

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem  
Département de Mathématiques



## T H È S E

Pour obtenir le diplôme de

**DOCTORAT EN SCIENCES**

Spécialité : Mathématiques

Option : Optimisation et Contrôle Optimal

Présentée et soutenue par

Ahmed BOKHARI

---

**Méthodes numériques pour les problèmes de contrôle optimal**

---

soutenue publiquement le 20\11\2017.

**Devant le jury**

<i>Président :</i>	Pr. Omar Belhamiti	UMAB (Mostaganem)
<i>Examinatrice :</i>	Pr. Khadra Nachi	Université d'Es-Sénia, Oran
<i>Examineur :</i>	Pr. Boubakeur Benahmed	ENP d'Oran
<i>Examineur :</i>	Pr. Mustapha Cheggeg	ENP d'Oran
<i>Dircteur de thèse :</i>	Pr. Abdessamad Amir	UMAB (Mostaganem)
<i>Co-dircteur de thèse :</i>	Pr. Sidi mohammed Bahri	UMAB (Mostaganem)

## *Remerciements*

*Mes premiers remerciements sont adressés à Mr Abdessamad Amir, qui a accepté de diriger cette thèse. Son enthousiasme, sa bienveillance et sa compétence m'ont conduit bien plus loin que je n'aurais pu l'imaginer. J'ai énormément appris auprès de lui et je tiens à lui faire part de toute ma gratitude.*

*Je remercie également Mr Sidi mohammed Bahri, mon co-directeur de thèse, pour la confiance qu'il m'a témoignée du début à la fin du travail, pour sa disponibilité à comprendre et à communiquer et sans oublier sa relecture et ses précieuses corrections.*

*Je voudrais présenter mes sentiments très sincères à Monsieur Mr. Omar Belhamiti, président du jury qui a accepté de relire ce travail.*

*Je remercie vivement Mr. Mustapha Cheggeg, Mme K. Natchi et Mr B. Benahmed qui m'ont fait honneur en acceptant d'examiner mon travail avec intérêt.*

*J'exprime ma gratitude à Mr F. B. Belgacem pour m'avoir guidé, aidé et conseillé.*

*J'adresse mes remerciements à tous les membres du Laboratoire des Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Mostaganem. Une pensée particulière pour Rachid Belgacem.*

*Je tiens enfin à remercier tout particulièrement ma famille leur soutien, leur aide, leur patience tout au long de la rédaction de ce manuscrit.*

**Résumé** : Dans cette thèse, nous avons proposé deux méthodes afin de résoudre des problèmes d'optimisation dynamique, la première méthode, celle qui est basée sur la matrice opérationnelle de dérivation des ondelettes de Legendre, elle est utilisée pour résoudre des problèmes de calcul des variations avec intégrante quadratique, la deuxième méthode est fondée sur une nouvelle matrice opérationnelle, c'est la matrice opérationnelle de dérivation des ondelettes de Bernoulli, cette matrice est utilisée pour résoudre des problèmes quadratiques de contrôle optimal. La principale caractéristique de ces méthodes est qu'elles réduisent le problème original au système d'équations algébriques. Des exemples illustratifs sont donnés pour prouver l'efficacité de ces méthodes. .

**Mots clés** : matrice opérationnelle, ondelettes de Legendre, ondelettes de Bernoulli, contrôle optimal.

**Math Subject Classifications** : 65T60, 74H15, 11B68, 49N10, 33F05.

**Abstract** : In this thesis, we propose two methods to solve dynamic optimization problems, the first method, which is based on Legendre's wavelet operational matrix of derivatives, it is used to solve a problems of variational calculus with quadratic integrand , the second method is based on a new operational matrix, it is the Bernoulli wavelets operational matrix of derivatives, this matrix is used to solve quadratic problems of optimal control. The main feature of these methods is that they reduce the original problem to the system of algebraic equations. Illustrative examples are given to prove the effectiveness of these methods.

**Key words** : operational matrix, Legendre wavelets, Bernoulli wavelets, optimal control.

**Math Subject Classifications** : 65T60, 74H15, 11B68, 49N10, 33F05.

## ملخص

في هذه الأطروحة نقترح طريقتين لحل مسائل في التحسين (الأمثلة) الديناميكي، الطريقة الأولى تعتمد على المصفوفة العملية للمشتقات الخاصة بمويجات لوجندر لحل مسائل في حساب التغيرات ذات دالة تربيعية، الطريقة الثانية تعتمد على مصفوفة عملياتية جديدة، هي المصفوفة العملية للمشتقات لمويجات برنولي، التي نستعملها لحل مسائل في التحكم الأمثل التريبيعي، الميزة الأساسية لهاتين الطريقتين هي تحويل المسألة الأساسية إلى حل جملة معادلات جبرية. أمثلة توضيحية مدرجة توضح مدى فعالية هتين الطريقتين.

الكلمات المفتاحية : مصفوفة عملياتية، مويجات لوجندر، مويجات برنولي، التحكم الأمثل.

تصنيفات مواضيع الرياضيات : 65T60, 74H15, 11B68, 49N10, 33F05.

---

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>7</b>
<b>1 Introduction à l'optimisation statique</b>	<b>10</b>
1.1 Optimisation sans contraintes . . . . .	11
1.2 Optimisation avec contraintes . . . . .	13
1.3 Optimisation quadratique . . . . .	18
1.3.1 Contraintes égalités . . . . .	18
1.3.2 Contraintes inégalités . . . . .	20
1.3.3 Contraintes mixtes égalités et inégalités . . . . .	21
<b>2 Calcul des Variations et contrôle optimal</b>	<b>23</b>
2.1 Calcul des Variations . . . . .	23
2.1.1 Les contraintes . . . . .	24
2.1.2 Première variation et condition nécessaire du premier ordre . . . . .	24
2.1.3 Conditions nécessaires du second ordre (Legendre). . . . .	28
2.2 Problème de contrôle optimal . . . . .	31
2.2.1 Approche variationnelle (Méthodes Indirectes) . . . . .	32
2.2.2 Problème de Contrôle Linéaire Quadratique (LQ) : . . . . .	35
2.2.3 Méthodes directes . . . . .	37
<b>3 Théorie des ondelettes</b>	<b>39</b>
3.0.1 Ondelettes et approximation . . . . .	42
3.1 Les ondelettes de Legendre . . . . .	43
3.1.1 Les polynômes de Legendre . . . . .	43
3.1.2 Les ondelettes de Legendre . . . . .	44
3.1.3 Matrice opérationnelle de dérivation . . . . .	46

3.1.4	Analyse de convergence et estimation de l'erreur . . . . .	46
3.2	Les ondelettes de Bernoulli . . . . .	47
3.2.1	Les nombres et les polynômes de Bernoulli . . . . .	47
3.2.2	Les ondelettes de Bernoulli . . . . .	49
3.2.3	Matrice opérationnelle de dérivation . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Applications</b>	<b>56</b>
4.1	Matrice opérationnelle de dérivation des ondelettes de Legendre pour le calcul des variations . . . . .	56
4.1.1	Le cas unidimensionnel . . . . .	58
4.1.2	Le cas multidimensionnel . . . . .	60
4.1.3	Exemples . . . . .	63
4.2	Matrice opérationnelle de dérivation de Bernoulli pour le contrôle optimal . .	68
4.2.1	Exemples . . . . .	68
	<b>Conclusion et perspective</b>	<b>74</b>

---

## Introduction générale

L'optimisation est un outil mathématique au cœur de tout problème lié à la prise de décision, que ce soit en science, en ingénierie ou en économie [55]. La tâche de prise de décision implique le choix entre différentes alternatives. Ce choix est régi par notre volonté de prendre la «meilleure» décision. Le domaine d'optimisation a reçu une attention considérable ces dernières années, principalement en raison des progrès rapides en matière de technologie informatique, y compris le développement et la disponibilité de logiciels conviviaux, de processeurs à grande vitesse et parallèles. Les modèles d'optimisation statiques visent à trouver les valeurs des variables indépendantes qui minimisent une fonction objectif. De tels problèmes d'optimisation, recherchent la valeur ou les valeurs d'un argument qui optimise cette fonction donnée en un point particulier. Les modèles dynamiques, visent à trouver non seulement la valeur minimale d'une certaine fonction, mais plutôt la fonction réelle qui fournit une courbe temporelle pour les valeurs des variables, de sorte qu'une fonction de valeur soit maximisée ou minimisée sur un intervalle de temps donné. En optimisation dynamique, nous essayons de trouver une courbe " $x^*(t)$ " qui maximise ou minimise une intégrale donnée. Notons que la variable indépendante " $t$ " indique le temps, c'est pourquoi on parle d'optimisation dynamique [15]. Nous distinguons deux approches de résolution numérique, pour l'optimisation dynamique ;

- Les méthodes indirectes [11, 44] ; basées sur l'équation d'Euler-Lagrange. Le principal avantage de ces méthodes, est le fait qu'elles produisent aussi l'existence et l'unicité des résultats, des solutions exactes quand le TPBVP (Two-point boundary value problem) associé peut être résolu analytiquement et des estimations d'erreurs quand il est résolu numériquement. Cependant, cette approche présente aussi certains inconvénients [43, 8], telles que la nécessité de dériver des expressions analytiques parfois délicates, manque de robustesse et l'exigence d'une connaissance approfondie du modèle mathématique et physique du système.



- Les méthodes directes ; basées sur la discrétisation ou la paramétrisation des variables de contrôle et de l'état [27, 29, 32, 39, 48]. La solution optimale est obtenue alors, directement par une minimisation de la fonction objectif soumise aux contraintes, en appliquant les techniques de l'optimisation statique.

L'objectif de cette thèse est l'utilisation des méthodes directes en s'appuyant sur la théorie d'approximation par ondelettes. La théorie des ondelettes est un domaine relativement nouveau et émergent dans la recherche mathématique. Il a été appliqué dans un large éventail de disciplines d'ingénierie. En particulier, les ondelettes sont très utilisées dans l'analyse des signaux pour les représentations et segmentations de formes d'onde, l'analyse de la fréquence du temps et les algorithmes rapides pour une mise en œuvre facile [18]. Les ondelettes permettent une représentation précise d'une variété de fonctions et d'opérateurs. Le concept d'analyse par ondelettes a été mis en place sous une forme ou l'autre depuis le début de ce siècle. Cependant, dans sa forme actuelle, la théorie des ondelettes a attiré l'attention dans les années 1980 avec le travail de plusieurs chercheurs de diverses disciplines : Stromberg, Morlet, Grossmann, Meyer, Battle, Lemarie, Coifman, Daubechies, Mallat et Chui, pour n'en nommer que quelques-uns. De nombreux autres chercheurs ont également fait d'importantes contributions. L'application des ondelettes de Legendre et les ondelettes de Bernoulli pour la résolution des équations différentielles, des problèmes de calcul des variations et contrôle optimal est largement étudié par de nombreux auteurs, la majorité de ces auteurs ont utilisé les matrices opérationnelles d'intégration [5, 25, 42, 43, 45, 46, 63], certains d'entre eux ont utilisé les matrices opérationnelles de dérivation [50] et [7].

Nous résumons notre contribution par les points suivants :

- Nous avons développé un schéma numérique, afin de résoudre un problème de calcul des variations avec intégrande quadratique. La matrice opérationnelle de dérivation des ondelettes de Legendre est utilisée pour réduire ce problème à un problème de programmation quadratique statique, ce qui nous permet de résoudre des problèmes de grande taille. Des tests numériques illustratifs ont été réalisés pour démontrer l'efficacité et l'applicabilité de la technique. La formulation présentée est simple et peut être naturellement étendue aux problèmes de calcul des variations non linéaires.
- Nous avons présenté un nouveau schéma analytique-numérique pour résoudre des problèmes de contrôle quadratique optimal. La méthode est basée sur une nouvelle matrice de dérivation des ondelettes de Bernoulli. Après avoir présenté les propriétés pertinentes de l'ondelette de Bernoulli, nous calculons sa matrice opérationnelle de dérivations. La solution est ensuite obtenue en réduisant le problème de contrôle

optimal à la résolution des équations algébriques, en utilisant les multiplicateurs de Lagrange. Un équilibre de validité approfondi de ce nouveau schéma est démontré par des exemples illustratifs.

La thèse s'articule autour de quatre chapitres. Au premier chapitre, une introduction abrégée en programmation mathématique est présentée. Les conditions d'optimalité du premier et second ordre sont établis, dans les deux cas, sans et avec contraintes. Pour des raisons très objectives, nous avons mis le doigt sur le cas des programmes quadratiques avec contraintes linéaires. Au second chapitre, les deux grandes classe de problèmes d'optimisation dynamique ont été analysées ; à savoir le problème de calcul des variations et le problème de contrôle optimal. L'équation d'Euler-Lagrange et le principe du minimum de Pontriaguine ont été exposés comme conséquence directe des théorèmes classiques de l'optimisation statique. La théorie d'approximation par ondelettes a été abordée au chapitre 3. Un intérêt particulier a été donné aux matrice de dérivation des ondelettes de Legendre et une nouvelle matrice de dérivation des ondelettes de Bernoulli a été établie. Le chapitre 4 est dédié aux applications. Une application de la matrice de dérivation de Legendre, dans le domaine du calcul des variations avec intégrante quadratique, ainsi que des illustrations numériques, ont été réalisées. Une autre applications de la nouvelle matrice de dérivation des ondelettes de Bernoulli dans le domaine du contrôle optimal a été réalisée, une étude comparative avec d'autre méthode ad hok, démontre l'efficacité et l'applicabilité de notre approche. Une conclusion et des perspectives sont données à la fin.

## Introduction à l'optimisation

## statique

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

La fonction  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , appelée fonction objectif est supposée au moins différentiable une fois. L'ensemble  $\Omega$  est appelé ensemble des contraintes ou domaine d'admissibilité, en pratique  $\Omega$  est définie par

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, h(x) = 0, g(x) \leq 0\}, \quad (1.1)$$

où  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  sont supposées au moins différentiables. L'écriture " $h(x) = 0$ " représente  $p$  contraintes d'égalité :  $h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p$ , et de même " $g(x) \leq 0$ " représente  $q$  contraintes d'inégalité :  $g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, q$ . Dans ce cas, on dit qu'il s'agit d'un problème d'optimisation à  $n$  variables de décisions,  $p$  contraintes d'égalités et  $q$  contraintes d'inégalités. Un vecteur  $x \in \Omega$  satisfaisant toutes les contraintes est appelé solution réalisable ou admissible au problème. Si  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , on aura un problème d'optimisation sans contraintes.

**Définition 1.1** On dit que la fonction  $f$  possède un minimum local en  $x^* \in \Omega$  si

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall x \in \Omega \text{ et } \|x - x^*\| < \varepsilon; \quad f(x^*) \leq f(x). \quad (1.2)$$

Si  $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \Omega$ , on dit que  $x^*$  est un minimum global de  $f$ .

**Définition 1.2** On dit que la fonction  $f$  possède un minimum local strict en  $x^* \in \Omega$  si la relation (1.2) est vérifiée avec une inégalité stricte pour tout  $x \neq x^*$ . Si  $f(x^*) < f(x)$ , pour tout  $x \in \Omega - \{x^*\}$ , on dit que  $x^*$  réalise un minimum global strict de  $f$  sur  $\Omega$ .

Dans la figure 1.1 nous illustrons graphiquement les définitions ci-dessus pour  $n = 1$ .

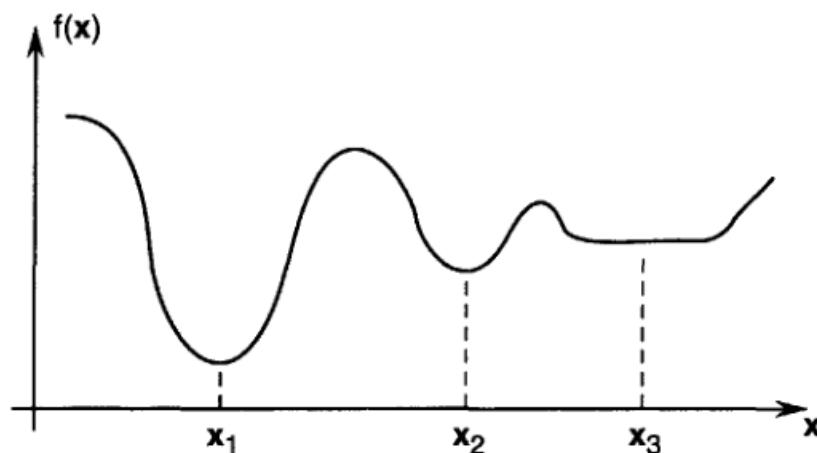


FIGURE 1.1 –  $x_1$  : réalise un minimum global strict,  $x_2$  : réalise un minimum local strict,  $x_3$  : réalise un minimum local (pas strict)

## 1.1 Optimisation sans contraintes

Considérons le problème d'optimisation sans contraintes :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.3)$$

D'abord, il faut s'assurer de l'existence de la solution. Nous donnerons ensuite des résultats d'unicité.

**Définition 1.3** On dit que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est coercive si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

où  $\|\cdot\|$  désigne une norme quelconque de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.4** Un ensemble  $U \subset \mathbb{R}^n$  est dit convexe si

$$\forall (x, y) \in U \times U, \forall \lambda \in [0, 1] \quad (1 - \lambda)x + \lambda y \in U.$$

Autrement dit,  $U$  est convexe s'il contient tout "segment" reliant deux quelconques de ses points.

**Définition 1.5** (fonction convexe) Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble convexe et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

(i) On dit que  $f$  est convexe sur  $U$  si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad \forall x, y \in U, \quad \forall t \in [0, 1].$$

(ii) On dit que  $f$  est strictement convexe sur  $U$  si

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y), \quad \forall x, y \in U \text{ avec } x \neq y, \quad \forall t \in ]0, 1[.$$

(iii) On dit que  $f$  est concave (respectivement strictement concave) si  $-f$  est convexe (respectivement strictement convexe).

**Théorème 1.1** [2] (*Existence*) Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continue et coercive. Alors (P) admet au moins une solution.

**Théorème 1.2** [9] (*Unicité*) Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  strictement convexe. Alors le problème (P) admet au plus une solution.

Le résultat suivant donne une condition suffisante pratique assurant l'existence et l'unicité :

**Théorème 1.3** [9] Soit  $f$  une fonction  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2. \quad (1.4)$$

Alors  $f$  est strictement convexe et coercive, en particulier le problème (P) admet une solution unique .

### Conditions d'optimalité

Les conditions nécessaires d'optimalité sont dérivées en supposant que  $x^*$  réalise un minimum local, puis en utilisant des estimations sur le gradient  $\nabla f(x)$  et la Hessienne  $\nabla^2 f(x)$  au point  $x^*$ .

**Théorème 1.4** [9] (*Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre*) Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable en  $x^* \in \mathbb{R}^n$ . Si  $x^*$  réalise un minimum (global ou local) de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ , alors

$$\nabla f(x^*) = 0. \quad (1.5)$$

On dit que  $x^*$  est un point stationnaire ou critique. Pour le résultat suivant, on rappelle qu'une matrice  $A$  est définie positive si  $x^T Ax > 0$ , pour tout  $x \neq 0$ , et semi-définie positive si  $x^T Ax \geq 0$ , pour tout  $x$ .

**Théorème 1.5** [54] (*Conditions nécessaires du second ordre*)

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois différentiable en  $x^* \in \mathbb{R}^n$ . Si  $x^*$  réalise un minimum global ou local de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\nabla^2 f(x^*)$  est semi-définie positive.

