# Remerciement

Ce travail a été réalisé au sein du département de Mathématiques à l'université de Mostaganem sous la direction de monsieur Belaïdi Benharrat, Professeur à l'université de Mostaganem. Je tiens à lui remercier infiniment pour son aide et ses conseils avisés.

Je n'oublie pas de remercier également monsieur le président du jury, M. Bendoukha Berrabah, Professeur à l'université de Mostaganem, M. Benchohra Mouffak, Professeur à l'université de Sidi Bel Abbès et M. Bekkar Mohammed, Professeur à l'université d'Oran.

Je dédie ce travail à mes très chers parents, mes frères, mes sœurs, et toute ma famille ainsi qu'à mes amis et à toute personne qui a contribué de prés ou de loin pour accomplir ce mémoire.

# Table des Matières

Introduction ........ P. 3

**Chapitre 1:**

Rappels et définitions

1.1 Théorie de R. Nevanlinna ........ P. 5

1.2 La densité des ensembles ........ P. 10

1.3 Le terme maximal et l'indice central ........ P. 12

**Chapitre 2:**

Croissance des solutions des équations différentielles à coefficients entières d'ordre fini.

2.1 Introduction et résultats ........ P. 15

2.2 Lemmes préliminaires ........ P. 17

2.3 Preuve du Théorème 2.1.3 ........ P. 22

2.4 Preuve du Théorème 2.1.4 ........ P. 24

2.5 Théorèmes généralisés ........ P. 27

**Chapitre 3:**

Oscillation des solutions des équations différentielles linéaires.

3.1 Introduction et résultats ........ P. 29

3.2 Lemmes préliminaires ........ P. 30

3.3 Preuve du Théorème 3.1.2 ........ P. 31

3.4 Preuve du Corollaire 3.1.1 ........ P. 51

3.5 Exemples ........ P. 51

**Bibliographie** ........ P. 53

# Introduction :

Depuis trente six ans, la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par le célèbre mathématicien Rolph Nevanlinna est devenue un outil indispensable dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes, en particulier la croissance et l'oscillation des solutions. La théorie de l'oscillation est une branche importante de la théorie appliquée des équations différentielles liées à l'étude des phénomènes oscillants en technologie, aussi bien que les sciences normales et sociales. Il y'a beaucoup de résultats des recherches jusqu'à maintenant concernant l'oscillation et les applications de la théorie de Rolph Nevanlinna sur les équations différentielles linéaires à coefficients fonctions entières ou méromorphes.

En 1966, H. Wittich a trouvé le résultat suivant:

Les coefficients entières de

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0$$

sont des polynômes si et seulement si toutes les solutions sont des fonctions entières d'ordre fini de croissance.

I. Laine et B. Bank (voir [22]) parmi les premiers mathématiciens qui se sont intéressés aux solutions des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients fonctions entières. En 1982, ils ont étudié la distribution des zéros des solutions de l'équation différentielle linéaire

$$f'' + A(z)f = 0$$

où $A(z)$ est un polynôme ou une fonction entière transcendante.

Ce mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres.

Le premier chapitre contient des rappels et définitions sur la théorie de R. Nevanlinna et quelques préliminaires de la théorie de Wiman-Valiron, qu'on aura besoin par la suite.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la croissance et l'oscillation complexe de quelques équations différentielles linéaires non-homogènes d'ordre supérieur avec des coefficients transcendantes d'ordre fini. Sous certaines conditions, nous montrons que toutes les solutions de ces équations sont des fonctions entières. Parmi ces solutions; certaines sont d'ordres infini de croissance tandis que les autres sont d'ordre fini de croissance.

Le troisième chapitre est consacré à du problème de la croissance, de l'étude la distribution des zéros et des points fixes des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur. Le but de ce chapitre, est d'étudier l'équation

$$f^{(k)} + a_{k-1}f^{(k-1)} + ... + a_2 f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = F(z)$$

où $k \geq 2$, $Q(z) \equiv h(z)e^{cz}$ et $c \in \mathbb{R}$ et $a_{k-1}, ..., a_2$ sont des constantes complexes et $h(z)$ est une fonction entière transcendante d'ordre $< \frac{1}{2}$.

# Chapitre 1

# Rappels et définitions:

### 1.1 Théorie de R. Nevanlinna:

**Théorème 1.1.1:** (voir [21]) ($Jensen$) Soit $f$ une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0, \infty$, et soient $a_1, a_2, ...$ (resp. $b_1, b_2, ...$) ses zéros (resp. ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \log\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_i|<r} \log\frac{r}{|a_i|}.$$

**Définition 1.1.1:** (voir [21]) Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on définit

$$\log^+ \alpha = \max(0, \log\alpha).$$

Les propriétés de bases du logarithme tronqué sont contenues dans lemme suivant:

**Lemme 1.1.1:** (voir [21])

$$\log\alpha \leq \log^+ \alpha \quad \text{(a)}$$

$$\log^+ \alpha \leq \log^+ \beta \text{ pour } \alpha \leq \beta \quad \text{(b)}$$

$$\log\alpha = \log^+ \alpha - \log^+ \frac{1}{\alpha} \quad \text{(c)}$$

$$|\log\alpha| = \log^+ \alpha + \log^+ \frac{1}{\alpha} \quad \text{(d)}$$

$$\log^+ \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ \alpha_i \quad \text{(e)}$$

$$\log^+ \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \leq \log n + \sum_{i=1}^{n} \log^+ \alpha_i \quad \text{(f)}$$

**Définition 1.1.2:** (voir [21]) Soit $f$ une fonction méromorphe, n'étant pas identiquement égal à $a \in \mathbb{C}$. Soit $i(z, a, f)$ désignant la multiplicité de $a$-point de $f$ à $z$. Ainsi, on définit

$$n(r, a, f) = n\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \sum_{\substack{|z|\leq r \\ f(z)=a}} i(z, a, f),$$

c'est à-dire, $n(r, a, f)$ est le nombre de racines de $f(z) = a$ dans $|z| \leq r$, chaque racine étant compté avec son ordre de multiplicité. Pour les pôles de $f$, nous définissons pareillement

$$n(r, \infty, f) = n(r, f) = \sum_{\substack{|z|\leq r \\ f(z)=\infty}} i(z, \infty, f).$$

**Définition 1.1.3:** (voir [21]) (fonction $a$-points). Pour la fonction méromorphe $f$, on définit

$$N(r,a,f) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt + n(0,a,f)\log r,\ a \neq \infty$$

et

$$N(r,\infty,f) = N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt + n(0,\infty,f)\log r$$

$N(r,a,f)$ est appelée fonction $a$-points de la fonction $f$ dans le disque $|z| \leq r$.

**Définition 1.1.4:** (voir [14] , [15])(fonction de proximité). Pour la fonction méromorphe $f$, on définit

$$m(r,a,f) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi\ ,\ a \neq \infty$$

et

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f\left(re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi$$

$m(r,a,f)$ est appelée la fonction de proximité de la fonction $f$ au point $a$.

**Définition 1.1.5:** (voir [18]) (Fonction caractéristique). La fonction caractéristique de la fonction méromorphe $f$ est définie comme suit

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

**Exemple 1.1.1:** Pour la fonction $f(z) = e^{az}$ $(a \neq 0)$, on a

$$m(r,f) = \frac{|a|\, r}{\pi}\ ,\ N(r,f) = 0.$$

D'où

$$T(r,f) = \frac{|a|\, r}{\pi}.$$

**Lemme 1.1.2:** (voir [21]) Soit $f$ une fonction méromorphe avec $a$-points $\alpha_1, ..., \alpha_n$ dans $|z| \leq r$ tels que $0 < |\alpha_1| < |\alpha_2| < ... < |\alpha_n| \leq r$, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors

$$\int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t} dt = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt = \sum_{0<|\alpha_i|\leq r} \log \frac{r}{|\alpha_i|}.$$

**Lemme 1.1.3:** (voir [21]) Soit $f$ une fonction méromorphe avec le développement de Laurent

$$f(z)=\sum_{i=m}^{\infty}c_iz^i,\quad c_m\neq 0,\ m\in\mathbb{Z}$$

à l'origine. Alors

$$\log|c_m|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi+N(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

**Théorème 1.1.2:** (Premier théorème fondamental). Soient $f$ une fonction méromorphe, $a\in\mathbb{C}$ et

$$f(z)-a=\sum_{i=m}^{\infty}c_iz^i,\quad c_m\neq 0,\ m\in\mathbb{Z}$$

le développement de Laurent de la fonction $f-a$ à l'origine. Alors

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=T(r,f)-\log|c_m|+\varphi(r,a)$$

où

$$|\varphi(r,a)|\leq\log 2+\log^+|a|.$$

**Preuve.** Supposons d'abord $a=0$. Du Lemme 1.1.1 $(c)$ et Lemme 1.1.3, on obtient

$$\log|c_m|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f\left(re^{i\varphi}\right)}\right|d\varphi+N(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)$$

$$=m(r,f)-m\left(r,\frac{1}{f}\right)+N(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

D'où

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)=m(r,f)+N(r,f)-\log|c_m| \tag{1.1.1}$$

$$T\left(r,\frac{1}{f}\right)=T(r,f)-\log|c_m|$$

Ce qui est l'affirmation avec $\varphi(r,0)\equiv 0$.

Montrons le cas général $a\neq 0$. Posons $h=f-a$. Il est clair que

$$N\left(r,\frac{1}{h}\right)=N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\ ,\ N(r,h)=N(r,f)$$

et

$$m\left(r,\frac{1}{h}\right)=m\left(r,\frac{1}{f-a}\right).$$

De plus,

$$\log^{+}|h|=\log^{+}|f-a|\leq\log^{+}|f|+\log^{+}|a|+\log 2$$

$$\log^{+}|f|=\log^{+}|f-a+a|=\log^{+}|h+a|\leq\log^{+}|h|+\log^{+}|a|+\log 2$$

En intégrant ces inégalités, on obtient

$$m\left(r,h\right)\leq m\left(r,f\right)+\log^{+}|a|+\log 2$$

$$m\left(r,f\right)\leq m\left(r,h\right)+\log^{+}|a|+\log 2$$

Par conséquent

$$\varphi\left(r,a\right)=m\left(r,h\right)-m\left(r,f\right)$$

satisfait

$$\left|\varphi\left(r,a\right)\right|\leq\log 2+\log^{+}|a|.$$

Par une application de (1.1.1) pour $h$, on obtient

$$T\left(r,\frac{1}{h}\right)=m\left(r,\frac{1}{h}\right)+N\left(r,\frac{1}{h}\right)=m\left(r,h\right)+N\left(r,h\right)-\log|c_m|$$

$$=m\left(r,f\right)+N\left(r,f\right)-\log|c_m|+\varphi\left(r,a\right)$$
$$=T\left(r,f\right)-\log|c_m|+\varphi\left(r,a\right).$$

**Remarque 1.1.1:** Le premier théorème fondamental peut être exprimé comme suit

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=T\left(r,f\right)+O\left(1\right)$$

pour tout $a\in\mathbb{C}$. On note que $O\left(1\right)$ dépend de $a\in\mathbb{C}$.

**Lemme 1.1.4:** (voir [21]) Soient $f,f_1,...,f_n$ des fonctions méromorphes et $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C}$ tels que $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. Alors

$$m\left(r,\sum_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}m\left(r,f_i\right)+\log n \tag{a}$$

$$m\left(r,\prod_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}m\left(r,f_i\right) \tag{b}$$

$$N\left(r,\sum_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}N\left(r,f_i\right) \tag{c}$$

$$N\left(r,\prod_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}N\left(r,f_i\right) \tag{d}$$

$$T\left(r,\sum_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}T\left(r,f_i\right)+\log n \quad \text{pour } r\geq 1 \tag{e}$$

$$T\left(r,\prod_{i=1}^{n}f_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}T\left(r,f_i\right) \quad \text{pour } r\geq 1 \tag{f}$$

$$T\left(r,f^n\right)=nT\left(r,f\right)\ \ ,\ \ n\in\mathbb{N}^* \tag{g}$$

$$T\left(r,\frac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\delta}\right)=T\left(r,f\right)+O\left(1\right) \tag{h}$$

**Définition 1.1.6:** (voir $[23],[27],[28]$) Soit $f$ une fonction méromorphe. On définit l'exposant de convergence des zéros de la fonction $f$ par

$$\lambda\left(f\right)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log N\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)=\int_0^r\frac{n\left(t,\frac{1}{f}\right)-n\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t}dt+n\left(0,\frac{1}{f}\right)\log r,$$

et $n\left(t,\frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros de la fonction $f$ situés dans le disque $|z|\leq t$ et l'exposent de convergence des zéros distincts de la fonction $f$ par

$$\overline{\lambda}\left(f\right)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)=\int_0^r\frac{\overline{n}\left(t,\frac{1}{f}\right)-\overline{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t}dt+\overline{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)\log r,$$

et $\overline{n}\left(t,\frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros distincts de la fonction $f$ situés dans le disque $|z|\leq t$.

**Exemple 1.1.2:** L'exposent de convergence des zéros distincts de la fonction $f\left(z\right)=e^z-1$ est égal à 1.

**Définition 1.1.7:** (voir $[14],[26]$) Soit $f$ une fonction entière. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de $f$ sont définis respectivement par

$$\sigma\left(f\right)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log\log M\left(r,f\right)}{\log r}$$

et

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r}$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Si $f$ est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de $f$ sont définis respectivement par

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r}$$

et

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r;f)}{\log r}$$

où $T(r,f)$ est la fonction caractéristique de $f$.

**Exemple 1.1.3:** La fonction $f(z) = \exp\{\exp z\}$ est d'ordre $\sigma(f) = \infty$ et d'hyper ordre $\sigma_2(f) = 1$.

**Lemme 1.1.5:** Si $f$ est une fonction méromorphe non constante dans $\mathbb{C}$, alors

$$\sigma\left(f^{(k)}\right) = \sigma(f).$$

**Définition 1.1.8:** La fonction $a(z)$ est appelée petite fonction par rapport à $f$ si $a(z)$ est une fonction méromorphe satisfaisant $T(r,a) = S(r,f)$, c'est-à-dire $T(r,a) = o(T(r,f))$ quand $r \to \infty$ à l'extérieur d'un ensemble de mesure linéaire finie.

**Lemme 1.1.6:** Soient $f$ une fonction méromorphe transcendante et $k \geq 1$ un entier positif. Alors

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log\left(rT(r,f)\right)\right)$$

à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel $E$ de mesure linéaire finie. Si $f$ est d'ordre fini, alors

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log r\right).$$

**1.2 La densité des ensembles:**

**Définition 1.2.1:** (voir [15]) La mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0,\infty)$ est définie par

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $E$ et la mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1,\infty)$ est définie par

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt.$$

**Définition 1.2.2:** (Voir [15]) La densité inférieur d'un sous-ensemble $H \subset [0,+\infty)$ est définie par

$$\underline{dens} H = \lim_{r\to\infty} \inf \left( \int_0^r \chi_H(t)\, dt \right) / r$$

et la densité supérieur de $H$ est définie par

$$\overline{dens} H = \lim_{r\to\infty} \sup \left( \int_0^r \chi_H(t)\, dt \right) / r.$$

**Définition 1.2.3:** (Voir [15]) La densité logarithmique inférieur $\underline{\log dens} H$ d'un sous-ensemble $H \subset [1,+\infty)$ est définie par

$$\underline{\log dens} H = \lim_{r\to\infty} \inf \left( \int_1^r \frac{\chi_H(t)}{t} dt \right) / \log r$$

et la densité logarithmique supérieur $\overline{\log dens} H$ d'un sous-ensemble $H \subset (1,+\infty)$ est définie par

$$\overline{\log dens} H = \lim_{r\to\infty} \sup \left( \int_1^r \frac{\chi_H(t)}{t} dt \right) / \log r$$

où $\chi_H(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $H$.

**Exemple 1.2.1:**

1) $E = [1,2]$, alors:

$$m(E) = 1 \;;\; lm(E) = \ln 2 \;;\; \underline{dens} E = \overline{dens} E = \underline{\log dens} E = \overline{\log dens} E = 0$$

2) Soient $r_n = e^{e^n}, n \geq 1$, et $E = \bigcup_{n\geq 1} [r_n, er_n]$. Alors

$$\underline{dens} E = 0 \;;\; \overline{dens} E > 0 \;;\; \underline{\log dens} E = \overline{\log dens} E = 0$$

Preuve: Posons $s_n = er_n$. Alors

$$\int_0^{s_n} \chi_E(t)\, dt \geq \int_{r_n}^{s_n} dt = (e-1)\, r_n = (1 - 1/e)\, s_n$$

et donc $\overline{dens}E \geq (1-1/e)$. Cependant

$$\int\limits_0^{r_n} \chi_E(t)\,dt \leq \int\limits_0^{s_{n-1}} \chi_E(t)\,dt \leq s_{n-1} = o(r_n).$$

Ce qui donne $\underline{dens}E = 0$.

