(e_1) = (1, 0, 1), f(e_2) = (2, 1, 1), f(e_3) = (-1, 1, 2).$$

1) Déterminer $f(u, u', u'')$ pour tout $(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3$.

2) Trouver $kerf$ et Imf.

3) f est-il bijectif ?

Solution

1) Soit $(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3$.

$$f(u, u', u'') = f(ue_1 + u'e_2 + u''e_3)$$

$$= uf(e_1) + u'f(e_2) + u''f(e_3)$$

$$= u(1, 0, 1) + u'(2, 1, 1) + u''(-1, 1, 2).$$

$$f(u, u', u'') = (u + 2u' - u'', u' + u'', u + u' + 2u'')$$

2)

$$kerf = \{(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 : f(u, u', u'') = (0, 0, 0)\}$$

$$= \{(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 : (u + 2u' - u'', u' + u'', u + u' + 2u'') = (0, 0, 0)\}$$

$$\{(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 : u + 2u' - u'' = 0, u' + u'' = 0 \wedge u + u' + 2u'' = 0\}$$
$$= \{(u, u') \in \mathbb{R}^2 : u' = -u'', u = -u''\}$$

$$= \{0, 0, 0\}.$$

$$Imf = \{f(u,u',u'') : (u,u',u'') \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{(u+2u'-u'', u'+u'', u+u'+2u'') : (u,u',u'') \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{u(1,0,1) + u'(2,1,1) + u''(-1,1,2) : (u,u',u'') \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= Vect\{(1,0,1),(2,1,1),(-1,1,2)\}.$$

On vérifie que $\{(1,0,1),(2,1,1),(-1,1,2)\}$ est une base de Imf.

D'où $dim(Imf) = 3$.

Comme $Imf \subseteq \mathbb{R}^3$, alors $Imf = \mathbb{R}^3$.

Comme $kerf = \{(0,0,0)\}$ ou $Imf = \mathbb{R}^3$.

Alors f est bijective (car f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie).

Pour déterminer Imf, ou pourrait utiliser le théorème du rang.

On a $dim(\mathbb{R}^3) = dim(kerf) + (dim(Imf)) = 0 + (dim(Imf))$.

Comme $(dim(Imf)) = dim(\mathbb{R}^3)$, alors $Imf = \mathbb{R}^3$.

2.5 Exercices proposés

Exercice 11 *Soit l'application*

$$\begin{array}{cccc} h : & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & (u,u',u'',u''') & \mapsto & h(u,u',u'',u''') = u' - u' + u'''. \end{array}$$

1) Montrer que h est linéaire.

2) Trouver $kerh$. En déduire Imh.

3) h est -elle injective ? surjective ?

Exercice 12 *Soit l'application*

$$\begin{array}{rccl} h' & : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (u,u',u'') & \mapsto & h'(u,u',u'') = (u+u', u'+2u''). \end{array}$$

1) Montrer que h' est linéaire.

2) Trouver $kerh'$. En déduire Imh'.

3) h' est -elle injective ? surjective ?

Exercice 13 *Soit l'application*

$$\begin{array}{rccl} h'' & : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (u,u') & \mapsto & h''(u,u') = (u+u', u-u'). \end{array}$$

1) Montrer que h'' est linéaire.

2) Déterminer $kerh''$, et Imh'' et donner leurs dimensions, h" est-elle bijectives ?

3) Déterminer $h'' \circ h''$.

Exercice 14 *Soit l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(u,u') = (2u-4u', u-2u').$$

1) Monter que f est linéaire.

2) Déterminer $kerf$, et Imf et donner leurs dimensions, f est-elle bijectives ?

Chapitre 3

Matrices et Déterminants

3.1 Calcul matriciel

3.1.1 Notion de matrice

Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

Définition 3.1 *On appelle matrice à n lignes, p colonnes et à éléments dans $\mathbb{K}$, un tableau de nombres $m_{i,j}$ de $\mathbb{K}$ avec $i \in \{1, ..., n\}$ et $j \in \{1, ..., p\}$.*

La matrice est notée $(m_{i,j})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,p}}$.
C'est une application de $\{1, ..., n\} \times \{1, ..., p\}$ dans $\mathbb{K}$.
On écrit :

$$A_{(m_{i,j})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,p}}} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix}$$

Le nombre n est appelé le nombre de lignes de A et p le nombre de colonnes de A.

Pour $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., p\}$, le terme $m_{i,j}$ située à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne s'appelle le $(i,j)^{\text{ème}}$ terme (ou coefficient) de A.

A est une matrice carrée si et seulement si $n = p$. On dit alors que A est une matrice carrée d'ordre n.

A est une matrice unicolonne si et seulement si $p = 1$.

Si $A = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est carrée d'ordre n, les $m_{i,i} (i = 1, ..., n)$ sont appelés les éléments diagonaux de A et $\{m_{11}, ..., m_{nn}\}$ est appelé la diagonale de A.

Exemple 3.2 *La matrice unité de $M_n(\mathbb{K})$ est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 et elle se note par : I_n.*

Par exemple

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^\star)^2$, on note $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

3.1.2 L'espace vectoriel $M_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 3.3 *1) L'addition dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est la loi interne, noté $+$, définie par :*

$$\forall (m_{i,j})_{i,j} \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall (m'_{i,j})_{i,j} \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \text{: } (m_{i,j})_{i,j} + (m'_{i,j})_{i,j} = (m_{i,j} + m'_{i,j})_{i,j}.$$

2) On définit la multiplication par les scalaires ; la loi externe $\mathbb{K} \times M_{n,p}(\mathbb{K}) \to M_{n,p}(\mathbb{K})$, notée par un point définie par : $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (m_{i,j})_{i,j} \in M_{n,p} : \alpha (m_{i,j})_{i,j} = (\alpha m_{i,j})_{i,j}$.