Les conditions nécessaires permettent de sélectionner des “candidats” à être des minima (globaux); toutefois, la réciproque des théorèmes précédents est fautive; un point critique n'est pas nécessairement un minimum (ni un maximum). Le résultat du théorème 1.4 est une condition nécessaire qui n'est en général pas suffisante (par exemple le cas de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^3$ ).

**Théorème 1.6** [9, 54] (*Conditions suffisantes d'optimalité globale*) Soit  $f$  une fonction continue  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x^* \in \mathbb{R}^n$  un minimum local de  $f$ . Si  $f$  est une fonction convexe, alors  $x^*$  est un minimum global de  $f$ . Si de plus  $f$  est strictement convexe,  $x^*$  est l'unique minimum global de  $f$ .

## 1.2 Optimisation avec contraintes

Étant donné un problème d'optimisation avec un ensemble de contraintes  $\Omega$ , le minimum peut se trouver à l'intérieur ou sur la frontière de  $\Omega$ . Pour étudier le cas où il se trouve sur la frontière, il faut donner la notion de direction réalisable.

**Définition 1.6** Un vecteur  $d \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \neq 0$ , est une direction réalisable en  $x \in \Omega$  s'il existe  $\alpha_0 > 0$  tel que  $x + \alpha d \in \Omega$  pour tout  $\alpha \in [0, \alpha_0]$ .

### Conditions d'optimalité

On a les résultats suivants.

**Théorème 1.7** [16, 22] (*Condition nécessaire du première ordre*) Soit  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , et  $f \in C^1$  une fonction à valeur réelle sur  $\Omega$ . Si  $x^*$  réalise un minimum local de  $f$  sur  $\Omega$ , alors pour toute direction réalisable  $d$  en  $x^*$ , on a

$$d^T \nabla f(x^*) \geq 0. \tag{1.6}$$

Un cas particulier d'intérêt est lorsque  $x^*$  est un point intérieur de  $\Omega$ . Dans ce cas, toute direction est réalisable, et nous avons le résultat suivant.

**Corollaire 1.1** [22] *Soit  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in C^1$  une fonction à valeur réelle sur  $\Omega$ . Si  $x^*$  réalise un minimum local de  $f$  sur  $\Omega$  et si  $x^*$  est un point intérieur de  $\Omega$ , alors*

$$\nabla f(x^*) = 0. \quad (1.7)$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire du second ordre pour un minimum local.

**Théorème 1.8** [16, 22] *(Condition nécessaire du second ordre) Soit  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , et  $f \in C^2$  une fonction à valeurs réelles sur  $\Omega$ . Si  $x^*$  réalise un minimum local de  $f$  sur  $\Omega$ ,  $d$  une direction réalisable en  $x^*$  et  $d^T \nabla f(x^*) = 0$ , alors*

$$d^T \nabla_{xx}^2 f(x^*) d \geq 0. \quad (1.8)$$

**Corollaire 1.2** [16] *Soit  $x^*$  est un point intérieur de  $\Omega$ . Si  $x^*$  réalise un minimum local de  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que  $f \in C^2$ , alors*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \nabla f(x^*) = 0, \\ (ii) \quad & d^T \nabla_{xx}^2 f(x^*) d \geq 0, \quad \forall d \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

**Théorème 1.9** [9] *(Conditions nécessaires d'optimalité pour contraintes convexes) Soit  $x^*$  un minimum local du problème d'optimisation*

$$\min_{x \in \Omega} f(x)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est continûment différentiable sur  $\Omega$ , et  $\Omega$  est un ensemble convexe non vide. Alors

$$\nabla f(x^*)^T (x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Les théorèmes suivants établissent des conditions suffisantes pour qu'un point soit un minimum local.

**Théorème 1.10** [16] *(Conditions suffisantes du second ordre) Soit  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois différentiable en  $x^* \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $x^*$  un point intérieur de  $\Omega$  vérifiant*

$$\begin{aligned} i) \quad & \nabla f(x^*) = 0; \\ ii) \quad & \nabla_{xx}^2 f(x^*) > 0. \end{aligned}$$

*Alors,  $x^*$  réalise un minimum local strict de  $f$ .*

## Optimisation avec contraintes égalités

Ici, nous allons considérer des problèmes de programmation non linéaires avec des contraintes égalités de la forme :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ h(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.9)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $h = [h_1, h_2, \dots, h_p]^T$  et  $p \leq n$ . On suppose que la fonction  $h$  est continûment différentiable.

Soit  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : h_i(x) = 0 : i = 1, 2, \dots, p\}$ . Un point  $x^* \in \Omega$  est dit régulier si les vecteurs  $\nabla h_i(x^*) : i = 1, 2, \dots, p$  sont linéairement indépendants, c'est-à-dire

$$\text{rang} [\nabla h_1(x^*) \quad \nabla h_2(x^*) \quad \dots \quad \nabla h_p(x^*)] = p. \quad (1.10)$$

**Théorème 1.11** [22] (*Conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre*). *Considérons le problème (1.9), si  $x^*$  est un minimum local régulier de la fonction  $f$ , alors il existe un vecteur  $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$  vérifiant*

$$\nabla f(x^*) + \nabla h^T(x^*) \lambda^* = 0. \quad (1.11)$$

**Remarque 1.1** *Les conditions nécessaires du premier ordre (1.11) donnent un total de  $n+p$  équations (typiquement non linéaires) dans les variables  $(x^*, \lambda^*)$ . Comme dans le cas sans contraintes, une solution du système (1.11) peut être un minimum (local) du problème initial (1.9), un maximum (local) ou un point stationnaire.*

En pratique, pour résoudre le problème (1.9), on forme la fonction auxiliaire  $L$  appelée Lagrangien :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i h_i(x), \quad (1.12)$$

où  $\lambda_i$  sont des variables inconnues appelées multiplicateurs de Lagrange. Grâce au Lagrangien on retrouve les conditions d'optimalité :

$$\begin{cases} \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0 \iff \nabla_x f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \nabla_x h_i(x^*) = 0 \\ \nabla_{\lambda_i} L(x^*, \lambda^*) = 0 \iff h_i(x^*) = 0. \end{cases}$$

Le théorème suivant fournit des conditions nécessaires du second ordre pour qu'un point soit un minimum local d'un problème d'optimisation avec contraintes égalités.



**Théorème 1.12** [16] Soient  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions deux fois continûment différentiables sur  $\mathbb{R}^n$  et considérons le problème (1.9). Si  $x^*$  est un minimum local régulier, alors il existe un vecteur  $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$  tel que

$$(i) \quad \nabla f(x^*) + \nabla h^T(x^*) \lambda^* = 0, \quad (1.13)$$

$$(ii) \quad d^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d \geq 0 \quad \text{tel que } \nabla h^T(x^*) d = 0, \quad (1.14)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, p \text{ et } d \in \mathbb{R}^n \text{ avec } d \neq 0.$$

où

$$\nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) = \nabla_{xx}^2 f(x^*) + \nabla_{xx}^2 h(x^*)^T \lambda^*$$

est la matrice Hessienne du Lagrangien  $L$ .

Les conditions ci-dessus sont nécessaires, mais ne sont pas suffisantes, pour qu'un point réalise un minimum local. Nous présentons maintenant des conditions suffisantes assurant un minimum local strict.

**Théorème 1.13** [16] ( Conditions suffisantes du second ordre) Soient  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions deux fois continûment différentiables sur  $\mathbb{R}^n$ . Considérons le problème (1.9). Si  $x^*$  et  $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$  vérifient

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0, \quad (1.15)$$

$$\nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) = 0, \quad (1.16)$$

et

$$d^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d > 0 \quad \text{tel que } \nabla h^T(x^*) d = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, p \text{ et } d \in \mathbb{R}^n \text{ avec } d \neq 0, \quad (1.17)$$

alors  $x^*$  est un minimum local strict.

## Problèmes avec contraintes d'égalités et d'inégalités

Cette section est dédiée à l'étude du problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) \\ h_i(x) = 0, & i = 1, 2, \dots, p \\ g_j(x) \leq 0, & j = 1, 2, \dots, q, \end{cases} \quad (1.18)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g = [g_1, g_2, \dots, g_q]^T$ ,  $p$  et  $q$  désignant deux entiers naturels non nuls. Pour le problème général ci-dessus, nous adoptons les définitions suivantes.

**Définition 1.7** Une contrainte inégalité  $g_i(x) \leq 0$  est dite active en  $x^*$  si  $g_i(x^*) = 0$ . Elle sera dite inactive en  $x^*$  si  $g_i(x^*) < 0$ .

On introduit alors l'ensemble

$$I(x^*) = \{i : g_i(x^*) = 0\}.$$

des indices des contraintes actives.

**Définition 1.8** Soit  $x^*$  satisfaisant les contraintes  $h(x^*) = 0$  et  $g_j(x^*) = 0, \forall j \in I(x^*)$ . On dit que  $x^*$  est un point régulier si les vecteurs  $\nabla h_i(x^*)$  et  $\nabla g_j(x^*)$ , ( $j \in I(x^*)$ ) sont linéairement indépendants.

Nous donnons ici, des conditions nécessaires du premier et second ordre pour qu'un point soit un minimum local. Ces conditions sont appelées les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

**Théorème 1.14** [9] (Conditions nécessaires du premier et second ordre) Soit  $f, h, g \in C^2$ . Soit  $x^*$  un point régulier et un minimum local pour le problème (1.18). Alors, il existe  $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$  et  $\mu^* \in \mathbb{R}^q$  tels que

$$\mu_i^* \geq 0; \tag{1.19}$$

$$\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)^T \lambda^* + \nabla g(x^*)^T \mu^* = 0; \tag{1.20}$$

$$\mu_i^* g_i(x^*) = 0; \tag{1.21}$$

$$h(x^*) = 0; \tag{1.22}$$

$$g(x^*) \leq 0. \tag{1.23}$$

et

$$d^T \left( \nabla^2 f(x^*) + \nabla^2 g(x^*)^T \mu^* + \nabla^2 h(x^*)^T \lambda^* \right) d \geq 0, \tag{1.24}$$

pour toute  $d$  tel que  $\nabla g_j(x^*)^T d = 0, j \in I(x^*)$  et  $\nabla h_i(x^*)^T d = 0, i = 1, 2, \dots, p$ .

Dans le théorème ci-dessus,  $\lambda^*$  le vecteur multiplicateur de Lagrange et  $\mu^*$  le vecteur multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

**Théorème 1.15** [16] (Conditions suffisantes du second ordre) Considérons le problème (1.18). Soit  $f, h, g \in C^2$ . S'ils existent  $x^*, \lambda^*$  et  $\mu^*$  satisfaisant aux conditions KKT (1.19) – (1.23) et

$$d^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) d > 0 \tag{1.25}$$

pour toute  $d \neq 0$  tels que

$$\nabla g_j(x^*)^T d = 0 \quad j \in I(x^*) \text{ avec } \mu_j^* > 0 \quad (1.26)$$

$$\nabla g_j(x^*)^T d \leq 0 \quad j \in I(x^*) \text{ avec } \mu_j^* = 0 \quad (1.27)$$

$$\nabla h(x^*)^T d = 0, \quad (1.28)$$

où

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T h(x) + \mu^T g(x), \quad (1.29)$$

alors  $x^*$  est un minimum local strict du problème (1.18).

### 1.3 Optimisation quadratique

La programmation quadratique est le problème d'optimisation non linéaire le plus sollicité. Il s'agit d'une classe spéciale de problème d'optimisation (1.18) avec une fonction objectif quadratique et des contraintes linéaires. Le problème d'optimisation quadratique générale (QP) à la forme suivante :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \quad (1.30)$$

sous les contraintes

$$Ax = b, \quad (1.31)$$

$$Bx \leq d, \quad (1.32)$$

où  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est symétrique,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$  et  $d \in \mathbb{R}^s$ . Si la matrice Hessienne  $Q$  est semi-définie positive, alors (1.30) – (1.32) est un problème de programmation quadratique convexe et la solution locale  $x^*$  est une solution globale. Si  $Q$  est définie positive, alors (1.30) – (1.32) est un problème QP convexe stricte et  $x^*$  est une solution globale unique. Si  $Q$  est indéfinie, alors (1.30) – (1.32) est un problème quadratique non convexe beaucoup plus difficile à résoudre.

#### 1.3.1 Contraintes égalités

Nous considérons ici, le problème d'optimisation quadratique avec seulement des contraintes linéaires d'égalité, comme suit

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \quad (1.33)$$

sous les contraintes

$$Ax = b, \tag{1.34}$$

dont la matrice  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est définie positive,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ . Pour résoudre le problème (1.33) – (1.34), nous formons d'abord le Lagrangien

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x + \lambda^T (b - Ax) \tag{1.35}$$

Les conditions nécessaires de Lagrange donnent :

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = Qx^* + c - A^T \lambda^* = 0, \tag{1.36}$$

$$\nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) = b - Ax^* = 0, \tag{1.37}$$

ceci est un système comprenant  $n + m$  équations linéaires. Une question naturelle est de savoir si le système n'est pas singulier. Le système (1.32) – (1.33) peut être réécrit sous forme matricielle comme suit

$$\begin{pmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix}, \tag{1.38}$$

avec

$$\begin{pmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

appelée la matrice de KKT. Le théorème suivant montre que cette matrice est non singulière sous les conditions énoncées ci-dessus.

**Théorème 1.16** [67] *Soient  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Supposons que  $\text{rang} A = m$ , et  $Q$  est définie positive. Alors la matrice (1.39) n'est pas singulière. De plus, il existe un couple KKT unique  $(x^*, \lambda^*)$  tel que l'équation (1.38) soit satisfaite.*

Sous l'hypothèse du théorème précédent, il existe des méthodes pour résoudre le système (1.38). En général, il est plus efficace d'utiliser des méthodes de factorisation (telles que la décomposition LU) qui sont très pratiques pour les problèmes de petite taille . Pour les problèmes de grande taille, le système pose quelques difficultés.

Si, la matrice  $Q$  est définie positive, on peut facilement en déduire une formule explicite pour la solution du système : Par l'équation (1.36) , nous avons

$$x^* = Q^{-1}A^T \lambda^* - Q^{-1}c. \tag{1.40}$$

En substituant (1.40) dans l'équation (1.37), nous obtenons

$$b - AQ^{-1}A^T\lambda^* + AQ^{-1}c = 0, \quad (1.41)$$

donc, on trouve

$$\lambda^* = (AQ^{-1}A^T)^{-1} [AQ^{-1}c + b], \quad (1.42)$$

et

$$\begin{aligned} x^* &= Q^{-1}A^T (AQ^{-1}A^T)^{-1} [AQ^{-1}c + b] - Q^{-1}c \\ &= -Q^{-1} \left[ I_n - A^T (AQ^{-1}A^T)^{-1} AQ^{-1} \right] c \\ &\quad + Q^{-1}A^T (AQ^{-1}A^T)^{-1} b. \end{aligned} \quad (1.43)$$

### 1.3.2 Contraintes inégalités

Nous considérons ici, le problème d'optimisation quadratique avec des contraintes linéaires inégalitaires, comme suit

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \quad (1.44)$$

sous les contraintes

$$Ax \leq b, \quad (1.45)$$

dont la matrice  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est semi-définie positive,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ .

Soit  $X = \{x : Ax \leq b\}$  la région réalisable du problème. Pour  $x^* \in X$ , soit  $I(x^*)$  l'ensemble des indices des contraintes actives ;

$$I(x^*) = \{i : A_i x^* = b_i\}. \quad (1.46)$$

Quand il n'y a pas de contraintes actives en  $x^*$ , l'ensemble  $I(x^*)$  est vide, et  $x^*$  est un point intérieur de  $X$ . Alors, la condition d'optimalité du premier ordre est

$$\nabla f(x^*) = Qx^* + c = 0. \quad (1.47)$$

Le théorème de KKT adapté au cas quadratique est le suivant :

**Théorème 1.17** [21] *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point  $x^* \in X$  soit une solution du problème (1.44) – (1.45), avec  $\text{rg}(A) = m$  est*

$$Ax^* \leq b, \quad (1.48)$$

et il existe un vecteur  $\lambda^* \geq 0$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que

$$Qx^* + c + A^T\lambda^* = 0, \quad (1.49)$$

$$\lambda^{*T}(Ax^* - b) = 0. \quad (1.50)$$

Comme nous l'avons cité précédemment, ce théorème implique que lorsque  $x^*$  est une solution de (1.44) – (1.45), il existe un vecteur  $\lambda^*$  tel que  $x^*$  soit un point stationnaire de la fonction de Lagrange

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x + \lambda^T (b - Ax). \quad (1.51)$$

Il est important de noter qu'un multiplicateur de KKT ne sera positif que lorsque la contrainte correspondante est active. Les conditions d'optimalité du premier ordre données par le théorème précédent fournissent une caractérisation pour les points stationnaires ; Par conséquent, ce ne sont que des conditions nécessaires d'optimalité. La satisfaction de (1.48) – (1.50) par un vecteur  $x^*$  réalisable ne garantit pas par elle-même l'optimalité globale ou même locale de  $x^*$ . Les conditions (1.48) – (1.50) sont suffisantes pour l'optimalité globale de  $x^*$  lorsque la fonction objectif  $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x$  est convexe, c'est-à-dire lorsque  $Q$  est semi définie positive.

### 1.3.3 Contraintes mixtes égalités et inégalités

On considère ici le problème quadratique

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \quad (1.52)$$

sous les contraintes

$$Ax = b, \quad (1.53)$$

$$Bx \leq d. \quad (1.54)$$

La matrice  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est semi-définie positive,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$  et  $d \in \mathbb{R}^s$ . Le Lagrangien est donné par :

$$L(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x + \lambda^T (Ax - b) + \mu^T (Bx - d).$$

Dans ce cas le théorème de KKT s'écrit :

**Théorème 1.18** [21] *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point  $x^*$  soit une solution locale du problème (1.52) – (1.54) est qu'il existe une paire de vecteurs  $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$ , tels que*

$$\begin{aligned} Qx^* + c + A^T \lambda^* + B^T \mu^* &= 0, \\ \lambda^* &\geq 0, \\ Ax^* - b &= 0, \\ Bx^* - d &\leq 0, \\ \lambda^T (Ax - b) &= 0. \\ \text{rg}(A) = m, \quad \text{rg}(B) &= s \end{aligned}$$

Ceci constitue une introduction en optimisation statique ( $x \in \mathbb{R}^n$ ). Dans le chapitre suivant nous aborderons le problème d'optimisation dynamique.

# 2 Calcul des Variations et contrôle optimal

## 2.1 Calcul des Variations

Dans le chapitre précédent, nous avons considéré un problème d'optimisation en dimension fini ; la fonction objectif et ses contraintes étaient définies sur  $\mathbb{R}^n$ . Dans ce qui suit la fonction à minimiser est définie sur l'espace  $V = C^2([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$  à valeurs réelles. L'espace  $V$  sera en général équipé des deux normes suivantes :  $\|x\|_\infty = \sup_{t \in [t_0, t_f]} |x(t)|$ , et  $\|x\|_{1,\infty} = \sup_{t \in [t_0, t_f]} (|x(t)| + |x'(t)|)$ . Il s'agit donc de trouver le minimum d'une fonctionnelle  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Le problème de calcul des variations typique est formulé comme suit :

$$\min_{x \in V} J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), \dot{x}(t), t) dt, \quad (2.1)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{et} \quad x(t_f) = x_f. \quad (2.2)$$

L'intégrante  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est supposée au moins  $C^2$  par rapport à ses deux premiers arguments et  $C^1$  par rapport au troisième.