Supposons maintenant que $r$ est suffisamment large, avec $r_n \leq r < s_n$. Donc

$$\int\limits_1^{r} \frac{\chi_E(t)}{t} dt \leq \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{r_j}^{s_j} \frac{\chi_E(t)}{t} dt = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{r_j}^{s_j} \frac{dt}{t} = n = \log\log r_n \leq \log\log r.$$

Ainsi $\overline{\log dens}E = 0$

**1.3 Le terme maximal et l'indice central:**

**Définition 1.3.1:** (voir [15]) Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière, le terme maximal de $f$ est défini par $\mu(r) = \max\{|a_n| r^n, n = 0, 1, 2, ...\}$ et l'indice central de $f$ est défini par $\nu_f(r) = \max\{m, \mu(r) = |a_m| r^m\}$.

Si $a_0 = 0$ alors $\nu_f(0)$ n'a pas de sens.

**Exemple 1.3.1:** Pour le polynôme $P(z) = a_n z^n + .... + a_0$, $a_n \neq 0$, on a $\mu(r) = |a_n| r^n$ et $\nu_P(r) = n$ pour $r$ assez grand.

**Lemme 1.3.1:** Pour $r > 0$, on a

$$\mu(r) \leq M(r, f) \leq 2\mu(2r). \tag{1.3.1}$$

**Preuve.** La première inégalité de (1.3.1) vient de la formule intégrale de Cauchy. On a pour $k \geq 0$

$$|a_k| = \left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}(2\pi r) M(r, f) r^{-k-1} = M(r, f) r^{-k}$$

La deuxième inégalité se démontre comme suit. Pour $k \geq 0$, on a

$$|a_k| (2r)^k \leq \mu(2r) \Longrightarrow |a_k| r^k \leq 2^{-k} \mu(2r)$$

et donc

$$M(r, f) \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \mu(2r) = 2\mu(2r).$$

**Lemme 1.3.2:** $\nu_f(r)$ est non décroissante et $\nu_f(r) \to \infty$ quand $r \to \infty$.

**Preuve.** Supposons d'abord que $0 < r < s$ et $\nu_f(r) = N > M$. Alors, on obtient

$$|a_N| r^N \geq |a_M| r^M \ , \ |a_N| s^N \geq |a_M| s^M$$

et donc $\nu_f(s) \geq N$.

Soit maintenant $k > 0$ tel que $a_k \neq 0$. Alors si $m < k$, nous avons $|a_m| r^m < |a_k| r^k$ pour tout $r$ assez grand, et ainsi $\nu_f(r) \geq k$. Puisqu'il existe un tel $k$ arbitrairement grand, ainsi $\nu_f(r)$ est non bornée, étant non décroissante, alors $\nu_f(r) \to \infty$ quand $r \to \infty$.

**Lemme 1.3.3:** (voir [26], [27]) Soient $f$ une fonction entière d'ordre $\sigma$, et $\nu_f(r)$ l'indice central de $f$. Alors

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log^+ \nu_f(r)}{\log r}.$$

**Lemme 1.3.4:** (voir [7]) Soient $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière, $\mu(r)$ le terme maximal, $\nu_g(r)$ est l'indice central de $g$. Alors

$$\log \mu(r) = \log |a_0| + \int\limits_0^r \frac{\nu_g(t)}{t} dt. \tag{1.3.2}$$

Supposons que $a_0 \neq 0$. Pour $r < R$

$$M(r, g) < \mu(r) \left\{ \nu_g(R) + \frac{R}{R - r} \right\}. \tag{1.3.3}$$

**Lemme 1.3.5:** (voir [7]) Soit $g(z)$ une fonction entière d'ordre infini avec l'hyper-ordre $\sigma_2(g) = \sigma$, et soit $\nu_g(r)$ l'indice central de $g$. Alors

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \log \nu_g(r)}{\log r} = \sigma.$$

**Preuve.** Posons $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Sans perte de généralité, supposons que $|a_0| \neq 0$. Par (1.3.2) et du Lemme 1.3.4, le terme maximal $\mu(r)$ de $g$ satisfait

$$\log \mu(2r) = \log |a_0| + \int\limits_0^{2r} \frac{\nu_g(t)}{t} dt \geq \log |a_0| + \nu_g(r) \log 2. \tag{1.3.4}$$

Par l'inégalité de Cauchy, on obtient

$$\mu(2r) \leq M(2r, g). \tag{1.3.5}$$

Ceci et (1.3.4) donnent

$$\nu_g(r)\log 2 \leq \log M(2r,g) + C \tag{1.3.6}$$

où $C\,(C>0)$ est une constante. D'où

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log\nu_g(r)}{\log r} \leq \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log\log M(r,g)}{\log r} = \sigma_2(g) = \sigma. \tag{1.3.7}$$

D'autre part, par (1.3.3) et du Lemme 1.3.4, on obtient

$$M(r,g) < \mu(r)\{\nu_g(2r)+2\} = \left|a_{\nu_g(r)}\right| r^{\nu_g(r)}\{\nu_g(2r)+2\}. \tag{1.3.8}$$

Par conséquent, on obtient de (1.3.8)

$$\log M(r,g) \leq \nu_g(r)\log r + \log\nu_g(2r) + C_1$$

$$\log\log M(r,g) \leq \log\nu_g(r) + \log\log\nu_g(2r) + \log\log r + C_2 \tag{1.3.9}$$

$$\leq \log\nu_g(2r)\left[1+\frac{\log\log\nu_g(2r)}{\log\nu_g(2r)}\right] + \log\log r + C_3$$

où $C_j\,(>0)\,(j=1,2,3)$ sont des constantes. Par (1.3.9), on obtient

$$\sigma_2(g) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log\log M(r,g)}{\log r}$$

$$\leq \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log\nu_g(2r)}{\log(2r)} = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log\nu_g(r)}{\log r}. \tag{1.310}$$

Des relations (1.3.7) et (1.3.10) on obtient le Lemme 1.3.5.

# Chapitre 2

# Croissance des solutions des équations différentielles à coefficients entières d'ordre fini.

## 2.1 Introduction et résultats

Dans l'étude de l'équation différentielle linéaire non-homogène d'ordre supérieur

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + ... + A_1 f' + A_0 f = F \tag{2.1.1}$$

où $A_0$, $A_1, ...,$ $A_{k-1}$, $F \not\equiv 0, (k \geq 1)$ sont des fonctions entières transcendantes d'ordres finis. Tu Jin, Zheng Xiumin et Huang Wenping ont étudié l'oscillation complexe de (2.1.1) et ils ont obtenu les résultats suivants:(voir [29])

**Théorème 2.1.1:** Supposons que $k \geq 2$ est un nombre naturel et que $A_0, A_1, ...,$ $A_{k-1}, F \not\equiv 0$ sont des fonctions entières d'ordre fini, où il existe $A_d$ et $A_l$ $(0 \leq d < l \leq k-1)$ tels que pour les constantes réelles $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > \alpha_4 > 0$, $0 < \beta < \infty$, nous avons $\sigma(A_j) < \beta$ $(j \neq d, l)$ *et* $\sigma(F) \geq \beta$. Supposons que pour tout $z$ satisfaisant $\arg z = \theta$ et pour $r$ suffisamment grand, nous avons

$$|A_d(z)| \geq \exp\left\{\alpha_1 r^\beta\right\} \quad , \quad |A_l(z)| \leq \exp\left\{\alpha_2 r^\beta\right\} \ , \ \theta \in H_1$$

et

$$|A_l(z)| \geq \exp\left\{\alpha_3 r^\beta\right\} \quad , \quad |A_d(z)| \leq \exp\left\{\alpha_4 r^\beta\right\} \ , \ \theta \in H_2$$

où $H_1, H_2 \subset [0, 2\pi)$, $H_1 \cap H_2 = \varnothing$, $H_1 \cup H_2 = [0, 2\pi) - E_0$, $E_0$ ayant une mesure linéaire nulle.

Alors toutes les solutions de (2.1.1) sont des fonctions entières satisfaisant

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty \tag{2.1.2}$$

avec certaines solutions d'ordre fini possibles. Toutes les solutions possibles d'ordre fini ont le même ordre de croissance $\sigma\,(0 \leq \sigma < \infty)$ et (2.1.1) doit avoir des solutions satisfaisant (2.1.2).

S'il existe deux solutions d'ordre fini $f_0, f_1$ de (2.1.1), alors $f_0 - f_1$ est un polynôme avec $\deg(f_0 - f_1) \leq d - 1$ et $f_0$ satisfait

$$\sigma = \sigma(f_0) \leq \max\left\{\sigma(A_d), \sigma(A_l), \sigma(F), \overline{\lambda}(f_0)\right\}.$$

Si $\sigma(A_d) \neq \sigma(A_l) \neq \sigma(F)$, $\overline{\lambda}(f_0) < \sigma$, alors

$$\sigma(f_0) = \max\{\sigma(A_d), \sigma(A_l), \sigma(F)\}.$$

De plus, si parmi $A_{d-1},...,A_0$, il existe une seule combinaison $A_{m_1},...,A_{m_s}$ $(d-1 \geq m_1 > m_2 > ... > m_s \geq 0)$ étant transcendentes, $\sigma\left(A_{m_j}\right)$ $(j = 1,...,s)$ sont inégaux ou bien $s = 1$, et si $m_s = 0$ ou $m_s > 0$ et les polynômes $A_{m_s-1}, A_{m_s-2},...,A_0$ vérifient que $\deg A_j - j$ $(j = m_s - 1, m_s - 2,...,0)$ sont inégaux, ou bien $m_s = 1$ et $A_0 \not\equiv 0$, alors toutes les solutions de (2.1.1) vérifient (2.1.2) avec au plus une possibilité d'une solution d'ordre fini.

**Théorème 2.1.2:** Supposons que $A_0, A_1,...,A_d,...,A_l,...,A_{k-1}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta$, $H_1, H_2$ et $k$ vérifient les hypothèses du Théorème 2.1.1, et que $F \not\equiv 0$ est une fonction entière avec $\sigma(F) < \beta$. Alors (2.1.1) doit avoir des solutions satisfaisant (2.1.2), avec quelques solutions polynômiales possibles de degré $\leq d-1$.

Maintenant, on va étendre ces résultats pour l'équation différentielle (2.1.1) par un changement sur les hypothèses.

**Théorème 2.1.3:** Supposons que $k \geq 2$ est un nombre naturel et que $A_0, A_1,...,$ $A_{k-1}, F \not\equiv 0$ sont des fonctions entières d'ordre fini, où il existe $A_d$ et $A_l$ $(0 \leq d < l \leq k-1)$ tels que pour les constantes réelles $\alpha > 0, \delta_1 > 0, \delta_2 > 0, 0 < \beta < \infty, \max\{\delta_1, \delta_2\} < \frac{1}{k}$, nous avons $\sigma(A_j) < \beta$ $(j \neq d, l)$ *et* $\sigma(F) \geq \beta$. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe deux collections finies de nombres réels $\{\varphi_m\}$ et $\{\theta_m\}$ satisfaisant

$$\varphi_1 < \theta_1 < \varphi_2 < \theta_2 < ... < \varphi_n < \theta_n < \varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi \tag{2.1.3}$$

et

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\varphi_{m+1} - \theta_m\right) < \varepsilon, \tag{2.1.4}$$

tels que

$$|A_d(z)| \geq \exp\left\{(1+\delta_1)\alpha r^\beta\right\} \ , \ |A_l(z)| \leq \exp\left\{\delta_1 \alpha r^\beta\right\} \tag{2.1.5}$$

quand $z \to \infty$ dans $\varphi_m \leq \arg z \leq \theta_m, m \in I_1$ et $\{\varphi_m, \theta_m\} \subset H_1$ et

$$|A_l(z)| \geq \exp\left\{(1+\delta_2)\alpha r^\beta\right\} \ , \ |A_d(z)| \leq \exp\left\{\delta_2 \alpha r^\beta\right\} \tag{2.1.6}$$

quand $z \to \infty$ dans $\varphi_m \leq \arg z \leq \theta_m, m \in I_2$ et $\{\varphi_m \ , \theta_m\} \subset H_2$ où $H_1, H_2 \subset [0, 2\pi), H_1 \cap H_2 = \varnothing, H_1 \cup H_2 = [0, 2\pi), I_1 \cap I_2 = \varnothing$ et $I_1 \cup I_2 = \{1, 2, ..., n\}$.

Alors toutes les solutions de (2.1.1) sont des fonctions entières satisfaisant (2.1.2) avec certaines solutions d'ordre fini possibles. Toutes les solutions possibles d'ordre fini ont le même ordre de croissance $\sigma$ $(0 \leq \sigma < \infty)$ et (2.1.1) doit avoir des solutions vérifiant (2.1.2). S'il existe deux solutions d'ordre fini $f_0, f_1$ de (2.1.1), alors $f_0 - f_1$ est un polynôme avec $\deg(f_0 - f_1) \leq d - 1$ et $f_0$ satisfait

$$\sigma = \sigma(f_0) \leq \max\left\{\sigma(A_d), \sigma(A_l), \sigma(F), \overline{\lambda}(f_0)\right\}. \tag{2.1.7}$$

Si $\sigma(A_d) \neq \sigma(A_l) \neq \sigma(F), \overline{\lambda}(f_0) < \sigma$, alors

$$\sigma(f_0) = \max\{\sigma(A_d), \sigma(A_l), \sigma(F)\}.$$

De plus, si parmi $A_{d-1}, ..., A_0$, il existe une seule combinaison $A_{m_1}, ..., A_{m_s}$ $(d-1 \geq m_1 > m_2 > ... > m_s \geq 0)$ étant transcendentes, $\sigma\left(A_{m_j}\right)$ $(j = 1, ..., s)$ sont inégaux ou bien $s = 1$, et si $m_s = 0$ ou $m_s > 0$ et les polynômes $A_{m_s-1}, A_{m_s-2}, ..., A_0$ vérifient que $\deg A_j - j$ $(j = m_s - 1, m_s - 2, ..., 0)$ sont inégaux, ou bien $m_s = 1$ et $A_0 \not\equiv 0$, alors toutes les solutions de (2.1.1) vérifient (2.1.2) avec au plus une possibilité d'une solution d'ordre fini.

**Théorème 2.1.4:** Supposons que $A_0, A_1, ..., A_d, ..., A_l, ..., A_{k-1}, \alpha, \delta_1, \delta_2, \beta, \{\varphi_m\}$, $\{\theta_m\}, H_1, H_2, I_1, I_2$ et $k$ vérifient les hypothèses du Théorème 2.1.3 et que $F \not\equiv 0$ est une fonction entière avec $\sigma(F) < \beta$. Alors (2.1.1) doit avoir des solutions satisfaisant (2.1.2), avec quelques solutions polynômiales possibles de degré $\leq d - 1$.

### 2.2 Lemmes Préliminaires:

**Lemme 2.2.1:** (voir [5]) Supposons que $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, F \not\equiv 0$ sont des fonctions entières avec au moins un $A_s$ $(0 \leq s \leq k-1)$ étant fonction transcendante. Soit l'équation homogène

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + ... + A_1 f' + A_0 f = 0 \tag{2.2.1}$$

correspondante de (2.1.1). Alors toutes les solutions de (2.1.1) et (2.2.1) sont des fonctions entières, et les deux équations (2.1.1) et (2.2.1) doivent avoir des solutions d'ordre infini.

**Lemme 2.2.2:** (voir [6]) Soient $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, F \not\equiv 0$ des fonctions entières d'ordre fini. Si $f$ est une solution de (2.1.1) satisfaisant

$$\max\{\sigma(F), \sigma(A_j); j = 0, ..., k-1\} < \sigma(f) = \sigma \quad (0 < \sigma \leq \infty),$$

alors

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f). \tag{2.2.2}$$

**Lemme 2.2.3:** (voir [12]) Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante d'ordre fini $\sigma$, soit $\Gamma = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), ..., (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de différents couples de nombres entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$ $(i = 1, ..., m)$, et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\psi_0 \in [0, 2\pi) - E$, alors il existe une constante $R_0 = R_0(\psi_0) > 1$ tel que pour tout $z$ satisfaisant $\arg z = \psi_0$, $|z| = r \geq R_0$, et pour tout $(k, j) \in \Gamma$, nous avons

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma - 1 + \varepsilon)}. \tag{2.2.3}$$

**Lemme 2.2.4 :** (voir [23]) Soit $f(z)$ une fonction entière et supposons que $\left|f^{(k)}(z)\right|$ est non bornée sur un certain rayon $\arg z = \theta$. Alors il existe une suite infini de points $z_n = r_n e^{i\theta}$ $(n = 1, 2, ...)$, où $r_n \to +\infty$, tel que $f^{(k)}(z_n) \to \infty$ et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(k)}(z_n)}\right| \leq \frac{1}{(k-j)!}(1 + o(1))|z_n|^{k-j} \quad (j = 0, ..., k-1). \tag{2.2.4}$$

**Lemme 2.2.5:** (Phragmén-Lindelöf, voir [25]). Soit $f(z)$ une fonction analytique dans le domaine $D = \{z : \alpha < \arg z < \beta, r_0 < |z| < \infty\}$, et continue sur $\overline{D} = D \cup C$ ($C$ est la frontière de $D$ ). Si pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe $R(\varepsilon) > 0$ tel que pour $|z| > R(\varepsilon), z \in D,$ nous avons

$$|f(z)| \leq \exp\left\{\varepsilon |z|^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}\right\}, \tag{2.2.5}$$

et pour $z \in C$, nous avons $|f(z)| \leq M$ ($M > 0$ est une constante), alors $|f(z)| \leq M$ est vérifiée pour tout $z \in D$.