3) $(M_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 3.4 *Soit*

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+4 & 0+3 \\ (-2)+0 & 4+(-5) & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

2) $(-3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)1 & (-3)2 \\ (-3)3 & (-3)4 \\ (-3)5 & (-3)6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -9 & -12 \\ -15 & -18 \end{pmatrix}.$

3.1.3 Multiplication des matrices

Définition 3.5 *Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathbb{K}$ un corps commutatif.*

Soient $A = (m_{i,j})_{i,j} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (m'_{i,j})_{i,j} \in M_{p,q}(\mathbb{K})$.

*Le produit de A par B et on le note AB est la matrice de $M_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par :
$AB = (C_{i,k})_{i,k}$, où $\forall (i,j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., m\} : C_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} m_{i,j} m'_{j,k}$.*

En pratique, pour effectuer le produit AB de deux matrice, on dispose de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} m_{i1} & m_{i2} & \cdots & m_{ij} & \cdots & m_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m'_{1k} \\ m'_{2k} \\ \vdots \\ m'_{pk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \sum_{j=1}^{n} m_{ij} m'_{jk} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.6 *1)*

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = -13.$$

2)

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & -28 \\ 15 & -12 \end{pmatrix}.$$

3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 0 \\ 6 & -5 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 0 \\ 54 & -32 & 54 & 0 \\ 20 & -34 & 66 & 0 \end{pmatrix}.$$

4)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Propriété 1 *Soient $n, p, p', q \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathbb{K}$ un corps commutatif.*

1) $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall A', A'' \in M_{p,p'}(\mathbb{K})$: $A(A' + A'') = AA' + AA''$.

2) $\forall A, A' \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall A'' \in M_{p,p'}(\mathbb{K})$: $(A + A')A'' = AA'' + A'A''$.

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in M_{p,q}(\mathbb{K})(\lambda A)A' = \lambda(AA') = A(\lambda A')$.

4) $\forall \lambda \in (\mathbb{K}), \forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall A' \in M_{p,p'}(\mathbb{K}), \forall A'' \in M_{p',q}(\mathbb{K})(AA')A'' = A(A'A'')$.

3.1.4 Matrices carrées inversibles

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

Définition 3.7 *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite inversible si et seulement s'il existe $A' \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AA' = A'A = I_n$ où $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(k)$.*

Si A est inversible, alors A' est unique et est appelée inverse de A et notée par A^{-1}.

Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

En notant $AU = V$, où $U, V \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, on exprime U en fonction de V par résolution d'un système linéaire (Car si A est inversible : $AU = V \Leftrightarrow U = A^{-1}V$.)

Exemple 3.8 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

En notant

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \textit{ et } V = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix}$$

on a :

$$\begin{aligned} AU = V \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -u_2 \\ 2u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -u_2 = u'_1 \\ 2u_1 = u'_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}u'_2 \\ u_2 = -u'_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Posons

$$A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} AA' = I_2 \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -c = 1 \\ -d = 0 \\ 2a = 0 \\ 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -1 \\ d = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

3.2 Matrices et applications linéaires

3.2.1 Matrice associée à une application linéaire

Définition 3.9 *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.*
Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimention finie ($dimE = n$), $n \in \mathbb{N}^\star$, $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ une base de E et $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i : (u_i \in \mathbb{K})$ un élément de E.
On appelle matrice de u dans la base $\{e_i\}_1^n$, la matrice unicolonne notée $M(u)_B$ définie par :

$$M(u)_{e_i} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Définition 3.10 *1) Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $dim(E) = n, dim(F) = p : n, p \in \mathbb{N}^\star$ et f une application linéaire de E dans F.*

Soient $\{e_i\}_{i=1}^n$ une base de E et $R = \{f_j\}_{j=1}^p$ une base de F.

Les images par f des vecteurs $\{e_1, ..., e_n\}$ s'écrivent sur la base R :

$f(e_1) = m_{11}f_1 + m_{21}f_2 + ... + m_{p1}f_p$

$f(e_2) = m_{12}f_1 + m_{22}f_2 + ... + m_{p2}f_p$

$\ldots$

$f(e_n) = m_{1n}f_1 + m_{2n}f_2 + ... + m_{pn}f_p$,
où $m_{i,j} \in \mathbb{K}$, $i = 1, ..., p$ et $j = 1, ..., n$.

On appelle matrice de f relativement aux bases B et R, la matrice notée $M(f, B, R)$ ou $M(f)_{B,R}$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{p1} & m_{p2} & \cdots & m_{pn} \end{pmatrix}.$$

2) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $dim(E) = n, n \in \mathbb{N}^\star$ et B une base de E. Soit f un endomorphisme de E. On appelle matrice de f relativement à la base B et on la note $M(f)_B$ ou $M(f, B)$.

Exemple 3.11 *Soient $B = \{e_i\}_{i=1}^3$ et $R = \{f_j\}_{j=1}^2$ les bases canoniques respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.*

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $\forall (u,v,w) \in \mathbb{R}^3$: $f(u,v,w) = (u-v, w-v)$.

Écrivons $M(f,B,R)$:

On a

$$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,0) = f_1.$$

$$f(e_2) = f(0,1,0) = (-1,1) = (-1,0) + (0,-1) = -f_1 - f_2.$$

$$f(e_3) = f(0,0,1) = (0,1) = f_2.$$

D'où

$$M(f,B,R) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2.2 Changement de base

Matrice de passage

Définition 3.12 *Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $dim(E) = n, n \in \mathbb{N}^\star$, $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ et $B' = \{e_i'\}_{i=1}^n$ deux bases de E.*

Les vecteurs $e_i'\{i = 1, ..., n\}$ s'écrivent comme combinaisons linéaires des vecteurs $e_i\{i = 1, ..., n\}$:

$$e_1' = q_{11}e_1 + q_{21}e_2 + ... + q_{n1}e_n$$

$$e_2' = q_{12}e_1 + q_{22}e_2 + ... + q_{n2}e_n$$

$$\dots$$

$$e_n' = q_{1n}e_1 + q_{2n}e_2 + ... + q_{nn}e_n,$$

où $q_{i,j} \in \mathbb{K}, i = 1, ..., n$ et $j = 1, ..., n$.