**Définition 2.1** [47] Une fonction  $x^* \in V$  est un minimum local de  $J$  sur un sous-ensemble  $A \subset V$  si

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ tel que } \forall x \in A, \quad \|x^* - x\| < \varepsilon \implies J(x^*) \leq J(x). \quad (2.3)$$

Si la relation (2.3) est vérifiée pour tout  $x \in A$ ,  $x^*$  sera dit minimum global.

Un minimum de  $J$  par rapport à la norme  $\|\cdot\|_\infty$  est dit un minimum fort. Il est dit minimum faible si la relation (2.3) est vérifiée avec la norme  $\|\cdot\|_{1,\infty}$ . Tout minimum fort est faible, mais l'inverse n'est pas vrai. Le voisinage de  $x^*$  ne contient que des courbes qui diffèrent peu de  $x^*$  et dont les dérivées diffèrent peu de  $\dot{x}^*$ , contrairement à un voisinage de  $x^*$  dans la topologie associée à la norme  $\|\cdot\|_\infty$  qui contiendra beaucoup plus de courbes.



### 2.1.1 Les contraintes

Généralement, un certain nombre de contraintes sont imposées aux courbes candidates à réaliser le minimum de la fonctionnelle  $J$ .

**Définition 2.2** (*Courbe Admissible*). Une courbe  $x \in V$  est dite admissible si elle satisfait toutes les contraintes physiques (lorsqu'elles existent) le long de l'intervalle  $[t_0, t_f]$ .

Dans le cas typique du problème de calcul des variations (2.1) et (2.2), l'ensemble des courbes admissibles peut être défini comme suit :

$$\mathcal{D} = \{x \in V : x(t_0) = x_0 \text{ et } x(t_f) = x_f\}. \quad (2.4)$$

Dans ce cas, on cherche des courbes  $x(t) \in V$  joignant les points fixes  $(t_0, x_0)$  et  $(t_f, x_f)$ . Le temps final  $t_f$  peut être libre, on déterminera par conséquent non seulement la courbe optimale  $x^*(t)$ , mais aussi la valeur optimale de  $t_f$ . Autrement dit, l'ensemble des solutions admissibles est

$$\mathcal{D} = \{(x, t_f) \in V \times [t_0, \infty[ : x(t_0) = x_0 \text{ et } x(t_f) = g(t_f)\}. \quad (2.5)$$

Outre les contraintes de bords, il est possible d'imposer des contraintes différentielles comme suit :

$$\Phi(x(t), \dot{x}(t), t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f]. \quad (2.6)$$

Un autre type de contraintes est souvent imposé,

$$\Theta(x) = \int_{t_0}^{t_f} G_k(x(t), \dot{x}(t), t) dt = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.7)$$

Ces contraintes sont souvent appelées contraintes isopérimétriques [38]. De même, on peut imposer des contraintes de la forme

$$\Theta(x) = \int_{t_0}^{t_f} G_k(x(t), \dot{x}(t), t) dt \leq c_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.8)$$

Autres contraintes de différentes formes peuvent être imposées. Nous considérons ici seulement le premier cas (2.4).

### 2.1.2 Première variation et condition nécessaire du premier ordre

On aura besoin de la définition suivante très utile pour la suite

**Définition 2.3** [22] (*Variation d'une fonctionnelle*). Lorsque  $J$  est une fonctionnelle définie sur un ouvert  $\Omega$  d'un espace vectoriel  $V$ , on appelle variation de la fonction  $J$  en  $x$  dans la direction  $h \in V$ , la quantité suivante lorsqu'elle existe :

$$\delta J(x; h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(x + \varepsilon h) - J(x)}{\varepsilon} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(x + \varepsilon h) \right|_{\varepsilon=0}. \quad (2.9)$$

Lorsqu'une telle limite existe pour toute direction  $h$ , on dit que  $J$  est différentiable au sens de Gâteaux. Soit  $x^*$  un minimum local et soit  $h$  une perturbation de  $x^*$  telle que  $x^* + \varepsilon h$  appartient au voisinage où  $x^*$  est un minimum pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , alors si on pose  $g(\varepsilon) = J(x^* + \varepsilon h)$ , on a  $g(0) \leq g(\varepsilon)$ , d'où  $g'(0) = 0$ , donc la relation (2.9) donne

$$\delta J(x; h) = g'(0) = 0. \quad (2.10)$$

**Théorème 2.1** [51, 64] Une condition nécessaire pour que  $x^*(t)$  soit un extrémum de la fonctionnelle  $J$  est

$$\delta J(x^*; h) = 0$$

pour tout  $h$  admissible.

## Èquation d'Euler-Lagrange

Nous donnons à présent le résultat le plus fondamental du calcul des variations assurant une condition nécessaire d'optimalité. Nous nous limitons au problème élémentaire du calcul des variations donné par (2.1) et (2.2) :

On note classiquement les dérivées partielles de la façon suivante

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_{\dot{x}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}, \quad F_t = \frac{\partial F}{\partial t}, \quad F_{x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \text{etc.}$$

Nous considérons -toujours- des courbes de la forme

$$x + \varepsilon h, \quad (2.11)$$

où la perturbation  $h : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$  est une autre courbe  $C^1$  et  $\varepsilon$  varie dans un intervalle réel autour de 0. Pour  $\varepsilon$  près de 0, ces courbes perturbées sont proches de  $x$  au sens de la norme  $\|\cdot\|_{1,\infty}$ . Pour cette raison, la condition nécessaire du premier ordre donne des extrema faibles. On aura besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.1** [31] Soit  $f \in C^0[a, b]$  une fonction telle que

$$\int_a^b h(x) f(x) dx = 0$$

pour toute fonction  $h$  de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  avec  $h(a) = h(b) = 0$ . Alors la fonction  $f$  est identiquement nulle sur  $[a, b]$ .

De la relation (2.9), on a

$$\begin{aligned}\delta J(x^*; h) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(x + \varepsilon h) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{d\varepsilon} F(x^*(t) + \varepsilon h(t), \dot{x}^*(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t) dt,\end{aligned}$$

d'où

$$\delta J(x^*; h) = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial}{\partial x} F(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) h(t) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} F(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \dot{h}(t) \right] dt.$$

On a :  $\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} F(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \dot{h}(t) dt = \left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h(t) \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} h(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} dt$ , donc, on obtient

$$\delta J(x : h) = \int_{t_0}^{t_f} \left[ h(t) \frac{\partial F}{\partial x} - h(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right] dt + \left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h(t) \right]_{t_0}^{t_f}.$$

Si la perturbation admissible  $h$  est choisie telle que

$$h(t_0) = h(t_f) = 0, \tag{2.12}$$

alors le dernier terme du second membre s'annule, il reste

$$\delta J(x; h) = \int_{t_0}^{t_f} h(t) \left[ \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right] dt.$$

Comme  $\delta J(x; h) = 0$ , le Lemme 2.1 donne :

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0. \tag{2.13}$$

L'équation (2.13) est connu sous le nom de l' équation d'Euler-Lagrange.

**Définition 2.4** *On appellera extrémum d'un problème de calcul des variations toute solution de l'équation d'Euler-Lagrange (2.13) associée à ce problème.*

L'équation d'Euler-Lagrange est une équation différentielle du second ordre à coefficients non constants. L'équation d'Euler-Lagrange n'est qu'une condition nécessaire pour l'extrémum. Parfois, elle ne peut pas donner un extrémum. Cependant, si l'équation d'Euler-Lagrange n'est pas satisfaite pour aucune fonction, cela indique que l'extrémum n'existe pas pour cette fonctionnelle.

**Exemple 2.1** [30] *(Le problème du brachistochrone) Le calcul des variations provient d'un problème posé par le mathématicien suisse Johann Bernoulli (1667-1748). Il a cherché à trouver la forme de la courbe joignant deux points fixes  $A$  et  $B$  dans un plan vertical, de*

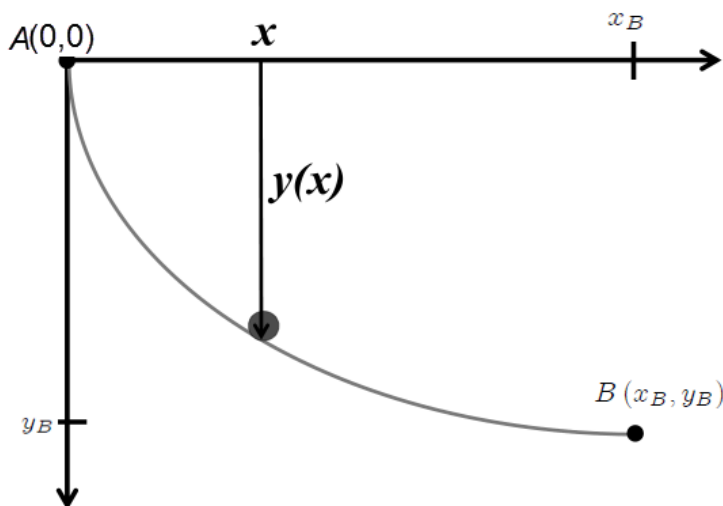


FIGURE 2.1 – Le problème de Brachistochrone

telle sorte qu'un corps coulissant vers le bas de la courbe (par gravité et sans frottement) se déplace du point  $A$  au point  $B$  en un temps minimal. Ce problème n'a pas de solution triviale. À première vue, on pourrait penser que la courbe doit être la ligne droite entre  $A$  et  $B$ , mais quand on résoudra ce problème, on verra que ce n'est pas le cas. On doit donc exprimer la durée du parcours entre  $A$  et  $B$ , puis chercher la courbe qui minimise cette durée.

Soit  $s$  l'abscisse curviligne, un élément de courbe  $ds$  s'exprime en coordonnées cartésiennes par

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Nous considérons le problème où une bille commence à  $A(0,0)$  et glisse vers le bas jusqu'au point  $B(x_A, x_B)$  et il n'y a pas de frottement comme illustré à la figure 2.1. Soit  $g$  l'accélération due à la gravité et  $m$  la masse de la bille. La vitesse de la bille est notée  $v(x)$ . La conservation de l'énergie donne

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0.$$

Le temps de descente est donc donné par

$$J = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_B} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{y}} dy.$$

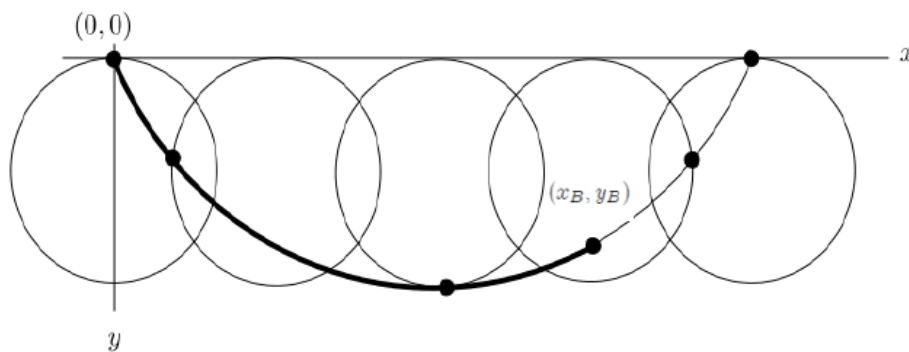


FIGURE 2.2 – La cycloïde entre  $(0, 0)$  et  $(x_B, y_B)$

Le problème est de trouver la courbe  $\{x(y), y \in [0, y_B]\}$ , satisfaisant  $x(0) = 0$  et  $x(y_B) = x_B$ , et qui minimise

$$J(x) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_B} \sqrt{\frac{1 + (x'(y))^2}{y}} dy.$$

L'équation d'Euler-Lagrange devient

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{x'(y)}{\sqrt{1 + (x'(y))^2}} \frac{1}{\sqrt{y}} \right) = 0.$$

En intégrant par rapport à  $y$ , on obtient

$$\frac{x'(y)}{\sqrt{1 + (x'(y))^2}} \frac{1}{\sqrt{y}} = c_1, \quad c_1 = \text{constant}.$$

La solution générale de cette équation différentielle est donnée par

$$x(t) = \frac{1}{2c_1} (t - \sin t) + c_2, \quad y(t) = \frac{1}{2c_1} (1 - \cos t),$$

où  $c_2$  est une autre constante. L'équation obtenue est celle d'une cycloïde (figure 2.2).

### 2.1.3 Conditions nécessaires du second ordre (Legendre).

Dans l'étude des extrémums des fonctionnelles, nous n'avons considéré jusqu'ici que la condition nécessaire (l'annulation de la première variation) pour qu'une fonctionnelle ait un extremum faible. Pour établir la nature de l'optimum (maximum ou minimum), il est nécessaire d'examiner la deuxième variation. Au chapitre précédent, on a vu qu'en optimisant une fonction deux fois continûment différentiable  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x^* \in \mathbb{R}^n$  est un minimum local de  $f$  si  $\nabla f(x^*) = 0$  et  $\nabla^2 f(x^*)$  est définie positive. C'est-à-dire,  $f$  est

à la fois stationnaire et localement convexe en  $x^*$ . Des conditions analogues peuvent être développées pour des problèmes du calcul des variations. Leur développement s'appuie sur le concept de la deuxième variation d'une fonctionnelle.

**Définition 2.5** Soit  $J$  une fonction définie sur un espace vectoriel normé  $V$ . Alors, la seconde variation de  $J$  en  $x \in V$  dans la direction admissible  $h \in V$  est définie (si elle existe) par

$$\delta^2 J(x : h) = \left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(x + \varepsilon h) \right|_{\varepsilon=0}. \quad (2.14)$$

Nous sommes maintenant prêts à formuler les conditions nécessaires au second ordre. Puisque des dérivées partielles de troisième ordre de  $F$  apparaissent, nous supposons que  $F \in C^3$ . La seconde variation est aussi définie par

$$J(x + \varepsilon h) = J(x) + \delta J(x : h) \varepsilon + \delta^2 J(x : h) \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \quad (2.15)$$

Le développement en série de Taylor du second ordre par rapport à  $\varepsilon$  (en utilisant la règle de la chaîne) et en séparant les termes des ordres différents on aura

$$\begin{aligned} J(x + \varepsilon h) &= \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), \dot{x}(t), t) dt + \int_{t_0}^{t_f} \left[ F_x(x(t), \dot{x}(t), t) h(t) + F_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \dot{h}(t) \right] dt \cdot \varepsilon \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[ F_{xx}(x(t), \dot{x}(t), t) (h(t))^2 + 2F_{x\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) h(t) \dot{h}(t) \right. \\ &\left. + F_{\dot{x}\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) (\dot{h}(t))^2 \right] dt \cdot \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

En combinant cette expression avec (2.15), terme à terme, nous déduisons que la deuxième variation s'écrit

$$\delta^2 J(x : h) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[ F_{xx} h^2 + F_{\dot{x}\dot{x}} \dot{h}^2 + 2F_{x\dot{x}} h \dot{h} \right] dt. \quad (2.16)$$

Considérons le dernier terme de l'équation précédente et réécrivons-le en termes de  $h$  seulement en utilisant l'intégration par parties

$$\int_{t_0}^{t_f} 2F_{x\dot{x}} h \dot{h} dt = \int_{t_0}^{t_f} F_{x\dot{x}} \frac{d}{dt} (h^2) dt = F_{x\dot{x}} h^2 \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} (F_{x\dot{x}}) h^2 dt. \quad (2.17)$$

En utilisant les conditions (2.12), on trouve

$$\delta^2 J(x : h) = \int_{t_0}^{t_f} \left[ P(t) (\dot{h}(t))^2 + Q(t) (h(t))^2 \right] dt, \quad (2.18)$$

où  $P(t) = \frac{1}{2} F_{\dot{x}\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)$  et  $Q(t) = \frac{1}{2} [F_{xx}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt} (F_{x\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t))]$ .

Nous savons que si  $x$  est un minimum, alors pour toute perturbation  $h$  vérifiant

$$h(t_0) = h(t_f) = 0,$$

on a  $\delta^2 J(x : h) \geq 0$ . Pour des valeurs arbitraires de  $h(t)$  et  $\dot{h}(t)$ , ceci signifie que

$$F_{xx}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt}(F_{x\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)) \geq 0, \quad (2.19)$$

$$F_{\dot{x}\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \geq 0. \quad (2.20)$$

Pour le maximum, les signes des conditions précédentes sont inversés.

**Théorème 2.2** [49] (*Conditions nécessaires de Legendre*) Si  $x$  réalise un minimum (local) pour  $J$  sur  $\mathcal{D} = \{x \in V : x(t_0) = x_0 \text{ et } x(t_f) = x_f\}$ . Alors  $x$  satisfait l'équation d'Euler-Lagrange (2.13) avec la condition dite de Legendre

$$F_{\dot{x}\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \text{ est semi définie positive,} \quad (2.21)$$

pour chaque  $t \in [t_0, t_f]$ .

**Exemple 2.2** (*Longueur minimale d'une courbe*) Considérons le problème de minimisation de la fonctionnelle

$$J(x) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt.$$

Soit  $F(x(t), x'(t), t) = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$ . On a d'après l'équation d'Euler-Lagrange (2.13) :

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{1 + (x')^2}} = c,$$

où  $c$  est une constante. On trouve donc  $x' = cte$ , autrement dit,

$$x(t) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} (t - a) + \alpha,$$

l'équation d'une droite qui passe par les points  $A(a, \alpha)$  et  $B(b, \beta)$ , c'est une fonction extrémale (stationnaire) du problème posé. D'autre part, on a

$$F_{\dot{x}\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{1}{[1 + \dot{x}^2]^{3/2}},$$

qui satisfait à la condition (2.21). Par conséquent, la distance entre deux points donnée par

$$x(t) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} (t - a) + \alpha$$

(ligne droite) est minimale.

## 2.2 Problème de contrôle optimal

La Théorie de contrôle traite des systèmes qui peuvent être contrôlés, c'est-à-dire dont l'évolution peut être influencée par un opérateur externe. Nous considérons des systèmes de contrôle qui peuvent être définis comme un système d'équations différentielles en fonction de certains paramètres. Le modèle mathématique, qui représente le système physique, consiste en un ensemble de relations qui décrivent la réponse ou la sortie du système pour différentes entrées. Des contraintes fondées sur la situation physique sont incorporées dans cet ensemble de relations.

Le problème de contrôle optimal peut être interprété comme une extension du calcul des variations. Le contrôle optimal a trouvé ses applications dans de nombreux domaines scientifiques, allant des mathématiques et de l'ingénierie aux sciences biomédicales et sciences de gestion.

La formulation d'un problème de contrôle optimal nécessite

- Une description (ou modèle) mathématique du processus à contrôler (généralement sous forme variable d'état),
- Une fonction objectif (Critère de qualité) ou fonction-coût.
- Un énoncé des conditions aux limites et des contraintes physiques sur les états et / ou les contrôles.

Généralement, le problème de contrôle optimal peut être formulé comme suit :

Trouver un contrôle admissible  $u = u(t)$  qui minimise la fonction objectif

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt, \quad (2.22)$$

par rapport aux fonctions d'état

$$\mathcal{X} = \{x(\cdot) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x_i \in C^1[t_0, t_f], \quad i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (2.23)$$

et les fonctions vecteurs de contrôle

$$\mathcal{U} = \{u(\cdot) : [t_0, t_f] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m, \quad u_i \in C^1[t_0, t_f], \quad i = 1, 2, \dots, m\}, \quad (2.24)$$

$U$  est un convexe fermé non vide.



sous contraintes suivantes :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad f : \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.25)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad x_0 \text{ connu} \quad (2.26)$$

$$\phi(x(t_f), t_f) = 0 \quad \phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^p, p \leq n \quad (2.27)$$

$$C(x(t), u(t)) \leq 0 \in \mathbb{R}^q \quad C : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^q \quad (2.28)$$

$$S(x(t)) \leq 0 \in \mathbb{R}^s \quad S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s. \quad (2.29)$$

La fonction objectif doit être spécifiée pour évaluer quantitativement la performance d'un système. La forme donnée en (2.22) est la forme classique de Bolza [22]. Il s'agira de Lagrange si  $h(x(t_f), t_f) = 0$  et de Mayer si  $\int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt = 0$ .