**Lemme 2.2.6:** Supposons que $A_0, A_1, ..., A_d, ..., A_l, ..., A_{k-1}, \alpha, \delta_1, \delta_2, \beta, \{\varphi_m\}$, $\{\theta_m\}, H_1, H_2, I_1, I_2$ et $k$ vérifient les hypothèses du Théorème 2.1.3. Alors toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.2.1) est un polynôme de degré $\leq d-1$ ou une fonction entière d'ordre infini, et l'équation (2.2.1) doit avoir des solutions d'ordre infini.

De plus, si parmi $A_{d-1}, ..., A_0$, il existe une seule combinaison $A_{m_1}, ..., A_{m_s}$ $(d-1 \geq m_1 > m_2 > ... > m_s \geq 0)$ étant transcendentes, $\sigma\left(A_{m_j}\right)$ $(j = 1, ..., s)$ sont inégaux ou bien $s = 1$, et si $m_s = 0$ ou $m_s > 0$ et les polynômes $A_{m_s-1}, A_{m_s-2}, ..., A_0$ vérifient que $\deg A_j - j$ $(j = m_s - 1, m_s - 2, ..., 0)$ sont inégaux, ou bien $m_s = 1$ et $A_0 \not\equiv 0$, alors toutes les solutions de (2.2.1) vérifient $\sigma(f) = \infty$.

**Preuve:** Par le Lemme 2.2.1, nous savons que toutes les solutions de (2.2.1) sont des fonctions entières, et que l'équation (2.2.1) doit avoir des solutions d'ordre infini.

Supposons maintenant que $f \not\equiv 0$ est une solution de (2.2.1) avec $\sigma(f) = \sigma < +\infty$. Par les hypothèses, pour tout $\varepsilon(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{3\left(\sigma+\frac{1}{4}\right)})$, il existe deux collections finies de nombres réels $\{\varphi_m\}$ et $\{\theta_m\}$ satisfaisant (2.1.3), (2.1.4) tels que $A_d$, $A_l$ vérifient (2.1.5) dans $\varphi_m \leq \arg(z) \leq \theta_m$ $(m \in I_1)$, et $A_d$, $A_l$ vérifient (2.1.6) dans $\varphi_m \leq \arg(z) \leq \theta_m$ $(m \in I_2)$ et $\max\{\sigma(A_j) : j \neq d, l\} < \beta$.

Par le Lemme 2.2.3, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ ayant une mesure linéaire nulle, tel que si $\psi_0 \in [0, 2\pi) - E_1$, alors il existe une constante $R_0 = R_0(\psi_0) > 1$ tel que pour tout $k > d \geq 0$ et tout $j = d+1, ..., k$,

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(d)}(z)}\right| \leq |z|^{(j-d)(\sigma-1+\varepsilon)} \leq |z|^{(k-d)\sigma} \quad (0 < \varepsilon < 1) \tag{2.2.6}$$

quand $|z| \geq R_0$ le long de $\arg z = \psi_0$.

Supposons maintenant que $\left|f^{(d)}(z)\right|$ est non bornée sur un certain rayon $\arg z = \phi_0$ où $\phi_0 \in [\varphi_m, \theta_m] - E_1\,(m \in I_1)$. Alors par le Lemme 2.2.4, il existe une suite infini de points $z_n = r_n e^{i\phi_0}$, où $r_n \to +\infty$ tel que $f^{(d)}(z_n) \to \infty$ et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(d)}(z_n)}\right| \leq \frac{1}{(d-j)!}\left(1+o(1)\right)|z_n|^{d-j} \leq 2\,|z_n|^d \quad (j = 0, ..., d-1) \quad (2.2.7)$$

quand $z_n \to \infty$. Par (2.2.1) et $(2.1.5), (2.2.6), (2.2.7)$, on a

$$\exp\left\{(1+\delta_1)\,\alpha\,|z_n|^\beta\right\} \leq |A_d(z_n)| \leq \left|\frac{f^{(k)}(z_n)}{f^{(d)}(z_n)}\right| + |A_{k-1}(z_n)|\left|\frac{f^{(k-1)}(z_n)}{f^{(d)}(z_n)}\right|$$

$$+ ... + |A_l(z_n)|\left|\frac{f^{(l)}(z_n)}{f^{(d)}(z_n)}\right| + ... + |A_{d+1}(z_n)|\left|\frac{f^{(d+1)}(z_n)}{f^{(d)}(z_n)}\right|$$

$$+ |A_{d-1}(z_n)|\left|\frac{f^{(d-1)}(z_n)}{f^{(d)}(z_n)}\right| + ... + |A_0(z_n)|\left|\frac{f(z_n)}{f^{(d)}(z_n)}\right|$$

$$\leq M_0 \exp\left\{\alpha\delta_1\,|z_n|^\beta\right\}|z_n|^{M_1} \quad (2.2.8)$$

($M_0 > 0, M_1 > 0$ sont des constantes quelconques). Par (2.2.8), on obtient

$$\exp\left\{\alpha\,|z_n|^\beta\right\} \leq M_0\,|z_n|^{M_1},$$

c'est une contradiction. Par conséquent, $\left|f^{(d)}(z)\right|$ est bornée sur n'importe quel rayon $\arg z = \phi$ où $\phi \in [\varphi_m, \theta_m] - E_1\,(m \in I_1)$. Alors, il découle du Lemme 2.2.5 qu'il existe une constante $M_2 > 0$ tel que

$$\left|f^{(d)}(z)\right| \leq M_2. \quad (2.2.9)$$

Pour tout $z$ dans $\varphi_m + \varepsilon \leq \arg z \leq \theta_m - \varepsilon, (m \in I_1)$. Par $d$-fois intégration réitérée suivant la ligne segment$[0, z]$, on obtient

$$f(z) = f(0) + f'(0)\frac{z}{1!} + ... + \frac{1}{(d-1)!}f^{(d-1)}(0)\,z^{d-1}$$

$$+ \int_0^z ... \int_0^z \int_0^z f^{(d)}(t)\,dt...dt. \quad (2.2.10)$$

D'après l'inégalité triangulaire et (2.2.9), on obtient à partir de (2.2.10)

$$|f(z)| \leq |f(0)| + \left|f'(0)\right|\frac{|z|}{1!} + \left|f''(0)\right|\frac{|z|^2}{2!} + ... + M_2\frac{|z|^d}{d!}.$$

D'où

$$|f(z)| \leq M_1'\,|z|^d \quad (2.2.11)$$

($M_1' > 0$ est une certaine constante) pour un point arbitraire $z$ dans $\varphi_m + \varepsilon \leq \arg z \leq \theta_m - \varepsilon, (m \in I_1)$ avec $|z| \geq r_0 > 0$.

Par le même raisonnement, on obtient

$$|f(z)| \leq M_2' |z|^l \tag{2.2.12}$$

($M_2' > 0$ est une certaine constante ) pour un point arbitraire $z$ dans $\varphi_m + \varepsilon \leq \arg z \leq \theta_m - \varepsilon, (m \in I_2)$ , avec $|z| \geq r_1 > 0$.

Puis, par (2.2.11) et (2.2.12) , on obtient

$$|f(z)| \leq M |z|^l \tag{2.2.13}$$

($M > 0$ est une certaine constante) dans $\varphi_m + \varepsilon \leq \arg z \leq \theta_m - \varepsilon$ $(m = 1, ..., n)$ avec $|z| \geq r_1 > 0$.

D'autre part, de $\sigma(f) = \sigma < +\infty$, on a $|f(z)| \leq \exp\left\{r^{\sigma+\frac{1}{4}}\right\}$ est vérifiée dans $\theta_m - \varepsilon \leq \arg z \leq \varphi_{m+1} + \varepsilon$ $(m = 1, ..., n)$ pour $|z| = r > r_0 > 0$.

De $\varphi_{m+1} - \theta_m < \varepsilon$ et $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{3\left(\sigma+\frac{1}{4}\right)}$, on a

$$\left(\varphi_{m+1} + \varepsilon\right) - (\theta_m - \varepsilon) < 3\varepsilon < \frac{\pi}{\sigma + \frac{1}{4}}.$$

Par conséquent il existe $R > 1 + r_0$, tel que $r^{\sigma+\frac{1}{4}} < \varepsilon r^{\frac{\pi}{(\varphi_{m+1}+\varepsilon)-(\theta_m-\varepsilon)}}$ pour $r > R$.

Par conséquent,

$$\left|\frac{f(z)}{z^l}\right| \leq \exp\left\{\varepsilon r^{\frac{\pi}{(\varphi_{m+1}+\varepsilon)-(\theta_m-\varepsilon)}}\right\}$$

est vérifiée dans $\theta_m - \varepsilon \leq \arg z \leq \varphi_{m+1} + \varepsilon$ $(m = 1, ..., n)$ avec $|z| = r > R$ et sur les rayons $\arg z = \theta_m - \varepsilon$, $\arg z = \varphi_{m+1} + \varepsilon$ avec $|z| \geq r_1 > 0$, on a

$$\left|\frac{f(z)}{z^l}\right| \leq M$$

d'après de (2.2.13).

Par conséquent, par le Lemme 2.2.5,

$$\left|\frac{f(z)}{z^l}\right| \leq M$$

est vérifiée dans $\theta_m - \varepsilon \leq \arg z \leq \varphi_{m+1} + \varepsilon$ $(m = 1, ..., n)$ avec $|z| > R$.

Ainsi

$$|f(z)| \leq M |z|^l$$

est vérifiée dans le plan entier d'après (2.2.13).

Par conséquent, $f(z)$ est un polynôme avec $\deg f \leq l$ et puis de (2.2.1), nous avons $\deg f \leq l-1$.

En outre, prouvons que $f(z)$ est un polynôme de degré $\leq d-1$. Si $f(z)$ est un polynôme de degré $\geq d$, nous pouvons choisir une courbe

$$\Gamma = \{z : \arg z = \theta, \varphi_m \leq \theta \leq \theta_m \quad , m \in I_1\}.$$

Par (2.1.5) et (2.2.1), on obtient pour tout $z \in \Gamma$ et pour $r$ suffisamment grand

$$\begin{aligned} \exp\left\{(1+\delta_1)\alpha r^{\beta}\right\} &\leq |A_d(z)| \leq \left|A_d(z) f^{(d)}(z)\right| \leq \left|f^{(k)}(z)\right| + ... + \left|A_l(z) f^{(l)}(z)\right| \\ &+ ... + \left|A_{d+1}(z) f^{(d+1)}(z)\right| + \left|A_{d-1}(z) f^{(d-1)}(z)\right| + .... + |A_0(z) f(z)| \\ &\leq M_3 \exp\left\{\delta_1 \alpha r^{\beta}\right\} r^{M_4} \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

($M_3, M_4$ sont des constantes quelconques). Par (2.2.14), on obtient

$$\exp\left\{\alpha r^{\beta}\right\} \leq M_3 r^{M_4},$$

c'est une contradiction. Ainsi $f(z)$ est un polynôme de degré $\leq d-1$.

De plus, si $A_{m_1}, ..., A_{m_s}$ $(d-1 \geq m_1 > m_2 > ... > m_s \geq 0)$ sont transcendantes et $\sigma\left(A_{m_j}\right)$ $(j = 1, ..., s)$ sont inégaux ou $s = 1$, on a:

Si $m_s = 0$, $f \not\equiv 0$ est un polynôme avec $\deg f = m \, (0 \leq m < d-1)$, alors

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + ... + A_0 f$$

est une fonction entière transcendante d'ordre égal à

$$\max\{\sigma(A_m), \sigma(A_{m-1}), ..., \sigma(A_0)\}.$$

Ceci contredit (2.2.1).

Ainsi toutes les solutions $f \not\equiv 0$ de (2.2.1) vérifient $\sigma(f) = \infty$.

Si $m_s > 0$, $f \not\equiv 0$ est un polynôme avec $\deg f = m \, (m_s \leq m < d-1)$, alors

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + ... + A_0 f$$

est une fonction entière transcendante d'ordre égal à

$$\max\{\sigma(A_m), \sigma(A_{m-1}), ..., \sigma(A_0)\}.$$

Ceci contredit (2.2.1).

Et si $\deg f = m < m_s$, comme les polynômes $A_{m_s-1}, A_{m_s-2}, ..., A_0$ vérifient que $(\deg A_j) - j \;\; (j = m_s - 1, m_s - 2, ..., 0)$ sont inégaux ou $m_s = 1$ et $A_0 \not\equiv 0$, alors

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + ... + A_0 f$$

est un polynôme de degré égal à

$$\max \{\deg A_j + (m - j), j = 0, 1, ..., m\}.$$

Ceci contredit également (2.2.1).

Par conséquent toutes les solutions $f \not\equiv 0$ de (2.2.1) vérifient $\sigma(f) = \infty$.

**2.3 Preuve du théorème 2.1.3:**

Par le Lemme 2.2.1 et le Lemme 2.2.2, nous savons que toutes les solutions de (2.1.1) sont des fonctions entières, l'équation (2.1.1) doit avoir des solutions d'ordre infini et toutes les solutions d'ordre infini satisfont (2.1.2).

Supposons maintenant que $f_0$ est une solution de (2.1.1) avec $\sigma(f_0) = \sigma < +\infty$. Si $f_1 \,(\not\equiv f_0)$ est la deuxième solution d'ordre fini de (2.1.1), alors $f_0 - f_1$ est une solution de l'équation homogène (2.2.1) correspondante de (2.1.1) et $\sigma(f_0 - f_1) < +\infty$.

Par le Lemme 2.2.6, $f_0 - f_1$ est un polynôme avec $\deg(f_0 - f_1) \leq d - 1$.

Par conséquent $\sigma(f_1) = \sigma$.

Soit $f_0$ une solution de (2.1.1) d'ordre fini.

Nous pouvons écrire (2.1.1) sous la forme

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{F}\left(\frac{f_0^{(k)}}{f_0} + A_{k-1}\frac{f_0^{(k-1)}}{f_0} + ... + A_1\frac{f_0'}{f_0} + A_0\right). \tag{2.3.1}$$

Il s'ensuit que si $f_0(z)$ ) a un zéro $z_0$ d'ordre $\alpha > k$, alors $F$ doit avoir un zéro en $z_0$ d'ordre $\alpha - k$.

Par conséquent

$$n\left(r, \frac{1}{f_0}\right) \leq k\,\overline{n}\left(r, \frac{1}{f_0}\right) + n\left(r, \frac{1}{F}\right) \tag{2.3.2}$$

et

$$N\left(r,\frac{1}{f_0}\right)\leq k\,\overline{N}\left(r,\frac{1}{f_0}\right)+N\left(r,\frac{1}{F}\right). \tag{2.3.3}$$

Par une application du lemme de la dérivée logarithmique, on a

$$m\left(r,\frac{f_0^{(j)}}{f_0}\right)=O\left(\ln r\right)\quad (j=1,...,k)\quad \left(\sigma\left(f_0\right)<+\infty\right) \tag{2.3.4}$$

est vérifiée pour tout $r$ en dehors d'un ensemble $E\subset(0,+\infty)$ ayant une mesure linéaire $m\left(E\right)=\delta<+\infty$.

