



République Algérienne Démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM (UMAB)

FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT ST

Polycopié

Rappels de cours et exercices

d'électricité

Etabli par :

Mme BENDENIA Chahrazed

Matière : Unité Fondamentale de Physique II

Niveau : 1^{ère} Année sciences et technique

Année universitaire : 2020-2021

SOMMAIRE

Avant-propos.....	1
Partie A.....	2
Rappels des notions fondamentales De la matière d'électricité.....	2
Physique II.....	2
PRINCIPALES NOTATIONS.....	3
CHAPITRE I : THÉORIE D'ELECTROSTATIQUE5	
I.1. Charges et champs électrostatiques.....	4
I.1.1. Electrification.....	4
I.1.2. Moyens d'électrification.....	4
I.2. La force électrostatique.....	5
I.2.1. Loi de Coulomb.....	5
I.2.2. Propriétés de la force.....	5
I.3. Champ et potentiel électriques.....	5
I.3.1. Champ électrique.....	5
I.3.2. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle unique.....	6
I.3.3. Champ créé par un ensemble de charges ponctuelles (principe de la superposition).....	6
I.3.4. Champ produit par une répartition continue de charges.....	6
I.3.5. Potentiel électrique.....	7
I.3.6. Passage du champ au potentiel et du potentiel au champ.....	7
I.3.7. Lignes de champs et équipotentiels.....	9
I.4. Dipôle électrique.....	10
I.4.1. Potentiel et Champ créés par un dipôle à grande distance.....	10
I.5. Flux du champ électrique : Théorème de Gauss.....	11
I.5.1. Représentation d'une surface.....	11
I.5.2. Angle solide.....	12
I.5.3. Flux du vecteur champ électrostatique.....	12
I.5. 4. Théorème de Gauss.....	12
I.6. Conducteurs électriques.....	13
I.6.1. Conducteur en équilibre électrostatique.....	13
I.6.2. Propriétés d'un conducteur en équilibre.....	13
I.6.3. Capacité appropriée d'un condensateur unique dans l'espace.....	13
I.6.4. Energie interne d'un conducteur chargé seul dans l'espace.....	14

I.6.5. Phénomènes d'influence.....	15
I.7. Condensateurs.....	16
I.7.1. Calcul de la capacité d'un condensateur.....	16
I.7.2. Energie électrique d'un condensateur.....	18
I.7.3. Associations de condensateurs.....	18
CHAPITRE II : ELECTROCINETIQUE, CONDUCTION ELECTRIQUE	
II.1. Conducteur électrique.....	19
II.2. Courant électrique.....	19
II.2.1. Rupture d'un équilibre électrostatique, courant électrique.....	19
II.2.2. Obtention d'un régime permanent.....	19
II.2.3. Propriétés principales du courant électrique.....	20
II.2.4. Vecteur densité de courant.....	20
II.3. Intensité du courant électrique.....	21
II.4. Effet Joule.....	21
II.5. Loi d'Ohm.....	21
II.5.1. Générateurs.....	21
II.6. Association des résistances.....	22
II.6. 1. Association en série.....	22
II.6. 2. Association en parallèle.....	22
II.7. Circuits électriques.....	22
II.8. Eléments du circuit électrique.....	23
II.9. Loi de KIRCHOFF.....	23
II.9.1. Loi des Nœuds.....	23
II.9.2. Loi des Mailles.....	23
II.10. Théorèmes généraux dans l'analyse des circuits.....	24
II.10.1. Théorème de superposition.....	24
II.10.2. Théorème de Thévenin.....	25
II.10.3. Théorème de Norton.....	26
CHAPITRE III : ELECTROMAGNETISME	
III.1. Champ magnétique.....	28
III.1.1. Champ magnétique créé par une charge en mouvement.....	28
III.1.2. Principe de superposition.....	29
III.2. Force Magnétique.....	29
III.2.1. Force de Lorentz.....	29

III.2.2. Représentation vectoriel de la force de Lorentz.....	29
III.3. Les lignes de champ magnétique.....	30
III.4. Loi de Laplace.....	30
III.5. Loi de Faraday.....	30
III.5.1. Flux magnétique.....	30
III.5.2. Induction magnétique.....	31
III.5.3. Loi de Faraday.....	32
III.5.4. Champ créé par un circuit électrique (formule de Biot et Savart).....	32
III.6. Dipôle magnétique.....	32
III.6.1. Moment magnétique d'une partition de courant.....	32
III.6.2. Dipôle magnétique.....	33
III.6.3. Champ magnétique créé par un dipôle magnétique.....	33
Partie B.....	34
Exercices proposés avec corrections.....	34
Interaction Électrique.....	35
Electrostatique (Champs et potentiels électriques).....	42
Conducteur.....	50
Courants Continus.....	60
Réseaux électriques.....	68
Electromagnétisme.....	79
Références bibliographiques.....	84

Avant-propos

Le présent polycopié des travaux dirigés est destiné aux étudiants de la première année du système LMD, domaines des Sciences et Technologie (ST) et des Sciences de la Matière (SM), deuxième semestre de l'année universitaire.

Cet ouvrage contient l'énoncée et la solution des exercices et problèmes. Il rassemble les notions fondamentales relatives au programme officiel d'électricité « physique II » du deuxième semestre de l'année universitaire. Les solutions des exercices ont été rédigées avec les chapitres correspondants, car leur objectif essentiel est de fournir et de favoriser une meilleure connaissance du cours.

Ce polycopié est divisé en deux grandes parties « A et B », la première partie regroupe un rappel de cours et dans la seconde partie, des exercices avec solution détaillée sont exposés.

Le programme de l'électricité « physique II » de ce semestre comporte trois chapitres :

- Le premier chapitre traite la théorie d'électrostatique » (Charges, champ, potentiel, flux du champ électrique, théorème de Gauss, dipôle électrique, conducteurs, etc...).
- Dans le deuxième chapitre, nous abordons la notion d'électrocinétique des courants continus et des courants alternatifs qui consistent en une étude des charges électrique en mouvement dans des milieux matériels appelés conducteurs (Conducteur électrique, Loi d'Ohm, Loi de Joule, Circuits électriques, Application de la loi d'Ohm aux réseaux, Lois de Kirshoff).
- Le troisième chapitre, présente la théorie d'électromagnétisme (effet des interactions entre particules chargées électriquement qu'elles soient au repos ou en mouvement, champ magnétique, Force de Lorentz, Loi de Laplace, Loi de Biot et Savart, Dipôle magnétique).

En fait, nous souhaitons que ce polycopié puisse fournir à nos étudiants (es) de bonnes bases et préparer le terrain pour les années qui précèdent.

En fin, nous accueillerons avec plaisir, toutes remarques et suggestions des utilisateurs, collègues enseignants aussi bien qu'étudiants.

Partie A

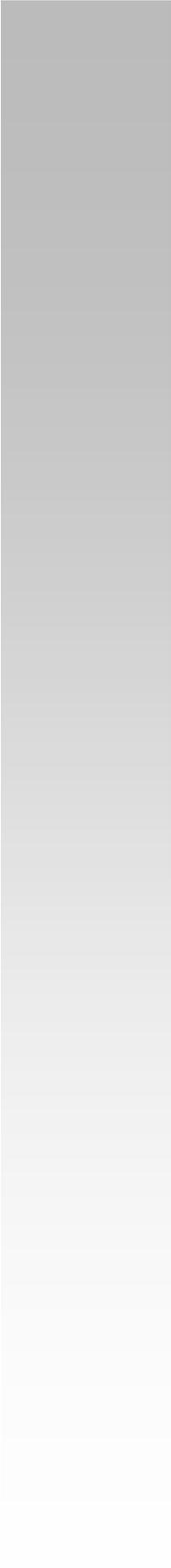
Rappels des notions fondamentales

De la matière d'électricité

Physique II

PRINCIPALES NOTATIONS

Symboles	Définitions
A, B, C, D,....., Z	Points de l'espace
M	Point où les champs \vec{E} ou \vec{B} sont évalués
P	Point des sources ρ ou \vec{j}
x, y z	Coordonnées cartésiennes d'un point
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	Vecteurs unitaires selon les coordonnées cartésiennes
X, Y, Z	Composantes d'un vecteur selon les coordonnées cartésiennes
\vec{a}	Accélération
\vec{B}	Champ magnétique
\vec{E}	Champ électrique
\vec{g}	Champ de la pesanteur
\vec{F}	Force
E	Energie
e	Force électromotrice (f.e.m)
e	Charge de l'électron
C	Capacité
f	Fréquence
W	Travail
I	Intensité du courant électrique
\vec{J}	Vecteur densité de courant
\vec{M}	Moment magnétique
Q/q	Q ou q Charge électrique
R	Résistance électrique
\vec{V} / \vec{v}	Vitesse
P	Puissance
m	Masse
v	Volume
V, U	potentiel électrique
T	Période
t	Temps
T°	Température
ρ	Masse volumique (Densité de charges volumiques)
σ	Conductivité électrique (Densité de charges superficielles)
ϵ	Permittivité électrique
μ	Perméabilité magnétique
λ	Longueur d'onde
α, β, θ	Angles
π	Nombre "Pi"
Φ	Flux magnétique
Ω	Unité de résistance : Ohm
τ	Constante de temps



Chapitre

I

THEORIE D'ELECTROSTATIQUE

I.1. Charges et champs électrostatiques

I.1.1. Electrification

Le phénomène d'électrification est la production de l'électricité lors d'une interaction entre deux charges (particules) électriques localisées dans l'espace.

Ces particules sont classées en deux catégories : les isolants ou diélectriques (verre, nylon, plastique, ébonite, etc...) et les conducteurs (corps humain, terre, eau, métaux).

Il existe deux types d'électrification, positive (vitreuse +) et négative (résineuse -).

Un corps non électrisé (chargé) est dit neutre [1].

- Lorsque les deux corps sont de même nature, ils se repoussent. Il y a répulsion (figure I.1).
- Lorsque les deux corps sont de nature différente, ils s'attirent. Il y a attraction (figure I.1).

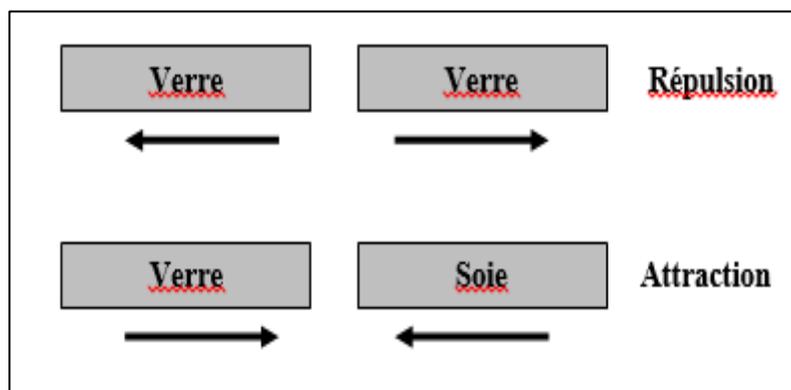


Figure I.1. Electrification

I.1.2. Moyens d'électrification

- Electrification par frottement

Les électrons sont arrachés du corps neutre frotté puis transférés vers le deuxième corps qui devient électrisé positivement (Verre, Soie, Bois, Poil de Lapin, Poil de Chat, Mica, Soufre, Ambre, Résine, Ebonite, Celluloïd) [1].

- Electrification par contact avec un corps déjà électrisé

On rapproche un corps électrisé par frottement (verre) à un autre corps neutre (boule de polystyrène entourée par une matière conductrice) jusqu'au contact.

Par interaction, les deux corps (le verre et la boule) seront chargés d'une électricité de même signe et se repoussent. Il en résulte une répulsion [1].

- Electrification par influence

Le corps électrisé (verre) est rapproché du deuxième corps initialement neutre (la boule), sans le toucher. Le deuxième corps (boule) est attiré par le premier corps (verre) par effet d'influence.

On peut aussi électriser un corps, initialement neutre, en le raccordant à une borne d'un générateur électrique [1].

I.2. La force électrostatique

I.2.1. Loi de Coulomb

Soit deux charges ponctuelles et identiques q_1 et q_2 séparées d'une distance « r ». Chacune des charges exerce sur l'autre une force d'interaction électrostatique proportionnelle proposée par la loi de Coulomb par analogie avec la loi de la gravitation universelle de Newton (figure I.2) [1].

$$\vec{F}_{1/2} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1/2}$$

Avec $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm} / \text{c}^2$

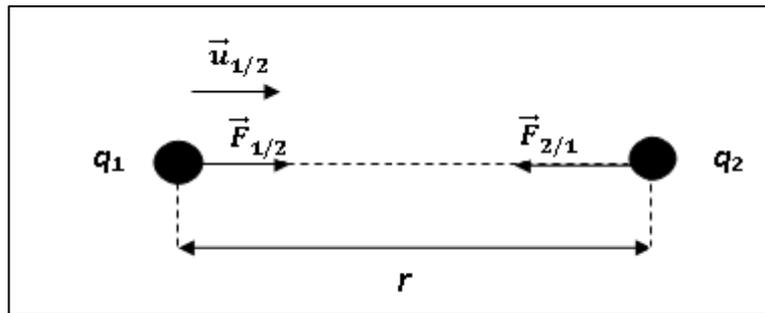


Figure I.2. Représentation vectorielle de la force électrostatique

I.2.2. Propriétés de la force

Un module : $K \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$

Une direction : droite qui passe par les deux charges.