Définition 3.13 *On appelle matrice de passage de la base B à la base B', la matrice notée $q_{B \longrightarrow B'}$ ou $Pass(B, B')$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $e'_i\{i = 1, ..., n\}$ dans la base $B = \{e_i\}_{i=1}^{n}$*

$$q_{B \longrightarrow B'} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.14 *Soient $B = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*

On a $B' = \{e'_1 = (1, 3), e'_2 = (3, -1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

On a la matrice de passage de B à B' est donnée par :

$$q_{B \to B' =} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + 3e_2 \\ e'_2 = 3e_1 - e_2 \end{cases}$$

Proposition 3.15 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, B et B' deux bases de E de dimension finie $n, n \in \mathbb{N}^\star$. La matrice $Pass(B, B')$ est inversible et $(Pass(B, B'))^{-1} = Pass(B', B)$.*

Changement de base pour un vecteur

Proposition 3.16 *Soient E un $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $dim(E) = n, n \in \mathbb{N}^\star$, B, B' deux bases de E. Soient $q = Pass(B, B'), u \in E, U = M(u)_B$ et $U' = M(u)_{B'}$.*
Alors $U = PU'$.

Exemple 3.17 *Soient $B = \{e_i\}_{i=1}^{2}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*

On a $B' = \{e'_1 = (-2, 1), e'_2 = (3, -2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Soient $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

On a

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2.$$

Donc

$$V = M(v)_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Notons

$$V' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = M(v)_{B'}.$$

On a

$$q = pass(B, B') = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Et

$$V = pV' \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v'_1 + 3v'_2 \\ v'_1 - 2v'_2 \end{pmatrix}.$$

Changement de bases pour une application linéaire

Proposition 3.18 *Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, B et B' deux bases de E, R et R' deux bases de F. Soit f une application linéaire de E dans F.*
Notons $q = Pass(B, B'), Q = Pass(R, R'), A = M(f, B, R)$ et $A' = M(f, B', R')$.
Alors $A' = Q^{-1}AP$.

Exemple 3.19 *Soit l'application linéaire*

$$\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (u, u', u'') & \mapsto & g(u, u', u'') = (u + 2u' + u'', u - u'') \end{array}.$$

Ecrivons $M(g, B, R)$, où B et R sont respectivement les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Notons $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $R = \{g_1, g_2\}$.

On a

$$g(e_1) = g(1, 0, 0) = (1, 1) = g_1 + g_2$$

$$g(e_2) = g(0, 1, 0) = (2, 0) = 2g_1$$

$$g(e_3) = g(0,0,1) = (1,-1) = g_1 - g_2$$

D'où

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a $B' = e'_1 = (1,1,0), e'_2 = (0,1,1), e'_3 = (1,1,1)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *et* $R' = \{g'_1 = (1,1), g'_2 = (-1,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

Ecrivons $M(g, B', R')$:

1) *On a*

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 \\ e'_2 = e_2 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

D'où

$$q = Pass(B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) *On a*

$$\begin{cases} g'_1 = g_1 + g_2 \\ f'_2 = -g_1 + g_2 \end{cases}$$

D'où

$$Q = Pass(R, R') = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En notant $A = M(g, B, R)$ *et* $A' = M(g, B', R')$, *on a* $A' = Q^{-1}AP$.
Cherchons Q^{-1}

Posons

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On a

$$QQ^{-1} = I_2.$$

D'où

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-d=0 \\ a+c=0 \\ b+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=-\frac{1}{2} \\ d=\frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} A' &= Q^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Changement de bases pour un endomophisme

Proposition 3.20 *Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, B et B' deux bases de E et f un endomorphisme de E.*

Notons $q = Pass(B, B'), A = M(f, B)$ et $A' = M(f, B')$.

On a $A' = P^{-1}AP$.

Exemple 3.21 *Soit f l'endomophisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement à la base canonique $B = \{e_i\}_{i=1}^3$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par la matrice*

$$A = M(f, B) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a $B' = \{e'_1 = (1, 0, -1), e'_2 = (0, 1, 1), e'_3 = (1, 0, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On a $A' = P^{-1}AP$ avec

$$q = Pass(B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule q^{-1}, on trouve

$$q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et on trouve

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.3 Rang d'une matrice

Définition 3.22 *Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, G une famille finie d'éléments de E.*

On dit que le rang de G et on le note $rg(G)$, l'entier naturel : $rg(G) = dim(Vect(G))$.

Définition 3.23 *Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $n, p \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que rang de A et on le note $rg(A)$ le rang de la fammille des vecteurs colonnes de A.*

Proposition 3.24 *Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, B et R respectivement des bases de E et F et f une application linéaire de E dans F. On note $A = M(f, B, R)$. On a $rg(f) = rg(A)$.*

Exemple 3.25

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

On sait que $\{e_1, e_2\}$ sont libre, alors $dim(Vect(e_1, e_2)) = 2$. Donc

$$rg(A) = 2.$$

3.4 Transposée d'une matrice

Définition 3.26 *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Pour une matrice*

$$A = (m_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix}$$

de $M_{n,p}(\mathbb{K})n, p \in \mathbb{N}^\star$, on dit que transposée de A, la matrice notée ${}^tA$ de $M_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{1p} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix} $$

Exemple 3.27 *Pour*

$$ A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}, $$

on a

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} $$

Proposition 3.28 *1) $\forall A \in M_{n,p}\mathbb{K},\ {}^{tt}A = A$.*

2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$,$\forall (A, A') \in (M_{p,n}(\mathbb{K}))^2 :\ {}^t(\alpha A + A') = \alpha^t A +^t A'$.