L'équation (2.25), exprime la dynamique du système, c'est la première contrainte d'égalité fondamentale.

Le problème (2.22) – (2.29) est un problème d'optimisation en dimension infinie, sa solution est une fonction de contrôle  $u^*(t)$  et une courbe associée  $x^*(t)$ .

Plusieurs méthodes ont été utilisées pour résoudre un problème de contrôle optimal. Parmi ces méthodes, on compte :

- Méthodes indirectes : le principe du minimum de Pontryagin.
- Méthodes directes : discrétisation ou parameterisation.

### 2.2.1 Approche variationnelle (Méthodes Indirectes)

L'approche indirecte de résolution d'un problème de contrôle optimal est basée sur une généralisation du calcul des variations. Les conditions nécessaires pour un extremum sont dérivées en considérant la première variation de la fonction Lagrangienne  $J$ , ici, les multiplicateurs de Lagrange sont des fonctions du temps,  $\lambda = \lambda(t)$ , ils sont appelés : les vecteurs d'état adjoint, elle obéissent à des équations différentielles. Alors que dans le cas de dimension finie les multiplicateurs sont calculés à partir d'équations algébriques.

Les conditions nécessaires impliquent donc à la fois les équations différentielles originales du système dynamique et les équations différentielles adjointes associées aux états adjoints. Le résultat final est un problème à deux bouts [6, 20] (en anglais : Two-point boundary value problem(TPBVP)), qui est constitué par des équations d'état et état adjointe avec des conditions initiales et terminales.

L'approche est appelée indirecte, parce que le contrôle optimal est trouvé en résolvant le problème (TPBVP) auxiliaire, plutôt que par une focalisation directe sur le problème d'origine.

Dans ce travail, nous considérons le problème de contrôle optimal non linéaire donné par les équations (2.22) – (2.27). Le vecteur de commande  $u(t)$  n'est pas contraint ni borné. La fonction objectif est donné dans la forme Bolza. En introduisant les vecteurs des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda(t)$  et  $\nu$  et en joignant les équations dynamiques et les conditions aux limites à la fonction objectif, on obtient l'indice de performance augmenté suivant :

$$J_a = h(x(t_f), t_f) + \nu^T \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [g(x(t), u(t), t) + \lambda^T (f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t))] dt \quad (2.30)$$

L'extremum de la fonctionnelle  $J$  est obtenu lorsque la variation de  $J_a$  du premier ordre est nulle ( $\delta J_a = 0$ ). Il est commode de définir l'Hamiltonien :

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t) = g(x(t), u(t), t) + \lambda(t)^T [f(x(t), u(t), t)], \quad (2.31)$$

et la fonction auxiliaire :

$$\Phi(x(t), t, \nu) = h(x(t), t) + \nu^T \phi(x(t), t). \quad (2.32)$$

Suivant les mêmes démarches que la section précédente, on obtient le théoème suivant :

**Théorème 2.3** [12] *On suppose  $U = \mathbb{R}^m$ . Si  $u^*(t)$  est optimal local faible alors :  $\exists \lambda^* : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$  :*

-C.N.1 : équations canoniques de Hamilton

$$\dot{x}^*(t) = \mathcal{H}_\lambda^T = \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \lambda}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \quad \text{Equation d'état} \quad (2.33)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\mathcal{H}_x^T = \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \quad \text{Equation d'état adjointe} \quad (2.34)$$

$$0 = \mathcal{H}_u^T = \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t), \quad \text{Equation de commande} \quad (2.35)$$

-C.N.2 : condition (forte) au deuxième ordre de Legendre-Clebsch

$$\mathcal{H}_{uu}^* \geq 0,$$

et les conditions de transversalité :

$$\left\{ \lambda^*(t_f) - \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) \right]^T \right\} \delta x_f + \{g(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f) +$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial t} (x^*(t_f), t_f) + \lambda^*(t_f)^T [f(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f)] \right\} \delta t_f = 0. \quad (2.36)$$

Les équations de contrôle (2.35) sont un énoncé simplifié du principe du minimum de Pontryagin [56] au cas où les contrôles admissibles ne sont pas contraints.

### Principe du minimum de Pontryagin

Le problème de contrôle optimale étudié est défini par :

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J(x(\cdot), u(\cdot)) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt, \quad (2.37)$$

$$\text{sous } \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.38)$$

$$x(t_f) = x_f, \quad t_f \text{ libre.}$$

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0, t_f]$  par rapport à  $x$  et  $t$ .

Le Hamiltonien  $\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t) = g(x(t), u(t), t) + \lambda(t)^T [f(x(t), u(t), t)]$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0, t_f]$  par rapport à  $x$ .

Première variation de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \delta J &= [\mathcal{H}^* + h^*]_{t=t_f} \delta t_f + \left[ \frac{\partial h^*}{\partial t} - \lambda^*(t) \right]_{t=t_f}^T \delta x_f \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[ \mathcal{H}_x^* + \dot{\lambda}^*(t) \right]^T \delta x(t) + (\mathcal{H}_u^*)^T \delta u(t) \right\} dt, \end{aligned} \quad (2.39)$$

Les conditions nécessaires pour que  $u^*(t)$  minimise  $J$  sont :

- )  $\delta J = 0$ , si  $u^*(t)$  est à l'intérieur de  $\mathcal{U}$ .
- )  $\delta J \geq 0$ , si  $u^*(t)$  est sur la frontière de  $\mathcal{U}$ .
- ) Equations canoniques de Hamilton :

$$\dot{x}^*(t) = \mathcal{H}_\lambda(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \quad (2.40)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\mathcal{H}_x(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t). \quad (2.41)$$

- Conditions de transversalité :

$$[\mathcal{H}^* + h^*]_{t=t_f} \delta t_f + \left[ \frac{\partial h^*}{\partial t} - \lambda^*(t) \right]_{t=t_f}^T \delta x_f = 0. \quad (2.42)$$

Donc  $\delta J = \int_{t_0}^{t_f} (\mathcal{H}_u^*)^T \delta u(t) dt$ , avec  $(\mathcal{H}_u^*)^T \delta u(t) = \mathcal{H}(x^*(t), u^*(t) + \delta u(t), \lambda^*(t), t) - \mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t)$ , d'où  $\delta J \geq 0$  implique

$$\mathcal{H}(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t) \geq \mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \quad \forall u \in \mathcal{U}.$$

**Théorème 2.4** (*principe du minimum de Pontryagin*) [47] *Si  $u^*(t) \in \mathcal{U}$  est une commande optimale admissible et  $x^*(t)$  la trajectoire d'état optimale solution de l'équation d'état associée à  $u^*(t)$  alors il existe un vecteur adjoint  $\lambda^*(t)$  tel que les équations canoniques de Hamilton*

$$\dot{x}^*(t) = \mathcal{H}_\lambda^* = f(x^*(t), u^*(t), t) \quad (2.43)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\mathcal{H}_x(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t), \quad (2.44)$$

*aient des solutions  $(x^*(t), \lambda^*(t))$  sous les conditions de transversalité :*

$$\left[ \mathcal{H}^* + \frac{\partial h}{\partial t} \right]_{t=t_f} \delta t_f + \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^* - \lambda^*(t) \right]_{t=t_f}^T \delta x_f = 0. \quad (2.45)$$

*et  $u^*(t)$  est un minimum global du Hamiltonien sur  $\mathcal{U}$*

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t) = \mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t), \quad (2.46)$$

*ou*

$$\mathcal{H}(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t) \geq \mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \quad \forall u \in \mathcal{U}. \quad (2.47)$$

La relation (2.46) signifie que la condition nécessaire d'optimalité est que le contrôle optimal devrait minimiser l'Hamiltonien, c'est la principale contribution du principe du minimum de Pontryagin. Nous notons que ce n'est qu'une condition nécessaire et n'est généralement pas suffisante pour l'optimalité.

Le principe du minimum de Pontryagin remplace le calcul de la commande optimale par la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires avec conditions aux deux bouts auquel on adjoint un problème d'optimisation élémentaire résolu à chaque instant.

### 2.2.2 Problème de Contrôle Linéaire Quadratique (LQ) :

Le problème linéaire-quadratique (LQ) est probablement le problème de contrôle optimal le plus célèbre. Il se réfère à un système linéaire et un indice de performance quadratique selon l'énoncé suivant.

Soit  $[t_0, t_f]$  un intervalle de temps fini et soient

$$\begin{aligned} A : [t_0, t_f] &\rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad t \rightarrow A(t) & B : [t_0, t_f] &\rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}, \quad t \rightarrow B(t) \\ Q : [t_0, t_f] &\rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad t \rightarrow Q(t) & R : [t_0, t_f] &\rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}, \quad t \rightarrow R(t), \end{aligned}$$

des fonctions matricielles continues sur  $[t_0, t_f]$ . Nous supposons que les matrices  $Q(t)$  et  $R(t)$  sont symétriques et que  $Q(t)$  est semi-définie positive et  $R(t)$  est définie positive pour tout  $t \in [t_0, t_f]$ . De plus, soit  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice semi-définie positive constante et symétrique.

(LQ) : Trouver une fonction de contrôle  $u^* : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , qui minimise le critère de performance quadratique

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) S(t_f) x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t) \quad (2.48)$$

sous

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (2.49)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (2.50)$$

où  $x_0$  et  $t_0$  sont donnés,  $t_f$  est fixé, et l'état final  $x(t_f)$  n'est pas fixé, on n'impose aucune contrainte sur le contrôle.

En utilisant la définition de l'Hamiltonien donnée par (2.31) avec l'indice de performance (2.48) et l'équation d'état (2.49), on obtient l'Hamiltonien :

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t)) = \frac{1}{2} (x^T Q x + u^T R u) + \lambda (A x + B u). \quad (2.51)$$

Alors les équations données par le principe du minimum (faible) LQ s'écrivent

$$\dot{x}^*(t) = \mathcal{H}_\lambda = A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) \quad (2.52)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\mathcal{H}_x = -Q(t)x^*(t) - A^T(t)\lambda^*(t), \quad (2.53)$$

et

$$\mathcal{H}_u = R(t)u^*(t) + B^T(t)\lambda^*(t) = 0. \quad (2.54)$$

La relation (2.54) conduit à

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda^*(t). \quad (2.55)$$

Substituons la relation de contrôle (2.55) dans l'équation d'état (2.52) pour obtenir le système canonique (état et état adjointe), également appelé système Hamiltonien des équations

$$\dot{x}^*(t) = A(t)x^*(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda^*(t). \quad (2.56)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -Q(t)x^*(t) - A^T(t)\lambda^*(t). \quad (2.57)$$

Ici, pour notre système actuel  $t_f$  est fixé ce qui fait  $\delta t_f = 0$ , par contre  $x(t_f)$  n'est pas spécifié ce qui rend  $\delta x(t_f)$  arbitraire. Par conséquent, le coefficient de  $\delta x(t_f)$  dans (2.45) devient nul, c'est-à-dire ; la relation (2.45) devient

$$\lambda^*(t_f) = \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^* = S(t_f) x^*(t_f). \quad (2.58)$$

Écrivons les relations (2.56), (2.57) et les conditions aux bords (2.50) et (2.58) sous forme matricielle, on trouve

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^*(t) \\ \dot{\lambda}^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

$$\begin{pmatrix} x(t_0) \\ \lambda^*(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ S(t_f)x^*(t_f) \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

La solution du système (2.59) et (2.60) est obtenue à partir du Théorème suivant :

**Théorème 2.5** [3] *La solution du problème de contrôle optimal linéaire-quadratique [LQ] est donnée par le contrôle linéaire*

$$u^*(t, x^*(t)) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x^*(t), \quad (2.61)$$

où  $P(t)$  doit satisfaire à l'équation différentielle matricielle

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q(t) = 0, \quad (2.62)$$

$$P(t_f) = S(t_f) \quad (2.63)$$

Cette solution  $P(t)$  existe sur l'intervalle complet  $[t_0, t_f]$  et elle est semi-définie positive.

L'équation (2.62) est appelée l'équation différentielle matricielle de Riccati.  $P(t)$  est appelée la matrice de coefficient de Riccati ou simplement la matrice de Riccati ou le coefficient de Riccati.

### 2.2.3 Méthodes directes

Les méthodes basées sur le principe de minimum de Pontryagin (équations d'Euler-Lagrange) sont habituellement classées comme des méthodes indirectes[6]. Le principal avantage des méthodes indirectes est que les solutions obtenues produisent l'existence et l'unicité des résultats, des solutions exactes quand le TPBVP peut être résolu analytiquement et des estimations d'erreur quand il est résolu numériquement[65]. D'autre part, elles présentent certains inconvénients [43, 8] :

- Il est nécessaire de dériver des expressions analytiquement pour les conditions nécessaires, et pour une équation d'état non linéaire compliquée .

- Le manque de robustesse.

- Exige une connaissance approfondie du modèle mathématique et physique du système.

Pour éviter ces inconvénients et d'autres, de nombreux chercheurs ont proposés des méthodes directes pour résoudre les problèmes de contrôle optimal. La méthode directe [43] est basée sur des approches de programmation non linéaire (PNL) qui transcrivent des problèmes de contrôle optimal en problèmes de PNL et en appliquant les techniques de PNL existantes pour les résoudre. Dans la plupart des applications pratiques, les problèmes de commande optimale sont décrits par des équations différentielles non linéaires difficiles à résoudre par des méthodes indirectes. Dans cette méthode, la solution optimale est obtenue par une minimisation directe de la fonction objectif soumis aux contraintes. Les méthodes directes sont classées en méthodes de discrétisation ou de paramétrisation de l'état et / ou des variables de contrôle.

En discrétisation, de nombreux points discrets (échantillons) de l'état et / ou de la variable de contrôle sont nécessaires pour produire des résultats précis, ce qui rend le système de grande dimension.

La paramétrisation peut être mise en œuvre par l'une des trois voies [43] :

- (a) Paramétrisation de contrôle : nous approximations les variables de contrôle par une série finie de fonctions connues avec des paramètres inconnus, puis les variables d'état sont obtenues en fonction des paramètres inconnus en intégrant l'équation d'état du système, mais ce procédé coûte cher.
- (b) Paramétrisation de l'état et du contrôle, de cette façon nous approximations les deux variables d'état et de contrôle par une série finie de fonctions connues avec des paramètres inconnus, le système résultant se terminera par de grands paramètres inconnus.
- (c) La paramétrisation de l'état est la méthode la moins utilisée par rapport aux autres. Dans cette voie seules quelques grandeurs d'état sont approximations directement par une série finie de fonctions connues avec des paramètres inconnus. Les autres variables d'état et de commande sont obtenues en fonction des paramètres inconnus directement à partir de l'équation (s) d'état.

Dans ce travail, nous utilisons l'approche donnée en (b) en s'appuyant sur l'approximation par ondelettes.

# 3 Théorie des ondelettes

Le mot «ondelette» qui signifie «petite onde» a été introduit par Jean Morlet et Grossmann [36] au début des années 1980, influencé par des idées de mathématiques pures et appliquées. Les ondelettes ont été développées indépendamment dans les domaines des mathématiques, de la physique quantique, de l'électrotechnique, de la géologie sismique, de la technologie médicale, etc... L'analyse par ondelettes a été introduite à l'origine afin d'améliorer le traitement des signaux sismiques en passant de l'analyse de Fourier à courte durée à de nouveaux algorithmes pour détecter et analyser les changements brusques de signaux. Du point de vue de la théorie de l'approximation et de l'analyse harmonique, la théorie des ondelettes est importante à plusieurs égards. Elle donne des bases d'ondelettes inconditionnelles simples et élégantes pour les espaces fonctionnels (Lebesgue, Sobolev, Besov, etc...).

Un développement récent de la théorie de l'approximation est l'approximation d'une fonction arbitraire par des polynômes d'ondelettes. Il existe différents types d'ondelettes telles que l'ondelette de Haar, l'ondelette du Chapeau mexicain, l'ondelette de Shannon, l'ondelette de Daubechies, l'ondelette de Meyer, ondelettes basés sur les polynômes orthogonaux, etc...

**Définition 3.1** Une fonction  $\psi(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  est une ondelette si elle vérifie la condition d'admissibilité :

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(v)|^2}{|v|} dv < \infty. \quad (3.1)$$

Ce qui implique

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (3.2)$$

Où  $\hat{\psi}(v)$  est la transformation de Fourier de la fonction  $\psi$ .

Par défaut lorsqu'on emploie le terme ondelette, il faut entendre " ondelette mère  $\psi$ " car elle va servir de prototype de base pour générer toute une famille d'ondelette  $\psi_{a,b}$  (les ondelettes



filles) :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-a}{b}\right), \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Ce sont des copies dilatés ou comprimés et translatés dans le temps de l'ondelette mère. Nous appelons transformée en ondelettes continue de  $f \in L^2(\mathbb{R})$  au temps  $b$  et à l'échelle  $a$  :

$$Wf_{a,b} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (3.3)$$

Le facteur d'échelle  $a$  et le pas de translation  $b$  sont des réels et la transformation en ondelettes est continue et donc redondante. Il est donc évident qu'une discrétisation de la transformation doit être envisagée si on souhaite obtenir une transformation non redondante. On posera

$$a = a_0^{-k} \quad \text{et} \quad b = nb_0 a_0^{-k} \quad \text{avec} \quad a_0, \quad b_0 \in \mathbb{Z},$$

d'où l'expression de la transformée en ondelettes discrètes

$$W_d f(k, n) = a_0^{-\frac{k}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi(a_0^{-k} t - n b_0) dt.$$

La famille d'ondelettes discrètes est donnée par

$$\psi_{k,n}(t) = |a_0|^{\frac{k}{2}} \psi(a_0^k t - n b_0). \quad (3.4)$$

Si on choisit  $a_0 = 2$  et  $b_0 = 1$ , on parle de transformée dyadique.

$$\psi_{k,n}(t) = 2^{\frac{k}{2}} \psi(2^k t - n). \quad (3.5)$$

Dans ce cas  $\{\psi_{k,n}\}$  forme une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$  [10, 37].