Un sens : $+q_1 \cdot +q_2 > 0$ (répulsion) (voir figure I.1)

$-q_1 \cdot +q_2 < 0$ (attraction) (voir figure I.1)

$-q_1 \cdot -q_2 > 0$ (répulsion) (voir figure I.1)

Un point d'application : la charge (q_i)

Principe d'action et de réaction : $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$

La charge de l'électron : $q_e^- = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ (C : Coulomb)

micro C ($1\mu\text{C} = 10^{-6}\text{C}$); nano C ($1\text{nC} = 10^{-9}\text{C}$); pico C ($1\text{pC} = 10^{-12}\text{C}$)

I.3. Champ et potentiel électriques

I.3.1. Champ électrique

Le champ électrique est défini par la région de l'espace où toute particule étant soumise à l'action d'une force électrique [2].

- Cas de particule de masse m : elle est soumise à la force de gravitation (son poids) : $\vec{P} = m \vec{g}$

- Cas de particule de charge q : elle est soumise à la force électrique : $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$

Avec : $\vec{E} = K \frac{q_1}{r^2} \vec{u}$

(Le champ créé par la charge q à une distance r suit la direction de \vec{u}).

I.3.2. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle unique

Soit une charge ponctuelle q_1 isolée et immobile, dans sa région, toute charge q_2 subit une force électrique : $\vec{F}_{1/2} = q_2 \cdot \vec{E}_{1/2}$

Alors, l'expression du champ s'écrit : $\vec{E}_1 = K \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_{1/2}$

- Le champ électrique sort de la charge positive vers une charge négative ou vers l'infini.

I.3.3. Champ créé par un ensemble de charges ponctuelles (principe de la superposition)

Soit trois charges ponctuelles q_1, q_2 et q_3 distantes de r_{ij} comme indiqué à la figure I.3.

La force \vec{F}_3 s'exerçant sur q_3 due à q_1 et q_2 sera la résultante des forces $\vec{F}_{1/3}$ et $\vec{F}_{2/3}$.

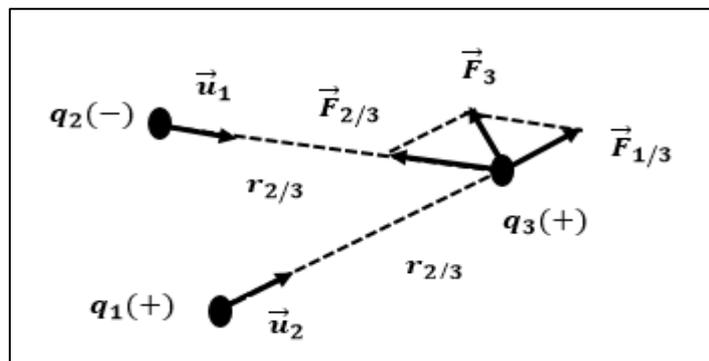


Figure I.3. Principe de superposition

Son expression s'écrit : $\vec{F}_3 = \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3}$.

$$\begin{aligned} \vec{F}_3 &= K \frac{q_1 q_3}{r_{1/3}^2} \vec{u}_{1/3} + K \frac{q_2 q_3}{r_{2/3}^2} \vec{u}_{2/3} \\ &= q_3 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \\ &= q_3 \vec{E} \end{aligned}$$

Le champ \vec{E} , créé en un point M par les deux charges ponctuelles, est la somme des deux champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 créés par chacune des charges q_1 et q_2 .

- Cas de n charges ponctuelles $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n K \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

I.3.4. Champ produit par une répartition continue de charges

Soit un ensemble de charges q_i réparties sur un élément. Chaque charge dq située en cet élément crée un champ élémentaire.

- sur un fil de longueur dl avec une densité linéique λ (figure I.4.a): $dq = \lambda dl$.

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}$$

le champ créé par q s'écrit :
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}$$

- Sur une surface chargée avec une densité surfacique σ (figure I.4.b): $dq = \sigma dS$.

$$\vec{E} = k \iint_S \sigma \frac{ds}{r^2} \vec{u}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \sigma \frac{ds}{r^2} \vec{u}_i$$

- Sur un volume V chargé avec une densité volumique ρ (figure I.4.c): $dq = \rho dV$.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho \frac{dV}{r^2} \vec{u}_i$$

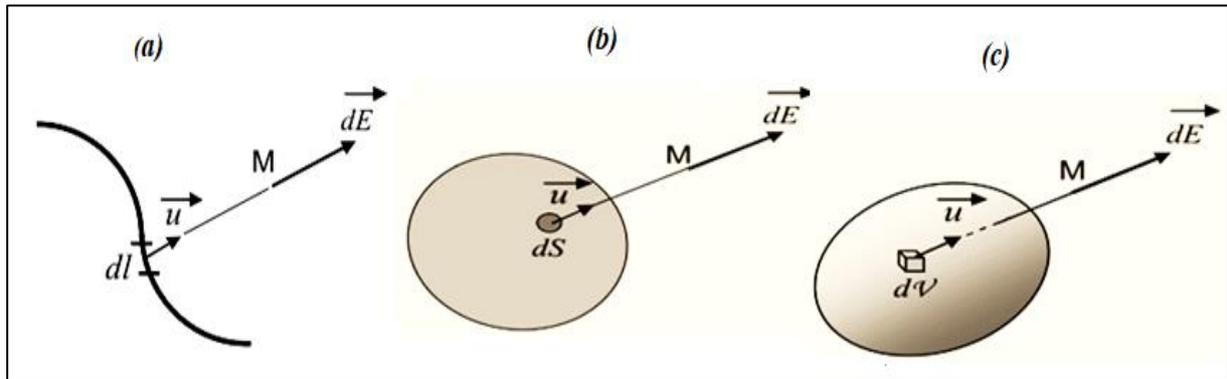


Figure I.4. Répartition continue de charges

I.3.5. Potentiel électrique

Une charge q , placée en un point M créant un vecteur champ électrique \vec{E} à partir de son déplacement élémentaire $\overline{MM'} = \overline{dl}$, possède une énergie potentielle $Ep = qV$ [2].

Le champ électrostatique \vec{E} dérive d'un potentiel scalaire : $\vec{E} \cdot \overline{dl} = -dV$

En coordonnées polaires : $dV = -\vec{E} \cdot \overline{dr}$

$$dV = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

Le potentiel électrique s'écrit : $V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + cte$

- Cas de n charges ponctuelles $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$: $V = \sum_{i=1}^n K \frac{q_i}{r} + cte$
- Cas d'une distribution continue de charges réparties linéairement : $V = k \iint_S \lambda \frac{dl}{r} + cte$
- Cas d'une distribution continue de charges réparties en surface : $V = k \iint_S \sigma \frac{ds}{r} + cte$
- Cas d'une distribution continue de charges réparties en volume : $V = k \iiint_V \rho \frac{dV}{r} + cte$

I.3.6. Passage du champ au potentiel et du potentiel au champ

En toute point $M(x, y, z)$ de l'espace, il est combiné de deux fonctions, vectorielle (Le champ $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$) et scalaire $V = V(x, y, z)$.

Il est donné : $-dV = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$

Sachant que : $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$

Par identification : $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

On écrit séparément : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$

Exemple : Calcul du champ et du potentiel créés par une charge q , uniformément répartie sur un disque, avec une densité surfacique σ (voir figure ci-après) [2].

$$dq = \sigma dS \quad / \quad S = \pi R^2$$

$$\vec{E} = k \frac{dq}{r^2} \vec{u}$$

L'élément de surface est supposé une couronne élémentaire d'épaisseur dr et de rayon r .

$$dS = 2\pi r dr$$

Par projection sur l'axe \overline{oz} , Le champ électrique, créé par cette couronne en un point M on a :

$$dE = k \frac{\sigma dS}{r^2} \cos\alpha = k \frac{\sigma dS}{PM^2} \cos\alpha$$

et le champ électrique total au point M créé par le disque est $E(M) = \int dE$

Afin de prendre en compte toute la surface chargée du disque, on intègre suivant le rayon r entre 0 et R . Pour cela, on exprime tout en fonction de cette variable r :

Comme : $\cos\alpha = \frac{z}{PM}$ et $PM^2 = z^2 + r^2$

Le champ total devient :

$$E = 2\pi K \sigma z \int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

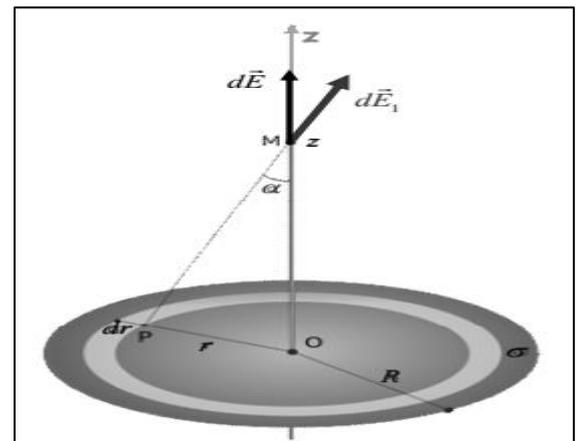
Avec le changement de variable $u = z^2 + r^2$ et $du = 2r dr$, on obtient :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \left[-\frac{1}{\sqrt{(z^2 + r^2)}} \right]_0^R \quad \text{ou encore}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{(z^2 + R^2)}} \right]$$

- Pour $z > 0$, $|z| = +z$ et on a : $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{(z^2 + R^2)}} \right]$

- Pour $z < 0$, $|z| = -z$ et on a : $E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 + \frac{z}{\sqrt{(z^2 + R^2)}} \right]$



Calcul du potentiel électrique : En utilisant la circulation du champ électrique le long de la ligne de champ (oz), nous avons :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dz \longrightarrow V = -\int E(z) dz$$

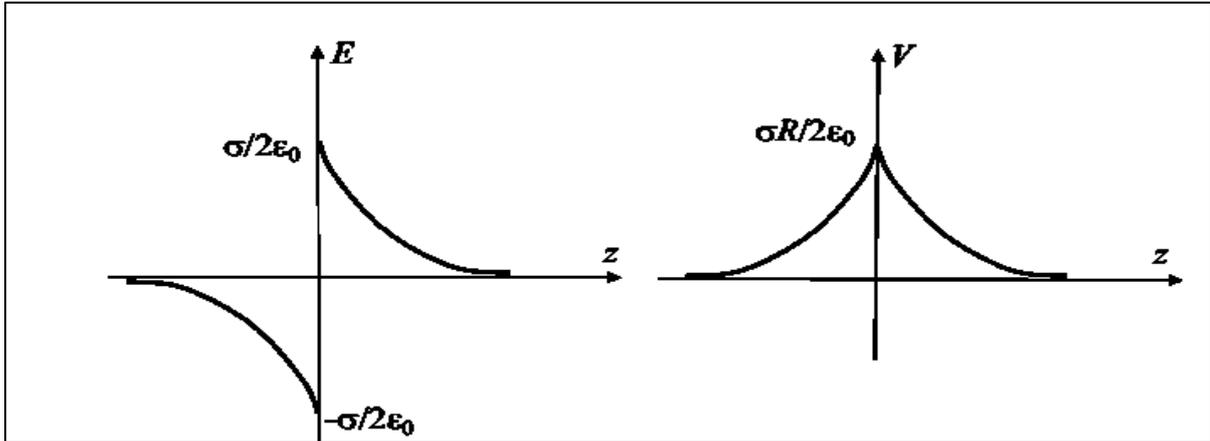
Pour $z > 0$,

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{(z^2 + R^2)} - z \right] + cte$$

pour $z < 0$,

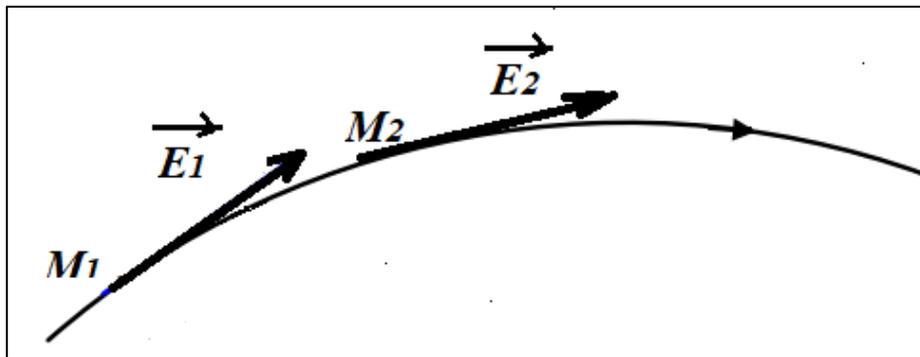
$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{(z^2 + R^2)} + z \right] + cte$$

la constante **cte** est calculée par : $z \rightarrow \infty, V = 0$ et **cte** = 0.



I.3.7. Lignes de champs et équipotentiels

Les lignes de champ (ou de force) sont des courbes tangentes au vecteur champ en chaque point (voir figure I.5): les tubes de forces sont des ensembles de lignes de champ qui passent par tous les points d'une courbe [3].



Figures I.5. Ligne de champ électrostatique

L'orientation des lignes suit celle du champ électrique.

La ligne de champ est orientée du potentiel le plus élevé au potentiel le moins élevé.

Le champ électrique est plus intense là où les équipotentiels sont les plus resserrés.

Les lignes et les surfaces équipotentiels sont le lieu géométrique des points de potentiel commun. L'une des propriétés des lignes de champ est que les lignes de champ sont perpendiculaires aux équipotentiels (figure I.6).