De $(2.3.1)$, on a

$$m\left(r,\frac{1}{f_0}\right)\leq m\left(r,\frac{1}{F}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}m\left(r,A_j\right)+\sum_{j=1}^{k}m\left(r,\frac{f_0^{(j)}}{f_0}\right)+O\left(1\right). \tag{2.3.5}$$

Alors on obtient de (2.3.3), (2.3.4) et (2.3.5)

$$T\left(r,f_0\right)=T\left(r,\frac{1}{f_0}\right)+O\left(1\right)$$

$$\leq k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f_0}\right)+T\left(r,F\right)+\sum_{j=0}^{k-1}T\left(r,A_j\right)+O\left(\log r\right)\quad \left(r\notin E\right). \tag{2.3.6}$$

Posons maintenant $\alpha=\max\left\{\sigma\left(A_d\right),\sigma\left(A_l\right),\sigma\left(F\right)\right\}$. Alors pour $\varepsilon>0$ donné et $r$ suffisamment grand, on a

$$T\left(r,F\right)<r^{\alpha+\varepsilon},\ T\left(r,A_j\right)<r^{\alpha+\varepsilon}\quad \left(j=0,...,k-1\right). \tag{2.3.7}$$

Ainsi, du $(2.3.6)$ et $(2.3.7)$, on obtient

$$T\left(r,f_0\right)\leq k\ \overline{N}\left(r,\frac{1}{f_0}\right)+\left(k+1\right)r^{\alpha+\varepsilon}+O\left(\log r\right) \tag{2.3.8}$$

est vérifiée pour $r$ suffisamment grand. Par conséquent

$$\sigma\left(f_0\right)\leq\max\left\{\alpha,\ \overline{\lambda}\left(f_0\right)\right\}=\max\left\{\sigma\left(A_d\right),\sigma\left(A_l\right),\sigma\left(F\right),\ \overline{\lambda}\left(f_0\right)\right\}. \tag{2.3.9}$$

Si $\sigma\left(A_d\right)\neq\sigma\left(A_l\right)\neq\sigma\left(F\right)$, $\overline{\lambda}\left(f_0\right)<\sigma\left(f_0\right)$, alors de (2.3.9), on obtient

$$\sigma\left(f_0\right)\leq\max\left\{\sigma\left(A_d\right),\sigma\left(A_l\right),\sigma\left(F\right)\right\} \tag{2.3.10}$$

et de (2.1.1), on obtient

$$\sigma\left(f_0\right)\geq\max\left\{\sigma\left(A_d\right),\sigma\left(A_l\right),\sigma\left(F\right)\right\}. \tag{2.3.11}$$

Par conséquent,

$$\sigma\left(f_0\right) = \max\left\{\sigma\left(A_d\right), \sigma\left(A_l\right), \sigma\left(F\right)\right\}. \tag{2.3.12}$$

De plus, si parmi $A_{d-1}, ..., A_0$, il existe une seule combinaison $A_{m_1}, ..., A_{m_s}$ $(d-1 \geq m_1 > m_2 > ... > m_s \geq 0)$ étant transcendentes, $\sigma\left(A_{m_j}\right)$ $(j = 1, ..., s)$ sont inégaux ou bien $s = 1$, et si $m_s = 0$ ou $m_s > 0$ et les polynômes $A_{m_s-1}, A_{m_s-2}, ..., A_0$ vérifient que $\deg A_j - j$ $(j = m_s - 1, m_s - 2, ..., 0)$ sont inégaux, ou bien $m_s = 1$ et $A_0 \not\equiv 0$, alors par le Lemme 2.2.6, toutes les solutions $f$ de (2.2.1) vérifient $\sigma\left(f\right) = \infty$.

Par conséquent $f_0 - f_1$ (on suppose $f_0, f_1$ $(f_0 \not\equiv f_1)$ deux solutions d'ordre fini de (2.1.1), alors $\sigma\left(f_0 - f_1\right) < \infty$) ne peut pas être une solution de l'équation homogène correspondante (2.2.1) de (2.1.1).

Par conséquent, l'équation (2.1.1) a au plus une solution exceptionnelle possible $f_0$ d'ordre fini.

**2.4 Preuve du théorème 2.1.4:** Par les Lemmes 2.2.1 et 2.2.2, nous savons que (2.1.1) doit avoir des solutions d'ordre infini, et toutes les solutions d'ordre infini satisfont (2.1.2).

Supposons que $f$ est une solution de (2.1.1) avec $\sigma\left(f\right) = \sigma < \infty$. Puisque $\sigma\left(F\right) < \beta$, pour $r$ suffisamment grand nous avons

$$\left|F\left(z\right)\right| \leq \exp\left\{o\left(1\right) r^{\beta}\right\}. \tag{2.4.1}$$

Pour $f$, posons $\sigma\left(f\right) = \sigma < +\infty$. Par le Lemme 2.2.3, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ ayant une mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) - E_1$, alors il existe une constante $R_0 = R_0\left(\theta\right) > 1$, tel que pour tout $z$ satisfaisant $\arg z = \theta$ et $|z| = r \geq R_0$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}\left(z\right)}{f^{(d)}\left(z\right)}\right| \leq |z|^{(k-d)\sigma} \quad , \; j = d+1, ..., k. \tag{2.4.2}$$

Montrons maintenant que $\left|f^{(d)}\left(z\right)\right|$ est bornée sur le rayon $\arg z = \theta \in [\varphi_m, \theta_m] - E_1$, $(m \in I_1)$.

Si $\left|f^{(d)}\left(z\right)\right|$ est non bornée sur le rayon $\arg z = \theta$, alors par le Lemme 2.2.4, il existe une suite infinie des points $z_n = r_n e^{i\,\theta}$ $(n = 1, 2, ...)$, tel que $r_n \to \infty$, $f^{(d)}\left(z_n\right) \to \infty$ et

$$\left|\frac{f^{(j)}\left(z\right)}{f^{(d)}\left(z\right)}\right| \leq \frac{1}{(d-j)!}\left(1 + o\left(1\right)\right)\left|z_n\right|^{d-j} \leq 2\left|z_n\right|^{d} \; , \; j = 0, 1, ..., d-1. \tag{2.4.3}$$

De la relation (2.4.1) et $\left|f^{(d)}(z_n)\right| \to \infty$ $(z_n \to \infty)$, on a

$$\left|\frac{F(z_n)}{f^{(d)}(z_n)}\right| \leq |F(z_n)| \leq \exp\left\{o(1)\, r_n^{\beta}\right\} \tag{2.4.4}$$

pour $|z_n|$ suffisamment grand.

En substituant $(2.1.5), (2.4.2), (2.4.3), (2.4.4)$ dans $(2.1.1)$,

$$\exp\left\{(1+\delta_1)\,\alpha r_n^{\beta}\right\} \leq |A_d(z_n)| \leq \left|\frac{F(z_n)}{f^{(d)}(z_n)}\right| + \left|\frac{f^{(k)}(z_n)}{f^{(d)}(z_n)}\right| + |A_{k-1}(z_n)| \left|\frac{f^{(k-1)}(z_n)}{f^{(d)}(z_n)}\right|$$

$$+ .... + |A_l(z_n)| \left|\frac{f^{(l)}(z_n)}{f^{(d)}(z_n)}\right| + ... + |A_{d+1}(z_n)| \left|\frac{f^{(d+1)}(z_n)}{f^{(d)}(z_n)}\right| + |A_{d-1}(z_n)| \left|\frac{f^{(d-1)}(z_n)}{f^{(d)}(z_n)}\right|$$

$$+ .... + |A_0(z_n)| \left|\frac{f(z_n)}{f^{(d)}(z_n)}\right| \leq M_0 r_n^{M_1} \exp\left\{\alpha \delta_1 r_n^{\beta}\right\} \tag{2.4.5}$$

$(M_0 > 0, M_1 > 0$ sont des constantes quelconques$)$.

Par (2.4.5), on a

$$\exp\left\{\alpha r_n^{\beta}\right\} \leq M_0 r_n^{M_1}.$$

C'est une contradiction.

Par conséquent $\left|f^{(d)}(z)\right|$ est bornée sur un rayon arbitraire $\arg z = \theta \in [\varphi_m, \theta_m] - E_1$, $(m \in I_1)$.

Par le même raisonnement que dans la preuve du Lemme 2.2.6, on a

$$|f(z)| \leq M_2 |z|^d \tag{2.4.6}$$

($M_2$ est une certaine constante) pour tout $z$ dans $\varphi_m + \varepsilon \leq \arg z \leq \theta_m - \varepsilon$ avec $|z| \geq r_0 > 0$, $(m \in I_1)$.

Par le Lemme 2.2.3, il existe un ensemble $E_2 \subset [0, 2\pi)$ ayant une mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) - E_2$, alors il existe une constante $R_1 = R_1(\theta) > 1$, tel que pour tout $z$ satisfaisant $\arg z = \theta$ et $|z| = r \geq R_1$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(l)}(z)}\right| \leq |z|^{(k-l)\sigma} \quad , \ j = l+1, ..., k. \tag{2.4.7}$$

Montrons maintenant que $\left|f^{(l)}(z)\right|$ est bornée sur le rayon $\arg z = \theta \in [\varphi_m, \theta_m] - E_2, (m \in I_2)$.

Si $\left|f^{(l)}(z)\right|$ est non bornée sur le rayon $\arg z = \theta$, alors par le Lemme 2.2.4, il existe une suite infinie de points $z_n = r_n e^{i\,\theta}$ $(n = 1, 2, ...)$, tel que $r_n \to \infty$,

$f^{(l)}(z_n) \to \infty$ et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(l)}(z)}\right| \leq \frac{1}{(l-j)!}(1+o(1))|z_n|^{l-j} \leq 2|z_n|^l \ \ , \ j=0,1,...,l-1. \quad (2.4.8)$$

De la relation (2.4.1) et $\left|f^{(l)}(z_n)\right| \to \infty \ (z_n \to \infty)$, on a

$$\left|\frac{F(z_n)}{f^{(l)}(z_n)}\right| \leq |F(z_n)| \leq \exp\left\{o(1) r_n^{\beta}\right\} \quad (2.4.9)$$

pour $|z_n|$ suffisamment grand.

En substituant $(2.1.6), (2.4.7), (2.4.8), (2.4.9)$ dans (2.1.1), on aura

$$\exp\left\{(1+\delta_2)\alpha r_n^{\beta}\right\} \leq |A_l(z_n)| \leq \left|\frac{F(z_n)}{f^{(l)}(z_n)}\right| + \left|\frac{f^{(k)}(z_n)}{f^{(l)}(z_n)}\right| + |A_{k-1}(z_n)| \left|\frac{f^{(k-1)}(z_n)}{f^{(l)}(z_n)}\right|$$

$$+....+|A_{l+1}(z_n)| \left|\frac{f^{(l+1)}(z_n)}{f^{(l)}(z_n)}\right| + |A_{l-1}(z_n)| \left|\frac{f^{(l-1)}(z_n)}{f^{(l)}(z_n)}\right| + ...+|A_d(z_n)| \left|\frac{f^{(d)}(z_n)}{f^{(l)}(z_n)}\right|$$

$$+.... + |A_0(z_n)| \left|\frac{f(z_n)}{f^{(l)}(z_n)}\right| \leq M_3 r_n^{M_4} \exp\left\{\alpha \delta_2 r_n^{\beta}\right\} \quad (2.4.10)$$

$(M_3 > 0, \ M_4 > 0$ sont des constantes quelconques$)$.

Par (2.4.10), nous avons $\exp\left\{\alpha r_n^{\beta}\right\} \leq M_3 r_n^{M_4}$. C'est une contradiction.

Par conséquent $\left|f^{(l)}(z)\right|$ est bornée sur un rayon arbitraire $\arg z = \theta \in [\varphi_m, \theta_m] - E_2$, $(m \in I_2)$.

Par le même raisonnement que dans la preuve du Lemme 2.2.6, on obtient

$$|f(z)| \leq M_5 |z|^l \quad (2.4.11)$$

($M_5$ est une certaine constante) pour tout $z$ dans $\varphi_m + \varepsilon \leq \arg z \leq \theta_m - \varepsilon$ avec $|z| \geq r_0 > 0$, $(m \in I_2)$.

Par (2.4.6) et (2.4.11), on a

$$|f(z)| \leq M |z|^l \quad (2.4.12)$$

pour tout $z$ dans $\varphi_m + \varepsilon \leq \arg z \leq \theta_m - \varepsilon$ avec $|z| \geq r_0 > 0$, $(m = 1, ..., n)$

$(M > 0$ est une certaine constante$)$.

Et également par le même raisonnement que dans la preuve du Lemme 2.2.6, nous pouvons obtenir que $f(z)$ est un polynôme de degré $\leq d-1$.

**2.5 Théorèmes généralisés:**

**Théorème 2.5.1:** Supposons que $k \geq 2$ est un nombre naturel et que $A_0, A_1, ...,$ $A_{k-1}, F \not\equiv 0$ sont des fonctions entières d'ordre fini, où il existe $A_{d_1}, A_{d_2}, ..., A_{d_p}$, $(0 \leq d_1 < d_2 < ... < d_p \leq k-1)$, tels que pour les constantes réelles $\alpha > 0$, $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_p > 0$, $0 < \beta < \infty$, $\max\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_p\} < \frac{1}{k}$, nous avons $\sigma(A_j) < \beta$ $(j \neq d_1, d_2, ..., d_p)$ *et* $\sigma(F) \geq \beta$. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe deux collections finies de nombres réels $\{\varphi_m\}$ et $\{\theta_m\}$ satisfaisant

$$\varphi_1 < \theta_1 < \varphi_2 < \theta_2 < ... < \varphi_n < \theta_n < \varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi$$

et

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\varphi_{m+1} - \theta_m\right) < \varepsilon,$$

tels que

$$|A_{d_i}(z)| \geq \exp\left\{(1+\delta_i)\,\alpha r^{\beta}\right\}, (i = 1, ..., p)\ ,\ \left|A_{d_j}(z)\right| \leq \exp\left\{\delta_i\ \alpha r^{\beta}\right\}\ , (j \neq i)$$

quand $z \to \infty$ dans $\varphi_m \leq \arg z \leq \theta_m$, $m \in I_i$ et $\{\varphi_m, \theta_m\} \subset H_i$, $H_i \subset [0, 2\pi)$, $H_i \cap H_j = \varnothing\ (j \neq i)$, $\bigcup_{i=1}^{p} H_i = [0, 2\pi)$, $I_i \cap I_j = \varnothing\ (j \neq i)$, $\bigcup_{i=1}^{p} I_i = \{1, 2, ..., n\}$.

Alors toutes les solutions de (2.1.1) sont des fonctions entières satisfaisant (2.1.2) avec certaines solutions d'ordre fini possibles. Toutes les solutions possibles d'ordre fini ont le même ordre de croissance $\sigma\,(0 \leq \sigma < \infty)$ et (2.1.1) doit avoir des solutions satisfaisant (2.1.2). S'il existe deux solutions d'ordre fini $f_0, f_1$ de (2.1.1), alors $f_0 - f_1$ est un polynôme avec $\deg(f_0 - f_1) \leq d-1$ et $f_0$ satisfait

$$\sigma = \sigma(f_0) \leq \max\left\{\sigma(A_{d_1}), \sigma(A_{d_2}), ..., \sigma\left(A_{d_p}\right), \sigma(F), \overline{\lambda}(f_0)\right\}.$$

Si $\sigma(A_{d_1}) \neq \sigma(A_{d_2}) \neq ... \neq \sigma\left(A_{d_p}\right) \neq \sigma(F)$, $\overline{\lambda}(f_0) < \sigma$, alors

$$\sigma(f_0) = \max\left\{\sigma(A_{d_1}), \sigma(A_{d_2}), ..., \sigma\left(A_{d_p}\right), \sigma(F)\right\}.$$

De plus, si parmi $A_{d_1-1}, ..., A_0$, il existe une seule combinaison $A_{m_1}, ..., A_{m_s}$ $(d_1 - 1 \geq m_1 > m_2 > ... > m_s \geq 0)$ étant transcendantes, $\sigma\left(A_{m_j}\right)$ $(j = 1, ..., s)$ sont inégaux ou bien $s = 1$, et si $m_s = 0$ ou $m_s > 0$ et les polynômes $A_{m_s-1}, A_{m_s-2}, ..., A_0$ vérifient que $\deg A_j - j\ \ (j = m_s - 1, m_s - 2, ..., 0)$ sont inégaux, ou bien $m_s = 1$ et $A_0 \not\equiv 0$, alors toutes les solutions de (2.1.1) vérifient (2.1.2) avec au plus une possibilité d'une solution d'ordre fini.

**Théorème 2.5.2:** Supposons que $A_0$, $A_1$, ..., $A_{d_1}$, ..., $A_{d_2}$, ..., $A_{d_p}$, ..., $A_{k-1}$, $\alpha$, $\delta_1$, $\delta_2$, ..., $\delta_p$, $\beta$, $\{\varphi_m\}$, $\{\theta_m\}$, $H_1$, $H_2$, ..., $H_p$, $I_1$, $I_2$, ..., $I_p$ et $k$ vérifient les hypothèses du Théorème 2.5.1, et que $F \not\equiv 0$ est une fonction entière d'ordre $\sigma(F) < \beta$.

Alors (2.1.1) doit avoir des solutions satisfaisant (2.1.2), avec quelques solutions polynômiales possibles de degré $\leq d - 1$.

# Chapitre 3

# Oscillation des solutions des équations différentielles linéaires

### 3.1 Introduction et résultats principaux:

Ce chapitre est consacré à étudier le problème de la croissance, de la distribution de zéros et des points fixes des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients entières de la forme

$$f^{(k)} + a_{k-1}f^{(k-1)} + ... + a_2 f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = F(z) \qquad (3.1.1)$$

où $k \geq 2$, $Q(z)$ est une fonction entière d'ordre fini et $c \in \mathbb{R}$ et $a_{k-1}, ..., a_2$ sont des constantes complexes. Tout d'abord, on donne les définitions suivantes.