**Exemple 3.1** *Les fonctions de Haar ont été employées à partir de 1910 par le mathématicien hongrois Alferd Haar. Ce sont les plus simples parmi les différents types d'ondelettes. L'ondelette mère de Haar est définie par :*

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.6)$$

La formule générale pour la famille des ondelettes de Haar peut s'écrire

$$\psi_{k,n}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \frac{n}{2^k} \leq t < \frac{2n+1}{2^{k+1}} \\ -1 & \text{si} \quad \frac{2n+1}{2^{k+1}} \leq t < \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.7)$$

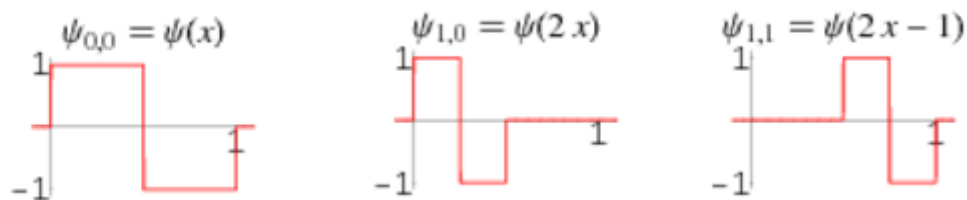


FIGURE 3.1 – Ondelettes de Haar  $n = 0, k = 0$ ,  $n = 1, k = 0$  et  $n = 1, k = 1$

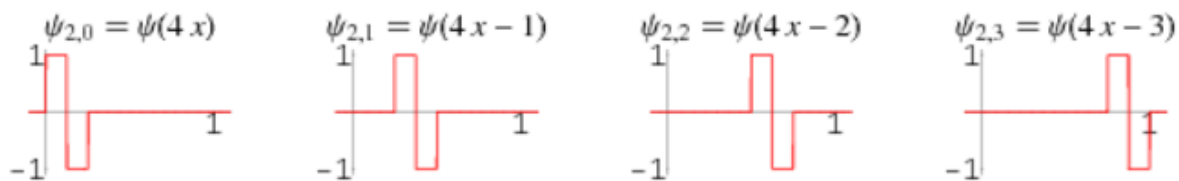


FIGURE 3.2 – Ondelettes de Haar  $n = 2, k = 0$ ,  $n = 2, k = 1$ ,  $n = 2, k = 2$  et  $n = 2, k = 3$

**Exemple 3.2** *Considérons l'ondelette de Morlet (partie réelle)*

$$\psi(t) = \cos(5t) e^{-\frac{t^2}{2}},$$

alors les ondelettes filles sont définies par

$$\psi_{k,n}(t) = 2^{\frac{k}{2}} \cos(5(2^k t - n)) e^{-\frac{(2^k t - n)^2}{2}}.$$

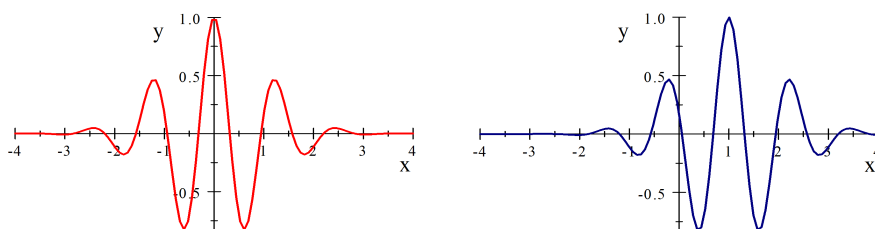


FIGURE 3.3 – Ondelette de Morlet  $k = 0, n = 0$  et  $k = 0, n = 1$ .

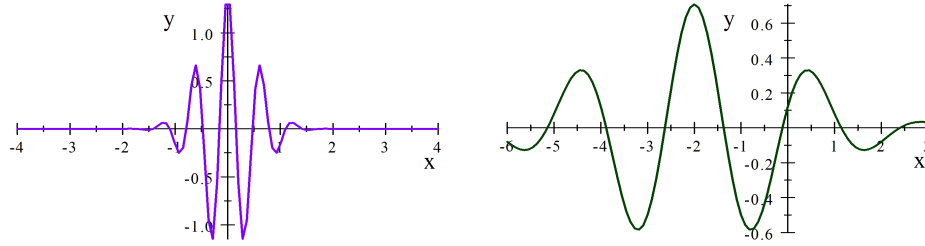


FIGURE 3.4 – Ondelette de Morlet  $k = 1, n = 0$  et  $k = -1, n = -1$ .

### 3.0.1 Ondelettes et approximation

Dans de nombreuses applications en mathématiques, nous faisons face à des fonctions qui sont beaucoup plus compliquées que les fonctions standard de l'analyse classique. Certaines de ces fonctions ne peuvent pas être exprimées sous forme explicite, donc une approximation est nécessaire. Un théorème important concernant l'approximation de fonctions continues par polynômes est donné par Weierstrass qui dit que toute fonction continue sur un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  peut être approchée par un polynôme [17]. En 1714 le théorème de Taylor représente le polynôme qui se rapproche d'une fonction en utilisant l'ensemble  $\{(t - t_0)^n\}_{n=0}^{\infty}$  comme base. En 1808 Fourier utilise l'ensemble  $\{\cos nt, \sin nt\}_{n=1}^{\infty}$  comme base pour représenter des fonctions de période  $p = 2\pi$ , puis généralisé à des fonctions de toute période  $p = 2L$ . Un développement récent de la théorie de l'approximation est l'approximation d'une fonction arbitraire par les ondelettes. Pour toute fonction  $f(t) \in L^2$ , on a sa représentation en série d'ondelettes donnée par

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle f_{j,k}, \quad (3.8)$$

où les coefficients  $c_{j,k}$  sont définis de façon unique par

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt, \quad (3.9)$$

où  $\psi_{j,k}(t)$  est donnée par (3.5).

## 3.1 Les ondelettes de Legendre

### 3.1.1 Les polynômes de Legendre

**Définition 3.2** [1, 12] Les polynômes de Legendre  $L_n(x)$ , sont les solutions de l'équation différentielle, dite de Legendre

$$\frac{d}{dt} \left[ (1-t^2) \frac{dL_n(t)}{dt} \right] + n(n+1)L_n(t) = 0, \quad |t| < 1, \quad n \geq 0. \quad (3.10)$$

Les premiers polynômes sont

$$\begin{aligned} L_0(t) &= 1 \\ L_1(t) &= t \\ L_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \\ L_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) \\ L_4(t) &= \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3) \\ L_5(t) &= \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t) \\ L_6(t) &= \frac{1}{16}(231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5). \end{aligned}$$

### Propriétés des polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre peuvent être exprimés sous une forme plus compacte.

**Théorème 3.1** [41] (*Formule de Rodrigues*) Le polynôme de Legendre  $L_n$  de degré  $n \geq 0$ , est donné par

$$L_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n. \quad (3.11)$$

Une conséquence de cette formule est la propriété suivante entre trois polynômes de Legendre consécutifs. Les polynômes de Legendre satisfont la relation de récurrence

$$(n+1)L_{n+1}(t) = (2n+1)tL_n(t) - nL_{n-1}(t), \quad n \geq 1 \quad (3.12)$$

avec

$$L_0(t) = 1, \quad L_1(t) = t.$$

Ces polynômes possèdent aussi les propriétés suivantes :

a) Forme explicite [58] :

$$L_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)! t^{n-2k}}{k! (n-k)! (n-2k)!}, \quad (3.13)$$

où  $\lfloor n/2 \rfloor$  est la partie entière de  $n/2$ .

b) Majorations [13] :

$$\forall t \in [-1, +1], \quad |L_n(t)| \leq 1 \quad (3.14)$$

$$\forall t \in [-1, +1], \quad |L'_n(t)| \leq \frac{n(n+1)}{2} \quad (3.15)$$

c) Les polynômes de Legendre sont des polynômes orthogonaux relativement à la fonction poids  $\omega(t) = 1$  sur l'intervalle  $] -1, +1[$

$$\int_{-1}^{+1} L_n(t) L_m(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } n = m \end{cases}, \quad (3.16)$$

$\left\{ \sqrt{\frac{2}{2n+1}} L_n(t) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une base orthonormée dans  $L^2(]-1, +1[)$ . [23]

### 3.1.2 Les ondelettes de Legendre

Les ondelettes de Legendre  $\psi_{n,m}(t) = \psi(k, \hat{n}, m, t)$  ont quatre arguments;  $\hat{n} = 2n - 1, n = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}$  et  $k$  peut prendre n'importe quel entier positif,  $m$  est l'ordre du polynôme de Legendre et  $t$  est le temps normalisé. Ils sont définie sur l'intervalle  $[0, 1)$  par

$$\psi_{n,m}(t) = \begin{cases} \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} L_m(2^k t - \hat{n}) & \text{pour } \frac{\hat{n}-1}{2^k} \leq t < \frac{\hat{n}+1}{2^k} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.17)$$

où  $m = 0, 1, \dots, M - 1, n = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}$ . Le coefficient  $\sqrt{m + \frac{1}{2}}$  dans l'équation (3.17) assure l'orthonormalité, le paramètre de dilatation est  $a = 2^{-k}$  et le paramètre de la translation est  $b = \hat{n}2^{-k}$ .  $L_m(t)$  étant le polynôme de Legendre d'ordre  $m$ .

#### *Approximation d'une fonction*

Une fonction  $f$  à carré intégrable sur  $[0, 1)$  peut être développée en une série d'ondelettes de Legendre par

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(t), \quad (3.18)$$

où le coefficient  $c_{nm}$  est donné par

$$c_{nm} = \langle f(\cdot), \psi_{nm}(\cdot) \rangle.$$

Si la série infinie dans l'équation (3.18) est tronquée, alors elle peut s'écrire sous la forme

$$f(t) \simeq \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{nm}(t) = C^T \Psi(t) \quad (3.19)$$

où  $C$  est  $\Psi(t)$  sont des matrices de dimension  $2^{k-1}M \times 1$  donnés par

$$C = [c_{10}, c_{11}, \dots, c_{1M-1}, c_{20}, \dots, c_{2M-1}, \dots, c_{2^{k-1}0}, \dots, c_{2^{k-1}M-1}]^T \quad (3.20)$$

$$\Psi(t) = [\psi_{10}(t), \psi_{11}(t), \dots, \psi_{1M-1}(t), \psi_{20}(t), \dots, \psi_{2M-1}(t), \dots, \psi_{2^{k-1}0}(t), \dots, \psi_{2^{k-1}M-1}(t)]^T \quad (3.21)$$

L'intégration du vecteur  $\Psi(t)$  définie dans l'équation (3.21) peut être obtenus par

$$\int_0^t \Psi(t') dt' = P \Psi(t) \quad (3.22)$$

où  $P$  est la matrice opérationnelle d'intégration de dimension  $(2^{k-1}M) \times (2^{k-1}M)$  donnée par

$$P = \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} L & F & F & \dots & F \\ 0 & L & F & \dots & F \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & F \\ 0 & 0 & \dots & 0 & L \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$L$  et  $F$  dans l'équation (3.23) sont des matrices de dimension  $M \times M$ , définies par

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{7}} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{5}} & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\sqrt{2M-3}}{(2M-3)\sqrt{2M-5}} & 0 & \frac{\sqrt{2M-3}}{(2M-3)\sqrt{2M-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\sqrt{2M-1}}{(2M-1)\sqrt{2M-3}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Notant que, l'intégration du produit de deux vecteurs d'ondelettes de Legendre est donné par [63]

$$I = \int_0^1 \Psi(t) \Psi^T(t) dt \quad (3.24)$$

### 3.1.3 Matrice opérationnelle de dérivation

**Théorème 3.2** [50] *La dérivée du vecteur  $\Psi(t)$  définie dans (3.21) peut être obtenue comme suit*

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = D\Psi(t), \quad (3.25)$$

où  $D$  est la matrice opérationnelle de dérivation d'ordre  $2^{k-1}M \times 2^{k-1}M$  définie comme suit :

$$D = \begin{pmatrix} L & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L \end{pmatrix}$$

dans laquelle  $L$  est une matrice d'ordre  $M \times M$  son  $(r, s)$ ième élément est défini par

$$L_{r,s} = \begin{cases} 2^k \sqrt{(2r-1)(2s-1)} & r = 2, \dots, M, \quad s = 1, \dots, r-1 \quad \text{et } (r+s) \text{ impair,} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (3.26)$$

### 3.1.4 Analyse de convergence et estimation de l'erreur

La convergence de la série des ondelettes de Legendre est assurée par le théorème suivant.

**Théorème 3.3** [52] *Une fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$  avec une dérivée seconde bornée  $|f''(t)| < B$ , peut être développée comme une somme infinie des ondelettes de Legendre et la série converge uniformément vers la fonction  $f$ , c'est-à-dire*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(t),$$

en outre les coefficients  $c_{nm}$  sont bornés ;

$$|c_{nm}| < \frac{B\sqrt{12}}{(2n)^{\frac{5}{2}}(2n-3)^2}.$$

L'erreur liée à l'approximation de fonction ci-dessus est élucidée dans le lemme suivant

**Lemme 3.1** [71] *Supposons que la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est  $m$  fois continûment différentiable,  $f \in C^m([0, 1])$ . Alos l'erreur de cette approximation est estimée à*

$$\|f - C^T \Psi\| \leq \frac{1}{m! 2^{mk}} \sup_{t \in [0, 1]} |f^{(m)}(t)|.$$

## 3.2 Les ondelettes de Bernoulli

### 3.2.1 Les nombres et les polynômes de Bernoulli

Les polynômes de Bernoulli d'ordre  $m$  sont définis sur l'intervalle  $[0, 1]$  par

$$B_m(t) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \alpha_k t^{m-k}, \quad (3.27)$$

où  $\alpha_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  sont les nombres de Bernoulli. Ces nombres sont définis par

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \frac{t^i}{i!}. \quad (3.28)$$

Les premiers nombres de Bernoulli sont

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = -\frac{1}{30}, \quad \alpha_6 = \frac{1}{42}, \dots \quad (3.29)$$

tels que  $\alpha_{2i+1} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$

Les premiers polynômes de Bernoulli sont

$$B_0(t) = 1, \quad B_1(t) = t - \frac{1}{2}, \quad B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}, \quad B_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t, \dots \quad (3.30)$$

Ces polynômes satisfont aux formules suivantes [4]

$$\int_0^1 B_n(t) B_m(t) dt = (-1)^{n-1} \frac{m!n!}{(m+n)!} \alpha_{n+m}, \quad m, n \geq 1. \quad (3.31)$$

$$\frac{dB_n(t)}{dt} = nB_{n-1}(t) \quad (3.32)$$



Si l'on introduit le vecteur de Bernoulli  $B(t)$  sous la forme  $B(t) = [B_0(t), B_1(t), \dots, B_N(t)]$ , alors sa dérivée  $B'(t)$  peut être exprimée sous forme de matrice par [34] :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B'_0(t) \\ B'_1(t) \\ B'_2(t) \\ \vdots \\ B'_{N-1}(t) \\ B'_N(t) \end{bmatrix}}_{B'(t)^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} B_0(t) \\ B_1(t) \\ B_2(t) \\ \vdots \\ B_{N-1}(t) \\ B_N(t) \end{bmatrix}}_{B(t)^T}, \quad (3.33)$$

où  $S$  est la matrice opérationnelle de dérivation des polynômes de Bernoulli d'ordre  $(N + 1) \times (N + 1)$ .

**Lemme 3.2** [35] *Les nombres de Bernoulli sont définis par la relation de récurrence suivante*

$$\sum_{j=0}^m \binom{m+1}{j} \alpha_j = \begin{cases} 1, & \text{si } m = 0, \\ 0, & \text{si } m \geq 1. \end{cases} \quad (3.34)$$

**Corollaire 3.3** *Soit  $p$  un entier et soit  $\alpha_k$  les nombres de Bernoulli. Alors on a la formule suivante*

$$\sum_{k=0}^p \frac{1}{k! (p+1-k)!} \alpha_k = \begin{cases} 1, & p = 0, \\ 0, & p \geq 1. \end{cases} \quad (3.35)$$

**Preuve** En utilisant le lemme 3.2, nous obtenons

$$\sum_{k=0}^p \frac{1}{k! (p+1-k)!} \alpha_k = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} \alpha_k = \begin{cases} 1, & p = 0, \\ 0, & p \geq 1. \end{cases}$$

■

**Lemme 3.4** [57] *Soit  $\alpha_k$  les nombres de Bernoulli. Alors, la matrice  $V = (v_{ij})$  définie par*

$$v_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j, \\ \binom{i-1}{i-j} \alpha_{i-j} & \text{autrement,} \end{cases} \quad (3.36)$$

*est inversible. Son inverse est donné par*

$$v_{ij}^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{i} \binom{i}{j-1}, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases} \quad (3.37)$$

**Corollaire 3.5** Soit  $\lambda_i > 0$  des nombres réels et  $\alpha_k$  les nombres de Bernoulli. Alors, la matrice  $W = (w_{ij})$  définie par

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j, \\ \lambda_{i-1} \binom{i-1}{i-j} \alpha_{i-j} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.38)$$

est inversible. son inverse est donné par

$$w_{ij}^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{i\lambda_{j-1}} \binom{i}{j-1}, & i \geq j \\ 0, & i < j, \end{cases} \quad (3.39)$$

où  $\lambda_0 = 1$ .

### 3.2.2 Les ondelettes de Bernoulli

Les ondelettes de Bernoulli  $\psi_{n,m}(t) = \psi(k, n, m, t)$  ont quatre arguments;  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 2^k - 1$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ , et  $k$  un entier positif,  $m$  est l'ordre des polynômes de Bernoulli.

Ils sont définis sur l'intervalle  $[0, 1]$  comme dans [45], par

$$\psi_{n,m}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} \lambda_m B_m(2^k t - n) & \text{si } \frac{n}{2^k} \leq t < \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases} \quad (3.40)$$

tel que

$$\lambda_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!} \alpha_{2m}}}, & m > 0. \end{cases} \quad (3.41)$$

Le coefficient  $\frac{1}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!} \alpha_{2m}}}$  assure la normalité. Ici les  $B_m$  sont les polynômes de Bernoulli d'ordre  $m$ .

### Approximation des fonctions

Une fonction  $f$  à carré intégrable sur  $[0, 1)$  peut être développée en série d'ondelettes de Bernoulli :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(t) \quad (3.42)$$

où  $c_{nm} = \langle f(t), \psi_{nm}(t) \rangle$ , dans lequel  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire.

Si la série infinie dans l'équation (3.42) est tronquée, alors elle peut s'écrire sous la forme

$$f(t) \simeq \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}(t) = C^T \Psi(t) \quad (3.43)$$

où  $C$  et  $\Psi(t)$  sont des matrices de dimension  $2^{k-1}M \times 1$  donnés par

$$C = [c_{0,0}, c_{1,1}, \dots, c_{0,M}, c_{1,0}, \dots, c_{1,M}, \dots, c_{2^k-1,0}, \dots, c_{2^k-1,M}]^T \quad (3.44)$$

$$\Psi(t) = [\psi_{0,0}(t), \psi_{0,1}(t), \dots, \psi_{0,M}(t), \psi_{1,0}(t), \dots, \psi_{1,M}(t), \dots, \psi_{2^k-1,0}(t), \dots, \psi_{2^k-1,M}(t)]^T. \quad (3.45)$$

Le vecteur  $C$  peut être calculé par (voir [45])

$$C^T = F^T H^{-1}, \quad (3.46)$$

où

$$F = [f_{0,0}, f_{1,1}, \dots, f_{0,M}, f_{1,0}, \dots, f_{1,M}, \dots, f_{2^k-1,0}, \dots, f_{2^k-1,M}]^T,$$

dans lequel

$$f_{ij} = \int_0^1 f(t) \psi_{ij}(t) dt,$$

et

$$H = [h_{mn}^{ij}],$$

est une matrice d'ordre  $2^k(M+1) \times 2^k(M+1)$  donnée par

$$H = \int_0^1 \Psi(t) \Psi^T(t) dt. \quad (3.47)$$

Par exemple avec  $k = 1$  et  $M = 2$ ,  $H$  est la matrice identité et pour  $k = 1$  et  $M = 4$  nous avons

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sqrt{\frac{7}{10}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2\sqrt{\frac{5}{21}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{7}{10}} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{\frac{5}{21}} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\sqrt{\frac{7}{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2\sqrt{\frac{5}{21}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{7}{10}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{\frac{5}{21}} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

### 3.2.3 Matrice opérationnelle de dérivation

Dans la section suivante, nous introduisons une nouvelle matrice opérationnelle d'ondelettes de Bernoulli de dérivation. Notons que dans [7], Balaji a utilisé une telle matrice, mais dans un cas particulier avec  $M = 3, k = 2$ , selon sa base, ce qui équivaut à  $M = 2, k = 1$ , dans notre base.