- Si la charge Q est positive (+), le champ est dirigé de la charge vers l'extérieur (figure I.6).
-

- Si la charge Q est négative (-), le champ est dirigé de l'extérieur vers la charge.

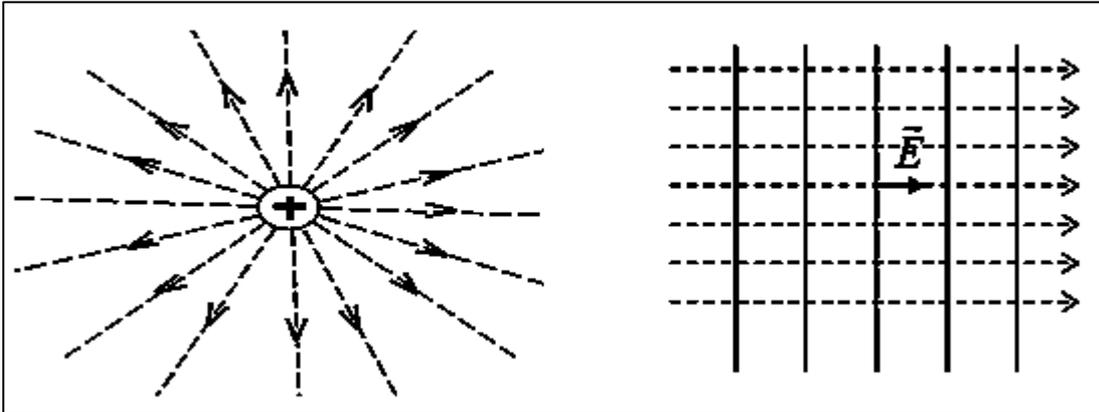


Figure I.6. Directions des Lignes de champ électrostatique

I.4. Dipôle électrique

L'arrangement de deux charges ponctuelles identiques de signes différents forme un dipôle électrique (figure I.7) [3].

Le moment dipolaire électrique est donné par : $\vec{P} = q\vec{a}$

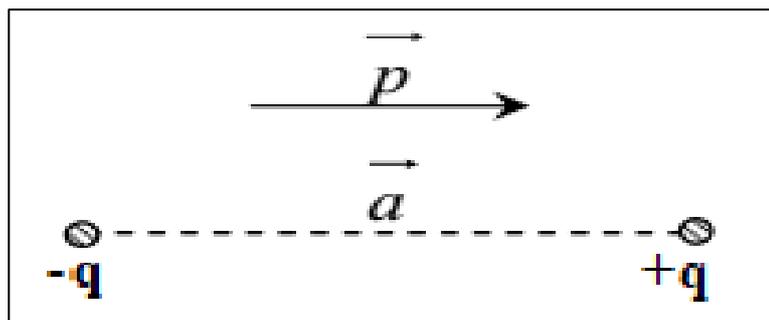


Figure I.7. Moment dipolaire électrique

Cet arrangement apparaît dans certaines molécules telles que : HCl, H₂O, CO, etc... comme illustré à la figure ci-dessous.

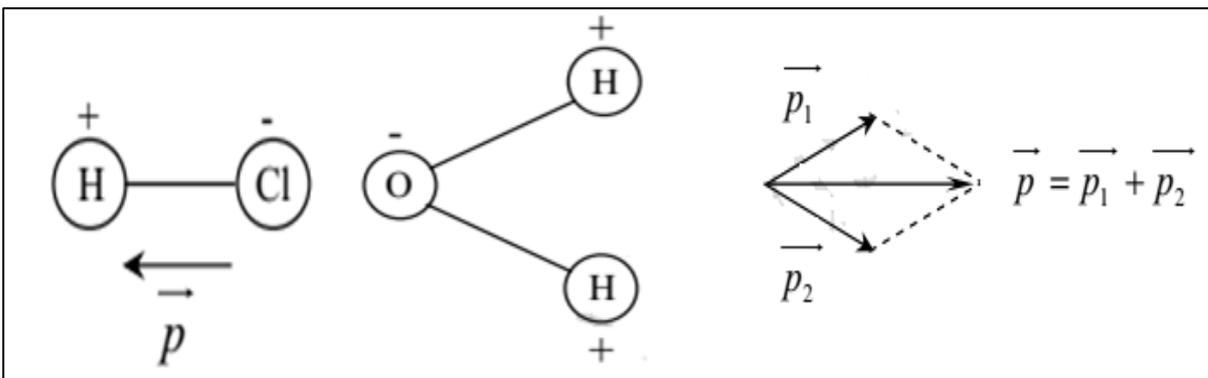


Figure I.8. Moment dipolaire électrique

I.4.1. Potentiel et Champ créés par un dipôle à grande distance

Le potentiel au point M dû au dipôle (figure I.9) est donné par :

$$V = k \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = kq \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

Si la distance r est grande par rapport à a , on aura :

$$r_2 - r_1 \approx a \cos\theta \text{ et } r_1 r_2 \approx r^2$$

et l'on aura :

$$V = kq \left(\frac{a \cos\theta}{r^2} \right) = kqa \frac{\cos\theta}{r^2} = kp \frac{\cos\theta}{r^2}$$

avec ($\mathbf{p} = q\mathbf{a}$)

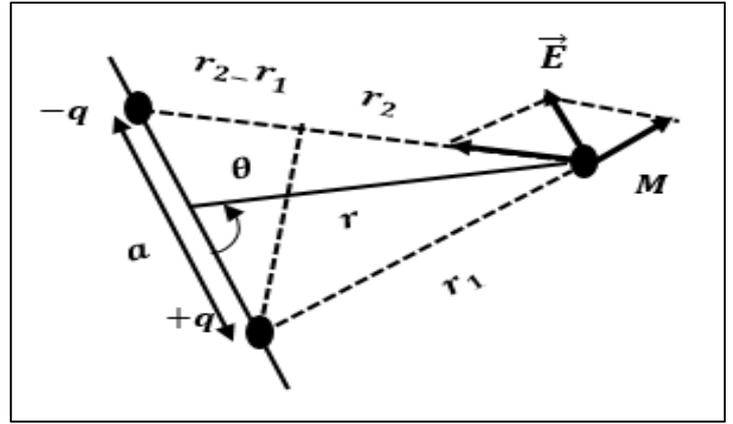


Figure I. 9. Dipôle électrique, Champ électrostatique.

On obtient le champ (figure I.9) par : $dV = -\vec{E} d\mathbf{l}$

Le gradient d'une fonction f s'écrit :

$$\text{En coordonnées cartésiennes : } \overrightarrow{\text{grad}f} = \frac{\delta f}{\delta x} \vec{i} + \frac{\delta f}{\delta y} \vec{j} + \frac{\delta f}{\delta z} \vec{k}$$

$$\text{En coordonnées polaires : } \overrightarrow{\text{grad}f} = \frac{\delta f}{\delta r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\delta f}{\delta \theta} \vec{e}_\theta$$

$$\text{avec : } \vec{E} \begin{cases} E_r \\ E_\theta \end{cases} \text{ et } d\mathbf{l} \begin{cases} dl_r = dr \\ dl_\theta = r d\theta \end{cases}$$

$$dV = -\vec{E} d\mathbf{l} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} dV = -(E_r dr + E_\theta r d\theta) \\ dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta \end{cases}$$

Par détermination, on obtient :

$$\vec{E} \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases}, \quad V = kp \frac{\cos\theta}{r^2} \quad \longrightarrow$$

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2kp \cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{kp \sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

Cas particuliers (figure I.10):

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_\theta| = \left| \frac{2k\vec{p}}{r^3} \right| \quad \text{à } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_r| = \left| \frac{2k\vec{p}}{r^3} \right| \quad \text{à } \theta = 0$$

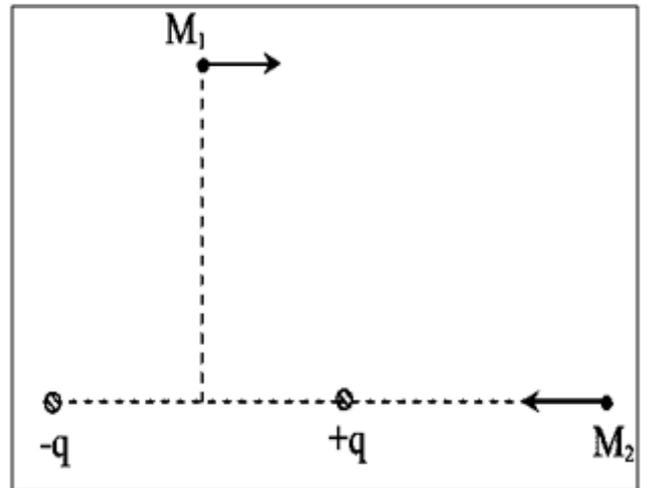


Figure I. 10. Position particulière.

I.5. Flux du champ électrique : Théorème de Gauss

I.5.1. Représentation d'une surface

Une surface S est décomposée en petits éléments dS ; représentés en vecteurs et dirigés sur une direction arbitraire qui sera conservée pour tous les éléments de la surface S (figure I.11) [4].

Ainsi : $S = \iint |dS|$

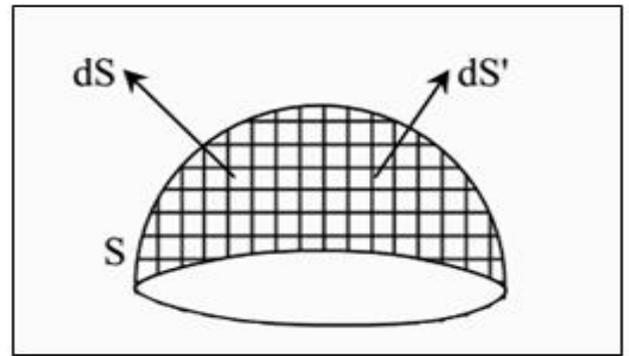


Figure I. 11. Représentation d'une surface

I.5.2. Angle solide

L'angle solide Ω est défini comme ayant le rapport entre la surface S interprétée et le rayon de la sphère (figure I.12).

$$[\Omega] = \frac{\vec{S}\vec{u}}{r^2} = \frac{S \cos\theta}{r^2} \quad (\text{stéradian :st})$$

$$\theta = 0, \quad \Omega = \frac{S}{r^2}$$

Pour tout l'espace : $\Omega = \frac{S}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ (st)}$

- Si l'angle solide est petit : $dS = d\Omega r^2$

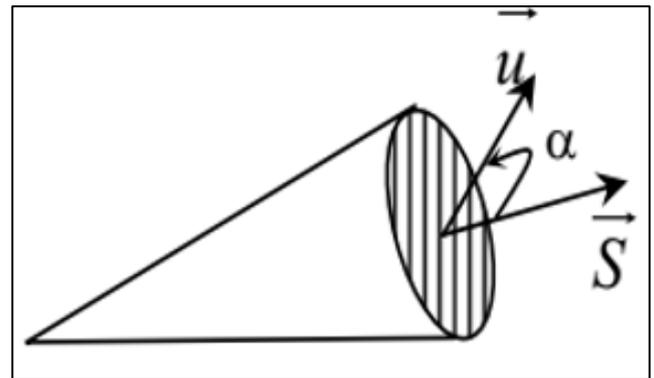


Figure I. 12. Angle solide

I.5.3. Flux du vecteur champ électrostatique

- Le flux E à travers S est l'intégrale sur toute la surface (figure I.13) :

$$\phi = \iint_S d\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

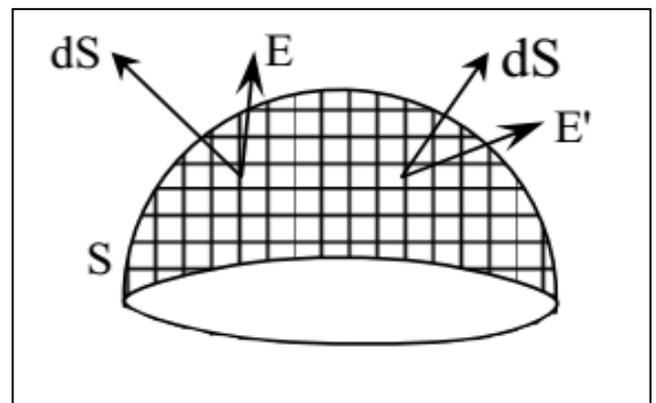


Figure I. 13. Flux E à travers S

I.5. 4. Théorème de Gauss

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée entourant des charges q_i s'écrit [4]:

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$$

$\sum q_i$: Représente la somme algébrique des charges intérieures.

I.6. Conducteurs électriques

I.6.1. Conducteur en équilibre électrostatique

- On appelle conducteur tout corps dans lequel les électrons peuvent se déplacer facilement (figure I.14).
- Lorsque les charges ne peuvent effectuer que des petits déplacements autour de leurs positions d'équilibre (liées), le conducteur est dit en équilibre électrostatique [5].

I.6.2. Propriétés d'un conducteur en équilibre

- Dans un conducteur en équilibre, les charges sont immobiles. Alors, le champ électrique $\vec{E} = 0$.
- Le potentiel est identique en tous points du conducteur ($V=cte$), Cela permet de créer un volume équipotentiel (surface équipotentielle).
- A la surface du conducteur, la charge intérieure ($q=0$) et la charge extérieure est localisée.