3) $\forall A \in (M_{p,n}(\mathbb{K}), \forall A' \in (M_{p,q}(\mathbb{K}) :\ {}^t(AA') =^t (A')^t A$.

3.5 Déterminants

3.5.1 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 3.29 *Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A = m_{ij}$ une matrice carrée d'ordre n.*

On appelle déterminant de A et on le note dét(A) ou

$$ \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix} $$

le nombre définie par : dét(A) $= \sum_{\rho \in S_n} \varepsilon(\rho) m_{\rho(1)1} ... m_{\rho(n)n}$
où S_n est le groupe symétrique de toutes les permutations ρ de $\{1, ..., n\}$ et $\varepsilon(\rho) = \pm 1$.

3.5.2 Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension $n (n \in \mathbb{N}^\star)$

Définition 3.30 *Soient $n \in \mathbb{N}^\star$,$\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n(n \in \mathbb{N}^\star), B = \{e_1, ..., e_n\}$ une base de E.*

Soient $V_1, ..., V_n \in E$. On pose $V_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} e_i$.

le déterminant de la famille $\{V_1, ..., V_n\}$ dans la base B est noté dét$(V_1, ..., V_n)$ =dét(m_{ij}).

On dit que ce déterminant est d'ordre n.

3.5.3 Propriétés

Soient A et A' deux matrices carrées d'ordre $n (n \in \mathbb{N}^\star.)$

a) dét(AA') =dét(A)dét(A').

b) (A *est inversible*) $\Leftrightarrow$(dét$(A) \neq 0$).

c) Si A est inversible, alors dét(A^{-1})= $\frac{1}{dét(A)}$.

3.5.4 Calcul d'un déterminant

Développement par rapport à une rangée

Définition 3.31 *Soit $A = m_{ij}$ une matrice carrée d'ordre $n (n \in \mathbb{N}^\star)$. Pour chaque $(i, j) \in (\{1, ..., n\})^2$, on dit que mineur du terme m_{ij} dans A, le déterminant noté $\triangle_{ij}$ d'ordre $(n-1)$ obtenu de dét(A) en suprimant dans A, la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne :*

$$\triangle_{ij} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{1j-1} & m_{1j+1} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{i-11} & m_{i-1j-1} & m_{i-1j+1} & \cdots & m_{i-1n} \\ m_{i+11} & m_{i+1j-1} & m_{i+1j+1} & \cdots & m_{i+1n} \\ m_{n1} & m_{nj-1} & m_{nj+1} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

Proposition 3.32 *Soit $A = m_{ij}$ une matrice carrée d'ordre $n (n \in \mathbb{N}^\star)$.*

On a

1) $\forall j \in \{1, ..., n\}$: dét(A)= $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} (-1)^{i+j} \triangle_{ij}$ (développement de détA par rapport à la $j^{ème}$ colonne).

2) $\forall i \in \{1, ..., n\}$:dét$(A) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} (-1)^{i+j} \triangle_{ij}$ (développement de dét(A) par rapport à la $i^{ème}$ ligne), où $\triangle_{ij}$ est le mineur du terme m_{ij} dans A.

Pour calculer le déterminant de A, on procède de la manière suivante suivant n :

1) $n = 1$:

Si $A = (m_{11})$, alors dét$(A) = m_{11}$.

2) $n = 2$:

Si $A = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, alors dét$(A) = m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}$.

Exemple 3.33 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

on a

dét$(A) = (-2) \times 4 - 1 \times 3 = -11$.

3) $n = 3$:

a) On développe par rapport à une ligne :
Si

$$A = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix},$$

alors en développant suivant la i^{ème} ligne $i \in \{1, 2, 3\}$.

Le déterminant de A est défini par :

dét$(A) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} m_{ij}$dét$(A_{ij})$, où la matrice A_{ij} est obtenue en supprimant la i^{ème} colonne de la matrice A.

Exemple 3.34 *Calculons le déterminant de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

On développe par rapport à la 2ème ligne :

dét$(A) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{2+j} m_{2j}$ *dét*(A_{2j})
$= (-1)^{2+1}(0) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

$= (-1)0[(-1)(1) - 3 \times 2] + 1(-1)[1 \times 1 - 2 \times 2] + (-1)1[1 \times 3 - 2(-1)]$

$= -(-3) - 5 = -2$

b) On développe par rapport à une colonne :

Si

$$A = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix},$$

alors en développant suivant la $j^{ème}$ colonne avec $j \in \{1, 2, 3\}$.

Le déterminant de A est défini par : $\text{dét}(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j} m_{ij} \text{dét}(A_{ij})$, où la matrice A_{ij} est obtenue en supprimant la $i^{ème}$ et la $j^{ème}$ colonne de la matrice A.

Exemple 3.35 *Calculons le déterminant de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

On développe par rapport à la $1^{ème}$ colonne :

$dét(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j} m_{i1}\ dét(A_{i1})$

$= (-1)^{1+1}(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}(0) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}(1) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= (1)[2 \times 0 - 1 \times 1] + (-1)0[0 \times 0 - 1(-1)] + [0 \times 1 - 2(-1)]$

$= (-1) + 2 = 1$

4) $n \geq 4$ on suit la même méthode que pour $n = 3$.