**Définition 3.1.1:** (voir[7] , [18]) Soit $f(z)$ une fonction entière non constante dans le plan complexe. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de $f$ sont définis respectivement par

$$\sigma(f) = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log \nu_f(r)}{\log r} \quad , \quad \sigma_2(f) = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log\log \nu_f(r)}{\log r}$$

où $\nu_f(r)$ est l'indice central de $f(z)$.

La notation $S(r, f)$ dénote n'importe quelle quantité satisfaisant $S(r, f) = o(T(r, f))$ pour $r \to \infty$ excepté probablement un ensemble de $r$ de mesure linéaire finie.

Nous définissons également

$$\overline{\lambda}(f-z) = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log \overline{N}(r, \frac{1}{f-z})}{\log r}, \overline{\lambda}_2(f-z) = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log\log \overline{N}(r, \frac{1}{f-z})}{\log r}.$$

Récemment la théorie d'oscillation des équations différentielles complexes a été étudié activement.

Dans [32], Ye Zhou Li et Jun Wang ont étudié l'oscillation complexe de

$$f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = F(z) \qquad (3.1.2)$$

où $Q(z)$ et $F(z)$ sont des fonctions entières d'ordre fini avec $\sigma(F) < 1$. Ils ont obtenu les résultats suivants.

**Théorème 3.1.1:** Si $Q(z) = h(z)e^{cz}$**,** où $c \in \mathbb{R}$ et $h(z)$ est une fonction entière transcendante d'ordre $\sigma(h) < \frac{1}{2}$, alors toute solution non triviale $f$ de (3.1.2) satisfait $\sigma(f) = \overline{\lambda}(f-z) = \infty$ et $\sigma_2(f) = \overline{\lambda}_2(f-z) > \sigma(h)$. Supposons que $F \not\equiv 0$, alors pour toute solution de (3.1.2), nous avons $\overline{\lambda}(f) = \infty$ et $\overline{\lambda}_2(f) > \sigma(h)$.

Maintenant, on va étendre ce résultat pour l'équation différentielle linéaire d'ordre supérieur (3.1.1) où $Q(z)$ et $F(z)$ sont des fonctions entières d'ordre fini avec $\sigma(F) < 1$.

**Théorème 3.1.2:** Si $Q(z) = h(z)e^{cz}$, où $c \in \mathbb{R}$ et $h(z)$ est une fonction entière transcendante d'ordre $\sigma(h) < \frac{1}{2}$, alors toute solution non triviale $f$ de (3.1.1) satisfait $\sigma(f) = \overline{\lambda}(f - z) = \infty$ et $\sigma_2(f) = \overline{\lambda}_2(f - z) > \sigma(h)$. Supposons que $F \not\equiv 0$, alors pour toute solution de (3.1.1), nous avons $\overline{\lambda}(f) = \infty$ et $\overline{\lambda}_2(f) > \sigma(h)$.

**Corollaire 3.1.1:** Si $Q(z) = h(z)e^{cz}$, où $c \in \mathbb{R}$ et $h(z)$ est une fonction entière transcendante d'ordre $\sigma(h) < \frac{1}{2}$, alors toute solution non triviale $f$ de l'équation

$$f^{(k)} + e^{-z}f' + Q(z)f = F(z) \tag{3.1.3}$$

$(k \geq 2)$ satisfait $\sigma(f) = \overline{\lambda}(f - z) = \infty$ et $\sigma_2(f) = \overline{\lambda}_2(f - z) > \sigma(h)$. Supposons que $F \not\equiv 0$, alors pour toute solution $f$ de (3.1.3), nous avons $\overline{\lambda}(f) = \infty$ et $\overline{\lambda}_2(f) > \sigma(h)$.

Pour le cas $\sigma(F) \geq 1$, il y a un contre-exemple.

**Exemple 3.1.1:** l'équation

$$f^{(k)} + f^{(k-1)} + ... + f'' + e^{-z}f' + h(z)e^{-z}f = (k-1)e^{z} + 1 + h(z)$$

admet une solution d'ordre fini $f_0(z) = e^z$, où $h(z)$ est une fonction entière d'ordre pas plus de 1.

### 3.2 Lemmes Préliminaires

Pour prouver le Théorème 3.1.2, nous avons besoin des lemmes suivants:

**Lemme 3.2.1:** (voir [31]) Soient $f_1$ et $f_2$ des fonctions méromorphes non constantes et soient $a, b_1, b_2$ $(ab_1b_2 \not\equiv 0)$ des petites fonctions par rapport $f_1$ et $f_2$. Si

$$b_1f_1 + b_2f_2 \equiv a$$

alors

$$T(r, f_1) \leq \overline{N}(r, \frac{1}{f_1}) + \overline{N}(r, \frac{1}{f_2}) + \overline{N}(r, f_1) + S(r, f_1).$$

**Lemme 3.2.2:** (voir [12]) Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante, et soit $\alpha > 1$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $H \subset (1, \infty)$ ayant une mesure logarithmique finie et $B > 0$ une constante qui dépend seulement de $\alpha$ et $i, j$ $(0 \leq i < j)$, tels que pour tout $|z| \notin [0,1] \cup H$, nous avons

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leq B \left\{\frac{T(\alpha r, f)}{r} (\log^{\alpha} r) \log T(\alpha r, f)\right\}^{j-i}.$$

**Lemme 3.2.3:** (voir [29]) Soient $\omega(z)$ une fonction entière d'ordre $\sigma(\omega) = \beta < \frac{1}{2}$, $A(r) = \inf_{|z|=r} \log |\omega(z)|$ et $B(r) = \sup_{|z|=r} \log |\omega(z)|$. Si $\beta < \alpha < 1$, alors

$$\underline{\log dens}\{r : A(r) > (\cos \pi\alpha) B(r)\} \geq 1 - \frac{\sigma}{\alpha}.$$

En fait, pour le cas $\sigma(\omega) > 0$, il y a des estimations plus précises de croissance de $\omega(z)$.

**Lemme 3.2.4:** (voir [4]) Soit $\omega(z)$ une fonction entière d'ordre $\varrho$ où $0 < \varrho < \frac{1}{2}$, et soit $\varepsilon$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $S \subset [0, \infty)$ ayant une densité supérieure moins de $1 - 2\varrho$ tel que $|\omega(z)| > exp\{|z|^{\varrho - \varepsilon}\}$ pour tout $z$ satisfaisant $|z| \in S$.

**Lemme 3.2.5:** (voir [2], [1]) Soit $h(z)$ une fonction entière transcendante d'ordre $\sigma(h) = \sigma < \frac{1}{2}$. Alors il existe un sous-ensemble $H \subset (1, \infty)$ ayant une mesure logarithmique infinie, tels que si $\sigma = 0$, alors

$$\frac{\min\{\log |h(z)| : |z| = r\}}{\log r} \to \infty \ (|z| = r \in H, r \to \infty)$$

et si $\sigma > 0$, alors pour tout $\alpha\,(0 < \alpha < \sigma)$

$$\log |h(z)| > r^{\alpha}, \ (|z| = r \in H, r \to \infty).$$

**3.3 Preuve du Théorème 3.1.2:**

**Etape I:** Montrons que $\sigma(f) \geq 1$.

De (3.1.1) on a

$$e^{-z} f' + h e^{cz} f = F - \left(f^{(k)} + a_{k-1} f^{(k-1)} + \ldots + a_2 f''\right). \tag{3.3.1}$$

Si $F - \left(f^{(k)} + a_{k-1} f^{(k-1)} + \ldots + a_2 f''\right) \equiv 0$ et $c \neq -1$, alors

$$f = A \exp\left\{-\int h e^{(c+1)z} dz\right\},$$

où $A$ est une constante non nulle.

Sous la condition $F - \left(f^{(k)} + a_{k-1} f^{(k-1)} + \ldots + a_2 f''\right) \equiv 0$ et $c = -1$, on obtient

$$f = B\exp\left\{-\int hdz\right\},$$

où $B$ est une constante non nulle. Si $F-\left(f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+...+a_2f''\right)\not\equiv 0$, alors on réécrit (3.3.1) sous la forme

$$f'e^{-z}+hfe^{cz}=F-\left(f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+...+a_2f''\right).$$

Supposons que $\sigma(f)<1$, alors

$$T\left(r,f'\right)=o\left\{T\left(r,e^{-z}\right)\right\}\ ,\ T\left(r,f'\right)=o\left\{T(r,e^{cz})\right\}$$

$$T(r,hf)=o\left\{T(r,e^{-z})\right\}\ ,\ T(r,hf)=o\left\{T(r,e^{cz})\right\}$$
$$T\left(r,F-\left(f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+...+a_2f''\right)\right)=o\left\{T(r,e^{-z})\right\}$$
$$T\left(r,F-\left(f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+...+a_2f''\right)\right)=o\left\{T(r,e^{cz})\right\}$$

et par le Lemme 3.2.1

$$T\left(r,e^{-z}\right)\le\overline{N}\left(r,\frac{1}{e^{-z}}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{e^{cz}}\right)+\overline{N}\left(r,e^{-z}\right)+S\left(r,e^{-z}\right)$$

$$=\overline{N}(r,e^{z})+\overline{N}(r,e^{-cz})+\overline{N}(r,e^{-z})+S\left(r,e^{-z}\right)$$
$$=S\left(r,e^{-z}\right).$$

C'est une contradiction.

D'après la théorie de Wiman-Valiron (voir [15] , [30]), il existe un ensemble $E_1$ de mesure logarithmique finie tels que

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\nu_f(r)}{z}\right)^k(1+o(1)) \tag{3.3.2}$$

où $|f(z)|=M(r,f)$ et $r\notin E_1$.

**Etape II:** Dans cette étape, nous montrons que $\sigma(f)=\overline{\lambda}(f)=\infty$ et $\sigma_2(f)=\overline{\lambda}_2(f)\ge\sigma(h)$ pour $F\not\equiv 0$.

Par le Lemme 3.2.2, pour tout $\varepsilon>0$ donné, il existe un ensemble $E_2$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout $|z|\notin[0,1]\cup E_2$, nous avons

$$\left|\frac{F'(z)}{F(z)}\right|<r^{\sigma(F)-1+\varepsilon}\quad;\quad\left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right|<r^{\sigma(h)-1+\varepsilon}. \tag{3.3.3}$$

En dérivant (3.1.1), on obtient

$$f^{(k+1)}+a_{k-1}f^{(k)}+...+a_2f'''+e^{-z}f''+[he^{cz}-e^{-z}]f'+[h'e^{cz}+che^{cz}]f=F' \tag{3.3.4}$$

Posons

$$F' = \frac{F'}{F}F.$$

Ce qui implique que (3.1.1) multiplié par $\frac{F'}{F}$ donne $F'$ dans (3.3.4), alors on obtient

$$f^{(k+1)} + \left(a_{k-1} - \frac{F'}{F}\right) f^{(k)} + \left(a_{k-2} - a_{k-1}\frac{F'}{F}\right) f^{(k-1)} + ...$$

$$+ \left(a_2 - a_3\frac{F'}{F}\right) f''' + \left(e^{-z} - a_2\frac{F'}{F}\right) f'' + \left[he^{cz} - e^{-z} - e^{-z}\frac{F'}{F}\right] f'$$

$$+ \left[h'e^{cz} + che^{cz} - he^{cz}\frac{F'}{F}\right] f = 0. \tag{3.3.5}$$

Ceci mène à

$$\frac{f^{(k+1)}}{f} + \left(a_{k-1} - \frac{F'}{F}\right) \frac{f^{(k)}}{f} + \left(a_{k-2} - a_{k-1}\frac{F'}{F}\right) \frac{f^{(k-1)}}{f} + ...$$

$$+ \left(a_2 - a_3\frac{F'}{F}\right) \frac{f'''}{f} + \left(e^{-z} - a_2\frac{F'}{F}\right) \frac{f''}{f}$$

$$+ \left[he^{cz} - e^{-z} - e^{-z}\frac{F'}{F}\right] \frac{f'}{f} + he^{cz}\left[\frac{h'}{h} + c - \frac{F'}{F}\right] = 0. \tag{3.3.6}$$

Nous discutons deux cas: A. $\sigma(h) > 0$ et B. $\sigma(h) = 0$.

**Cas A:** Si $\sigma(h) > 0$, alors pour toute constante donnée $\varepsilon$, du Lemme 3.2.4 il existe un ensemble $E_3 \subset [0, \infty)$ ayant une densité supérieure moins de $1 - 2\sigma(h)$ tel que

$$|h(z)| > \exp\left\{|z|^{\sigma(h)-\varepsilon}\right\}, \quad |z| \in E_3. \tag{3.3.7}$$

Alors on peut prendre une suite de points $\left\{z_n = r_n e^{i\theta_n}\right\}$, où $|f(z_n)| = M(r_n, f)$, $\theta_n \in [0, 2\pi)$ et $r_n \in E_3 - E_1 \cup E_2$, (3.3.2), (3.3.3) et (3.3.7) sont vérifiées pour tout $z_n$. En passant à une sous-suite de $\{\theta_n\}$, si nécessaire on passe à la limite $\lim_{j\to\infty} \theta_{n_j} = \theta_0$.

On réécrit (3.1.1) sous la forme

$$\frac{f^{(k)}}{f} + a_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f} + ... + a_2\frac{f''}{f} + e^{-z_n}\frac{f'}{f} + he^{cz_n} = \frac{F}{f}. \tag{3.3.8}$$

En substituant (3.3.2) dans (3.3.8), on aura

$$\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^k (1+o(1)) + a_{k-1}\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k-1} (1+o(1)) + ... + a_2\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^2 (1+o(1))$$

$$+e^{-z_n}\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)(1+o(1))+h\left(z_n\right)e^{cz_n}=\frac{F\left(z_n\right)}{f\left(z_n\right)}.$$

Alors

$$\nu_f^k(r_n)(1+o(1))+a_{k-1}z_n\nu_f^{k-1}(r_n)(1+o(1))+...+a_2z_n^{k-2}\nu_f^2(r_n)(1+o(1))$$

$$+z_n^{k-1}e^{-z_n}\nu_f(r_n)(1+o(1))+z_n^kh\left(z_n\right)e^{cz_n}=\frac{F\left(z_n\right)}{f\left(z_n\right)}z_n^k. \tag{3.3.9}$$

La combinaison de (3.3.2) avec (3.3.6) mène à

$$\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k+1}(1+o(1))+\left(a_{k-1}-\frac{F'\left(z_n\right)}{F\left(z_n\right)}\right)\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^k(1+o(1))$$

$$+\left(a_{k-2}-a_{k-1}\frac{F'\left(z_n\right)}{F\left(z_n\right)}\right)\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k-1}(1+o(1))+...+\left(a_2-a_3\frac{F'\left(z_n\right)}{F\left(z_n\right)}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^3(1+o(1))+\left(e^{-z_n}-a_2\frac{F'\left(z_n\right)}{F\left(z_n\right)}\right)\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^2(1+o(1))$$

$$+\left[h\left(z_n\right)e^{cz_n}-e^{-z_n}-e^{-z_n}\frac{F'\left(z_n\right)}{F\left(z_n\right)}\right]\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))$$

$$+h\left(z_n\right)e^{cz_n}\left[\frac{h'\left(z_n\right)}{h\left(z_n\right)}+c-\frac{F'\left(z_n\right)}{F\left(z_n\right)}\right]=0. \tag{3.3.10}$$

Supposons que $\sigma_2(f)<\sigma(h)$, donc on a

$$\nu_f(r_n)\leq\exp\left\{r_n^{\sigma(h)-3\varepsilon}\right\}, \tag{3.3.11}$$

où

$$0<4\varepsilon<\max\left\{\sigma(h)-\sigma_2(f),1-\sigma(F)\right\}.$$

D'autre part, par [16, $p.$ 15], $\nu_f(r_n)\to\infty$.

Maintenant, nous considérons les trois sous-cas suivants.

**Sous cas A1:** $\theta_0\in S_0=(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$. Puisque $S_0$ est un ensemble ouvert, $\theta_n\in S_0$ et $|\theta_n-\theta_0|<\frac{1}{2}\min\left\{\frac{3\pi}{2}-\theta_0,\theta_0-\frac{\pi}{2}\right\}$, pour $n$ suffisamment grand,nous avons

$$|\exp(-z_n)|=\exp\left\{-r_n\cos\theta_n\right\}.$$

Ceci implique

$$|\exp(-z_n)|\geq\exp\left\{\eta r_n\right\} \tag{3.3.12}$$

où $\eta=\min\left\{-\cos\left(\frac{2\theta_0+3\pi}{4}\right),-\cos\left(\frac{2\theta_0+\pi}{4}\right)\right\}>0$ est une constante.