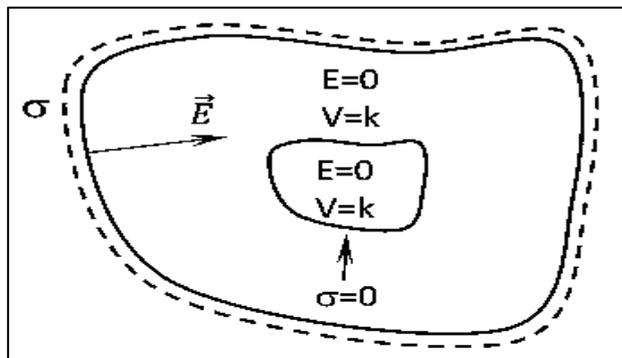


Figure I.14. Conducteur en équilibre

- Dans le conducteur, le flux $\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ à travers toute surface fermée ($E=0$) et lorsque $\vec{E} \perp d\vec{S}$.
- A travers la base extérieure du conducteur, Le flux $d\Phi = E \cdot ds \neq 0$.
- Le champ aux proximités d'un conducteur est donné à partir du théorème de Gauss :

$$\mathbf{E} ds = \frac{\sigma ds}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

avec : σ est la densité superficielle de la charge électrique, ϵ_0 est la permittivité.

- A la surface d'un conducteur, une pression électrostatiques (forces répulsives) est appliquées entre les charges extérieurs.

$$\mathbf{p} = \sigma \mathbf{E}_m = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad / \quad \mathbf{E}_m = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

avec : E_m est le champ électrique moyen.

I.6.3. Capacité appropriée d'un condensateur unique dans l'espace

Sur un conducteur isolé dans l'espace, déposons une charge q : il en résulte en tout point de l'espace une charge $q' = \alpha q$, on aura en tout point de l'espace, un champ $\vec{E}' = \alpha \vec{E}$, puisque E et q sont proportionnels et ceci est vrai en particulier sur le conducteur dont le potentiel est V [1].

On écrit ceci sous la forme : $Q = C V$

La constante de proportionnalité C est appelée capacité propre du conducteur isolé :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \text{Farad}$$

Le farad est une unité très grande, on utilise des sous multiples :

- ✓ le microfarad : 10^{-6} F (μF)
- ✓ le nanofarad : 10^{-9} F (nF)
- ✓ le picofarad : 10^{-12} F (pF)

Exemple

Calcul de la capacité propre d'un conducteur sphérique.

Soit une sphère de rayon R . En un point quelconque situé à une distance r du centre, le potentiel est donné par : $V = K \frac{Q}{r}$

Sur la surface de la sphère ($r=R$), $V = K \frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$ d'où $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$

Ordre de grandeur :

- La capacité de la terre ($R=6400\text{Km}$) est $c=710 \mu\text{F}$
- Une sphère de 10 cm de rayon, portée à un potentiel de 1000 V par rapport au sol, emmagasine une charge de 10 nC (sa capacité étant de 10 pF).

I.6.4. Energie interne d'un conducteur chargé seul dans l'espace

Soit C la capacité propre du conducteur, Q sa charge et V son potentiel dans un état d'équilibre donné.

L'énergie interne est estimée par le travail fournit pour charger le conducteur.

- Ou par le travail des forces électrostatiques appliqué lors de la décharge du conducteur.
- Ou aussi, elle est la somme des variations d'énergie potentielle subies par toutes les charges lors de la charge du conducteur [3].

A partir de l'énergie potentielle élémentaire donnée :

$$\left. \begin{array}{l} dE_p = v dq \longrightarrow E_p = \int_0^Q v dq \\ \text{or } q = C V ; \quad v = \frac{q}{C} \end{array} \right\} \longrightarrow E_p = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Il s'ensuit donc que : $E_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} Q v$ (Cette énergie est positive >0).

I.6.5. Phénomènes d'influence

I.6.5.a. Influence totale

Deux conducteurs, A entourant B (figure I.15), sont en influence totale lorsqu'ils ont des charges identiques ($|Q_A| = |Q_B| = Q$) et de signes opposés ($+Q, -Q$) [2].

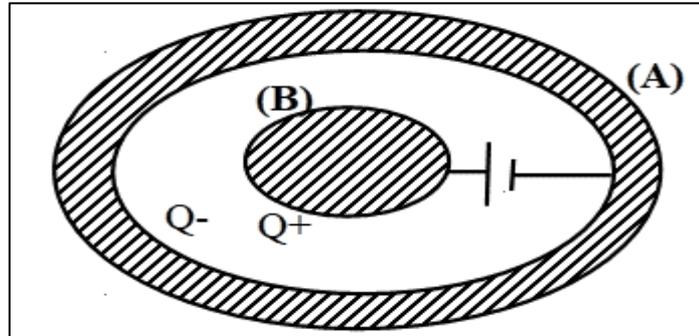


Figure I.15. Influence totale

I.6.5.b. Influence partielle

On rapproche de B un conducteur A maintenu à un potentiel constant ($V=cte$) (figure I.16). Des charges négatives apparaissent sur A due à son influence par B.

Ces charges influencent à leurs tour le conducteur B sur lequel de nouvelles charges positives apparaissent [2].

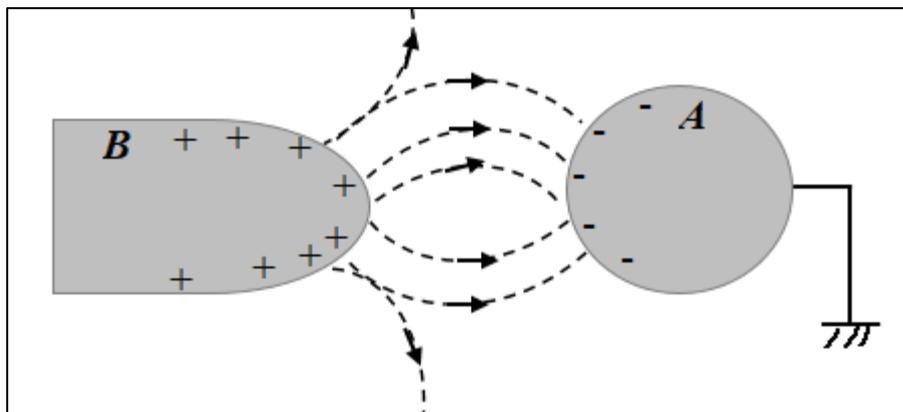


Figure I.16. Influence partielle

Les charges sur B ne sont pas créées mais c'est le générateur qui les a transportées de A. A l'équilibre, le conducteur B porte plus de charge par influence de A que lorsqu'il est seul.

I.7. Condensateurs

Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs A et B en influence totale, dont l'un est entouré par l'autre. Les deux conducteurs sont appelés armatures (figure I.17).

En chargeant le condensateur, une différence de potentiel entre s'établie les deux armatures A et B, ce qui crée une condensation de l'électricité sur B qui conduit à l'augmentation de sa capacité.

$$\frac{Q}{V} = \text{Constante} = C \text{ (Capacité du condensateur) [6].}$$

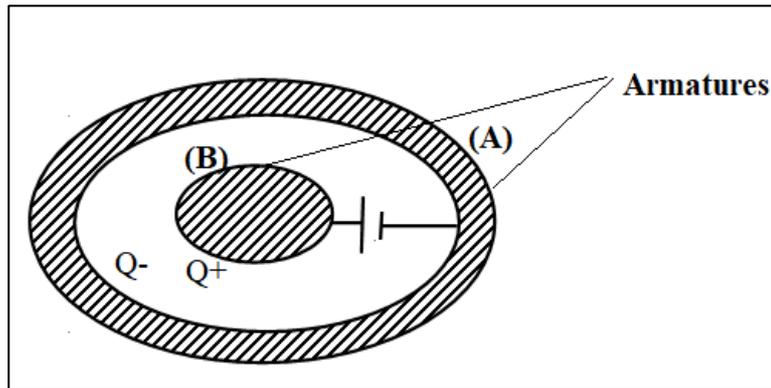


Figure I.17. Condensateur

I.7.1. Calcul de la capacité d'un condensateur

Méthode

- mesurer le champ en tout point intérieur au condensateur.
- Dédire, à partir de la circulation du champ, la différence de potentiel entre les condensateurs [3].
- Etablir le rapport : $\frac{Q}{V} = \text{Constante} = C$

Exemples

a. Condensateur plan

Il est composé de deux conducteurs plans, distants de e et de surface S , indéfinis en influence total (figure I.18).

$e \ll S$, le champ \vec{E} entre les armatures est uniforme.

Théorème de Gauss : $\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{ds} = E S = \frac{Q}{\epsilon_0}$

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \text{cte}, \quad \text{avec : } \sigma = \frac{Q}{S}$$

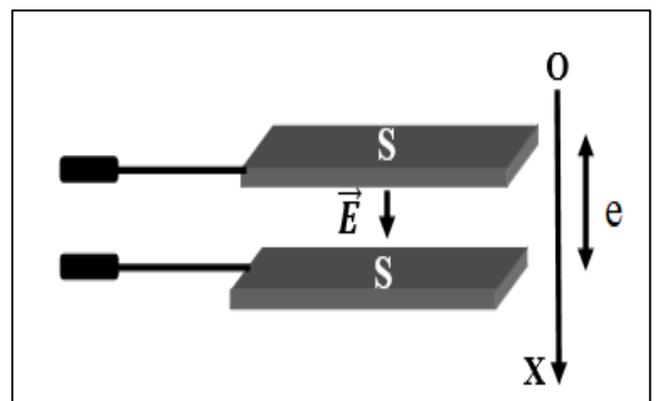


Figure I.18. Condensateur plan

Selon \overline{OX} : $dV = -\vec{E}d\vec{l} = -E dX \longrightarrow V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e$

La capacité est donnée par :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

b. Condensateur cylindrique

Il est formé de deux cylindres coaxiaux, de rayons R_1 et R_2 . avec $R_2 > R_1$ (figure I.19).

Σ est la surface de Gauss,

Σ est un cylindre de rayon r avec $R_1 < r < R_2$

Théorème de Gauss :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$\Phi = \Phi_{SB} + \Phi_{SL}$ Φ_{SB} : flux dans la surface de base

Φ_{SL} : flux dans la surface latérale

$$\Phi = \Phi_{SL} = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_L = E S_L = 2\pi r L = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\longrightarrow E = \frac{Q}{2\pi r L \epsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V \longrightarrow \vec{E} = \frac{-dV}{dr}$$

$$\longrightarrow dV = -\vec{E} d\vec{r} = -E dr$$

$$\int_1^2 -dV = \int_{R_1}^{R_2} E dr \longrightarrow V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi r L \epsilon_0} dr$$

$$\longrightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi r L \epsilon_0} \text{Log} \frac{R_2}{R_1}$$

La capacité est donnée par $C = \frac{Q}{V}$

$$V_1 - V_2 = V \longrightarrow C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi L \epsilon_0}{\text{Log} \frac{R_2}{R_1}}$$

D'autre part, on sait que $R_2 - R_1 = e$, puisque e est très faible, on peut admettre que $R_2 \approx R_1 = R$.

$$\text{Il vient : } \text{Log} \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_1 + e}{R_1} = \text{Log} \left(1 + \frac{e}{R} \right)$$

On met : $\frac{e}{R} \cong \epsilon$, alors $\text{Log} \left(1 + \frac{e}{R} \right) = \text{Log} (1 + \epsilon)$

$$\text{Log} \left(1 + \frac{e}{R} \right) \cong \frac{e}{R} \longrightarrow C = \frac{2\pi \epsilon_0 L R}{e}$$

$S = 2\pi L R$: la surface de l'armature, il vient : $C = \frac{S \epsilon_0}{e}$

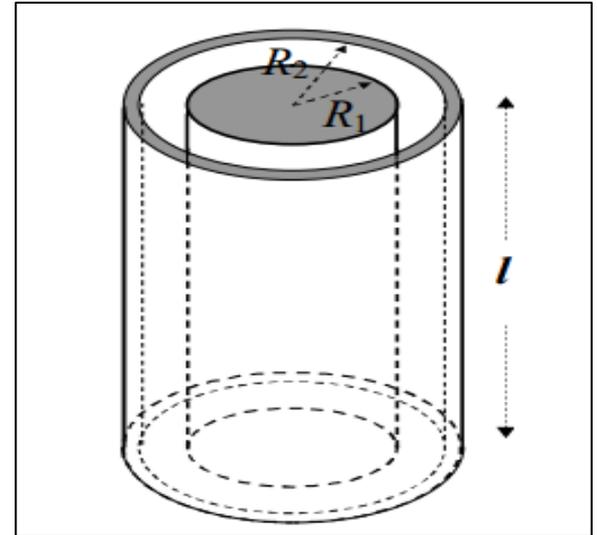


Figure I.19. Condensateur cylindrique.

I.7.2. Energie électrique d'un condensateur

Elle se calcule de la même manière que dans le cas des conducteurs (partie I.6.4).