**Théorème 3.4 (Théorème fondamental)** *Soit  $\Psi(t)$  le vecteur d'ondelettes de Bernoulli défini dans (3.45). La dérivée du vecteur  $\Psi(t)$  peut être exprimée par*

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = D\Psi(t), \quad (3.48)$$

où  $D$  est la matrice opérationnelle de dérivation d'ordre  $2^k(M+1) \times 2^k(M+1)$  définie comme suit

$$D = 2^k \begin{pmatrix} L & O & \cdots & O \\ O & L & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & L \end{pmatrix},$$

dans lequel  $L$  est la matrice d'ordre  $(M+1) \times (M+1)$ , son  $(i, j)$ ième élément est défini comme suit

$$L_{i,j} = \begin{cases} j \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{j-1}} & i - j = 1 \quad i = 2, \dots, M+1 \quad j = 1, \dots, M \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases} \quad (3.49)$$

où  $\lambda_j$  est défini par (3.41).

**Preuve** Le vecteur  $\Psi(t)$  dans (3.45) peut être écrit comme suit

$$\Psi(t) = [\Psi_0(t), \Psi_1(t), \dots, \Psi_{2^k-1}(t)]^T, \quad (3.50)$$

où

$$\Psi_l(t) = [\psi_{l,0}(t), \psi_{l,1}(t), \dots, \psi_{l,M}(t)], \quad l = 0, 1, \dots, 2^k - 1. \quad (3.51)$$

Soit  $T = 2^k t - n$ , alors

$$\frac{dT}{dt} = 2^k, \quad (3.52)$$

on peut écrire  $\psi_{nm}(t)$  comme suit

$$\begin{aligned}
 \psi_{nm}(t) &= 2^{\frac{k}{2}} \lambda_m B_m (2^k t - n) \\
 &= 2^{\frac{k}{2}} \lambda_m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \alpha_k T^{m-k} \\
 &= 2^{\frac{k}{2}} \lambda_m \left( \binom{m}{0} \alpha_0 T^m + \binom{m}{1} \alpha_1 T^{m-1} + \dots + \binom{m}{m} \alpha_m \right) \\
 &= 2^{\frac{k}{2}} \lambda_m \left[ \binom{m}{m} \alpha_m, \binom{m}{m-1} \alpha_{m-1}, \dots, \binom{m}{1} \alpha_1, \binom{m}{0} \alpha_0 \right] \begin{bmatrix} 1 \\ T \\ \vdots \\ T^{m-1} \\ T^m \end{bmatrix} \\
 &= 2^{\frac{k}{2}} \lambda_m \left[ \binom{m}{m} \alpha_m, \binom{m}{m-1} \alpha_{m-1}, \dots, \binom{m}{1} \alpha_1, \binom{m}{0} \alpha_0, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{M-m} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ T \\ \vdots \\ T^{m-1} \\ T^m \\ T^{m+1} \\ \vdots \\ T^M \end{bmatrix} \\
 &= 2^{\frac{k}{2}} \lambda_m A_m E(t), \text{ où}
 \end{aligned}$$

$$A_m = \left[ \binom{m}{m} \alpha_m, \binom{m}{m-1} \alpha_{m-1}, \dots, \binom{m}{1} \alpha_1, \binom{m}{0} \alpha_0, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{M-m} \right],$$

et

$$E(t) = [1, T, T^2, \dots, T^M]^T.$$

Maintenant, nous pouvons réécrire (3.51) de cette manière

$$\begin{aligned} \Psi_n(t) &= 2^{\frac{k}{2}} [\lambda_0 A_0 E(t), \lambda_1 A_1 E(t), \dots, \lambda_M A_M E(t)]^T \\ &= 2^{\frac{k}{2}} \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 \binom{1}{1} \alpha_1 & \binom{1}{0} \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 \binom{2}{2} \alpha_2 & \binom{2}{1} \alpha_1 & \binom{2}{0} \alpha_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_M \binom{M}{M} \alpha_M & \binom{M}{M-1} \alpha_{M-1} & \binom{M}{M-2} \alpha_{M-2} & \cdots & \binom{M}{0} \alpha_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ T \\ \vdots \\ T^{m-1} \\ T^m \\ T^{m+1} \\ \vdots \\ T^M \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\Psi_n(t) = 2^{\frac{k}{2}} W_M E(t). \quad (3.53)$$

En utilisant le Corollaire 3.5, nous avons :

$$E(t) = 2^{-\frac{k}{2}} W_M^{-1} \Psi_n(t). \quad (3.54)$$

En dérivant pa rapport à  $t$  dans (3.53), nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \Psi_n(t) = 2^{\frac{k}{2}} W_M \frac{d}{dt} E(t),$$

où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= [0, 2^k, 2 \times 2^k T, 3 \times 2^k T^2, \dots, M \times 2^k T^{M-1}]^T \\ &= 2^k \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & M & 0 \end{pmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ T \\ T^2 \\ \vdots \\ T^{M-1} \\ T^M \end{bmatrix}}_{E(t)}. \end{aligned}$$

En utilisant l' équation (3.52), on obtient

$$\frac{d}{dt} \Psi_n(t) = 2^{\frac{k}{2}} W_M 2^k S E(t),$$

et par l'équation (3.54), nous avons

$$\frac{d}{dt} \Psi_n(t) = 2^{\frac{k}{2}} W_M 2^k S \times 2^{-\frac{k}{2}} W_M^{-1} \Psi_n(t).$$

Calculons à présent  $L = W_M S W_M^{-1}$ . Nous aurons

$$W_M S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_1 \binom{1}{0} \alpha_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_2 \binom{2}{1} \alpha_1 & 2 \binom{2}{0} \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_3 \binom{3}{2} \alpha_2 & 2 \binom{3}{1} \alpha_1 & 3 \binom{3}{0} \alpha_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_M \binom{M}{M-1} \alpha_{M-1} & 2 \binom{M}{M-2} \alpha_{M-2} & 3 \binom{M}{M-3} \alpha_{M-3} & \cdots & M \binom{M}{0} \alpha_0 & 0 \end{pmatrix},$$

la ligne  $i$ ;  $i = 1, 2, \dots, M + 1$ , de la matrice  $W_M S$  est

$$\lambda_{i-1} \left[ \overbrace{\binom{i-1}{i-2} \alpha_{i-2}, \dots, (j-1) \binom{i-1}{i-j} \alpha_{i-j}}^{j-2}, j \binom{i-1}{i-j-1} \alpha_{i-j-1}, \dots, (i-1) \binom{i-1}{0} \alpha_0, \overbrace{0, \dots, 0}^{M-i+2} \right]$$

La colonne  $j$ ;  $j = 1, 2, \dots, M + 1$ , dans la matrice  $W_M^{-1}$  est

$$\frac{1}{\lambda_{j-2}} \left[ \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{j-1}, \frac{1}{j} \binom{j}{j-1}, \frac{1}{j+1} \binom{j+1}{j-1}, \dots, \frac{1}{i-1} \binom{i-1}{j-1}, \overbrace{\frac{1}{i} \binom{i}{j-1}, \dots, \frac{1}{M+1} \binom{M+1}{j-1}}^{M-i+2} \right]^T,$$

ainsi

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{j-1}} \left[ j \binom{i-1}{i-j-1} \frac{1}{j} \binom{j}{j-1} \alpha_{i-j-1} + j \binom{i-1}{i-j+1} \frac{1}{j} \binom{j}{j-1} \alpha_{i-j-2} \right. \\ &\quad \left. + \dots + (i-1) \binom{i-1}{0} \frac{1}{i-1} \binom{i-1}{j-1} \alpha_0 \right] \\ &= \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{j-1}} \sum_{r=0}^{i-j-1} \binom{i-1}{r} \binom{i-r-1}{j-1} \alpha_r \\ &= \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{j-1}} \frac{(i-1)!}{(j-1)!} \sum_{r=0}^{i-j-1} \frac{1}{r! (i-j-r)!} \alpha_r \\ &= \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{j-1}} \frac{(i-1)!}{(j-1)!} \sum_{r=0}^p \frac{1}{r! (p+1-r)!} \alpha_r, \quad p = i-j-1. \end{aligned}$$

En utilisant le Corollaire 3.3, nous obtenons

$$L_{ij} = \begin{cases} j \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{j-1}} & \text{si } i-j = 1 \\ 0 & \text{si } i-j \neq 1. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi(t)}{dt} &= [2^k L\Psi_0(t), 2^k L\Psi_1(t), \dots, 2^k L\Psi_M(t)]^T \\ &= 2^k \begin{pmatrix} L & O & \dots & O \\ O & L & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0(t) \\ \Psi_1(t) \\ \vdots \\ \Psi_M(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = D\Psi(t),$$

avec  $D = 2^k \begin{pmatrix} L & O & \dots & O \\ O & L & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & L \end{pmatrix}$ , les matrices  $L$  et  $O$  sont d'ordre  $(M+1) \times (M+1)$ .  
 ( $O$  est la matrice nulle) ■

En utilisant l'équation (3.48), nous avons :

**Corollaire 3.6** *La matrice opérationnelle pour la dérivée  $n$ -ième est*

$$\frac{d^n \Psi(t)}{dt^n} = D^n \Psi(t),$$

où  $D^n$  est la puissance  $n$ -ième de la matrice  $D$ .



## 4.1 Matrice opérationnelle de dérivation des ondelettes de Legendre pour le calcul des variations

Considérons le problème de trouver l'extremum de la fonctionnelle

$$J = \int_0^1 F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad (4.1)$$

avec les conditions aux limites

$$x_i(0) = a_i, \quad x_i(1) = b_i, \quad \dot{x}_i(0) = \alpha_i, \quad \dot{x}_i(1) = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.2)$$

Supposons que

$$F(t, x(t), \dot{x}(t)) = V^T(t) H V(t), \quad (4.3)$$

où

$$V(t) = [t, x(t), \dot{x}(t)]^T \quad (4.4)$$

tel que

$$\begin{cases} x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T \\ \dot{x}(t) = [\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_N(t)]^T, \end{cases}$$

et  $H$  est une matrice réelle symétrique d'ordre  $(2N + 1) \times (2N + 1)$ .

$$H = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & \dots & h_{1,2N+1} \\ h_{2,1} & \dots & \dots & \dots & h_{2,2N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{2N+1,1} & h_{2N+1,2} & \dots & \dots & h_{2N+1,2N+1} \end{pmatrix}$$

## Applications

En développant chaque composante du vecteur d'état en base d'ondelettes de Legendre, on obtient

$$x_i(t) = C_i^T \Psi(t), \quad (4.5)$$

et en utilisation l'équation (3.25), nous avons

$$\dot{x}_i(t) = C_i^T D \Psi(t). \quad (4.6)$$

Nous pouvons aussi exprimer  $t$  en termes de  $\psi(t)$  par

$$\delta_i t = d_i^T \Psi(t).$$

Alors,

$$\begin{aligned} V &= [d_1^T \Psi(t), \dots, d_N^T \Psi(t), C_1^T \Psi(t), \dots, C_N^T \Psi(t), C_1^T D \Psi(t), \dots, C_N^T D \Psi(t)]^T \\ &= [\Psi^T(t) d_1, \dots, \Psi^T(t) d_N, \Psi^T(t) C_1, \dots, \Psi^T(t) C_N, \Psi^T(t) D^T C_1, \dots, \Psi^T(t) D^T C_N]^T \end{aligned} \quad (4.7)$$

et

$$\begin{aligned} F(t, x(t), \dot{x}(t)) &= \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^N (h_{i,j} d_i^T + h_{N+i,j} C_i^T + h_{2N+i,j} C_i^T D) \Psi(t) \Psi^T(t) d_j + \right. \\ &\quad \sum_{i=1}^N (h_{i,N+j} d_i^T + h_{N+i,N+j} C_i^T + h_{2N+i,N+j} C_i^T D) \Psi(t) \Psi^T(t) C_j + \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^N (h_{i,2N+j} d_i^T + h_{N+i,2N+j} C_i^T + h_{2N+i,2N+j} C_i^T D) \Psi(t) \Psi^T(t) D^T C_j \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Par l'équation (3.24), on a

$$J = \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^N (h_{i,j} d_i^T + h_{N+i,j} C_i^T + h_{2N+i,j} C_i^T D) d_j + \right. \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} &\quad \sum_{i=1}^N (h_{i,N+j} d_i^T + h_{N+i,N+j} C_i^T + h_{2N+i,N+j} C_i^T D) C_j + \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^N (h_{i,2N+j} d_i^T + h_{N+i,2N+j} C_i^T + h_{2N+i,2N+j} C_i^T D) D^T C_j \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Les conditions aux limites de l'équation (4.2) peuvent être exprimées en termes d'ondelettes de Legendre par

$$C_i^T \Psi(0) = a_i, \quad C_i^T \Psi(1) = b_i, \quad C_i^T D\Psi(0) = \alpha_i, \quad C_i^T D\Psi(1) = \beta_i. \quad (4.12)$$

Ainsi, le problème des équations (4.1) et (4.2) a été réduit à un problème d'optimisation statique.

### 4.1.1 Le cas unidimensionnel

Dans le cas unidimensionnel ( $N = 1$ ), la matrice Hessienne  $H = (h_{ij})_{i,j}$  donné dans (4.3) est une matrice symétrique d'ordre  $3 \times 3$ . En développant chaque composante du vecteur d'état en séries d'ondelettes de Legendre, on obtient

$$x(t) = C^\top \Psi(t) \quad (4.13)$$

En utilisant la relation (3.25), on obtient

$$\dot{x}(t) = C^\top D\Psi(t) \quad (4.14)$$

Nous pouvons également exprimer  $t$  en termes de  $\Psi(t)$  comme

$$t = d^\top \Psi(t). \quad (4.15)$$

donc, le vecteur  $V(t)$  donné par la relation (4.4) devient

$$V(t) = [d^\top \Psi(t), C^\top \Psi(t), C^\top D\Psi(t)]^\top. \quad (4.16)$$

En substituant (4.16) dans (4.3), on trouve

$$F(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{1}{2} V(t)^\top H V(t) \quad (4.17)$$

$$= \frac{1}{2} (d^\top \Psi(t), 0, 0) H (d^\top \Psi(t), 0, 0)^\top \quad (4.18)$$

$$+ (d^\top \Psi(t), 0, 0) H (0, C^\top \Psi(t), C^\top D\Psi(t))^\top$$

$$+ \frac{1}{2} (0, C^\top \Psi(t), C^\top D\Psi(t)) H (0, C^\top \Psi(t), C^\top D\Psi(t))^\top.$$

En intégrant la relation (4.18) et en utilisant la relation (3.25) nous trouvons que :

$$J = J_1 + J_2 + J_3,$$

tel que

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 (d^\top \Psi(t), 0, 0) H (d^\top \Psi(t), 0, 0)^\top dt = \frac{1}{2} h_{11} d^\top d,$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^1 (d^\top \Psi(t), 0, 0) H (0, C^\top \Psi(t), C^\top D \Psi(t))^\top dt \\ &= \int_0^1 (h_{12} d^\top \Psi(t) \Psi^\top(t) C + h_{13} d^\top \Psi(t) \Psi^\top(t) D^\top C) dt \\ &= (h_{12} d^\top + h_{13} d^\top D^\top) C. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (0, C^\top \Psi(t), C^\top D \Psi(t)) H (0, C^\top \Psi(t), C^\top D \Psi(t))^\top dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (h_{2,2} C^\top \Psi(t) \Psi^\top(t) C + h_{2,3} C^\top \Psi(t) \Psi^\top(t) D^\top C + \\ &\quad h_{3,2} C^\top D \Psi(t) \Psi^\top(t) C + h_{3,3} C^\top D \Psi(t) \Psi^\top(t) D^\top C) dt \\ &= \frac{1}{2} (h_{2,2} C^\top C + h_{2,3} C^\top D^\top C + h_{3,2} C^\top D C + h_{3,3} C^\top D D^\top C) \\ &= \frac{1}{2} C^\top (h_{2,2} I + h_{2,3} D^\top + h_{3,2} D + h_{3,3} D D^\top) C. \end{aligned}$$

Pour simplifier, nous posons

$$K = h_{1,2} d + h_{1,3} D d \quad \text{and} \quad \hat{H} = h_{2,2} I + h_{2,3} D^\top + h_{3,2} D + h_{3,3} D D^\top. \quad (4.19)$$

Ainsi

$$J(C) = \frac{1}{2} C^\top \hat{H} C + K^\top C + \frac{1}{2} h_{1,1} d^\top d. \quad (4.20)$$

De la relation (4.19) et de la symétrie de  $H$ , on en déduit que  $\hat{H}$  est également symétrique. Il s'ensuit que la réduction (4.20) est une fonction objectif quadratique. En utilisant la même approche, les relations (4.2) donnent des contraintes linéaires en  $C$ . La continuité des variables d'état entre les différentes sections fournit  $2^{k-1} - 1$  contraintes d'égalité linéaire de la forme

$$C^\top \left( \Psi_j \left( \frac{j}{2^{k-1}} \right) - \Psi_{j+1} \left( \frac{j}{2^{k-1}} \right) \right) = 0, \quad j = 1, \dots, 2^{k-1} - 1, \quad (4.21)$$

où

$$\Psi_l(t) = [\psi_{l0}(t), \psi_{l1}(t), \dots, \psi_{lM-1}(t)], \quad l = 1, \dots, 2^{k-1}. \quad (4.22)$$

Par conséquent, nous obtenons un programme de programmation quadratique avec contraintes linéaires.

### 4.1.2 Le cas multidimensionnel

Supposons maintenant que la variable d'état  $x(t)$  et son dérivé  $\dot{x}(t)$  prennent leurs valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ . Nous reprenons le problème (4.1) avec les conditions aux limites générales (4.2). La matrice Hessienne  $H = (h_{ij})_{i,j}$  donnée dans (4.3), est une matrice symétrique d'ordre  $2N + 1 \times 2N + 1$ . Dans ce cas, les relations (4.13) et (4.14) deviennent

$$x_i(t) = C_i^\top \Psi(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.23)$$

et

$$\dot{x}_i(t) = C_i^\top D\Psi(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.24)$$

Le vecteur  $V(t)$  de  $\mathbb{R}^{2N+1}$ , prend la forme suivante

$$V(t) = [d^\top \Psi(t), C_1^\top \Psi(t), C_2^\top \Psi(t), \dots, C_N^\top \Psi(t), C_1^\top D\Psi(t), C_2^\top D\Psi(t), \dots, C_N^\top D\Psi(t)]^\top,$$

et

$$F(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{1}{2} [(t, \mathbf{0}^\top, \mathbf{0}^\top) + (0, x^\top(t), \dot{x}^\top(t))] H [(t, \mathbf{0}^\top, \mathbf{0}^\top)^\top + (0, x^\top(t), \dot{x}^\top(t))^\top],$$

où  $\mathbf{0}$  est le vecteur nul de  $\mathbb{R}^N$ .