Remarque 5 *On ne change pas la valeur d'un déterminant d'une matrice carrée en remplaçant une colonne par la somme de celle-ci et d'une combinaison linéaire des autres colonnes. On a un résultat analogue sur les lignes.*

3.5.5 Calcul de l'inverse d'une matrice carrée inversible

Définition 3.36 *Soit $A = a_{ij}$ une matrice carrée d'ordre $n (n \in \mathbb{N}^\star)$. On dit que comatrice de A la matrice carrée d'ordre n notée $Com(A)$ définie par $Com(A) = C_{ij}$, où $\forall i, j \in \{1, ..., n\} : C_{ij} = (-1)^{i+j}\ \triangle_{ij}$ où $\triangle_{ij}$ est le mineur du terme a_{ij} dans A.*

Proposition 3.37 *Si A est une matrice carrée inversible d'ordre n, alors la matrice A^{-1} est définie par : $A^{-1} = \frac{1}{dét(A)} {}^t(Com(A))$.*

Exemple 3.38 *Soit la matrice*

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$d\acute{e}t(A') = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0.$$

Donc A' est inversible et

$$(A')^{-1} = \frac{1}{d\acute{e}t(A')} {}^t(Com(A')).$$

On a

$$Com(A') = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$${}^t(Com(A')) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$(A')^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

3.6 Exercices corrigés

Exercice 15 *Calculer si c'est possible l'inverse de chacune des matrices suivantes :*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$,

on a : $\text{dét}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \neq 0.$

Donc A est inversible et $(A)^{-1} = \frac{1}{\text{dét}(A)} {}^t(Com(A))$.

On a

$$Com(A) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$${}^t(Com(A)) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$(A)^{-1} = -\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

on a :

$\text{dét}(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

Donc B est inversible et $(B)^{-1} = \frac{1}{\text{dét}(B)} {}^t(Com(B))$. On a

$$Com(B) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$${}^t(Com(B)) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$(B)^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

On calcule le déterminant de C suivant la $1^{ère}$ colonne

$\text{dét}(C) = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

Donc C est inversible et

$$(C)^{-1} = \frac{1}{dét(C)} {}^t(Com(C)).$$

On a :

$$Com(C) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$${}^t(Com(C)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$C^{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16 *On considère les matrices suivantes :*
$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer $AB, AC, BD, BC, DE, CA, EB, EC$.

Solution
On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 12 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AC = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -6 \\ 60 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$BD = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ -3 & 2 \\ 7 & -15 \end{pmatrix}.$$

$$DE = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$CA = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & -16 \\ 12 & -14 & 6 \\ 30 & -10 & -10 \end{pmatrix}.$$

$$EB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$EC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 20 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 *Soit f une application linéaire définie par :*

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (u,u') & \mapsto & f(u,u') = (u+u', u-u') \end{array}$$

1) Déterminer la matrice assocée à l'application f relativement à la base canonique $B = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

2) En utilisant deux méthodes différentes, déterminer la matrice associée à l'application f relativement à B' où $B' = \{U_1 = (1,1), U_2 = (-1,2)\}$ est une autre base de $\mathbb{R}^2$.

Solution

1) Ecrivons $M(f,B)$

On a :

$$\begin{cases} f(e_1) = f(1,0) = (1,1) = e_1 + e_2 \\ f(e_2) = f(0,1) = (0,1) = e_1 - e_2 \end{cases}$$

D'où

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Ecrivons M(f,B')

i) $1^{ère}$ méthode

On a :

$$M(f,B') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

$f(U_1) = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$, où λ_1 et λ_2 sont des constantes à déterminer

$f(U_1) = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 \Rightarrow f(1,1) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(-1,2)$

$\Rightarrow (2,0) = (\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2)$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{4}{3} \\ \lambda_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$

$f(U_2) = \mu_1 U_1 + \mu_2 U_2$, où μ_1 et μ_2 sont des constantes à déterminer

$f(U_2) = \mu_1 U_1 + \mu_2 U_2 \Rightarrow f(-1,2) = \mu_1(1,1) + \mu_2(-1,2)$
$\Rightarrow (1,-3) = \mu_1(1,1) + \mu_2(-1,2)$
$\Rightarrow (1,-3) = (\mu_1 - \mu_2, \mu_1 + 2\mu_2)$
$\Rightarrow \begin{cases} \mu_1 - \mu_2 = 1 \\ \mu_1 + 2\mu_2 = -3 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = -\frac{1}{3} \\ \mu_2 = -\frac{4}{3} \end{cases}$

Ainsi

$$M(f,B') = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

2) $2^{ème}$ mèthode
On a

$M(f,B') = P^{-1}M(f,B)P,$

où $P = P_{B\to B'} = P(B',B)$

On a :

$$\begin{cases} U_1 = e_1 + e_2 \\ U_2 = -e_1 + 2e_2 \end{cases}$$

D'où

$$P_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

On calcule P^{-1}

On a

$\text{dét}(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0.$

On a

$$Com(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$^t(Com(A)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$A^{-1} = \frac{1}{d\acute{e}t(A)}{}^t(Com(A)) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$M(f,B') = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$

Exercice 18 *Soit f une application linéaire définie par :*

$$f \quad : \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \quad \mathbb{R}^2$$

$$(u, u', u'') \mapsto f(u, u', u'') = (u, u' + u'')$$

1) *Déterminer la matrice assocée à l'application f relativement aux bases cannoniques $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $C = \{f_1, f_2\}$ respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.*

2) *En utilisant deux méthodes différentes, écrire la matrice associée à l'application relativement aux bases B' et C', où $B' = \{U_1 = (1, 1, 1), U_2 = (1, 1, 0), U_3 = (1, 0, -1)\}$ et $C' = \{V_1 = (1, 1), V_2 = (2, 1)\}$*

Solution

1) Ecrivons $M(f, B, C)$

On a :

$$\begin{cases} f(e_1) = f(1, 1, 0) = (1, 0) = f_1 \\ f(e_2) = f(0, 1, 0) = (0, 1) = f_2 \\ f(e_3) = f(0, 0, 1) = (0, 1) = f_2 \end{cases}$$