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{c}$$

I.7.3. Associations de condensateurs

I.7.3.a. Association en parallèle

Tous les condensateurs sont soumis à la même tension V (figure I.20), ils portent alors une charge totale Q [2]:

$$\begin{aligned} Q &= \Sigma Q_i = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n \\ Q &= \Sigma C_i V \\ &= C_{eq} V = C_1 V + C_2 V + C_3 V + \dots + C_n V \\ C_{eq} &= C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n \end{aligned}$$

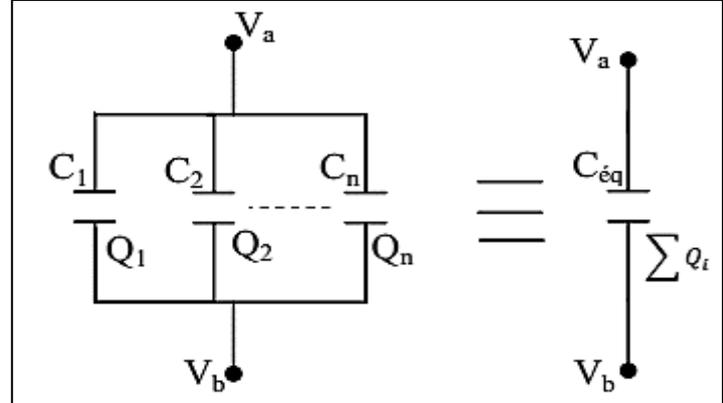


Figure I.20. Association en parallèle de condensateurs.

I.7.3.b. Association en série

Par influence totale, il apparaît sur tous les condensateurs la même charge Q lorsqu'une différence de potentiel est appliquée (figure I.21) et s'écrit :

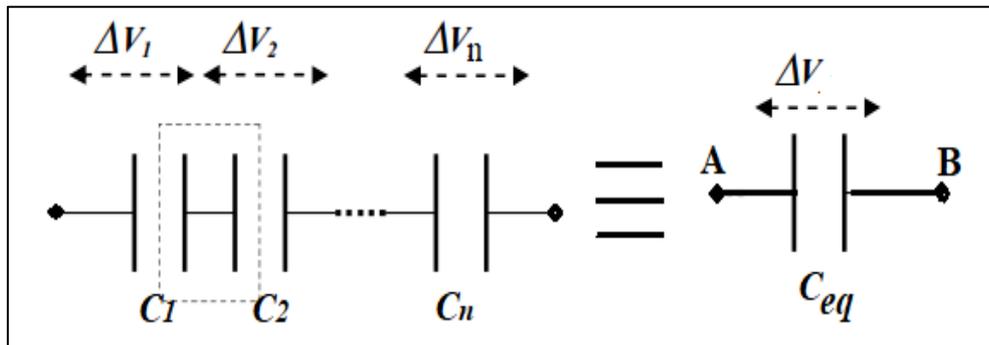


Figure I.21. Association en série de condensateurs

$$\Delta V = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \dots + (V_{n-1} - V_n)$$

$$\Delta V = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right)$$

$$= \frac{Q}{C_{eq}} = Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Et par suite : $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$

Chapitre

II

***ELECTROCINETIQUE,
CONDUCTION ELECTRIQUE***

II.1. Conducteur électrique

En reliant deux conducteurs en équilibre A et B par un fil conducteur, les charges se déplacent le long du fil sous l'influence du champ électrostatique jusqu'au nouveau d'équilibre. C'est ce qui détermine le courant électrique dans le fil [3].

II.2. Courant électrique

Un courant électrique est la grandeur algébrique correspondant du mouvement de charges électrique dans un conducteur [1].

Les charges diffèrent selon leurs milieux :

- électrons libres dans les métaux.
- électrons libres et trous dans les semi-conducteurs.
- cations et anions dans les liquides.
- plasma dans les gaz

II.2.1. Rupture d'un équilibre électrostatique, courant électrique

Soient deux conducteurs A et B en équilibre électrostatique (figure II.1).

Soient V_a et V_b leurs potentiels ($V_a > V_b$) Q_a et Q_b leurs charges.

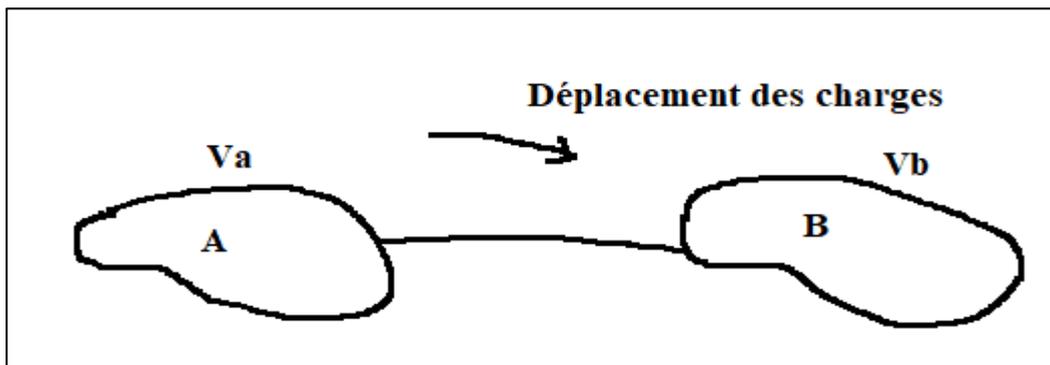


Figure II.1. Conducteurs A et B en équilibre électrostatique.

Si on relie les conducteurs A et B à l'aide d'un fil conducteur, l'ensemble A, B et le fil constitue un conducteur unique, pour lequel l'état précédent n'est plus en état d'équilibre. Sous l'influence du champ électrostatique qui règne dans le fil, les charges se mettent en mouvement. Il y'a donc apparition d'un courant électrique qui cesse de circuler (s'annule) une fois l'équilibre est atteint.

II.2.2. Obtention d'un régime permanent

Pour entretenir ce mouvement des charges, on apporte continuellement des charges sur l'un des conducteurs, ceci est possible grâce à l'emploi de générateur (figure II.2).

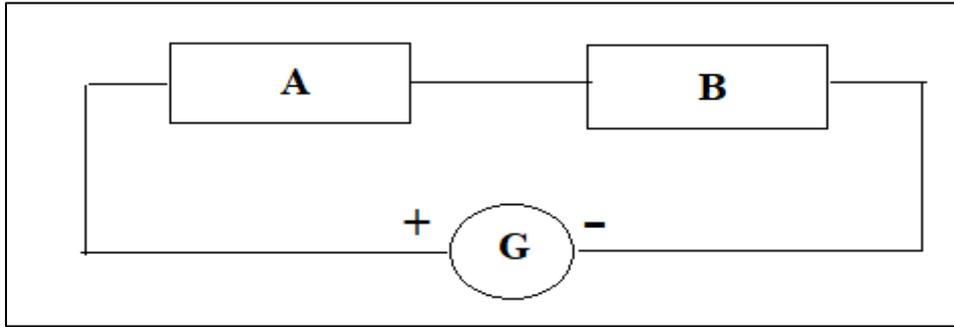


Figure II.2. Régime permanent.

II.2.3. Propriétés principales du courant électrique

Le passage du courant électrique se traduit principalement par les effets physiques suivants : Effet joule (Chaleur), Effet chimique (Electrolyse), Effet Magnétique (Déviation d'une aiguille aimantée), etc ...

La plupart de ces effets dépendent de la manière avec laquelle est branché le générateur en raison du sens du courant électrique.

Le sens conventionnel du courant : du + vers - à l'extérieur du générateur et du - vers + à l'intérieur du générateur [2].

II.2.4. Vecteur densité de courant

- La ligne de courant est la trajectoire orientée des charges positives en mouvement (fictif en général) (figure II.3).
- Le tube de courant est l'ensemble de ces lignes qui s'appuient sur un contour fermé quelconque.
- En chaque point M d'un milieu où se déplacent des charges électriques, on peut introduire un vecteur \vec{J} (appelé vecteur densité de courant) défini par : $\vec{j} = \rho \vec{v}$ [2].

ρ : densité volumique de charge

v : vitesse de déplacement des charges

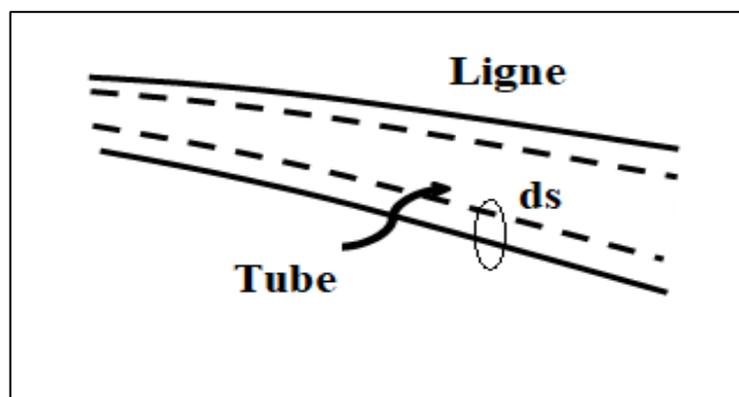


Figure II.3. Vecteur densité de courant.

II.3. Intensité du courant électrique

On considère un tube de courant, de section droite dS , à travers laquelle circule un courant électrique de vecteur densité de courant : $\vec{j} = \rho \vec{v}$ [5].

On peut évaluer la charge dq qui traverse la surface dS pendant le temps dt par :

$$dq = \rho v dt dS$$
$$\frac{dq}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

Si l'on considère maintenant une surface donnée S , la charge dq qui la traverse pendant l'intervalle de temps dt s'obtient par :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

I : est l'intensité du courant à travers la surface S .

II.4. Effet Joule

Lors du passage du courant électrique dans un conducteur présentant une résistance, il se produit une transformation de l'énergie électrique en chaleur.

Energie : $w = V I t = R I^2 t$ (Joule)

Puissance : $P = R I^2 = V I = V^2/R$ (Watt)

II.5. Loi d'Ohm

La différence de potentiel (tension) V (en volts) aux bornes d'une résistance R (en ohms) est proportionnelle à l'intensité du courant électrique I (en ampères) qui la traverse (figure II.4) [4].

$$V = R I$$

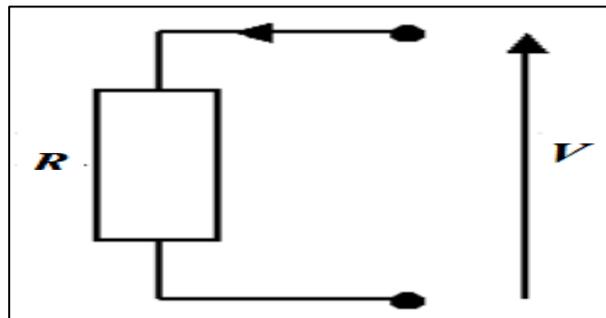


Figure II.4. Résistance traversée par un courant I sous une tension V .

II.5.1. Générateurs

Un générateur est un dispositif qui produit de l'énergie aux charges électriques, dans un circuit fermé, pour qu'elles remontent le potentiel (figure II.5). C'est une source de force électromotrice pour transporter les charges [6].

On distingue 2 types de générateurs : Générateur de tension (tension constante entre ces bornes) et générateur de courant (le débit d'un courant constant)

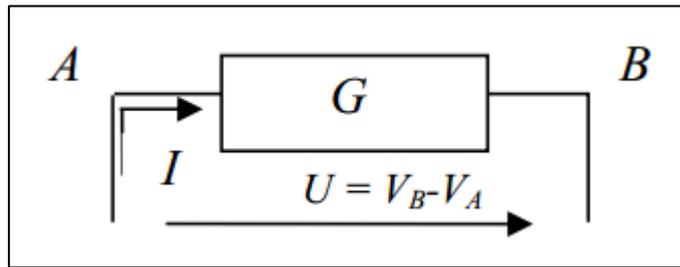


Figure II.5. Générateur.

II.6. Association des résistances

II.6. 1. Association en série

Toutes les résistances R_i sont parcourues par le même courant électrique I (figure II.6). La tension V est égale à la somme des tensions des résistances [6].

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n \\
 &= R_1 I + R_2 I + R_3 I + \dots + R_n I = \sum R_i I \\
 V &= R_{\text{éq}} I \quad \text{donc} \quad R_{\text{éq}} = \sum R_i I
 \end{aligned}$$

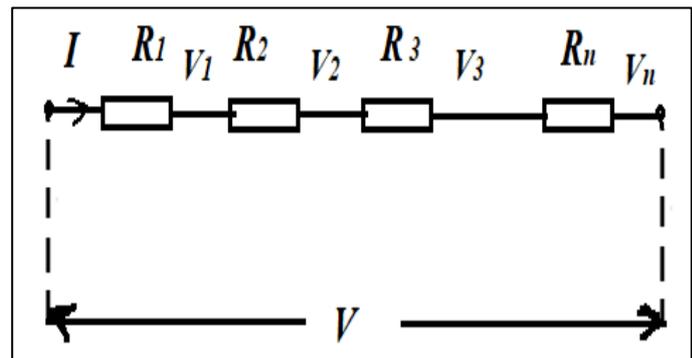


Figure II.6. Conducteurs en série.