En utilisant le même développement de la dernière sous-section, on a

$$J = J_1 + J_2 + J_3,$$

tel que

$$J_1 = \frac{1}{2} h_{1,1} d^\top d. \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^1 (d^\top \Psi(t), \mathbf{0}^\top, \mathbf{0}^\top) H (0, \Psi^\top(t) C_1, \dots, \Psi^\top(t) C_N, \Psi^\top(t) D^\top C_1, \dots, \Psi^\top(t) D^\top C_N)^\top dt \\ &= \int_0^1 d^\top (h_{1,2} \Psi(t) \Psi^\top(t) C_1 + h_{1,3} \Psi(t) \Psi^\top(t) C_2 + \dots + h_{1,N+1} \Psi(t) \Psi^\top(t) C_N + \\ &\quad h_{1,N+2} \Psi(t) \Psi^\top(t) D^\top C_1 + \dots + h_{1,2N+1} \Psi(t) \Psi^\top(t) D^\top C_N) dt. \end{aligned}$$

De (4.18), nous avons

$$J_2 = d^\top (K_1 + K_2 D^\top) C, \text{ avec } C = [C_1, \dots, C_N]^\top, \quad (4.26)$$

## Applications

où  $K_1$  et  $K_2$  sont des matrices d'ordre  $(2^{k-1}M \times N2^{k-1}M)$  avec

$$K_1 = [H_{1,2}, \dots, H_{1,N+1}] \quad \text{et} \quad K_2 = [H_{1,N+2}, \dots, H_{1,2N+1}], \quad (4.27)$$

et  $H_{i,j}$  sont des matrices d'ordre  $2^{k-1}M \times 2^{k-1}M$  définies par

$$H_{i,j} = h_{i,j}I_{(2^{k-1}M \times 2^{k-1}M)}. \quad (4.28)$$

Calculons maintenant  $J_3$ ,

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (0, C_1^\top \Psi(t), \dots, C_N^\top \Psi(t), C_1^\top D\Psi(t), \dots, C_N^\top D\Psi(t)) H(0, C_1^\top \Psi(t), \dots, C_N^\top \Psi(t), C_1^\top D\Psi(t), \\ &\quad \dots, C_N^\top D\Psi(t))^\top dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (C_1^\top \Psi(t) \Psi^\top(t) \{h_{2,2}C_1 + \dots + h_{2,N+1}C_N + h_{2,N+2}D^\top C_1 + \dots + h_{2,2N+1}D^\top C_N\} + \\ &\quad \dots + C_N^\top D\Psi(t) \Psi^\top(t) \{h_{2N+1,2}C_1 + \dots + h_{2N+1,N+1}C_N + h_{2N+1,N+2}D^\top C_1 + \dots \\ &\quad + h_{2N+1,2N+1}D^\top C_N\}) dt \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} &C_2^\top \Psi(t) \Psi^\top(t) \{h_{3,2}C_1 + \dots + h_{3,N+1}C_N + h_{3,N+2}D^\top C_1 + \dots + h_{3,2N+1}D^\top C_N\} + \dots + \\ &C_N^\top \Psi(t) \Psi^\top(t) \{h_{N+1,2}C_1 + \dots + h_{N+1,N+1}C_N + h_{N+1,N+2}D^\top C_1 + \dots + h_{N+1,2N+1}D^\top C_N\} + \\ &C_1^\top D\Psi(t) \Psi^\top(t) \{h_{N+2,2}C_1 + \dots + h_{N+2,N+1}C_N + h_{N+2,N+2}D^\top C_1 + \dots + h_{N+2,2N+1}D^\top C_N\} + \\ &\dots + C_N^\top D\Psi(t) \Psi^\top(t) \{h_{2N+1,2}C_1 + \dots + h_{2N+1,N+1}C_N + h_{2N+1,N+2}D^\top C_1 + \dots \\ &+ h_{2N+1,2N+1}D^\top C_N\}) dt \\ &= \frac{1}{2} [C_1^\top \{h_{2,2}C_1 + \dots + h_{2,N+1}C_N + h_{2,N+2}D^\top C_1 + \dots + h_{2,2N+1}D^\top C_N\} + \\ &C_2^\top \{h_{3,2}C_1 + \dots + h_{3,N+1}C_N + h_{3,N+2}D^\top C_1 + \dots + h_{3,2N+1}D^\top C_N\} + \dots + \\ &C_N^\top \{h_{N+1,2}C_1 + \dots + h_{N+1,N+1}C_N + h_{N+1,N+2}D^\top C_1 + \dots + h_{N+1,2N+1}D^\top C_N\} + \\ &C_1^\top D \{h_{N+2,2}C_1 + \dots + h_{N+2,N+1}C_N + h_{N+2,N+2}D^\top C_1 + \dots + h_{N+2,2N+1}D^\top C_N\} + \dots + \\ &C_N^\top D \{h_{2N+1,2}C_1 + \dots + h_{2N+1,N+1}C_N + h_{2N+1,N+2}D^\top C_1 + \dots + h_{2N+1,2N+1}D^\top C_N\}] \\ &= \frac{1}{2} [C_1^\top \{H_2^1 + H_2^2 \hat{D}\} C + C_2^\top \{H_3^1 + H_3^2 \hat{D}\} C + \dots + C_N^\top \{H_{N+1}^1 + H_{N+1}^2 \hat{D}\} C + \\ &C_1^\top D \{H_{N+2}^1 + H_{N+2}^2 \hat{D}\} C + C_2^\top D \{H_{N+3}^1 + H_{N+3}^2 \hat{D}\} C + \dots + C_N^\top D \{H_{2N+1}^1 + H_{2N+1}^2 \hat{D}\} C] \end{aligned}$$

tel que  $H_i^1 = [H_{i2}, H_{i3}, \dots, H_{iN+1}]$  et  $H_i^2 = [H_{iN+2}, H_{iN+3}, \dots, H_{i2N+1}]$ , où  $H_{i,j}$  sont définies dans (4.28) et  $\hat{D}$  est une matrice diagonale d'ordre  $2^{k-1}MN \times 2^{k-1}MN$ .

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} D^\top & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D^\top & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & D^\top \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{2} \left[ C^\top \begin{pmatrix} H_2^1 + H_2^2 \hat{D} \\ H_3^1 + H_3^2 \hat{D} \\ \vdots \\ H_{n+1}^1 + H_{n+1}^2 \hat{D} \end{pmatrix} C + C^\top \begin{pmatrix} D(H_{n+2}^1 + H_{n+2}^2 \hat{D}) \\ D(H_{n+3}^1 + H_{n+3}^2 \hat{D}) \\ \vdots \\ D(H_{2n+1}^1 + H_{2n+1}^2 \hat{D}) \end{pmatrix} C \right] \\ &= \frac{1}{2} C^\top \begin{pmatrix} H_2^1 + H_2^2 \hat{D} + D(H_{n+2}^1 + H_{n+2}^2 \hat{D}) \\ H_3^1 + H_3^2 \hat{D} + D(H_{n+3}^1 + H_{n+3}^2 \hat{D}) \\ \vdots \\ H_{n+1}^1 + H_{n+1}^2 \hat{D} + D(H_{2n+1}^1 + H_{2n+1}^2 \hat{D}) \end{pmatrix} C, \end{aligned}$$

Par conséquent

$$J_3 = \frac{1}{2} C^\top \hat{H} C, \quad (4.31)$$

avec

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} H_2^1 + H_2^2 \hat{D} + D(H_{n+2}^1 + H_{n+2}^2 \hat{D}) \\ H_3^1 + H_3^2 \hat{D} + D(H_{n+3}^1 + H_{n+3}^2 \hat{D}) \\ \vdots \\ H_{n+1}^1 + H_{n+1}^2 \hat{D} + D(H_{2n+1}^1 + H_{2n+1}^2 \hat{D}) \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Ainsi, nous avons réduit le problème original défini par (4.1) et (4.2) au problème de programmation quadratique suivant

$$\begin{cases} \min J = \frac{1}{2} h_{1,1} d^\top d + d^\top K C + \frac{1}{2} C^\top \hat{H} C \\ C_i^\top \Psi(0) = a_i, \text{ ou } C_i^\top D \Psi(0) = \alpha_i \quad \text{et} \quad C_i^\top D \Psi(1) = \beta_i, \text{ ou } C_i^\top \Psi(1) = b_i, \end{cases} \quad (4.33)$$

Pour  $N = 1$ , nous avons

$$K_1 = H_{1,2} = h_{1,2} \times I_{2^{k-1} \times M}, \quad K_2 = H_{1,3} = h_{1,3} \times I_{2^{k-1} \times M},$$

et

$$K = h_{1,2} \times I_{2^{k-1} \times M} + h_{1,3} D^\top.$$

Où

$$\hat{H} = H_2^1 + H_2^2 D^\top + D(H_3^1 + H_3^2 D^\top) = h_{2,2} \times I_{2^{k-1} \times M} + h_{2,3} \times D^\top + D(h_{3,2} \times I_{2^{k-1} \times M} + h_{3,3} D^\top),$$

nous retrouvons alors le cas unidimensionnel.

### 4.1.3 Exemples

Nous introduisons maintenant des exemples illustratifs pour démontrer la validité et l'applicabilité de la techniques de la matrice opérationnelle de dérivation des ondelettes de Legendre.

**Exemple 4.1** *Considérons le problème de trouver l'extrémum de la fonctionnelle [63, 14, 24]*

$$J(x) = \int_0^1 [\dot{x}^2(t) + tx(t) + x^2(t)] dt, \quad (4.34)$$

*Avec les conditions aux limites*

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(1) &= \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (4.35)$$

*La fonction intégrande est quadratique puisque la matrice Hessienne est*

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Pour résoudre le problème (4.34) – (4.35) selon la méthode proposée, nous développons  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  et  $t$  en série d'ondelettes de Legendre comme dans (4.13), (4.14) et (4.15). De (4.19) et (4.20), on résout le problème de programmation quadratique réduit*

$$\begin{cases} \min J = C^\top (I + DD^\top) C + (Dd)^\top C, \\ C^\top \Psi(0) = 0, \\ C^\top \Psi(1) = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

*Nous résolvons ce programme par la méthode active-set pour obtenir la solution optimale  $C^*$ . Ensuite, nous calculons à chaque  $t$  la solution  $x(t)$  pour des valeurs données de  $k$  et  $M$ .*



## Applications

Dans le tableau 1, Les solutions sont données pour  $k = 1$  avec  $M = 4$ ,  $M = 6$  et  $M = 8$ .  
Nous avons

$$d = \frac{1}{2} \left( 1 \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right),$$

et

$$D = 2 \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{7} & 0 & \sqrt{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{3} & & 3\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{11} & 0 & \sqrt{55} & 0 & 3\sqrt{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{39} & 0 & \sqrt{91} & 0 & \sqrt{143} & 0 & 0 \\ \sqrt{15} & 0 & \sqrt{75} & 0 & \sqrt{135} & 0 & \sqrt{195} & 0 \end{pmatrix}.$$

t	$M = 4$	$M = 6$	$M = 8$	Exact
0	0	0	0	0
0.1	0.041943997233214	0.041950734296532	0.041950728717454	0, 041950728717454
0.2	0.079327384025740	0.079317143318258	0.079317146372165	0.079317146372165
0.3	0.112483064653547	0.112473225757596	0.112473228631297	0.112473228631297
0.4	0.141743943392600	0.141750818146863	0.141750812710399	0.141750812710399
0.5	0.167442924518863	0.167442918511224	0.167442918511225	0.167442918511225
0.6	0.189912912308301	0.189807010021660	0.189806681794100	0.189806681794100
0.7	0.209486811036879	0.209068384647919	0.209065932596664	0.209065932596664
0.8	0.226497524980561	0.225423466811476	0.225413452110820	0.225413452110820
0.9	0.241277958415314	0.239043137038491	0.239012941229743	0.239012941229743
1	0.25	0.25	0.25	0.25

Tableau 1 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approximative :  $x(t)$

**Exemple 4.2** Considérons le problème de minimisation de Feldbaum Minimiser

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t)) dt \quad (4.36)$$

sous les contraintes

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad (4.37)$$

et

$$x(0) = 1. \quad (4.38)$$

L'équation (4.37) est équivalente à

$$u(t) = \dot{x}(t) + x(t) \quad (4.39)$$

En substituant l'équation (4.39) dans l'équation (4.36), le problème de contrôle optimal (4.36) – (4.38) est reformulé comme un problème de calcul des variations : minimiser

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x^2(t) + \dot{x}^2(t) + 2\dot{x}(t)x(t)) dt \quad (4.40)$$

sous contraintes (4.38).

En utilisant la méthode actuelle, nous avons

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En résolvant le problème de programmation quadratique correspondant (pour  $k = 2$ ,  $M = 8$ ), la valeur optimale obtenue de la fonction objectif est  $J = 0.192909298093169$

## Applications

Méthode	$J$
<i>Méthode classique de Chebyshev [69]</i>	
$m = 5, N = 8; K = 16$	0.1929094
$m = 7, N = 10; K = 20$	0.1929030
$m = 9, N = 15; K = 30$	0.1929092981
<i>Méthode de Legendre décalée [60]</i>	
$m = 5$	0.1929092980
$m = 9$	0.1929092981
<i>Méthode Chebyshev [27]</i>	
$m = 5; N = 5$	0.192881804
$m = 7; N = 7$	0.192906918
$m = 9; N = 9$	0.192909306
$m = 5; N = 11$	0.192909298
<i>Méthode Moyenne cellulaire [29]</i>	
$m = 4$	0.19290924
$m = 5$	0.192909288
$m = 7$	0.1929092981
<i>Méthode Gegenbauer [28]</i>	
$M = N = 4; \alpha^* = 0.421$	0.192909281
<i>Méthode GTM [26]</i>	
$L = M = M_P = 5$	0.1929092981277
$L = M = 5; M_P = 20$	0.1929092980933
<i>Méthode actuelle</i>	
$k = 2, M = 6$	0.192909298094180
$k = 2, M = 8$	0.192909298093169
<i>La valeur optimale de la fonction coût <math>J^* \approx 0.192909298093169</math></i>	

Tableau 2 : Les résultats numériques obtenus par différentes méthodes pour résoudre l'exemple 2

**Exemple 4.3** Considérons le problème bidimensionnel du calcul des variations [47]

$$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\dot{x}_1^2(s) + \dot{x}_2^2(s) + 2x_1(s)x_2(s)] ds,$$

avec les conditions aux limites

$$x_1(0) = 0, x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, x_2(0) = 0 \text{ et } x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

## Applications

La solution exacte du problème est

$$x(s) = [x_1(s), x_2(s)]^\top = \left[ \frac{\sinh(s)}{\sinh(\frac{\pi}{2})}, \frac{\sinh(s)}{\sinh(\frac{\pi}{2})} \right]^\top.$$

Pour ce problème, la transformation  $s = \frac{\pi}{2}t$  est utilisée pour modifier ce problème variationnel sous la forme suivante

$$J(x_1, x_2) = \int_0^1 \left[ \frac{2}{\pi} \dot{x}_1^2(t) + \frac{2}{\pi} \dot{x}_2^2(t) + \pi x_1(t) x_2(t) \right] dt$$

avec les conditions aux limites

$$x_1(0) = 0, x_1(1) = 1, x_2(0) = 0 \text{ and } x_2(1) = 1.$$

Pour résoudre ce problème par la méthode proposée, nous fixons d'abord  $k = 1$  et  $M = 8$ , nous obtenons

$$d = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$D = 2 \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{7} & 0 & \sqrt{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{3} & & 3\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{11} & 0 & \sqrt{55} & 0 & 3\sqrt{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{39} & 0 & \sqrt{91} & 0 & \sqrt{143} & 0 & 0 \\ \sqrt{15} & 0 & \sqrt{75} & 0 & \sqrt{135} & 0 & \sqrt{195} & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice Hessienne est

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{\pi} \end{pmatrix}.$$

Comme  $h_{1,1} = 0$ , le terme constant  $J_1 = 0$ . De la relation (4.27), nous avons  $K_1 = (H_{1,2}H_{1,3})$  et  $K_2 = (H_{1,4}H_{1,5})$ , de la relation (4.28) et (4.26) on déduit que le terme linéaire est nul  $J_2 = 0$ . Pour calculer le terme quadratique (4.31), on calcule la matrice  $\hat{H}$  par rapport (4.32) on obtient

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} H_2^1 + H_2^2 \hat{D} + D(H_3^1 + H_4^2 \hat{D}) \\ H_3^1 + H_3^2 \hat{D} + D(H_5^1 + H_5^2 \hat{D}) \end{pmatrix}.$$

## Applications

---

Nous résolvons également le programme réduit par la méthode active-set pour obtenir la solution optimale  $C^*$ , nous calculons à chaque fois la solution  $x(t)$ . Dans le tableau 2, les solutions sont données pour  $k = 1$  avec  $M = 4, M = 6, M = 8$  et  $k = 2$  avec  $M = 4, M = 6, M = 8$ .

$t$	$M = 5$	$M = 6$	$M = 8$	Exacte
0	0	0	0	0
0.1	0.068538900811	0.068537953377	0.068537986963	0.068537986966
0.2	0.138773307007	0.138770577735	0.138770561037	0.138770561037
0.3	0.212431500817	0.212434229952	0.212434207620	0.212434207624
0.4	0.291349259414	0.291350206310	0.291350244670	0.291350244670
0.5	0.377469854920	0.377469854356	0.377469854357	0.377469854357
0.6	0.472923761106	0.472922198315	0.472922325650	0.472922325659
0.7	0.580072267880	0.580067766100	0.580067700561	0.580067700565
0.8	0.701550699817	0.701555201073	0.701555125600	0.701555125610
0.9	0.840386653993	0.840388216246	0.840388351453	0.840388351459
1	1	1	1	1

Tableau 3 : Comparaison de la solution exacte et approximative de  $x_1(t) = x_2(t)$

## 4.2 Matrice opérationnelle de dérivation de Bernoulli pour le contrôle optimal

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques en utilisant la méthode d'ondelettes de Bernoulli proposée et nous comparons les résultats avec d'autres méthodes.