D'où

$$M(f, B, C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Ecrivons M(f,B',C')

i) $1^{ère}$ méthode

On a :

$$M(f, B, C) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{pmatrix}$$

$f(U_1) = (1, 2) = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$, où λ_1 et λ_2 sont à déterminer

$f(U_1) = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 \Rightarrow f(1, 1, 1) = \lambda_1(1, 1) + \lambda_2(2, 1)$
$\Rightarrow (1, 2) = \lambda_1(1, 1) + \lambda_2(2, 1)$
$\Rightarrow (1, 2) = (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

$f(U_2) = (1,2) = \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2$, où μ_1 et μ_2 sont à déterminer

$f(U_2) = \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 \Rightarrow f(1,1,0) = \mu_1(1,1) + \mu_2(2,1)$
$\Rightarrow (1,1) = \mu_1(1,1) + \mu_2(2,1)$

$\Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = 1 \\ \mu_2 = 0 \end{cases}$

$f(U_3) = (1,-1) = \nu_1 V_1 + \nu_2 V_2$, où ν_1 et ν_2 sont à déterminer

$f(U_3) = \nu_1 V_1 + \nu_2 V_2 \Rightarrow f(1,0,-1) = \nu_1(1,1) + \mu_2(2,1)$
$\Rightarrow (1,-1) = \mu_1(1,1) + \mu_2(2,1)$

$\Rightarrow (1,-1) = (\nu_1 + 2\nu_2, \nu_1 + \nu_2)$
$\Rightarrow \begin{cases} \nu_1 + 2\nu_2 = 1 \\ \nu_1 + \nu_2 = -1 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} \nu_1 = -3 \\ \nu_2 = 2 \end{cases}$

Ainsi

$$M(f, B', C') = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) $2^{ème}$ mèthode
On a

$$M(f, B', C') = Q^{-1} M(f, B, C) P,$$

où $P = P_{B \to B'}$ et $Q = P_{C \to C'}$

On a :

$$\begin{cases} U_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ U_2 = e_1 + e_2 \\ U_3 = e_1 - e_3 \end{cases}$$

D'où

$$P_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{cases} V_1 = f_1 + f_2 \\ V_2 = 2f_1 + f_2 \\ U_3 = e_1 - e_3 \end{cases}$$

D'où

$$Q = P_{C\to C'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

On calcule

$$Q^{-1} = \frac{1}{d\acute{e}t(Q)}\,^t(Com(Q)).$$

On a

$\text{dét}(Q) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0.$

On a

$$Com(Q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$^t(Com(Q)) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$Q^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$M(f, B', C') = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.7 Exercices proposés

Exercice 19 *On considère les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $A+B$, $2A$, $C+D$, AB, BA, A^2, EA, EC, DE, EF, et ${}^tA$.
Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 20 *On considère la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $2A - A^2$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 21 *Déterminer l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice associée relativement aux bases B et C est donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

oú

$$B = \{U_1 = (-2,1,0), U_2 = (1,-1,0), U_3 = (0,0,1)\}$$

$$C = \{V_1 = (1,0), V_2 = (1,1)\}$$

Exercice 22 *On cosidère les matrices suivantes :* $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,
$C = \begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 0 & 3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$, $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$

1) Calculer toutes les sommes possibles de deux de ces matrices.

2) Calculer $2A + C$ et $5B - 4D$.

3) Déterminer λ, tel que $A - \lambda C$ soit la matrice nulle.

Exercice 23 *Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement à la base canoniques $B = \{e_1, e_2\}$ et $C = f_1, f_2, f_3$ respectivemet de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer $f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2) En utilisant deux méthodes différentes, écrire la matrice associée à l'application f relativement aux bases B' et C', où $B' = \{U_1 = (1, 1), U_2 = (-1, 1)\}$ et $C' = \{V_1 = (1, 1, 0), V_2 = (0, 0, 1), V_3 = (1, 1, 1)\}$.

Exercice 24 *Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice associée relativement à la base canonique $B = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ est donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver $f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2) En utilisant deux méthodes différentes, déterminer la matrice associée à l'application f relativement à B', où $B' = \{U_1 = (1, 2), U_2 = (1, -1)\}$ est une autre base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 25 *1) Déterminer l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement à la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :*

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) En utilisant deux méthodes différentes, écrire la matrice associée à l'application f relativement à B', où $B' = \{U_1 = (2, 2, 0), U_2 = (2, -2, 0), U_3 = (0, 1, 1)\}$ est une autre base de $\mathbb{R}^3$.

Chapitre 4

Systèmes d'équations linéaires

4.1 Généralités

Définition 4.1 *1) On appelle système de n équations linéaires à p inconnues* $(u_1, u_2, ..., u_p)$ *le système :*

$$(S)\begin{cases} m_{11}u_1 + m_{12}u_2 + ... + m_{1p}u_p = b_1 \quad L_1 \\ m_{21}u_1 + m_{22}u_2 + ... + m_{2p}u_p = b_2 \quad L_2 \\ \vdots \\ m_{n1}u_1 + m_{n2}u_2 + ... + m_{np}u_p = b_n \quad L_n \end{cases}$$

qui s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & ... & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & ... & m_{2p} \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & ... & m_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & ... & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & ... & m_{2p} \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & ... & m_{np} \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A est appelée matrice des coefficients et $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

U est la matrice des inconnues.

B est la matrice des constantes et $b_s, s \in \{1, 2, ..., n\}$.

$L_i(i = 1, 2, ..., n)$ désigne la $i^{\text{ème}}$ ligne du système (S).

Le système (S) est dit homogène si $B = 0_{n,1}(\mathbb{K})$.