II.6. 2. Association en parallèle

Toutes les résistances ont leurs bornes communes deux à deux (figure II.7). La tension est la même entre les extrémités de n'importe quelle résistance R_i [6].

$$\begin{aligned}
 I &= I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n \\
 \text{Or } I_1 &= \frac{V}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V}{R_2}, \quad I_3 = \frac{V}{R_3}, \quad \dots \quad I_n = \frac{V}{R_n} \\
 \rightarrow I &= \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \dots + \frac{V}{R_n} \\
 &= V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) \\
 I &= \frac{1}{R_{\text{éq}}} V \\
 \frac{1}{R_{\text{éq}}} &= \sum \left(\frac{1}{R_i} \right)
 \end{aligned}$$

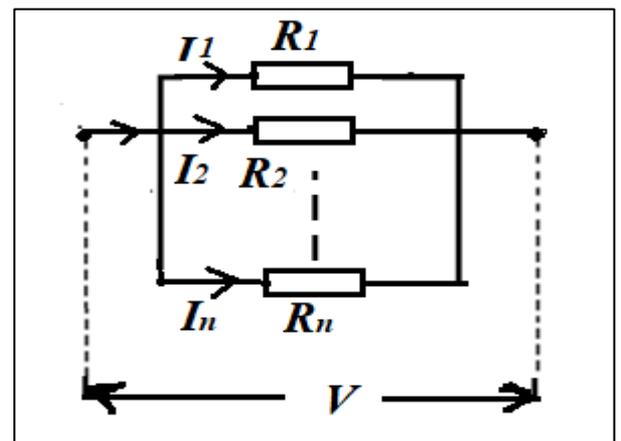


Figure II.7. Conducteurs en parallèle.

II.7. Circuits électriques

Un circuit électrique est constitué principalement par une association en série ou en parallèle de:

- Composants passifs : (résistances, bobines, condensateurs, etc.....)
- Composants actifs : (diodes, circuits intégrés, etc)
- Des forces électromotrices fem (ou générateurs continus ou alternatifs)

- Des forces contre électromotrices fem (moteurs, etc..)
- Fils conducteurs [2].

II.8. Eléments du circuit électrique

Le circuit électrique est composé particulièrement des éléments suivant (figure II.8) :

- 1 Le nœud : c'est un point où aboutissent plus de deux conducteurs.
- 2 La branche : c'est une portion de circuit qui s'intercale entre deux nœuds.
- 3 La maille : tout contour fermé, constitué d'une suite de branches [2].

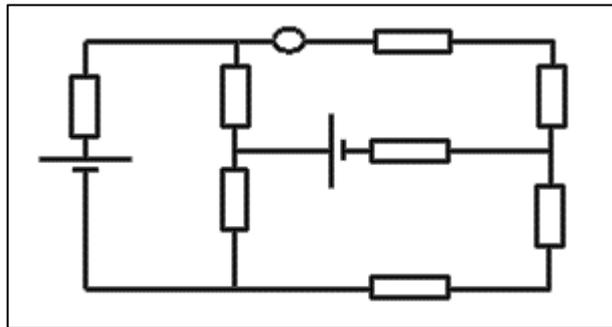


Figure II.8. Circuit électrique quelconque.

II.9. Loi de Kirchoff

Considérons un réseau constitué de générateurs, de récepteurs et de résistances mortes [7].

II.9.1. Loi des Nœuds

On appelle Nœud tout point où aboutissent plus de deux conducteurs reliant les éléments entre eux (figure II.9):

$$\sum I_i = 0$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

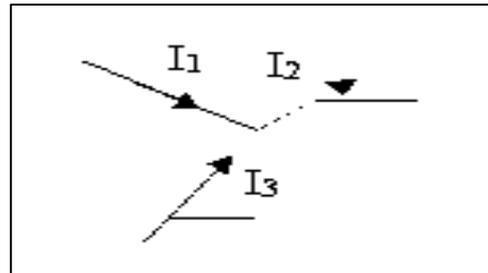


Figure II.9. Loi des nœuds.

II.9.2. Loi des Mailles

On appelle Maille, tout contour fermé, formé d'une suite de branches (l'ensemble des éléments situés entre deux nœuds consécutifs) (figure II.10).

$$\sum E - \sum RI = 0$$

- On définit un sens arbitraire des courants
- On définit un sens arbitraire des chemins
- Pour les fem, on donne le signe par lequel on rentre

- Pour les chutes de tension R_i , on donne un signe (+) si le sens du chemin coïncide avec le sens du courant, un signe (-) si le sens du chemin est différent du sens du courant.

Exemple : (figure II.10)

$$- e_1 + R_2 i_2 + R_1 i_1 = 0$$

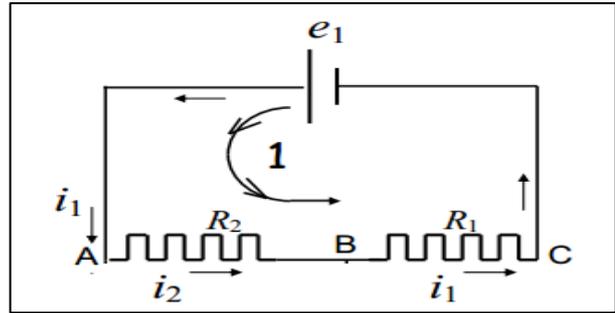


Figure II.10. Loi des mailles.

II.10. Théorèmes généraux dans l'analyse des circuits

II.10.1. Théorème de superposition

Une source quelconque d'énergie peut être considérée séparément des autres quant à son effet sur les grandeurs en jeu dans le circuit. La combinaison de tous les effets individuels donne l'effet total (figure II.11) [6].

La marche à suivre comprend six opérations :

1. choisir une source d'énergie
2. retirer toutes les autres sources selon la règle :
 - a. les sources de tension sont court-circuitées
 - b. les sources de courant sont ouvertes
3. garder dans le circuit les résistances internes des sources enlevées
4. déterminer le courant dans chaque élément, ou la tension entre les bornes de chacun d'eux. Indiquer les directions et les polarités
5. répéter les opérations de 1 à 4 pour chaque source
6. additionner algébriquement les résultats partiels

Exemple

Quels sont les courants dans le circuit suivant :

$$E_1=10V \quad \text{et} \quad E_2=20V / \quad R_1=1,2 \text{ K}\Omega, \quad R_2=1,8 \text{ K}\Omega \quad \text{et} \\ R_3=2,7 \text{ K}\Omega$$

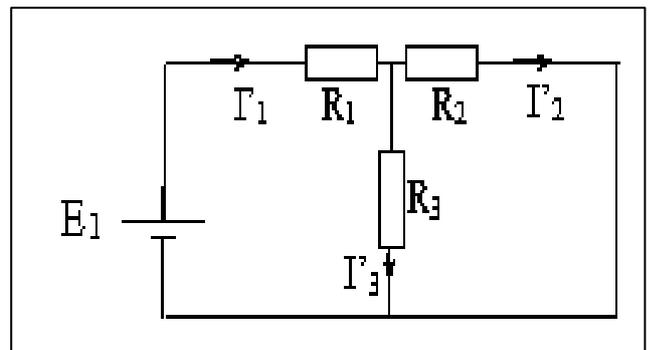
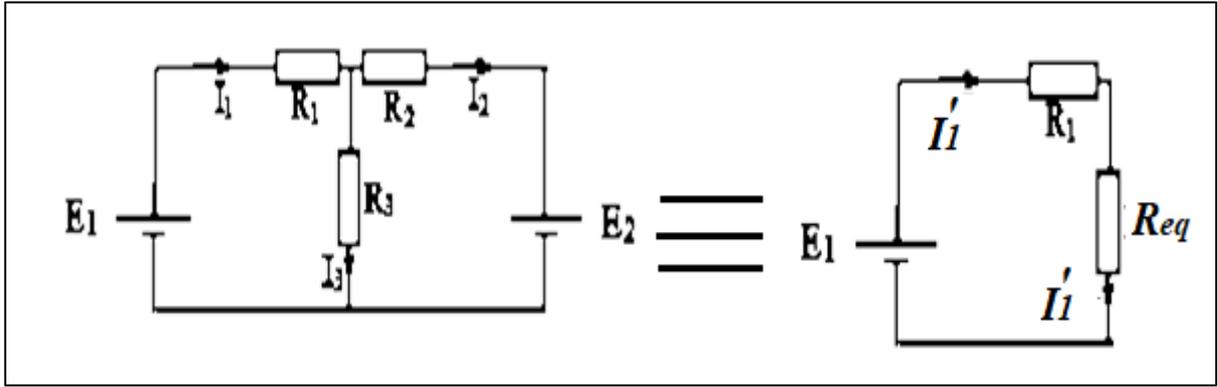


Figure II.11. Théorème de superposition.

Solution



$$-E_1 + R_1 I_1' + R_{eq} I_1' = 0 \quad , \quad R_{eq} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \quad \text{AN. } I_1' = \frac{10}{1,2 \cdot 10^3 + \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 2,7 \cdot 10^3}{1,2 \cdot 10^3 + 2,7 \cdot 10^3}} = 4,386 \text{ mA}$$

$$-E_2 + R_{eq} I_2' + R_2 I_2' = 0 \quad , \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

$$I_2' = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} \quad \text{AN. } I_2' = \frac{20}{1,8 \cdot 10^3 + \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 2,7 \cdot 10^3}{1,2 \cdot 10^3 + 2,7 \cdot 10^3}} = 7,602 \text{ mA}$$

$$I_3' = I_2' - I_1' \quad \text{AN. } I_3' = 7,602 - 4,386 = 3,216 \text{ mA}$$

II.10.2. Théorème de Thévenin

Le théorème de Thévenin établit que le courant dans toute résistance R branchée entre les deux bornes d'un réseau est le même que si R était branchée à une source de tension où (figure II.12) [9]:

- la fem est la tension à vide entre les bornes de R
- la résistance interne est la résistance du réseau entre les bornes de R, avec toutes les autres sources remplacées par des résistances égales à leurs résistances internes.

Circuit équivalent de thévenin

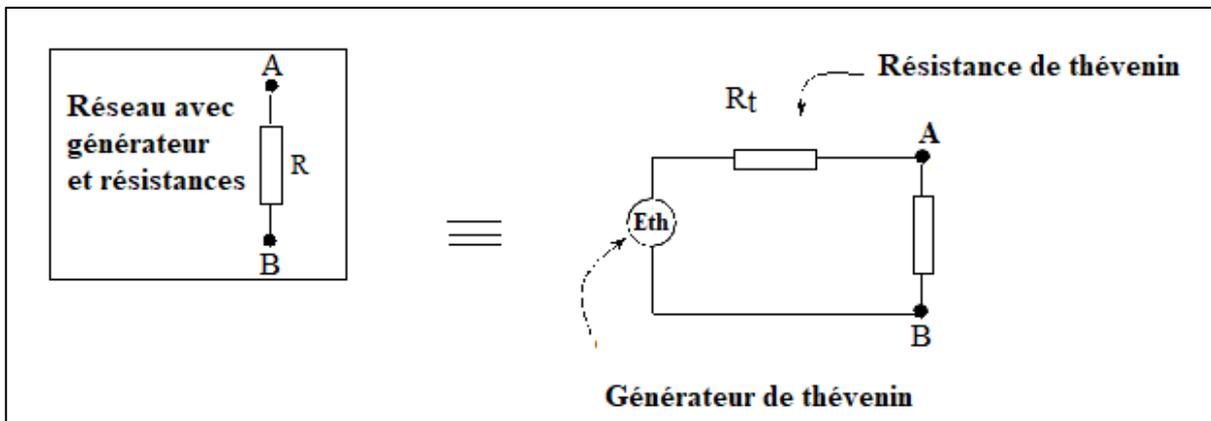
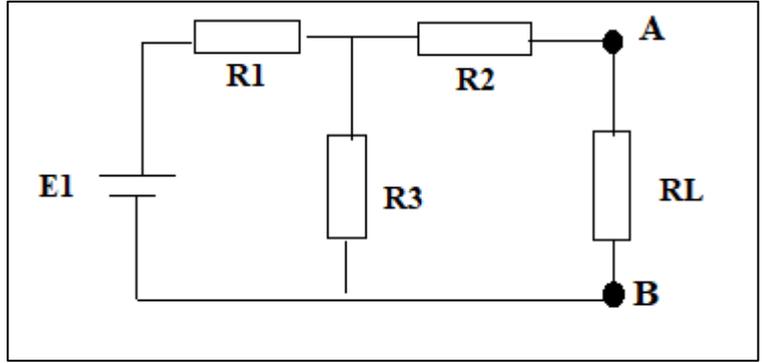


Figure II.12. Théorème de thévenin

Exemple

Appliquer le théorème de thévenin au circuit suivant :

Solution



Détermination de E_{th}

$$E_{th} = (R_{th} + R) I$$

$$I = \frac{E_{th}}{R_{th} + R}$$

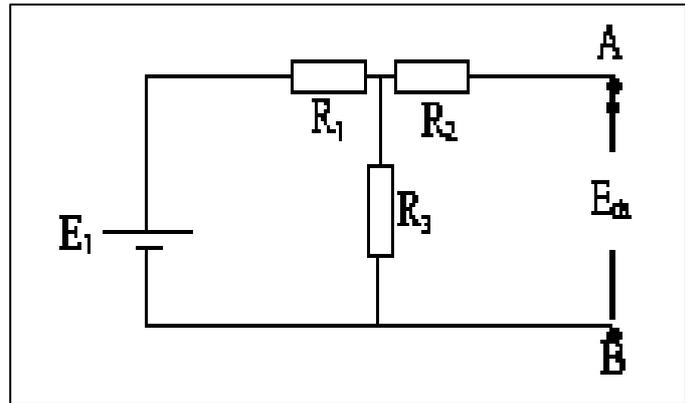
Détermination de R_{th}

$$R_{th} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

Le circuit équivalent de thevenin apparait comme suit :

$$I_L = \frac{E_{th}}{R_L + R_{th}}$$

$$I_L = \frac{E \frac{R_3}{R_1 + R_3}}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + R_L} = \frac{E R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1 + R_L (R_1 + R_3)}$$



II.10.3. Théorème de Norton

Le circuit de Norton est tel que (figure II.13):

I : courant de norton, est le courant du court-circuit entre les bornes AB, courant équivalent entre AB si ces points étaient reliés par un conducteur parfait.