### 4.2.1 Exemples

**Exemple 4.4** Considérons le problème de Feldbaum :

*Minimiser*

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t)) dt, \quad (4.41)$$

*sous les contraintes*

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad (4.42)$$

et

$$x(0) = 1. \quad (4.43)$$

En utilisation l'équations (3.43), nous obtenons

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 (C^\top \Psi(t) \Psi^\top(T) C + U^\top \Psi(t) \Psi^\top(T) U) dt. \quad (4.44)$$

En utilisation (3.47), nous avons

$$J = \frac{1}{2} (C^\top H C + U^\top H U). \quad (4.45)$$

Via l'équation (3.48), l'équation (4.42) peut être écrite sous la forme

$$C^\top D \Psi(t) = -C^\top \Psi(t) + U^\top \Psi(t)$$

ou bien

$$\Psi^\top(t) (D^\top C + C - U) = 0. \quad (4.46)$$

Pour  $k = 1$  et  $M = 4$ , nous avons

$$\Psi(t) = [\psi_{0,0}, \psi_{0,1}, \psi_{0,2}, \psi_{0,3}, \psi_{0,4}, \psi_{1,0}, \psi_{1,1}, \psi_{1,2}, \psi_{1,3}, \psi_{1,4}].$$

Posons

$$\Psi_0(t) = [\psi_{0,0}, \psi_{0,1}, \psi_{0,2}, \psi_{0,3}, \psi_{0,4}, 0, 0, 0, 0, 0],$$

et

$$\Psi_1(t) = [0, 0, 0, 0, 0, \psi_{1,0}, \psi_{1,1}, \psi_{1,2}, \psi_{1,3}, \psi_{1,4}].$$

C'est à dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{00} = \sqrt{2}, \\ \psi_{01} = 2\sqrt{6} \left(2t - \frac{1}{2}\right), \\ \psi_{02} = 6\sqrt{10} \left((2t)^2 - (2t) + \frac{1}{6}\right), \\ \psi_{03} = 2\sqrt{420} \left((2t)^3 - \frac{3}{2}(2t)^2 + \frac{1}{2}(2t)\right), \\ \psi_{04} = 10\sqrt{42} \left((2t)^4 - 2(2t)^3 + (2t)^2 - \frac{1}{30}\right) \end{array} \right. \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{10} = \sqrt{2}, \\ \psi_{11} = 2\sqrt{6} \left(2t - \frac{3}{2}\right), \\ \psi_{12} = 6\sqrt{10} \left((2t-1)^2 - (2t-1) + \frac{1}{6}\right), \\ \psi_{13} = 2\sqrt{420} \left((2t-1)^3 - \frac{3}{2}(2t-1)^2 + \frac{1}{2}(2t-1)\right), \\ \psi_{14} = 10\sqrt{42} \left((2t-1)^4 - 2(2t-1)^3 + (2t-1)^2 - \frac{1}{30}\right) \end{array} \right. \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

et

$$D = 2 \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

L'équation

$$G = D^\top C + C - U = 0, \quad v = 1, 2, \dots, 10 \quad (4.47)$$

donne 10 équations linéaires. La continuité des variables d'état entre les différentes sections fournit une contrainte d'égalité qui a la forme

$$C^\top \left( \Psi_0 \left( \frac{1}{2} \right) - \Psi_1 \left( \frac{1}{2} \right) \right) = 0 \quad (4.48)$$

En développant la condition initiale (4.43) en série d'ondelettes de Bernoulli, on obtient

$$C^\top \Psi(0) = 1. \quad (4.49)$$

Soit

$$\tilde{J} = J + \sum_{v=1}^{10} \lambda_v g_v + \mu (C^\top \Psi(0) - 1) + \rho C^\top \left( \Psi_1 \left( \frac{1}{2} \right) - \Psi_2 \left( \frac{1}{2} \right) \right), \quad (4.50)$$

Les conditions nécessaires pour l'extremum sont

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial c_{n,m}} = 0, \quad n = 0, 1, \quad m = 0, 1, \dots, 4 \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial u_{n,m}} = 0, \quad n = 0, 1, \quad m = 0, 1, \dots, 4 \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda_v} = 0, \quad v = 1, \dots, 10, \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \mu} = 0, \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \rho} = 0, \quad (4.55)$$

## Applications

Il s'agit d'un système de 32 équations linéaires. En résolvant ce système, on obtient  $J = 0.192909299234357$ .

L'erreur absolue est  $1.14 \times 10^{-9}$ .

Dans le tableau 4 nous listons les valeurs de la fonction objectif  $J$  pour  $k = 1$ , avec  $M = 7$  et  $M = 8$  obtenues par la méthode d'ondelettes de Bernoulli proposée et comparée à la valeur exacte et autres méthodes.

Method	$J$
<i>Méthode classique de Chebyshev [69]</i>	
$m = 5, N = 8; K = 16$	0.1929094
$m = 7, N = 10; K = 20$	0.1929030
$m = 9, N = 15; K = 30$	0.1929092981
<i>Méthode de Legendre décalée [60]</i>	
$m = 5$	0.1929092980
$m = 9$	0.1929092981
<i>Méthode de Chebyshev [27]</i>	
$m = 5; N = 5$	0.192881804
$m = 7; N = 7$	0.192906918
$m = 9; N = 9$	0.192909306
$m = 5; N = 11$	0.192909298
<i>Méthode de Chebyshev en moyenne cellulaire [29]</i>	
$m = 4$	0.19290924
$m = 5$	0.192909288
$m = 7$	0.1929092981
<i>Méthode Gegenbauer [28]</i>	
$M = N = 4; \alpha^* = 0.421$	0.192909281
<i>Méthode GTM [26]</i>	
$L = M = M_P = 5$	0.1929092981277
$L = M = 5; M_P = 20$	0.1929092980933
<i>Méthode actuelle</i>	
$k = 1, M = 7$	0.192909298093385
$k = 1, M = 8$	0.192909298093166
<i>La valeur optimale de la fonction objectif <math>J^* \approx 0.192909298093169</math></i>	

Tableau 4 : Les résultats numériques obtenus par différentes méthodes pour résoudre l'exemple 1



**Exemple 4.5** *Minimiser l'indice de performance suivant*

$$J = \int_0^1 (x_1^2(t) + x_2^2(t) + 0.005u^2(t))dt, \quad (4.56)$$

*sous les contraintes*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (4.57)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u, \quad (4.58)$$

*et*

$$x_1(0) = 0, \quad (4.59)$$

$$x_2(0) = -1. \quad (4.60)$$

*En appliquant la méthode d'ondelettes de Bernoulli pour (4.56) – (4.60), On obtient les approximations suivantes :*

— *L'index de performance (fonction objectif) :*

$$J = C_1^\top H C_1 + C_2^\top H C_2 + 0.005U^\top H U. \quad (4.61)$$

— *Les équations d'état*

$$G_1 = D^\top C_1 - C_2 = 0, \quad (4.62)$$

$$G_2 = D^\top C_2 + C_2 + U = 0. \quad (4.63)$$

— *Conditions aux limites :*

$$C_1^\top \Psi(0) = 0, \quad (4.64)$$

$$C_2^\top \Psi(0) + 1 = 0 \quad (4.65)$$

*Les équations (4.61) – (4.65) sont des équations algébriques linéaires qui peuvent être résolues pour les inconnues  $c_{1,n,m}$ ,  $c_{2,n,m}$ ,  $u_{n,m}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$  et les multiplicateurs de Lagrange.*

*Dans le tableau 5, les résultats obtenus par la méthode proposée et les résultats obtenus par d'autres méthodes sont rapportés avec la valeur exacte de  $J$ .*

## Applications

Méthode	$J$	Erreur absolue
<i>Neuman et Sen [53]</i>		
$m = 4$	0.07030000	$9.4 \times 10^{-4}$
$m = 9$	0.06989000	$5.3 \times 10^{-4}$
<i>Classique Chebyshev [69]</i>		
$m = 10$	0.06936186	$9.2 \times 10^{-7}$
$m = 11$	0.06936103	$9.0 \times 10^{-8}$
$m = 12$	0.06936095	$1.0 \times 10^{-8}$
$m = 13$	0.06936094	$< 10^{-8}$
<i>Moyenne cellulaire [29]</i>		
$m = 5$	0.06935710	$3.8 \times 10^{-6}$
$m = 7$	0.06936189	$9.0 \times 10^{-7}$
$m = 9$	0.06936094	$< 10^{-8}$
<i>Notre méthode</i>		
$k = 1, M = 7$	0.06936444	$3.5 \times 10^{-6}$
$k = 2, M = 7$	0.06936095	$1.07 \times 10^{-8}$
<i>La valeur optimale de la fonction coût <math>J^* \approx 0.06936094</math></i>		

Tableau 5 : Les résultats numériques obtenus par différentes méthodes pour résoudre l'exemple 2

---

## Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, on a utilisé deux matrices opérationnelles de dérivation pour résoudre des classes de problèmes en calcul des variations et en contrôle optimal, ces matrices opérationnelles sont utilisées pour réduire le problème différentiel ou intégral en un ensemble d'équations algébriques en développant d'abord la fonction candidate en série d'ondelettes à coefficients inconnus. La première matrice étudiée était celle de Legendre, qui a été utilisée pour la première fois par Mohammadi et Hosseini [50], nous avons utilisé cette matrice pour la résolution des problèmes de calcul des variations avec intégrande quadratique, nous notons que la réduction (4.33) est directement donnée à partir des données du problème initial ((4.1) et (4.2)). Bien que la taille de la matrice  $\widehat{H}$  soit  $\frac{nM2^{k-1}}{2n+1}$  fois supérieure à  $H$ , les tests numériques montrent que la méthode donne de bons résultats pour de petites valeurs de  $k$  et  $M$ . Cependant, sachant que nous pouvons résoudre un problème de programmation quadratique statique à grande échelle, la taille de la matrice  $\widehat{H}$  n'est pas un handicap ; A titre d'exemple, les méthodes de point intérieur peuvent résoudre des problèmes avec une matrice Hessienne creuse lorsque  $n \geq 10^6$ .

La deuxième, était l'élaboration de la nouvelle matrice opérationnelle de dérivation de Bernoulli, nous avons utilisés les propriétés des polynômes de Bernoulli pour dériver cette matrice, nous avons embauché la technique de multiplicateurs de Lagrange pour trouver les solutions optimales, les résultats numériques obtenus montrent l'efficacité de cette méthode.

Nous comptons, comme perspectives dans l'avenir, étudier les problèmes suivants :

- En combinant notre approche, sur la résolution des problèmes de calcul des variations et contrôle optimal avec intégrande quadratique et contraintes linéaire, avec les méthodes séquentielles quadratiques (SQP), abordé le cas nonlinéaire.
- Résolution des équations différentielles et des problèmes de contrôle optimal dans le cas fractionnaire en utilisant la matrice opérationnelle d'ondelettes de Bernoulli de dérivation d'ordre fractionnaire.

- L'élaboration d'autres matrices opérationnelles de dérivation, dans le but d'améliorer les performances, sur les deux volés analytique et numérique, des problèmes de contrôle optimale.

---

## Bibliographie

- [1] M.Abramowitz, I. A.Stegun, Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables ; National Bureau of Standards Applied Mathematics, Serie 55, (1972).
- [2] G. Allaire, Numerical Analysis and Optimization An introduction to mathematical modelling and numerical simulation, Oxford University Press Inc., New York, 2007.
- [3] S.S. Antman, P. Holmes, K. Sreenivasan, Geometric Optimal Control : Theory, Methods and Examples. Springer-Verlag New York Inc. 2012.
- [4] G. Arfken, Mathematical Methods for Physicists, third ed., Academic press, San Diego, 1985.
- [5] M. Arsalani, M. A. Vali, Numerical Solution of Nonlinear Variational Problems with Moving Boundary Conditions by Using Chebyshev Wavelets, Applied Mathematical Sciences, Vol. 5, 2011, no. 20, 947 - 964.
- [6] V. Badescu, Optimal Control in Thermal Engineering, Springer International Publishing AG 2017.
- [7] S. Balaji, A new Bernoulli wavelet operational matrix of derivative method for the solution of nonlinear singular Lane-Emden type equations arising in astrophysics, J. Comput. Nonlinear Dynam 11(5), 051013 , 2016.
- [8] J. T. Betts, Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming, 2nd ed. SIAM, Philadelphia, 2010.
- [9] M. Bierlaire, Introduction à l'optimisation différentiable, Editions PPUR 2006.
- [10] A. Boggess, F.J. Narcowich, A First Course in Wavelets with Fourier Analysis, Prentice-Hall, 2001.
- [11] J.V. Breakwell, The optimization of trajectories, J. Soc. Ind. Appl. Math. 7, 215–247 (1959).

- [12] J. A. Burns, Introduction to The Calculus of Variations and Control with Modern Applications. Chapman and Hall/CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science, Boca Raton, FL : CRC Press. 2014.
- [13] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer, New York, 1988.
- [14] R.Y. Chang, M.L. Wang, Shifted Legendre direct method for variational problems series, J. Optimization Theory Appl. 39(1983) 299–307.
- [15] A. C. Chiang, Elements of Dynamic Optimization. McGraw-Hill, Inc. 1992.
- [16] E. K. P. Chong, S. H. Żak, An Introduction to Optimization, John Wiley & Sons, 2001.
- [17] O. Christensen, K. L. Christensen, Approximation theory, From Taylor Polynomials to Wavelets, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser Boston, Massachusetts, 2004.
- [18] C.K. Chui, Wavelets : A Mathematical Tool for Signal Analysis, SIAM, Philadelphia, PA. 1997.
- [19] L. B. Contesse, Une caractérisation complète des minima locaux en programmation quadratique. Numer. Math., 34 :31532, 1980.
- [20] B. A. Conway, Spacecraft Trajectory Optimization. Cambridge University Press 2010.
- [21] R. W. Cottle, J.-S. Pang, R. E. Stone, The Linear Complementarity Problem, Academic Press, New York, 1992.
- [22] J. C. Culioli, Introduction à l'optimisation, Ellipses, 1996.
- [23] L. Debnath, Wavelet transforms and their applications. Birkhäuser, Boston, 2002.
- [24] S. Dixit, V. K. Singh, A. K. Singh, O. P. Singh, Bernstein Direct Method for Solving Variational Problems, International Mathematical Forum, 5, 2010, no. 48, 2351 - 2370.
- [25] H. Elaydi, A. A. Abu Haya, Solving Optimal Control Problem for Linear Time invariant Systems via Chebyshev Wavelet, International, Journal of Electrical Engineering. ISSN 0974-2158 Volume 5, Number 5 (2012), pp. 541-556.
- [26] K.T. Elgindy , Kate A. Smith-Miles, Fast, accurate, and small-scale direct trajectory optimization using a Gegenbauer transcription method, Journal of Computational and Applied Mathematics 251 (2013) 93–116.
- [27] T.M. El-Gindy, H.M. El-Hawary, M.S. Salim, M. El-Kady, A Chebyshev approximation for solving optimal control problems, Computers & Mathematics with Applications 29 (1995) 35–45.

- [28] H.M. El-Hawary, M.S. Salim, H.S. Hussien, Ultraspherical integral method for optimal control problems governed by ordinary differential equations, *Journal of Global Optimization* 25 (2003) 283–303.
- [29] G.N. Elnagar, State-control spectral Chebyshev parameterization for linearly constrained quadratic optimal control problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 79 (1997) 19–40.
- [30] L. E. Elsgolts, *Calculus of Variations*. Addison-Wesley, Rading, 2007.
- [31] L. Elsgolts, *Differential Equations and Calculus of Variations*. Mir Publishers, Moscow, Russia, 1970.
- [32] F. Fahroo, I.M. Ross, Direct trajectory optimization pseudospectral method. *J. Guid. Control Dyn.* 25, 160–166 (2002).
- [33] W. Glabisz, Direct Walsh-wavelet packet method for variational problems, *Applied Mathematics and Computation* 159 (2004) 769-781.
- [34] A. Golbabai, S. Panjeh Ali Beik, Bernoulli matrix approach for matrix differential models of first-order. *Journal of Mathematical Modeling*. Vol. 3, No. 1, 2015, pp. 77-89.
- [35] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik. *Concrete Mathematics*. Addison Wesley, 1994.
- [36] A. Grossmann, J. Morlet, Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM J. Anal.* 15, pp. 723-736, 1984.
- [37] J.S. Gu, W.S. Jiang, The Haar wavelets operational matrix of integration, *Int. J. Syst. Sci.* 27 (1996) 623–628.
- [38] M.R. Hestenes, *Calculus of Variational and Optimal Control Theory*. Wiley : New York, 1966.
- [39] G.H. Hicks, Ray, W.H. Approximation methods for optimal control synthesis. *Can. J. Chem. Eng.* 49, 522–528 (1971).
- [40] C. H. Hsiao, Haar wavelet direct method for solving variational problems, *Mathematics and Computers in Simulation* 64 (2004) 569-585.
- [41] D. Jackson. *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*. The Mathematical Association of America. 1941
- [42] H. Jaddu, *Optimal Control of Time-Varying Linear Systems Using Wavelets*, Japan Advanced Institute of Science and Technology, Ishikawa 923-1292, Japan, 2006.

- [43] H. Jaddu, "Numerical methods for solving optimal control problems using Chebyshev polynomials", PHD Thesis, JAIST, Japan, 1998.
- [44] H.B. Keller. Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems. Dover, New York (1992).
- [45] E. Keshavarz, Y. Ordokhani, M. Razzaghi. Bernoulli wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations. Applied Mathematical Modelling 38 (2014) 6038–6051.
- [46] F. Khellat, S.A. Yousefi, The Linear Legendre Mother Wavelets Operational Matrix of Integration and Its Application, J. Franklin. Inst, 343 (2006), 181-190.
- [47] D.E. Kirk, Optimal Control Theory :An Introduction, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.
- [48] D. Kraft. On converting optimal control problems into nonlinear programming problems. In : Schittkowski, K. (ed.) Computational Mathematical Programming. Springer, Berlin, 261–280 (1985)
- [49] G. Leitmann, The Calculus of Variations and Optimal Control, Plenum, New York, 1981.
- [50] F. Mohammadi, M.M.Hosseini, A new Legendre wavelet operational matrix of derivative and its applications in solving the singular ordinary differential equations, Journal of the Franklin Institute 348(2011)1787–1796.
- [51] D.S. Naidu, Optimal Control Systems, CRC Press, 2009.
- [52] L. Nanshan, E.B Lin. Legendre wavelet method for numerical solutions of partial differential equations. Numer Methods Partial Differ Equations 2009 :81–94.
- [53] C.P. Neuman, Sen, A suboptimal control algorithm for constraints problems using cubic splines, Automatica 9(1973).
- [54] J. Nocedal, and S. J. Wright, Numerical Optimization, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, 2 ed, 2006.
- [55] J.D. Pitchford, S.J. Turnovsky, Applications of Control Theory to Economic Analysis, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [56] L. S. Pontryagin, The Mathematical Theory of Optimal Processes, Wiley-Interscience, New York, 1962.
- [57] J.A. Rad, S. Kazem, M. Shaban, K. Parand. A new operational matrix based on Bernoulli polynomials. arXiv preprint arXiv :1408.2207. August 12, 2014.



- [58] E.D. Rainville, Special functions . New York, Macmillan, 1960.
- [59] M. Razzaghi, Fourier Series Direct Method for Variational Problems, Int. J.Control, 48 (1988), 887-895.
- [60] M. Razzaghi, G. Elnagar, A Legendre technique for solving time-varying linear quadratic optimal control problems, Journal of the Franklin Institute 330 (1993) 453–463.
- [61] M. Razzaghi, Y. Ordokhani, An application of rationalized Haar functions for variational problems, Applied Mathematics and Computation 122(2001) 353-364.
- [62] M. Razzaghi, S. Yousefi. Legendre wavelets method for constrained optimal control problems. Math. Meth. Appl. Sci. 2002 ; 25 :529-539.
- [63] M. Razzaghi, S. Yousefi, Legendre wavelets direct method for variational problems, Mathematics and Computers in Simulation 53(2000) 185-192.
- [64] A. P. Sage and C. C. White III. Optimum Systems Control, Second Edition. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1977.
- [65] O. Stryk and R. Bulirsch, "Direct and indirect methods for trajectory optimization", Annals of Operations Research, Vol. 37, pp. 357-373, 1992.
- [66] S. Subchan, R. Zbikowski, Computational Optimal Control Tools and Practice. Wiley, Chichester (2009).
- [67] W. Sun & Y. x. Yuan, Optimization Theory and Methods : Nonlinear Programming, Springer Optimization and Its Applications, vol. 1, Springer, New York, 2006.
- [68] E. Tohidi, A.H. Bhrawy, K. Erfani, A collocation method based on Bernoulli operational matrix for numerical solution of generalized pantograph equation, Applied Mathematical Modelling 37 (2013) 4283-294.
- [69] J. Vlassenbroeck, R.V. Dooren, A Chebyshev technique for solving nonlinear optimal control problems, IEEE Transactions on Automatic Control 33 (1988) 333-340.
- [70] L. Xiangqian, Z. Lin, Haar Wavelet and Its Application in Optimal Control of Linear Time invariant Systems, Tsinghua Science and Technology issn 1007 0214 08/22 ppl307 1310 Volume 4, Number 1, March 1999.
- [71] S.A. Yousefi, Legendre Scaling function for solving generalized Emden-Fowler Equations, Int.J. of information and system sciences.3(2) (2007), 243-250.