2) *L'ensemble des solutions du système (S) est l'ensemble des matrices U qui vérifient l'équation matricielle $AU = B$, où A est la matrice des inconnues et B est la matrice des constantes.*

3) *Les opérations élémentaires de lignes d'un système d'équations linéaires sont des opérations qu'on effectue sur les équations de ce système sans changer l'ensemble des solutions.*

   Ces opérations sont :

i) *L'interversion de deux lignes : $(L_i \longleftrightarrow L_j)$.*

ii) *La multiplication d'une ligne par une constante non nulle $\lambda : (L_i \longleftarrow \lambda L_i)$.*

iii) *L'addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne λ : $(L_i \longleftarrow \lambda L_j)$, où λ est une constante non nulle.*

Proposition 4.2 *L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires est soit vide, soit il contient un seul élément, soit il a une infinité de solutions.*

4.2 Méthodes de résolution d'un système d'équations linéaires

4.2.1 Résolution par la méthode de Cramer

Soit $AU = B$ un système d'équations linéaires comportant n équations à n inconnues $(u_1, u_1, ..., u_n)$: dét$(A) \neq 0$.

On note $\triangle$ le déterminant de A et $\triangle_i(i = 1, ..., n)$ le déterminant de la matrice qu'on obtient en remplaçant la i^{ème} colonne de A par la matrice B.

Un tel système d'équations linéaires admet une solution unique donnée par :

$$u_i = \frac{\triangle_i}{\triangle} \quad (i = 1, ..., n).$$

Cette méthode de résolution est appelée méthode de Cramer.

Exemple 4.3 *Résoudre le système suivant :*

$$(S) \begin{cases} u + u' + 3u'' = -2 \\ 2u + u' + 5u'' = -5 \\ u + 3u' + 2u'' = 6 \end{cases}$$

Le système (S) s'écrit matriciellement sous la forme : $AU = B$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On a dét$(A) = 3 \neq 0$.

Donc le système (S) admet une solution unique donnée par :

$$u = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

$$u'' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-6}{3} = -2.$$

Ainsi l'ensemble des solutions du système (S) *est* $\{(1, 3, -2)\}$.

4.2.2 Résolution par la méthode de la matrice inverse :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $AU = B$ un système d'équations linéaires comportant n équations à n inconnues tels que $\text{dét}(A) \neq 0$. Alors A et inversible et on a :

$$AU = B \Rightarrow U = A^{-1}B.$$

Exemple 4.4 *Résoudre le système suivant :*

$$(S) \begin{cases} -u + u' - 3u'' = 4 \\ 2u + u' - u'' = 8 \\ 3u - 2u' + 4u'' = 12 \end{cases}$$

Le système (S) *s'écrit matriciellement sous la forme :* $AU = B$, *où*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

On a $\text{dét}(A) = 8 \neq 0$.

Donc A *est inversible et on a :*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-11}{8} & \frac{5}{8} & \frac{-7}{8} \\ \frac{-7}{8} & \frac{1}{8} & \frac{-3}{8} \end{pmatrix},$$

Ainsi

$$AU = B \Rightarrow U = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{-11}{8} & \frac{5}{8} & \frac{-7}{8} \\ \\ \frac{-7}{8} & \frac{1}{8} & \frac{-3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

4.2.3 Résolution par la méthode du pivot de Gauss

Système échelonné :

Un système d'équations linéaires est dit échelonné s'il se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} p_1u_1 + c_{12}u_2 + ... + c_{1p}u_p = d_1 \quad L_1 \\ \\ p_2u_2 + ... + c_{2p}u_p = d_2 \qquad L_2 \\ \\ \vdots \\ \\ p_ru_r + ... + c_{rp}u_p = d_r \qquad L_r \\ \\ 0 = d_{r+1} \quad L_{r+1} \\ \\ \vdots \\ \\ 0 = d_n \qquad L_n \end{cases}$$

où $p_i \in k(i = 1, 2, ..., r)$, $d_s \in k(s = 1, 2, ..., n)$ et $c_{i,j} \in k(i = 1, 2, ..., r)$, $(j = 1, 2, ..., p)$, $r, n, p \in \mathbb{N}^*$.

Les coefficients $p_i(i = 1, 2, ..., r)$ sont tous non nuls et sont appelés les pivots du système.

Méthode du pivot de Gauss :

Cette méthode consiste à résoudre un système d'équations linéaires en effectuant des opérations élémentaires de lignes sur le système de manière à le transformer en un système échelonné facile à résoudre.

Exemple 4.5 *Résoudre le système suivant :*

$$(S)\begin{cases} u+3u'+4u''=50 \quad L_1 \\ 3u+5u'-4u''=2 \quad L_2 \\ 4u+7u'-2u''=31 \quad L_3 \end{cases}$$

En éliminant u dans L_2 et L_3, on obtient :

$$\begin{cases} u+3u'+4u''=50 \\ u'+4u''=37 \quad L_2 \longleftarrow L_2-3L_1 \\ 5u'+18u''=169 \quad L_3 \longleftarrow L_3-4L_1 \end{cases}$$

En éliminant v dans L_3 on obtient :

$$\begin{cases} u+3u'+4u''=50 \\ u'+4u''=37 \\ 2u''=16 \quad L_3 \longleftarrow L_3-5L_2 \end{cases}$$

On a :

$$u=3, u'=5 \ \ et \ \ u''=8.$$

Donc l'ensemble des solutions du système (S) est : $\{(3,5,8)\}$.