G : conductance de norton, est la conductance entre les bornes A et B avec ces bornes ouvertes (élément G_{AB} débranché), toutes les sources étant éteinte [9].

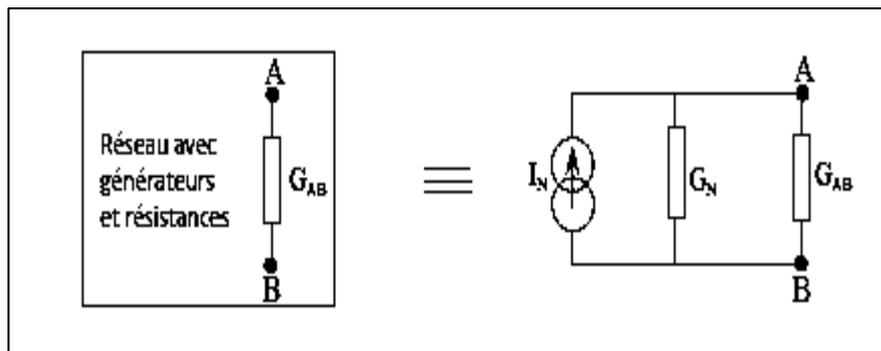


Figure II.13. Théorème de Norton.

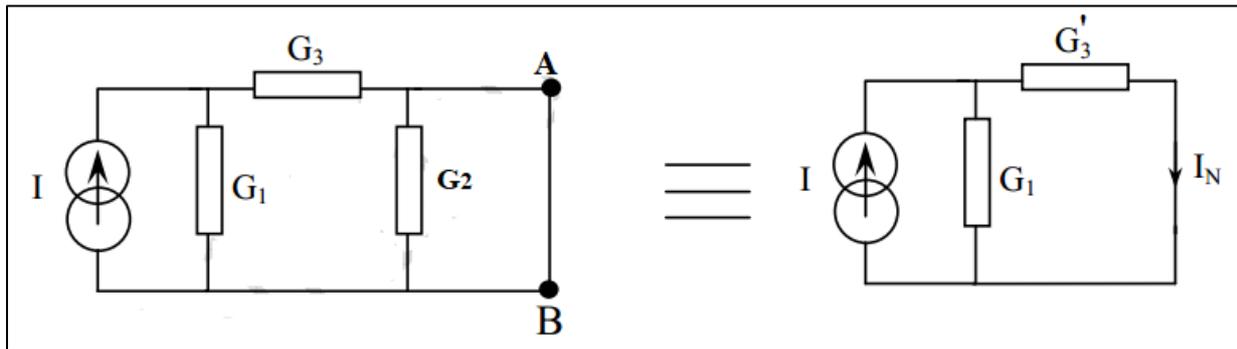
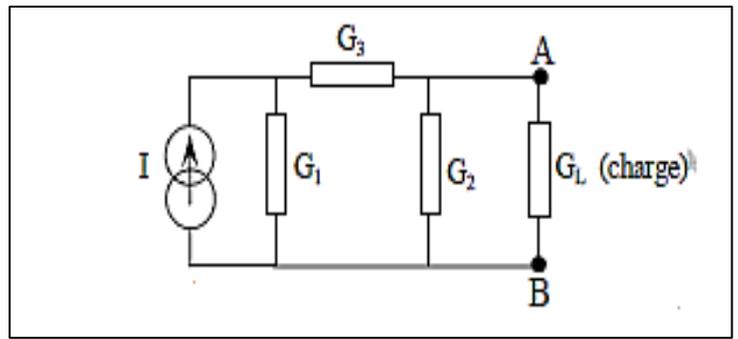
Exemple

Donner le circuit équivalent de Norton du circuit suivant :

a- Courant de Norton I_N

Pour obtenir ce courant, on procède de la façon suivante :

- Court-circuiter G_L
- Déterminer le courant dans le court-circuit



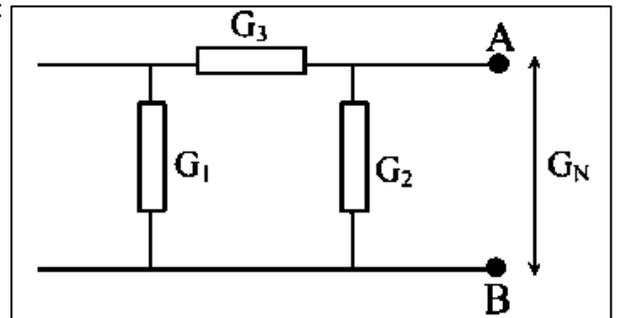
$$I_n = \frac{G_3}{G_1 + G_2} I$$

b-Conductance de Norton

Pour obtenir la conductance de Norton G_N , on suit les étapes suivantes :

- Débrancher G_L entre A et B
- Eteindre la source I
- Déterminer la conductance entre les bornes A et B

$$G_N = G_2 + \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_3}$$

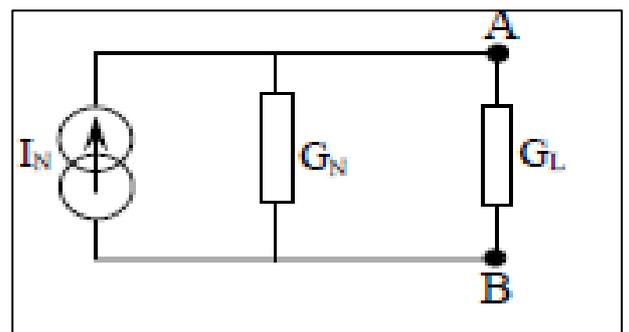


Le circuit équivalent de Norton est donné par :

$$I_L = \frac{G_L}{G_L + G_N} I_N = I \frac{G_3}{G_1 + G_3} \frac{G_L}{G_L + G_N}$$

$$= I \frac{G_3}{G_1 + G_3} \frac{G_L}{G_L + G_2 + \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_3}}$$

$$I_L = \frac{G_3 G_L I}{G_1 G_2 + G_2 G_3 + G_1 G_3 + G_L (G_1 + G_3)}$$



Chapitre

III

ELECTROMAGNETISME

III.1. Champ magnétique

Un champ magnétique est une région de l'espace où, en chaque point, le pôle d'un petit aimant est soumis à l'action d'une force (figure III.1).

Comme le voisinage d'un aimant est caractérisé par l'existence d'un champ magnétique, le voisinage d'un circuit électrique est aussi caractérisé par un champ magnétique.

Comme en électrostatique, le vecteur de champ magnétique \vec{B} est tangent aux lignes de champ.

Les lignes du champ magnétique passent du pôle nord vers le pôle sud de l'aimant [4].

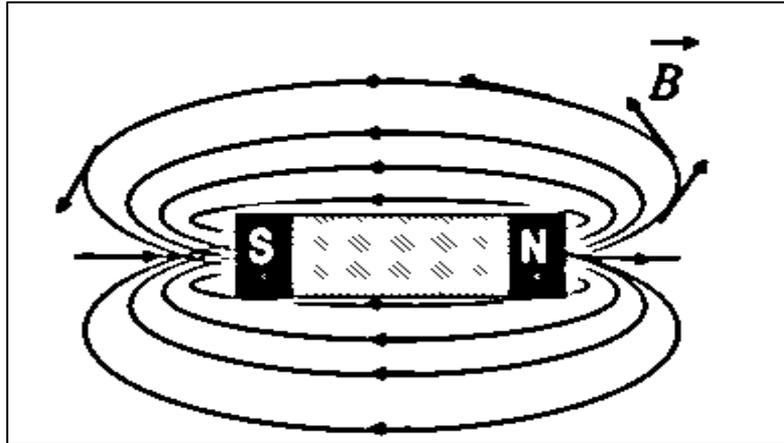


Figure III.1. Champ magnétique et lignes du champ.

III.1.1. Champ magnétique créé par une charge en mouvement

Le champ magnétique créé en un point M par une particule de charge q située en un point P et animée d'une vitesse (figure III.2).

Toute charge q, en chaque point M de l'espace, produisant une excitation dans son mouvement subit une force magnétique. Ainsi, elle crée un champ magnétique \vec{B} [2].

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

μ_0 est la perméabilité du vide

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}(\text{SI})$$

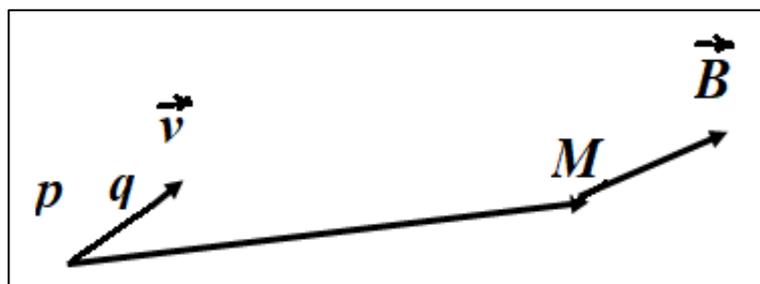


Figure III.2. Champ créé par une charge en mouvement

III.1.2. Principe de superposition

Le champ magnétique créé, en un point M de l'espace, par deux charges q_1 et q_2 est la somme vectorielle des champs créés par chaque charge [4].

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \vec{v}_i \wedge \overrightarrow{P_i M}}{\|\overrightarrow{P_i M}\|^3}$$

A grandes échelles, avec un nombre significatif de charges dans un volume V , une description continue de charges est utilisée comme en électrostatique.

III.2. Force Magnétique

Lors du déplacement d'une charge dans un champ magnétique, il est possible de déterminer expérimentalement la force appliquée sur la charge [2].

III.2.1. Force de Lorentz

Soit une particule de charge q se met en mouvement à la vitesse \vec{v} dans un champ magnétique \vec{B} . Elle est soumise à l'action d'une force magnétique appelée force de Lorentz donnée par :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

La grandeur de F_m s'écrit : $F_m = |q|vB \sin \alpha$

avec α est l'angle entre les directions de la vitesse \vec{v} et du champ magnétique \vec{B} .

La force F_m est maximal lorsque $\vec{v} \perp \vec{B}$. Et elle est nulle ($F_m = 0$) lorsque $\vec{v} // \vec{B}$ ($\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$).

III.2.2. Représentation vectoriel de la force de Lorentz

Le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{B}$ donne un vecteur \perp au plan (\vec{v}, \vec{B}) (figure III.3). La règle de la main droite [1].

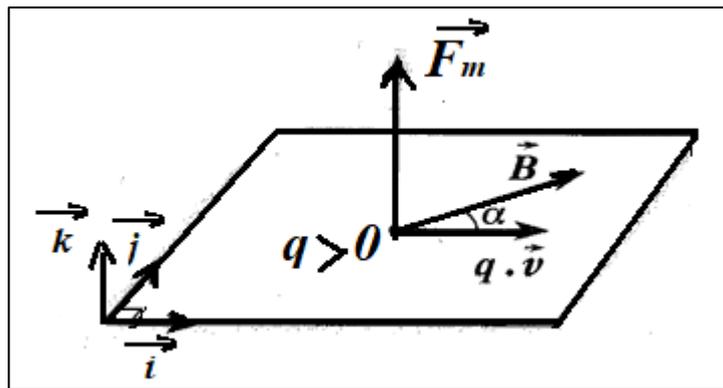


Figure III.3. Produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{B}$

- Si $q > 0$, la direction de \vec{F}_m aura le même signe que $\vec{v} \wedge \vec{B}$.

\vec{v} : vitesse de la particule (m/s).

\vec{B} : Champ magnétique (T : tesla).

Quelques ordres de grandeurs

Le champ magnétique de la terre $B \approx 10^{-4} T$

Un aimant permanent B de 10m à 1 T

Un électroaimant B de 0.1 à 0.2 T

Une bobine supraconductrice B de 5 à 50 T

III.3. Les lignes de champ magnétique

Les champs magnétiques peuvent être représentés par des lignes de champ (figure III.4).

La direction du champ magnétique \vec{B} est déterminée par la direction de la tangente à une ligne de ce champ [2].

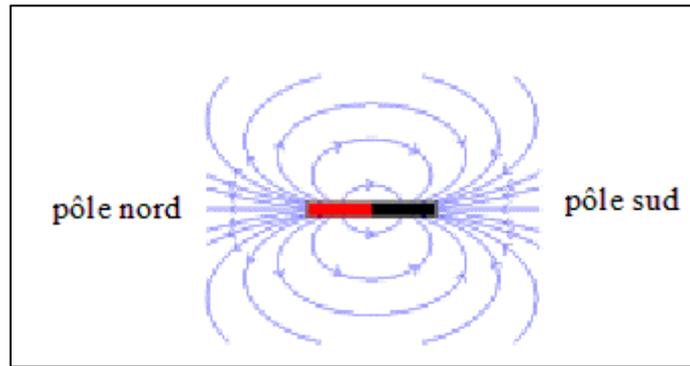


Figure III.4. Direction d'une ligne de champ.