On réécrit (3.3.10) sous la forme

$$h\left(z_n\right)e^{(c+1)z_n}\left[\frac{h'\left(z_n\right)}{h\left(z_n\right)}+c-\frac{F'\left(z_n\right)}{F\left(z_n\right)}+\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\right]$$

$$+\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\left[\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))-1-\frac{F'\left(z_n\right)}{F\left(z_n\right)}\right]$$

$$=-e^{z_n}\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^2(1+o(1))\left\{\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k-1}(1+o(1))+\left(a_{k-1}-\frac{F'\left(z_n\right)}{F\left(z_n\right)}\right)\right.$$

$$\cdot\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k-2}(1+o(1))+\left(a_{k-2}-a_{k-1}\frac{F'\left(z_n\right)}{F\left(z_n\right)}\right)\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k-3}(1+o(1))$$

$$\left.+...+\left(a_2-a_3\frac{F'\left(z_n\right)}{F\left(z_n\right)}\right)\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))-a_2\frac{F'\left(z_n\right)}{F\left(z_n\right)}\right\}. \tag{3.3.13}$$

Pour $c+1>0$, il s'ensuit de (3.3.12) que

$$\left|\exp\left(c+1\right)z_n\right|\leq\exp\left\{-(c+1)\eta r_n\right\}\ \text{ et }\ \left|\exp(z_n)\right|\leq\exp\left\{-\eta r_n\right\} \tag{3.3.14}$$

quand $n$ est suffisamment grand. Puis, en combinant ceci avec (3.3.3), (3.3.7), (3.3.11) et (3.3.13), nous obtenons

$$\frac{\nu_f(r_n)}{r_n}(1+o(1))\left|\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))-1-\frac{F'\left(z_n\right)}{F\left(z_n\right)}\right|\leq(1+o(1))\exp\left\{-r_n^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Donc

$$\left|\nu_f(r_n)(1+o(1))-z_n-\frac{F'\left(z_n\right)}{F\left(z_n\right)}z_n\right|\leq\frac{(1+o(1))}{\nu_f(r_n)}r_n^2\exp\left\{-r_n^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

D'où

$$\left|\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))-1-\frac{F'\left(z_n\right)}{F\left(z_n\right)}\right|\to 0\text{ quand }n\to\infty.$$

Ce qui implique

$$\nu_f(r_n)=(1+o(1))r_n\ ,\ n\text{ est assez grand.} \tag{3.3.15}$$

Par l'inégalité de Cauchy et [16, $p$. 26], on obtient

$$\mu\left(r\right)\leq M(r,f)$$

et

$$\nu_f(r)<\left[\log\mu\left(r\right)\right]^{1+\varepsilon'}$$

pour tout $0 < \varepsilon' < 1$ donné. En utilisant (3.3.15), nous obtenons

$$M(r_n, f) \geq \exp\left\{r_n^{1-\varepsilon}\right\},$$

$n$ est assez grand.

Ainsi, on a

$$|F(z_n)| \leq \exp\left\{r_n^{1-2\varepsilon}\right\}$$

et

$$\left|\frac{F(z_n)}{f(z_n)} z_n^k\right| = \frac{|F(z_n)|}{M(r_n, f)} r_n^k \to 0 \ , \ \text{quand } n \to \infty. \tag{3.3.16}$$

En substituant (3.3.16) dans (3.3.9), nous obtenons

$$\begin{aligned} & e^{z_n}\Big[\nu_f^k(r_n)(1+o(1)) + a_{k-1}z_n\nu_f^{k-1}(r_n)(1+o(1)) \\ & +\ldots + a_2 z_n^{k-2}\nu_f^2(r_n)(1+o(1)) + o(1)\Big] \\ & + z_n^{k-1}\nu_f(r_n)(1+o(1)) + \ z_n^k h(z_n)\, e^{(c+1)z_n} = 0. \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

La combinaison avec (3.3.7),(3.3.11) et (3.3.14) mène à

$$\begin{aligned} & \nu_f(r_n) r_n^{k-1}(1+o(1)) \leq \left|z_n^{k-1}\nu_f(r_n)(1+o(1))\right| \\ & \leq \exp\{-\eta r_n\}\left\{2\nu_f^k(r_n) + 2|a_{k-1}|\, r_n\nu_f^{k-1}(r_n) + \ldots + 2|a_2|\, r_n^{k-2}\nu_f^2(r_n) + 1\right\} \\ & + r_n^k \exp\left\{r_n^{\sigma(h)+\varepsilon}\right\}\exp\{-(c+1)\eta r_n\} \\ \leq\ & M_0 r_n^{k-2}\exp\left\{k r_n^{\sigma(h)-3\varepsilon}\right\}\exp\{-\eta r_n\} + r_n^k\exp\left\{r_n^{\sigma(h)+\varepsilon}\right\}\exp\{-(c+1)\eta r_n\} \\ & \leq \exp\left\{-r_n^{\frac{1}{2}}\right\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\nu_f(r_n) \leq \frac{1}{r_n^{k-1}}\exp\left\{-r_n^{\frac{1}{2}}\right\}(1+o(1)).$$

D'où

$$\nu_f(r_n) \to 0$$

quand $n \to \infty$. Ce qui est impossible.

Pour le cas $c = -1$, il s'ensuit de (3.3.13) et (3.3.14) que

$$\frac{1}{h(z_n)}\left\{\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\left[\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1)) - 1 - \frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right] + o(1)\right\}$$

$$= -\left[\frac{h'(z_n)}{h(z_n)} - 1 - \frac{F'(z_n)}{F(z_n)} + \frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\right].$$

En combinant ceci avec (3.3.3),(3.3.7) et (3.3.11), nous obtenons

$$\left|\frac{h'(z_n)}{h(z_n)} - 1 - \frac{F'(z_n)}{F(z_n)} + \frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\right| \leq (1+o(1)) \exp\left\{-r_n^{\frac{\sigma(h)-\varepsilon}{2}}\right\}.$$

Donc

$$\left|\frac{h'(z_n)}{h(z_n)} - 1 - \frac{F'(z_n)}{F(z_n)} + \frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\right| \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

En utilisant (3.3.3), (3.3.15) et (3.3.16) dans (3.3.9), on obtient

$$e^{z_n}\left[\nu_f^k(r_n)(1+o(1)) + a_{k-1}z_n\nu_f^{k-1}(r_n)(1+o(1)) + \ldots + a_2 z_n^{k-2}\nu_f^2(r_n)(1+o(1))\right.$$

$$\left.+o(1)\right] + z_n^{k-1}\nu_f(r_n)(1+o(1)) = -z_n^k h\left(z_n\right).$$

D'après (3.3.14) et (3.3.7), on aura

$$r_n^k \exp\left\{r_n^{\sigma(h)-\varepsilon}\right\} \leq \left|-\ z_n^k h\left(z_n\right)\right| \leq M_1 r_n^k \nu_f^k(r_n)$$

($M_1$ certaine constante).

Donc

$$\nu_f^k(r_n) \geq \frac{1}{M_1}\exp\left\{r_n^{\sigma(h)-\varepsilon}\right\} \geq \exp\left\{r_n^{\sigma(h)-\frac{3}{2}\varepsilon}\right\}.$$

D'où

$$\nu_f(r_n) \geq \exp\left\{\frac{1}{k}r_n^{\sigma(h)-\frac{3}{2}\varepsilon}\right\} \geq \exp\left\{r_n^{\sigma(h)-2\varepsilon}\right\}.$$

Ce qui contredit (3.3.11).

Pour le cas $c+1<0$, il s'ensuit de (3.3.12) que

$$|\exp(c+1)z_n| \geq \exp\left\{-(c+1)\eta r_n\right\} \text{ et } |\exp(z_n)| \leq \exp\left\{-\eta r_n\right\} \quad (3.3.18)$$

pour $n$ suffisamment grand. Encore de (3.3.13), on obtient

$$\frac{1}{h(z_n)e^{(c+1)z_n}}\left\{\frac{\nu_f(r_n}{z_n}(1+o(1))\left[\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1)) - 1 - \frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right] + o(1)\right\}$$

$$= -\left[\frac{h'(z_n)}{h(z_n)} + c - \frac{F'(z_n)}{F(z_n)} + \frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\right].$$

Donc, on aura

$$\left|\frac{h'(z_n)}{h(z_n)} + c - \frac{F'(z_n)}{F(z_n)} + \frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\right| \leq (1+o(1)) \exp\left\{-r_n^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Ainsi,

$$\left|\frac{h'(z_n)}{h(z_n)}+c-\frac{F'(z_n)}{F(z_n)}+\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\right|\to 0 \text{ quand } n\to\infty.$$

Ce qui mène à

$$\nu_f(r_n)=(1+o(1))\,|c|\,r_n\ ,\ n \text{ est assez grand.}$$

De même, (3.3.16) est vérifiée. En combinant (3.3.11),(3.3.17) et (3.3.18),

$$e^{z_n}\left[\nu_f^k(r_n)(1+o(1))+a_{k-1}z_n\nu_f^{k-1}(r_n)(1+o(1))+...+a_2z_n^{k-2}\nu_f^2(r_n)(1+o(1))\right.$$

$$\left.+o(1)\right]+z_n^{k-1}\nu_f(r_n)(1+o(1))=-z_n^ke^{(c+1)z_n}h\left(z_n\right).$$

D'où,

$$r_n^k\exp\left\{r_n^{\sigma(h)-\varepsilon}\right\}\exp\left\{-(c+1)\eta r_n\right\}\leq\left|-\ z_n^ke^{(c+1)z_n}h\left(z_n\right)\right|\leq M_2r_n^k\nu_f^k(r_n)$$

( $M_2$ certaine constante).

Par suite

$$\nu_f^k(r_n)\geq\frac{1}{M_2}\exp\left\{r_n^{\sigma(h)-\varepsilon}\right\}\exp\left\{-(c+1)\eta r_n\right\}\geq\exp\left\{r_n^{\sigma(h)-\frac{3}{2}\varepsilon}\right\}.$$

Donc

$$\nu_f(r_n)\geq\exp\left\{\frac{1}{k}r_n^{\sigma(h)-\frac{3}{2}\varepsilon}\right\}\geq\exp\left\{r_n^{\sigma(h)-2\varepsilon}\right\}.$$

Ce qui contredit (3.3.11)

Alors nous avons $\sigma_2(f)\geq\sigma(h)$ dans ce sous cas A1.

**Sous cas A2:**

$\theta_0\in S_1=(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3\pi}{2},2\pi)$. Puisque $S_1$ est un ensemble ouvert, alors $\theta_n\in S_1$ pour $n$ suffisamment grand. On a

$$|\exp(-z_n)|\leq\exp\left\{-\eta r_n\right\}, \tag{3.3.19}$$

où $\eta=\min\left\{\cos\left(\frac{2\theta_0+\pi}{4}\right),\cos\left(\frac{2\theta_0+3\pi}{4}\right)\right\}>0$ est une constante.

On réécrit (3.3.10) sous la forme

$$e^{-z_n}\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\left[\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))-1-\frac{F'\left(z_n\right)}{F\left(z_n\right)}\right]$$

$$+h\left(z_n\right)e^{cz_n}\left[\frac{h'\left(z_n\right)}{h\left(z_n\right)}+c-\frac{F'\left(z_n\right)}{F\left(z_n\right)}+\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\right]$$

$$= -\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^2 (1+o(1)) \left\{ \left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k-1} (1+o(1)) + \left(a_{k-1} - \frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right) \cdot \right.$$

$$\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k-2} (1+o(1)) + \left(a_{k-2} - a_{k-1}\frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right)\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k-3} (1+o(1))$$

$$\left. +...+\left(a_2 - a_3\frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right)\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1)) - a_2\frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right\}. \qquad (3.3.20)$$

Pour $c > 0$, de (3.3.19) on obtient

$$|\exp(cz_n)| \geq \exp\{c\eta r_n\}.$$

En substituant ceci avec (3.3.3),(3.3.19) et (3.3.11) dans (3.3.20), nous obtenons

$$\left|\frac{h'(z_n)}{h(z_n)} + c - \frac{F'(z_n)}{F(z_n)} + \frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\right| \leq (1+o(1))\exp\left\{-r_n^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

D'où,

$$\left|\frac{h'(z_n)}{h(z_n)} + c - \frac{F'(z_n)}{F(z_n)} + \frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\right| \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Encore de (3.3.3), on obtient

$$\nu_f(r_n) = (1+o(1))\,|c|\,r_n\ ,\ n \text{ est assez grand.}$$

Par conséquent, (3.3.16) est vérifiée. De même, il s'ensuit de (3.3.7), (3.3.9), (3.3.16) et (3.3.19)

$$\nu_f^k(r_n)(1+o(1)) + a_{k-1}z_n\nu_f^{k-1}(r_n)(1+o(1)) + ... + a_2 z_n^{k-2}\nu_f^2(r_n)(1+o(1))$$

$$+z_n^{k-1}e^{-z_n}\nu_f(r_n)(1+o(1)) + o(1) = -z_n^k e^{cz_n} h(z_n).$$

Donc

$$r_n^k \exp\left\{r_n^{\sigma(h)-\varepsilon}\right\}\exp\{c\eta r_n\} \leq \left|-z_n^k e^{cz_n} h(z_n)\right| \leq M_3 r_n^k \nu_f^k(r_n)$$

($M_3$ une certaine constante). D'où,

$$\nu_f^k(r_n) \geq \frac{1}{M_3}\exp\left\{r_n^{\sigma(h)-\varepsilon}\right\}\exp\{c\eta r_n\} \geq \frac{1}{M_3}\exp\left\{r_n^{\sigma(h)-\varepsilon}\right\} \geq \exp\left\{r_n^{\sigma(h)-\frac{3}{2}\varepsilon}\right\}.$$

Par conséquent

$$\nu_f(r_n) \geq \exp\left\{\frac{1}{k}r_n^{\sigma(h)-\frac{3}{2}\varepsilon}\right\} \geq \exp\left\{r_n^{\sigma(h)-2\varepsilon}\right\}.$$

Ce qui contredit (3.3.11).

Pour $c = 0$, en substituant (3.3.3),(3.3.7), (3.3.11) et (3.3.19) dans (3.3.20), on aura

$$\left|\frac{h'(z_n)}{h(z_n)} - \frac{F'(z_n)}{F(z_n)} + \frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\right| \leq (1+o(1)) \left\{\exp\left\{-r_n^{\frac{1}{2}(\sigma(h)-\varepsilon)}\right\} + \exp\left\{-r_n^{\frac{1}{2}}\right\}\right\}$$

D'où,

$$\left|\frac{h'(z_n)}{h(z_n)} - \frac{F'(z_n)}{F(z_n)} + \frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\right| \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Ceci implique

$$\nu_f(r_n) \leq r_n^{\max\{\sigma(h),\sigma(F)\}+\varepsilon}.$$

D'autre part, en substituant (3.3.3),(3.3.7) et (3.3.11) dans (3.3.9), on a

$$\frac{1}{h(z_n)} \left\{\nu_f^k(r_n)(1+o(1)) + a_{k-1} z_n \nu_f^{k-1}(r_n)(1+o(1)) + ... + a_2 z_n^{k-2} \nu_f^2(r_n)(1+o(1))\right.$$

$$\left. + z_n^{k-1} e^{-z_n} \nu_f(r_n)(1+o(1))\right\} + z_n^k = \frac{1}{h(z_n)} \frac{F(z_n)}{f(z_n)} z_n^k.$$

Par suite

$$\left|\frac{1}{h(z_n)} \left\{\nu_f^k(r_n)(1+o(1)) + a_{k-1} z_n \nu_f^{k-1}(r_n)(1+o(1)) + ...\right.\right.$$

$$\left.\left. + a_2 z_n^{k-2} \nu_f^2(r_n)(1+o(1)) + z_n^{k-1} e^{-z_n} \nu_f(r_n)(1+o(1))\right\}\right|$$
$$\leq \left|\frac{1}{h(z_n)}\right| M_4 r_n^{k-1} \nu_f^k(r_n)$$
$$\leq \exp\left\{-r_n^{\sigma(h)-\varepsilon}\right\} M_4 r_n^{k-1} \exp\left\{k r_n^{\sigma(h)-3\varepsilon}\right\}$$
$$\leq \exp\left\{-r_n^{\frac{1}{2}(\sigma(h)-\varepsilon)}\right\}.$$

D'où,

$$\frac{1}{h(z_n)} \frac{F(z_n)}{f(z_n)} z_n^k = z_n^k + o(1) = z_n^k (1 + o(1)).$$

Donc,

$$|h(z_n)| \, |1+o(1)| = \frac{|F(z_n)|}{M(r_n, f)}$$

Ceci mène à

$$M(r_n, f) \leq \exp\left\{r_n^{\sigma(F)-\sigma(h)+\varepsilon}\right\}.$$

Ce qui est impossible par le théorème de Lindelöf.

Si $c < 0$, alors de (3.3.19), on obtient

$$|\exp(cz_n)| \leq \exp\{c\eta r_n\},\, n \to \infty.$$

Posons

$$L = \left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k-1}(1+o(1)) + \left(a_{k-1} - \frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right)\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k-2}(1+o(1))$$

$$+\left(a_{k-2} - a_{k-1}\frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right)\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k-3}(1+o(1)) + \ldots$$
$$+\left(a_2 - a_3\frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right)\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1)) - a_2\frac{F'(z_n)}{F(z_n)}.$$

Encore de (3.3.20), on obtient

$$\frac{\nu_f^2(r_n)}{r_n^k}(1+o(1))\,|L| \leq (1+o(1))\exp\left\{-r_n^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Donc,

$$|L| \leq r_n^k \exp\left\{-r_n^{\frac{1}{2}}\right\}\frac{(1+o(1))}{\nu_f^2(r_n)}.$$

D'où $|L| \to 0$ quand $n \to \infty$, c'est à-dire $L = o(1)$.