4.3 Exercices corrigés

Exercice 26 *Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode de Cramer :*

$$\begin{cases} 2u+u'+u''=3 \\ u-u'+3u''=2 \\ u+2u'-u''=-3 \end{cases}$$

Solution
Soit le système suivant :

$$\begin{cases} 2u+u'+u''=3 \\ u-u'+3u''=2 \\ u+2u'-u''=-3 \end{cases}$$

Ce système s'écrit matriciellement sous la forme : $AU=B$; où

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix},$$

$$U=\begin{pmatrix}u\\ u'\\ u''\end{pmatrix}$$

et

$$B=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -3\end{pmatrix}$$

On a

$$\text{dét}(A)=2\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-10+3+4=-3\neq 0.$$

Donc ce système admet une solution unique donnée par :

$$u=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ -3 & 2 & -1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{-21}{-3}=7.$$

$$u'=\frac{\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -3 & -1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{21}{-3}=-7.$$

$$u''=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}}{-3}=\frac{12}{-3}=-4.$$

Ainsi l'ensemble des solutions de ce système est : $\{(7,-7,-4)\}$.

Exercice 27 *Résoudre le système d'équations linéaires suivant :*

$$\begin{cases} u+u'+u''=1\\ u+2u'+3u''=0\\ 2u+u'-u''=2\end{cases}$$

1) En utilisant la méthode de la matrice inverse.

2) En utilisant la méthode du pivot de Gauss.

Solution

1) La méthode de la matrice inverse :

$$\begin{cases} u + u' + u'' = 1 \\ u + 2u' + 3u'' = 0 \\ 2u + u' - u'' = 2 \end{cases}$$

Ce système s'écrit matriciellement sous la forme : $AU = B$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On a

$\text{dét}(A) = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= -5 + 7 - 3 = -1 \neq 0.$

Donc A est inversible.

On calcule A^{-1} :

On a :

$$Com(Q) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$ {}^{t}(Com(Q)) = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 7 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}. $$

D'où

$$ A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -7 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, $$

Ainsi

$$ AU = B \Rightarrow U = A^{-1}B $$

$$ \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -7 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} $$

$$ \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} $$

Ainsi l'ensemble des solutions de ce système est : $\{(3, -3, 1)\}$.

2) La méthode du pivot de Gauss :

$$ (S) \begin{cases} u + u' + u'' = 1 \quad L_1 \\ u + 2u' + 3u'' = 0 \quad L_2 \\ 2u + u' - u'' = 2 \quad L_3 \end{cases} $$

En éliminant u dans L_2 et L_3, on obtient :

$$ \begin{cases} u + u' + u'' = 1 \\ u' + 2u'' = -1 \quad L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ -u' - 3u'' = 0 \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} $$

En éliminant u' dans L_3 on obtient :

$$ \begin{cases} u + u' + u'' = 1 \\ u' + 2u'' = -1 \\ -u'' = -1 \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{cases} $$

On a :

$$u = 3, u' = -3 \ \ et \ \ u'' = 1$$

Donc l'ensemble des solutions du système (S) est : $\{(3, -3, 1)\}$.

4.4 Exercices proposés

Exercice 28 *Résoudre le système d'équations linéaires suivant :*

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + y - z = 3 \\ x + y + z = -3 \end{cases}$$

Exercice 29 *Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode du Pivot de Gauss :*

$$\begin{cases} u - 2u' + u'' - u''' = 1 \\ u' - 3u'' + 2u''' = 2 \\ 2u + u' - u'' + u''' = 3 \end{cases}$$

Exercice 30 *Résoudre le système d'équations linéaires suivantes en utilisant la méthode du Pivot de Gauss :*

1)

$$\begin{cases} 2u + u' - 3u'' = 0 \\ u + 2u' - u'' = 0 \\ -u + u' + 3u'' = 1 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} u - u' + 2u'' + u''' = 0 \\ 2u - u'' + 3u''' = 0 \\ u + u' + u'' - u''' = 2 \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} u + 2u' + 3u'' + 4u''' = 3 \\ 2u' + 3u'' + 6u''' = -2 \\ 2u' + u'' + 4u''' = 0 \\ -u + u'' = 3 \end{cases}$$

Exercice 31 *Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode de Cramer :*

$$\begin{cases} 2u - u' + u'' = 0 \\ u + 2u' - u'' = 1 \\ -u + u' + 2u'' = 3 \end{cases}$$

(1) *en utilisant la méthode de Cramer*
(2) *En utilisant la méthode de la matrice inverse.*
(3) *En utilisant la méthode du pivot de Gauss.*

Exercice 32 *En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre les systèmes d'équations linéaires suivantes :*

$$\begin{cases} 2u + u' - 3u'' = 0 \\ u + 2u' - u'' = 0 \\ -u + u' + 2u'' = 0 \end{cases}, \begin{cases} u - u' + 2u'' + u''' = 1 \\ 2u - u'' + 3u''' = 0 \\ u + u' + u'' - u''' = 2 \end{cases}, \begin{cases} u + 2u' + 3u'' + 4u''' = 1 \\ 2u' + 4u'' + 6u''' = -2 \\ -u + u'' = 3 \end{cases}$$

Bibliographie

[1] C. Becker et J. Chevallet, Algèbre,Armand Colin, Paris, 1972.

[2] Collectif, Matrices cours et problèmes, Office des Publications Universitaires(OPU), Alger, 1993.

[3] A. Denmat, F. Héaulme, Algèbre linéaire, Dunod, Paris, 1999.

[4] J. Dixmier, Cours de Mathématiques du Premier Cycle, $2^{ème}$ édition, Montreuil, Gauthier-Villars, 1981.

[5] B. Hamed C, Algèbre 1 Rappels de Cours & Exercices avec Solutions, Office des Publications Universitaires(OPU), Alger, 1990.

[6] M. Ichel Queysanne, Algèbre 1^{er} Cycle Scientifique Préparation aux Grandes écoles, Office des Publications Universitaires (OPU), Alger, 1984.

[7] S. Lipschutz, Algèbre linéaire Cours et Problèmes, Mc Graw Hill, Paris 1973.

[8] L. Magnin, Quelques Questions d'Algèbre, Géométrie et Probabilités, Ellipses édition, Paris, 2002.

[9] P. Thuillier, mathématiques algèbre, Masson, France, 1978.