Par suite

$$-\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k-1}(1+o(1)) = \left(a_{k-1} - \frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right)\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k-2}(1+o(1))$$

$$+\left(a_{k-2} - a_{k-1}\frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right)\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k-3}(1+o(1)) + \ldots$$
$$+\left(a_2 - a_3\frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right)\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1)) - a_2\frac{F'(z_n)}{F(z_n)} + o(1).$$

Par conséquent

$$\left(\frac{\nu_f(r_n)}{r_n}\right)^{k-1}|(1+o(1))|$$

$$\leq \left|a_{k-1} - \frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right|\left(\frac{\nu_f(r_n)}{r_n}\right)^{k-2}|(1+o(1))| + \ldots$$
$$+\left|a_2 - a_3\frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right|\frac{\nu_f(r_n)}{r_n}|(1+o(1))| + |a_2|\left|\frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right| + 1$$

$$\leq 2\left(|a_{k-1}|+r_n^{\sigma(F)-1+\varepsilon}\right)\left(\frac{\nu_f(r_n)}{r_n}\right)^{k-2}+...$$

$$+2\left(|a_2|+|a_3|\,r_n^{\sigma(F)-1+\varepsilon}\right)\frac{\nu_f(r_n)}{r_n}+|a_2|\,r_n^{\sigma(F)-1+\varepsilon}+1$$

$$\leq 2\left(|a_{k-1}|+1\right)\left(\frac{\nu_f(r_n)}{r_n}\right)^{k-2}+...+2\left(|a_2|+|a_3|\right)\frac{\nu_f(r_n)}{r_n}+|a_2|+1$$

$$\leq M'\left(\frac{\nu_f(r_n)}{r_n}\right)^{k-2}$$

($M'>1$ une certaine constante).

Ceci implique que, $\sigma(f)<1$. C'est une contradiction.

**Sous-cas A3:** $\theta_0=\frac{\pi}{2}$ et $\theta_0=\frac{3\pi}{2}$. Cela veut dire que $\mathrm{Re}\left\{-r_ne^{i\theta_n}\right\}=0$. Sans perte de généralité, on considère le secteur $S_2=\left\{z:\frac{\pi}{2}-\varepsilon\leq\arg z\leq\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right\}$, où $0<\varepsilon<1$. Il existe un nombre fini de points de la suite $\{z_n\}$ dans $S_2$ sauf l'axe imaginaire. En effet, s'il existe un nombre infini de points $\left\{z_{n_j}\right\}$ à l'extérieur de $S_3=\left\{z:\frac{\pi-\varepsilon}{2}\leq\arg z\leq\frac{\pi+\varepsilon}{2}\right\}$, en prenant $\lim_{j\to\infty}\theta_{n_j}=\theta_0$, Du raisonnement du sous-cas A1 et A2, cela est impossible. Comme $\varepsilon$ est arbitraire, on sait que presque toute la suite est dans l'axe imaginaire sauf peut être un nombre fini de points. Alors, il existe $N>0$ tel que, quand $n>N$ on a, $-1<\mathrm{Re}\left\{-r_ne^{i\theta_n}\right\}<1$. Donc

$$e^{-1}<\left|\exp\left(-z_n\right)\right|<e. \tag{3.3.21}$$

On réécrit (3.3.10) sous la forme

$$\left[\frac{h'(z_n)}{h(z_n)}+c-\frac{F'(z_n)}{F(z_n)}+\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\right]$$

$$+\frac{e^{-(c+1)z_n}}{h(z_n)}\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\left[\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))-1-\frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right]$$

$$=-\frac{e^{-cz_n}}{h(z_n)}\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^2(1+o(1))\left\{\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k-1}(1+o(1))\right.$$

$$+\left(a_{k-1}-\frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right)\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k-2}(1+o(1))$$

$$+\left(a_{k-2}-a_{k-1}\frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right)\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k-3}(1+o(1))+...$$

$$\left.+\left(a_2-a_3\frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right)\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))-a_2\frac{F'(z_n)}{F(z_n)}\right\}. \tag{3.3.22}$$

Puisque $c$ est une constante réelle, de (3.3.21) nous avons

$$A^{-1} < |\exp\{-(c+1)z_n\}| < A \quad ; \quad B^{-1} < |\exp\{-cz_n\}| < B \qquad (3.3.23)$$

où $A, B$ sont des nombres entiers positifs supérieurs à 1. En combinant ceci avec (3.3.3), (3.3.7) et (3.3.11) dans (3.3.22),

$$\left|\frac{h'(z_n)}{h(z_n)} + c - \frac{F'(z_n)}{F(z_n)} + \frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\right| \leq (1+o(1))\exp\left\{-r_n^{\frac{1}{2}(\sigma(h)-\varepsilon)}\right\}.$$

D'où

$$\left|\frac{h'(z_n)}{h(z_n)} + c - \frac{F'(z_n)}{F(z_n)} + \frac{\nu_f(r_n)}{z_n}(1+o(1))\right| \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \qquad (3.3.24)$$

Si $c \neq 0$, (3.3.24) implique

$$\nu_f(r_n) = (1+o(1))\,|c|\,r_n \ , \ n \text{ est assez grand.}$$

De même, (3.3.16) est vérifiée, ainsi de (3.3.9) nous avons

$$\nu_f^k(r_n)(1+o(1)) + a_{k-1}z_n\nu_f^{k-1}(r_n)(1+o(1)) + ... + a_2 z_n^{k-2}\nu_f^2(r_n)(1+o(1))$$

$$+z_n^{k-1}e^{-z_n}\nu_f(r_n)(1+o(1)) + o(1) = -z_n^k e^{cz_n}h(z_n).$$

En substituant (3.3.21) et (3.3.23) dans cette dernière, nous obtenons

$$r_n^k\,|h(z_n)|\,B^{-1} \leq \left|-z_n^k e^{cz_n}h(z_n)\right| \leq M_5 r_n^k \nu_f^k(r_n)$$

($M_5$ une certaine constante).

Donc

$$\nu_f^k(r_n) \geq \frac{1}{M_5}\,|h(z_n)|\,B^{-1} \geq \frac{1}{M_5 B}\exp\left\{r_n^{\sigma(h)-\varepsilon}\right\} \geq \exp\left\{r_n^{\sigma(h)-\frac{3}{2}\varepsilon}\right\}.$$

D'où

$$\nu_f(r_n) \geq \exp\left\{\frac{1}{k}r_n^{\sigma(h)-\frac{3}{2}\varepsilon}\right\} \geq \exp\left\{r_n^{\sigma(h)-2\varepsilon}\right\}.$$

En raison de (3.3.11), c'est impossible.

Si $c = 0$, alors en combinant (3.3.3) et (3.3.11) avec (3.3.9), on obtient

$$\frac{1}{h(z_n)}\left\{\nu_f^k(r_n)(1+o(1)) + a_{k-1}z_n\nu_f^{k-1}(r_n)(1+o(1))\right.$$

$$\left.+... + a_2 z_n^{k-2}\nu_f^2(r_n)(1+o(1)) + z_n^{k-1}e^{-z_n}\nu_f(r_n)(1+o(1))\right\} + z_n^k$$

$$= \frac{1}{h(z_n)} \frac{F(z_n)}{f(z_n)} z_n^k.$$

De même, on trouve

$$|1 + o(1)| \, |h(z_n)| = \frac{|F(z_n)|}{M(r_n, f)}.$$

Donc

$$|h(z_n)| = |1 + o(1)| \frac{|F(z_n)|}{M(r_n, f)} \leq 2 \frac{|F(z_n)|}{M(r_n, f)}.$$

D'où

$$\left| \frac{F(z_n)}{f(z_n)} \right| = \frac{|F(z_n)|}{M(r_n, f)} \geq \frac{1}{2} |h(z_n)| \geq \frac{1}{2} \exp\left\{ r_n^{\sigma(h)-\varepsilon} \right\} \geq \exp\left\{ r_n^{\sigma(h)-2\varepsilon} \right\},$$

$n$ est assez grand. Ceci mène à

$$M(r_n, f) \leq \exp\left\{ r_n^{\sigma(F)-\sigma(h)+2\varepsilon} \right\}.$$

Par le théorème de Lindelöf, nous obtenons $\sigma(f) \leq \sigma(F) < 1$, ce qui contredit le résultat de l'étape I, et ainsi nous avons également $\sigma_2(f) \geq \sigma(h)$.

**Cas B:** Si $\sigma(h) = 0$, Par le Lemme 3.2.5, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, \infty)$ ayant une mesure logarithmique infinie. Pour $A$ assez grand, on a

$$|h(z)| \geq r^A \tag{3.3.25}$$

pour tout $z$ satisfaisant $|z| \in E_5$.

On suppose que $\sigma(f) < \infty$. Il est clair qu'on peut prendre une suite de points $\left\{ z_n = r_n e^{i\theta_n} \right\}$ satisfaisant (3.3.25), $|f(z_n)| = M(r_n, f)$, $\theta_n \in [0, 2\pi)$ et $r_n \in E_5 - E_1 \cup E_2 \cup E_4$. En passant à une sous-suite de $\{\theta_n\}$, alors (3.3.2) et (3.3.3) restent valables, si nécessaire, on peut supposer que $\lim\limits_{j\to\infty} \theta_{n_j} = \theta_0$.

Aussi on traite trois sous-cas suivant $\theta_0$. En utilisant le même raisonnemnt du Cas A, on peut aussi avoir une contradiction. Donc $\sigma(f) = \infty$.

**Les points fixes:** On réécrit (3.1.1) sous la forme

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} \left( \frac{f^{(k)}}{f} + a_{k-1} \frac{f^{(k-1)}}{f} + \ldots + a_2 \frac{f''}{f} + e^{-z} \frac{f'}{f} + h e^{cz} \right). \tag{3.3.26}$$

Nous savons que si $f$ a un zéro en $z_0$ d'ordre $\alpha$ $(\alpha > k)$, alors $F$ doit avoir un zéro en $z_0$ d'ordre $\alpha - k$.

Par conséquent, on obtient

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)\leq k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{F}\right). \tag{3.3.27}$$

D'autre part, (3.3.26) implique

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leq m\left(r,\frac{1}{F}\right)+m(r,e^{-z})+m(r,he^{cz})+S(r,f). \tag{3.3.28}$$

Considérons $\sigma\left(f\right)=\infty$, de (3.3.27) et (3.3.28), on a

$$\begin{aligned}
T(r,f) &= T\left(r,\frac{1}{f}\right)+O(1)\\
&= N\left(r,\frac{1}{f}\right)+m\left(r,\frac{1}{f}\right)+O(1)\\
&\leq k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{F}\right)+m\left(r,\frac{1}{F}\right)+m(r,e^{-z})\\
&\quad +m(r,he^{cz})+S(r,f)+O(1)\\
&= k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+T\left(r,\frac{1}{F}\right)+O(1)+T(r,e^{-z})+T(r,he^{cz})+S(r,f).
\end{aligned}$$

Or

$$T\left(r,\frac{1}{F}\right)+O(1)=T\left(r,F\right)=S(r,f),T(r,e^{-z})=S(r,f)$$

et

$$T(r,he^{cz})=S(r,f).$$

D'où

$$T(r,f)\leq k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f).$$

Donc

$$\sigma\left(f\right)=\overline{\lambda}\left(f\right)\ \text{ et }\ \sigma_2\left(f\right)=\overline{\lambda}_2\left(f\right).$$

**Etape III:** Démontrons que $\sigma_2\left(f\right)\geq\sigma\left(h\right)$ pour $F(z)\equiv 0$, quand $Q(z)\equiv h(z)e^{cz}$, où $c\in\mathbb{R}$ et $h(z)$ est une fonction entière transcendante d'ordre $\sigma\left(h\right)<\frac{1}{2}$.

Par le Lemme 3.2.2, pour tout $\varepsilon>0$ donné, il existe un ensemble $E_4$ ayant une mesure logarithmique finie. Alors pour tout $|z|\notin[0,1]\cup E_4$, nous avons

$$\left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right|<r^{\sigma(h)-1+\varepsilon} \tag{3.3.29}$$

Comme dans le cas $F \equiv 0$, on traite deux cas: $\sigma(h) > 0$ et $\sigma(h) = 0$. On traite seulement le cas $\sigma(h) > 0$ et le cas $\sigma(h) = 0$ se démontre par la même méthode. Supposons que $\sigma_2(f) \leq \sigma(h)$, du Lemme 2.4, (3.3.7) est vérifiée pour tout $z$ telle que $|z| \in E_3$. Alors on peut prendre une suite de points $\left\{z_n = r_n e^{i\theta_n}\right\}$, où $|f(z_n)| = M(r_n, f)$, $\theta_n \in [0, 2\pi)$ et $r_n \in E_3 - E_1 \cup E_2$, (3.3.2), (3.3.7) et (3.3.29) sont vérifiées pour tout $z_n$. En passant à une sous-suite de $\{\theta_n\}$, si nécessaire on passe à la limite $\lim_{j\to\infty} \theta_{n_j} = \theta_0$.

On réécrit (3.1.1) sous la forme

$$\frac{f^{(k)}}{f} + a_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f} + ... + a_2\frac{f''}{f} + e^{-z}\frac{f'}{f} + he^{cz} = 0. \tag{3.3.30}$$

En substituant (3.3.2) dans (3.3.30),

$$\nu_f^k(r_n)(1+o(1)) + a_{k-1}z_n\nu_f^{k-1}(r_n)(1+o(1)) + ...+$$

$$a_2 z_n^{k-2}\nu_f^2(r_n)(1+o(1)) + z_n^{k-1}e^{-z_n}\nu_f(r_n)(1+o(1)) + z_n^k e^{cz_n}h(z_n) = 0. \tag{3.3.31}$$

D'ailleurs, nous savons que (3.3.11) est vérifiée et $\nu_f(r_n) \to \infty$.

Maintenant nous considérons les trois sous cas suivants:

**Cas i)** $\theta_0 \in S_0 = (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ et (3.3.12) est vérifiée.

On réécrit (3.3.31) sous la forme

$$\nu_f^k(r_n)(1+o(1)) + a_{k-1}z_n\nu_f^{k-1}(r_n)(1+o(1)) + ... + a_2 z_n^{k-2}\nu_f^2(r_n)(1+o(1))$$

$$+e^{-z_n}\left[z_n^{k-1}\nu_f(r_n)(1+o(1)) + z_n^k e^{(c+1)z_n}h(z_n)\right] = 0. \tag{3.3.32}$$

En substituant (3.3.11) et (3.3.12) dans (3.3.32), on trouve

$$\left|z_n^{k-1}\nu_f(r_n)(1+o(1)) + z_n^k e^{(c+1)z_n}h(z_n)\right| \leq \exp\left\{-r_n^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Donc,

$$\left|z_n^{k-1}\nu_f(r_n)(1+o(1)) + z_n^k e^{(c+1)z_n}h(z_n)\right| \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \tag{3.3.33}$$

Pour $c+1 > 0$, il s'ensuit de (3.3.12)

$$|\exp(c+1)z_n| \leq \exp\{-(c+1)\eta r_n\}$$

quand $n$ est suffisamment grand.

Puis, en combinant ceci avec (3.3.33), nous obtenons,

$$z_n^{k-1}\nu_f(r_n)(1+o(1)) + z_n^k e^{(c+1)z_n}h(z_n) = o(1).$$

Ainsi,

$$z_n^{k-1}\nu_f(r_n)(1+o(1)) = -z_n^k e^{(c+1)z_n} h\left(z_n\right) + o(1).$$

D'où,

$$r_n^{k-1}\nu_f(r_n)(1+o(1)) \leq r_n^k \exp\left\{-(c+1)\eta r_n\right\} \exp\left\{r_n^{\sigma(h)+\varepsilon}\right\} + 1.$$

Donc

$$\nu_f(r_n) \leq r_n \exp\left\{-r_n^{\frac{1}{2}}\right\}(1+o(1)) + \frac{1}{r_n^{k-1}}(1+o(1))$$

$$\leq 2r_n \exp\left\{-r_n^{\frac{1}{2}}\right\} + o\left(1\right).$$

Et par suite, $\nu_f(r_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Ce qui est une contradiction.

Pour $c+1 < 0$, il s'ensuit de (3.3.12)

$$\left|\exp\left(c+1\right) z_n\right| \geq \exp\left\{-(c+1)\eta r_n\right\}$$

quand $n$ est suffisamment grand. Puis, en combinant ceci avec (3.3.11) et (3.3.33),

$$z_n^{k-1}\nu_f(r_n)(1+o(1)) - o(1) = -z_n^k e^{(c+1)z_n} h\left(z_n\right).$$

Donc,

$$\left|z_n^{k-1}\nu_f(r_n)(1+o(1)) - o(1)\right| \leq 2r_n^{k-1}\nu_f(r_n) + 1$$

$$\leq 4r_n^{k-1}\nu_f(r_n) \leq 4r_n^k\nu_f(r_n)$$

et

$$\left|-z_n^k e^{(c+1)z_n} h\left(z_n\right)\right| \geq r_n^k \exp\left\{r_n^{\sigma(h)-\varepsilon}\right\} \exp\left\{-(c+1)\eta r_n\right\}$$

$$\geq r_n^k \exp\left\{r_n^{\sigma(h)-\varepsilon}\right\}.$$

D'où,

$$\nu_f(r_n) \geq \frac{1}{4}\exp\left\{r_n^{\sigma(h)-\varepsilon}\right\} \geq \exp\left\{r_n^{\sigma(h)-2\varepsilon}\right\}$$

Ceci contredit (3.3.11).

Pour $c+1=0$, on a $\exp\left(c+1\right) z_n = 1$. En combinant (3.3.7) et (3.3.11) avec (3.3.33), il est facile d'obtenir

$$z_n^{k-1}\nu_f(r_n)(1+o(1)) - o(1) = -z_n^k h\left(z_n\right).$$

D'où

$$\left|z_n^{k-1}\nu_f(r_n)(1+o(1))-o(1)\right|\leq 4r_n^k\nu_f(r_n)$$

et

$$\left|-z_n^k h\left(z_n\right)\right|\geq r_n^k\exp\left\{r_n^{\sigma(h)-\varepsilon}\right\},$$

alors

$$\nu_f(r_n)\geq\frac{1}{4}\exp\left\{r_n^{\sigma(h)-\varepsilon}\right\}\geq\exp\left\{r_n^{\sigma(h)-2\varepsilon}\right\}.$$

Ceci contredit (3.3.11).

**Cas ii)** $\theta_0\in S_1=(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3\pi}{2},2\pi)$, et on a (3.3.19).

Pour $c>0$, de (3.3.19) on obtient

$$\left|\exp\left(-cz_n\right)\right|\leq\exp\left\{-c\eta r_n\right\}.$$

On réécrit (3.3.31) sous la forme

$$e^{-cz_n}\{\nu_f^k(r_n)(1+o(1))+a_{k-1}z_n\nu_f^{k-1}(r_n)(1+o(1))+...$$

$$+a_2z_n^{k-2}\nu_f^2(r_n)(1+o(1))+z_n^{k-1}e^{-z_n}\nu_f(r_n)(1+o(1))\}+z_n^k h\left(z_n\right)=0.\quad(3.3.34)$$

En substituant ceci avec (3.3.11) dans (3.3.34), nous obtenons

$$\left|h\left(z_n\right)\right|r_n^k=\left|z_n^k h\left(z_n\right)\right|\leq M_8 r_n^k\nu_f^k(r_n)\exp\left\{-c\eta r_n\right\}\leq r_n^k\exp\left\{-r_n^{\frac{1}{2}}\right\}$$

($M_8>0$ une certaine constante).

D'où

$$\left|h\left(z_n\right)\right|\leq\exp\left\{-r_n^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Ainsi, $\left|h\left(z_n\right)\right|\to 0$ quand $n\to\infty$. Ce qui contredit (3.3.7).

Pour $c=0$, alors $e^{-cz_n}=1$. En substituant ceci avec (3.3.11) et (3.3.19) dans (3.3.34), de même, on obtient

$$-z_n^k h\left(z_n\right)=\nu_f^k(r_n)(1+o(1))+a_{k-1}z_n\nu_f^{k-1}(r_n)(1+o(1))+...$$

$$+a_2z_n^{k-2}\nu_f^2(r_n)(1+o(1))+z_n^{k-1}e^{-z_n}\nu_f(r_n)(1+o(1)).$$

D'où

$$\left|h\left(z_n\right)\right|r_n^k=\left|-z_n^k h\left(z_n\right)\right|\leq M_9 r_n^k\nu_f^k(r_n).$$

Et par suite

$$|h(z_n)| \leq M_9 \exp\left\{kr_n^{\sigma(h)-3\varepsilon}\right\} \leq \exp\left\{r_n^{\sigma(h)-2\varepsilon}\right\}$$

($M_9$ une certaine constante). Ce qui implique une contradiction à (3.3.7).

Si $c < 0$, alors de (3.3.19), on obtient

$$|\exp(-cz_n)| \geq \exp\{-c\eta r_n\} \ , n \to \infty.$$

Encore de (3.3.34), on aura

$$\nu_f^k(r_n)(1+o(1)) + a_{k-1}z_n\nu_f^{k-1}(r_n)(1+o(1)) + ... + a_2 z_n^{k-2}\nu_f^2(r_n)(1+o(1))$$

$$= -z_n^{k-1}e^{-z_n}\nu_f(r_n)(1+o(1)) - z_n^k\ e^{cz_n}h(z_n).$$

Comme

$$\left|-z_n^{k-1}e^{-z_n}\nu_f(r_n)(1+o(1)) - z_n^k\ e^{cz_n}h(z_n)\right| \leq \exp\left\{-r_n^{\frac{1}{2}}\right\}$$

alors

$$\nu_f^k(r_n)(1+o(1))+a_{k-1}z_n\nu_f^{k-1}(r_n)(1+o(1))+...+a_2 z_n^{k-2}\nu_f^2(r_n)(1+o(1)) = o(1).$$

D'où

$$\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^k (1+o(1)) + a_{k-1}\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^{k-1}(1+o(1)) + ...$$

$$+a_2\left(\frac{\nu_f(r_n)}{z_n}\right)^2(1+o(1)) = o(1).$$

Et par suite

$$\left(\frac{\nu_f(r_n)}{r_n}\right)^k |1+o(1)| \leq 2|a_{k-1}|\left(\frac{\nu_f(r_n)}{r_n}\right)^{k-1} + ... + 2|a_2|\left(\frac{\nu_f(r_n)}{r_n}\right)^2 + 1.$$

On déduit que $\sigma(f) < 1$. C'est une contradiction.

**Cas iii)** $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ et (3.3.21) est vérifiée. Puisque $c$ est constante réelle, de (3.3.21) nous avons

$$B^{-1} < |\exp\{-cz_n\}| < B$$

où $B$ est un nombre entier positif supérieur à 1.

En combinant ceci avec (3.3.3) et (3.3.11) dans (3.3.34), on obtient

$$|h(z_n)|\, r_n^k = \left|-z_n^k h(z_n)\right| \leq M_{10} r_n^k \nu_f^k(r_n).$$

D'où

$$|h(z_n)| \leq M_{10} \exp\left\{k r_n^{\sigma(h)-3\varepsilon}\right\} \leq \exp\left\{r_n^{\sigma(h)-2\varepsilon}\right\}.$$

Ce qui contredit (3.3.7).

**Les points fixes:** Pour finir, montrons que $\sigma(f) = \overline{\lambda}(f-z) = \infty$ et $\sigma_2(f) = \overline{\lambda}_2(f-z) \geq \sigma(h)$ si $F \not\equiv 0$ ou $F \equiv 0$.

Posons $w = f - z$, de (3.1.1), nous avons

$$w^{(k)} + a_{k-1}w^{(k-1)} + ... + a_2 w'' + e^{-z}w' + he^{cz}w = F - \left(e^{-z} + he^{cz}z\right).$$

Comme $\sigma(F) < 1$, alors $F - (e^{-z} + he^{cz}z) \not\equiv 0$ si $F \not\equiv 0$ ou $F \equiv 0$, ce qui implique que

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{F - (e^{-z} + he^{cz}z)} \left(\frac{w^{(k)}}{w} + a_{k-1}\frac{w^{(k-1)}}{w} + ... + a_2\frac{w''}{w} + e^{-z}\frac{w'}{w} + he^{cz}\right) \tag{3.3.35}$$

Si $w$ a un zéro en $z_0$ d'ordre $\alpha$ $(\alpha > k)$, alors $F - (e^{-z} + he^{cz}z)$ doit avoir un zéro en $z_0$ d'ordre $\alpha - k$.

Par conséquent, on obtient

$$N\left(r, \frac{1}{w}\right) \leq k\overline{N}\left(r, \frac{1}{w}\right) + N\left(r, \frac{1}{F - (e^{-z} + he^{cz}z)}\right). \tag{3.3.36}$$

D'autre part, (3.3.35) implique

$$m(r, \frac{1}{w}) \leq m\left(r, \frac{1}{F - (e^{-z} + he^{cz}z)}\right) + m(r, e^{-z}) + m(r, he^{cz}) + S(r, f). \tag{3.3.37}$$

De (3.3.36) et (3.3.37),

$$\begin{aligned}
&T(r, w) = T(r, \frac{1}{w}) + O(1) \\
&= N\left(r, \frac{1}{w}\right) + m(r, \frac{1}{w}) + O(1) \\
&\leq k\overline{N}\left(r, \frac{1}{w}\right) + N\left(r, \frac{1}{F - (e^{-z} + he^{cz}z)}\right) + m\left(r, \frac{1}{F - (e^{-z} + he^{cz}z)}\right) \\
&+ m(r, e^{-z}) + m(r, he^{cz}) + S(r, f) + O(1) \\
&= k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f - z}\right) + T\left(r, \frac{1}{F - (e^{-z} + he^{cz}z)}\right) + O(1) + T(r, e^{-z}) \\
&+ T(r, he^{cz}) + S(r, f)
\end{aligned}$$

$$= k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right) + T\left(r, F - \left(e^{-z} + he^{cz}z\right)\right) + T(r, e^{-z})$$
$$+T(r, he^{cz}) + S(r, f)$$
$$= k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right) + S(r, f).$$

Donc

$$T(r, w) = T\left(r, f - z\right) = T\left(r, f\right) + S\left(r, f\right) \leq k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right) + S(r, f).$$

D'où

$$\sigma\left(f\right) = \overline{\lambda}\left(f - z\right) \text{ et } \sigma_2\left(f\right) = \overline{\lambda}_2\left(f - z\right).$$

La preuve du Théorème 3.1.2 est complète.

**3.4 Preuve du Corollaire 3.1.1:** Posons $a_{k-1} = a_{k-2} = ... = a_2 = 0$ dans l'équation (3.1.1), on obtient les résultats du Théorème 3.1.2.

**3.5 Exemples:**

**Exemple 1:** On considère l'équation différentielle $(c = 0)$

$$f'''\left(z\right) + e^{-z}f'\left(z\right) + h\left(z\right)f\left(z\right) = 0$$

où

$$h\left(z\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{n^2}} z^n$$

est une fonction entière transcendante d'ordre zéro.

Alors d'aprés le Théorème 3.1.2, on a pour toute solution $f$ de cette équation différentielle

$$\sigma\left(f\right) = \overline{\lambda}\left(f - z\right) = \infty \text{ et } \sigma_2\left(f\right) = \overline{\lambda_2}\left(f - z\right) > \sigma\left(h\right)$$

**Exemple 2:** On considère l'équation différentielle

$$f^{(4)} - 5f'''\left(z\right) + 2f''\left(z\right) + e^{-z}f'\left(z\right) + h\left(z\right)e^{z}f\left(z\right) = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

où

$$h\left(z\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{\left(3n\right)^{3n}}$$

est une fonction entière transcendante d'ordre $\sigma\left(h\right) = \frac{1}{3}$, la fonction $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ est entière d'ordre égal $\frac{1}{2}$. Alors d'aprés le Théorème 3.1.2, on a pour toute solution $f$ de cette équation différentielle

$$\sigma\left(f\right) = \overline{\lambda}\left(f\right) = \infty \text{ et } \sigma_2\left(f\right) = \overline{\lambda_2}\left(f\right) > \sigma\left(h\right)$$

# Bibliographies:


[1] Barry P. D., *Some theorems related to the* $\cos(\pi\rho)$ *theorem*, Proccedings of the London Mathematical Society, vol. 21, no. 2, pp. 334-360, 1970.

[2] Barry P. D., *On a theorem of Besicovitch*, The Quarterly Journal of Mathematics, vol. 14, no.1, pp. 293-302, 1963.

[3] Belaïdi B. and Abbas S., *Growth and oscillation theory of non-homogeneous complex differential equations with entire coefficients*, International Math. F., N°1, 38 (2006), 1849-1860.

[4] Besicovitch A. S., *On integral function of order* $< 1$. Math. Ann., 97, 677–695 (1927).

[5] Chen Z. X. and Gao S. A., *Entire solutions of differential equations with finite order transcendental entire coefficients*, Acta Math. Sinica, Vol. 13, N°4, (1997), 453–464.

[6] Chen Z. X., *On the hyper order of solutions of higher order differntial equations*, Chin. Ann. Math., 24 B. 4 (2003), 501-508.

[7] Chen Z. X. and Yang C. C., *Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations*, Kodai Math. J. 22(1999), pp. 273-285.

[8] Chen Z. X., *The growth of solutions of the differential equation* $f''+e^{-z}f'+Q(z)f=0$. (in Chinese), Science in China, Series A, 45 (3), 290–300 (2002).

[9] Frei M., *Uber die subnormalen losungen der differential equation* $w''+e^{-z}w'+(konst.)\,w=0$. Comment. Math. Helv., 36, 1–8 (1962).

[10] Gao S. A., Chen, Z. X., Chen T. W., *Theroy of Complex Oscillation of Linear Differential Equations*, Hua Zhong (CentralChina) University of Science and Technology Press, 1998 (in Chinese).

[11] Gundersen G., *Finite order solutions of second order linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 305 (1988), 415-429.

[12] Gundersen G., *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function*, plus similar estimates. J. London Math. Soc., 37(2), 88–104 (1988).

[13] Gundersen G., *On the question of whether* $f''+e^{-z}f'+B(z)f=0$ *can admit a solution* $f\not\equiv 0$ *of finite order*. Proc. R.S.E., 102A, 9–17 (1986).

[14] Hayman W., *Meromorphic Functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[15] Hayman W., *The local growth of power series: a survey of the Wiman–Valiron method*. Canad. Math. Bull., 17, 317–358 (1974).

[16] He Y. Z., Xiao X. Z., *Algebroid Functions and Ordinary Differential Equations*, Science Press, Beijing, 1988 (in Chinese).

[17] Hille E., *Ordinary differential equations in the complex domain*, Wiley, New York, 1976.

[18] Jank G., Volkmann L., *Einführung in die Theorie der ganzen und Meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differential gleichungen*, Birkhäuser, Basel-Boston,1985.

[19] KWON K. H., *Non existence of finite order solutions of certain second order linear differential equations*, Kodai Math. J., 19 (1996), 378–387.

[20] Kwon Ki-Ho., *On the growth of entire function satisfying second order linear differential equations*, Bull. Korean math. Soc., 33 (1996), 487-496.

[21] Laine I., *Nevalinna Theory and Complex Differential Equations*, W. de Gruyter, New York, 1993.

[22] Laine I. and Bank S. B., *On the oxillation theory of* $f'' + Af = 0$, *where* $A$ *is entire*, Tran. Amer. Math. Soc., 273 (1982), 351-363.

[23] Laine I. and Yang R., *Finite order solutions of complex linear differential equations*, Electron. J. Diff. Eqns, N°65, Vol. 2004 (2004), 1-8.

[24] Langley J. K., *On complex oscillation and a problem of Ozawa*. Kodai Math. J., 9, 430–439 (1986).

[25] Markushevich A. I., *Theory of functions of a complex variable*, Vol. II, translated by R. A. Silverman, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

[26] Nevanlinna R., *Eindeutige analytische Funktionen*, Zweite Auflage. Reprint. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 46. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

[27] Rossi J., *Second order differential equations with transcendental coefficients,* Proc. Amer. Math. Soc, 97, No. 1 (1986), 61-66.

[28] Shen L. C., *Solution to a problem of S. Bank regarding the exponent of convergence of the solutions of the differential equation* $f'' + Af = 0$, Kexue Tongbao., 30 (1985) 1579-1585.

[29] Tu J., Zheng X. and Huang W., *Growth of solutions of differential equa-*

*tions with finite order entire coefficients*, Ann. Differential Equations 24 (2008), no. 1, 46–51.

[30] Valiron G., *Lectures on the General Theory of Integral Functions*, Chelsea, New York, 1949.

[31] Yang C. C., *On the transcendential solutions of a certain type of nonlinear differential equations*. Arch. Math. 82 (2004) 442-448.

[32] Ye Zhou and Jun Wang, *Oscillation of Solutions of Differential Equations*, Acta Mathematica Sinica, English Series Jan., 2008, Vol. 24, no. 1, pp. 167-176.

[33] Yi H. X., Yang C. C., *Uniqueness Theory of Meromorphic Functions*, Pure and Applied Math. Monographs No. 32, SciencePress, Beijing, 1995.