III.4. Loi de Laplace

Soit un élément de circuit de longueur d parcouru par un courant d'intensité I , comprenant des particules mobiles de densité volumique ρ et placé dans un champ magnétique \vec{B} , est soumis à une force appelée force de Laplace [2].

$$d\vec{F} = dq \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} = \rho dV \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$d\vec{F} = dV \cdot \vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{j} \cdot S \cdot dL \wedge \vec{B}$$

avec le vecteur densité de courant : $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$

Et par définition : $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$

Alors : $d\vec{F} = I \cdot d\vec{L} \wedge \vec{B}$

III.5. Loi de Faraday

III.5.1. Flux magnétique

Dans un circuit fermé C et placé dans un champ magnétique, un courant induit est créé lorsque le flux magnétique varie au cours du temps [4].

le flux du champ magnétique à travers une surface S est donné par: $\Phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS}$

Un flux magnétique variable est obtenue dans :

- Le cas de Neumann : le champ magnétique varie au cours du temps
- Le cas de Lorenz : le circuit C se déplace dans le champ

III.5.2. Induction magnétique

Une variation du flux magnétique dans le temps à travers le circuit produit un courant induit. Ce courant résulte de la naissance d'une force électromotrice induite (e).

Le sens et la grandeur du courant dépendent de la variation, en fonction du temps,

- de la surface du circuit.
- du champ magnétique dans lequel est plongé le circuit.
- de l'orientation du circuit par rapport au champ magnétique [3].

Exemple

La figure III.5 illustre un circuit formé d'une bobine, un μ Ampère mètre et des fils qui les relient. Le courant traversant le circuit est d'intensité très faible.

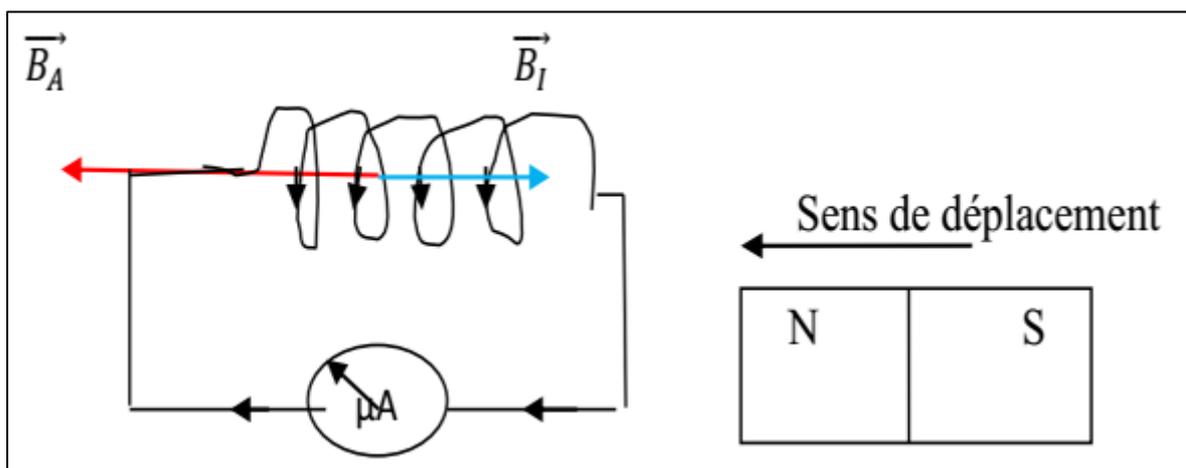


Figure III.5. Loi de Lenz.

En rapprochant un aimant de la bobine, l'aiguille de l'Ampère dévie et met en évidence le passage d'un courant dans le circuit. Ce courant a un sens tel que la bobine présente une face Nord N' au pôle nord N de l'aimant. Ainsi les forces électromagnétiques, créées par le courant induit, s'opposent au mouvement de l'aimant. Dès que le mouvement cesse, le courant induit s'annule [3].

Ce courant induit dans le circuit va lui aussi crée un champ magnétique induit à l'intérieur de la bobine noté \vec{B}_I . Ce champ change aussi de sens avec le sens du circuit.

Il est relevé que \vec{B}_I et \vec{B}_A sont de sens opposés. Le champ résultant à l'intérieur de la bobine s'écrit :

$$\|\vec{B}\| = \|\vec{B}_A\| - \|\vec{B}_I\|$$

Ce champ induit tend à diminuer la valeur de $\|\vec{B}_A\|$.

Le champ résultant à l'intérieur de la bobine s'écrira : $\|\vec{B}\| = \|\vec{B}_A\| + \|\vec{B}_I\|$

Ce champ induit tend à augmenter la valeur de $\|\vec{B}_A\|$.

III.5.3. Loi de Faraday

La création d'un champ magnétique dans une bobine produit un flux magnétique Φ . Il est mesuré en weber (Wb).

La variation de ce flux magnétique est déduite de la loi de Faraday. La force électromotrice (e) induite dans un circuit est le rapport entre l'opposé de dérivée du flux magnétique à travers ce circuit et le temps [1].

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ (Volts)}$$

III.5.4. Champ créé par un circuit électrique (formule de Biot et Savart)

Soit un élément $d\vec{l}$ du circuit fin fermé C et parcouru par un courant I (figure III.6).

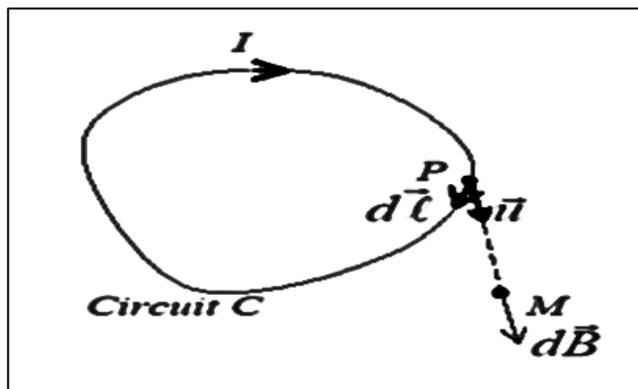


Figure III.6. Champ créé par un circuit électrique.

Le champ élémentaire créé en un point M est : $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \overline{PM}}{\|\overline{PM}\|^3}$

le champ total : $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l} \wedge \overline{PM}}{\|\overline{PM}\|^3}$

III.6. Dipôle magnétique

III.6.1. Moment magnétique d'une partition de courant

Soit un circuit fin fermé plan de surface S parcouru par un courant I (figure III.7), le vecteur normal au plan du circuit correspondant au sens positif de l'intensité dans le circuit est appelé le moment magnétique de la spire donné par [2]:

$$\vec{\mu} = I\vec{S}$$

avec : $\vec{S} = S\vec{n}$, où \vec{n} est le vecteur normal.

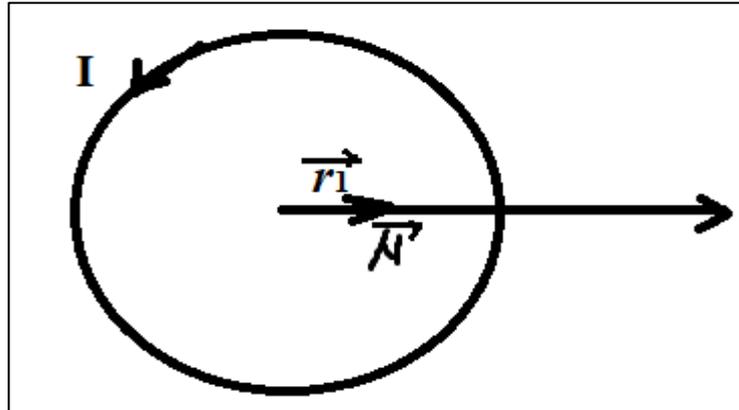


Figure III.7. Circuit fin fermé plan de surface S parcouru par un courant I .

Le moment magnétique d'une bobine de N spires identiques de surface S est : $\vec{\mu} = NI\vec{S}$

III.6.2. Dipôle magnétique

Un dipôle magnétique est une partition de courant de moment magnétique non nul dont la taille typique est très petite devant les autres longueurs du problème [1].

Exemple : atome de Bohr

Modèle classique de l'atome d'hydrogène

$$\alpha = 0.53 \cdot 10^{-10} \text{ m} ; E = -13.6 \text{ eV} ; m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}.$$

III.6.3. Champ magnétique créé par un dipôle magnétique

Le champ créé par le dipôle magnétique est déduit par le rapport appliqué pour les dipôles électriques.

$$\vec{B} \begin{cases} \frac{2\mu_0 M \cos\theta}{4\pi r^3} \\ \frac{\mu_0 M \sin\theta}{4\pi r^3} \end{cases}$$

L'équation des lignes de champ s'écrit : $r = cts \sin\theta^2$

Partie B

Exercices proposés avec corrections

Interaction Électrique

Exercice I.1

1-Déterminer le nombre d'atomes et d'électrons constituant une pièce de monnaie en cuivre (${}^{63}_{29}\text{Cu}$), neutre, de 3g.

2- Cette pièce porte à présent une charge $Q = 5 \times 10^{-9}$ C. Déterminer le nombre d'électrons perdus par la pièce et le comparer au nombre d'atomes.

Données : $m = 3\text{g}$, $Z = 29$ et $A = 63.546$. Nombre d'Avogadro $N = 6.023 \times 10^{23}$ [8].

Solution Exercice I.1

1- Le nombre de moles est : $n_{\text{moles}} = m/A$ (m en g et non en kg).

Le nombre d'atomes est : $n_A = n_{\text{moles}}N = \frac{mN}{A} = 2.8435 \times 10^{22}$.

Le nombre d'électrons est : $n_Z = Zn_A = ZmN/A = 8.246 \times 10^{23}$.

2- Le nombre d'électrons perdus est : $n_e = Q/e$, avec $Q = +5 \times 10^{-9}$ C et $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C.

Alors : $n_e = 3.12 \times 10^{10}$.

Donc $n_e/n_A \sim 10^{-13}$.

Exercice I.2

Deux sphères conductrices identiques de masse $m = 10\text{g}$ portent des charges q_1 et q_2 . On les met en contact, puis on les sépare.

1-Calculer les charges q'_1 et q'_2 qu'elles prennent dans les cas suivants :

a) $q_1 = +4 \times 10^{-8}$ C et $q_2 = 0$ C.

b) $q_1 = +3 \times 10^{-8}$ C et $q_2 = +8 \times 10^{-8}$ C.

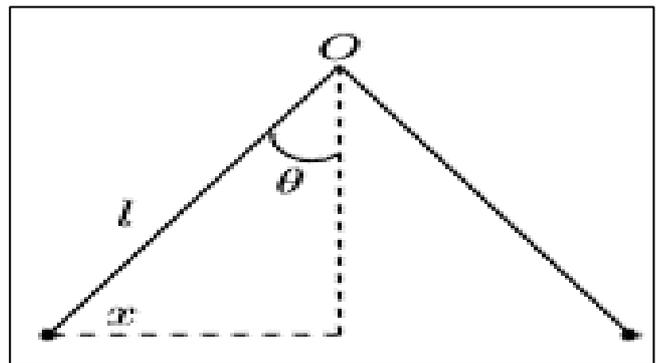
c) $q_1 = +3 \times 10^{-8}$ C et $q_2 = -8 \times 10^{-8}$ C.

2-Préciser chaque fois le sens du transfert d'électrons.

3-Les deux masses sont suspendues au même point O par deux fils identiques de Nylon de longueur $l = 80\text{cm}$ (figure ci-dessous). En négligeant la masse des fils, calculer la distance $2x$ séparant les deux sphères pour les 3 cas précédents (on supposera que l'angle θ est suffisamment petit et $g = 10\text{m/s}^2$).

Données : $l = 0.8\text{m}$, $K = 9 \times 10^9 \text{C}^{-2}\text{m}^3\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$,

$m = 10^{-2}$ kg, $g = 10\text{m/s}^2$ [9].



Solution exercice I.2

1-Comme les sphères sont identiques, elles porteront la même charge après le contact

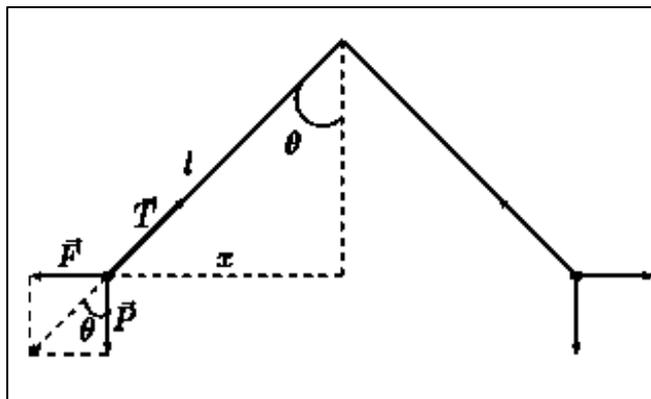
$$q'_1 = q'_2 = (q_1 + q_2) / 2.$$

Système électriquement isolé \Rightarrow conservation de la charge :

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2,$$

$$\text{Donc } q'_1 = q'_2 = (q_1 + q_2) / 2.$$

Le tableau suivant résume les résultats (en C):



Cas	q_1	q_2	$q_1 + q_2$	$q'_1 = q'_2$
a	4×10^{-8}	0	4×10^{-8}	2×10^{-8}
b	3×10^{-8}	8×10^{-8}	11×10^{-8}	5.5×10^{-8}
c	3×10^{-8}	-8×10^{-8}	-5×10^{-8}	-2.5×10^{-8}

3-Les deux sphères portent la même charge et se repoussent donc par une force

$$F = K \frac{q'_1 q'_2}{(2x)^2} = K \frac{(q'_1)^2}{(2x)^2}$$

Géométrie : $\frac{x}{l} = \sin\theta$.

En appliquant la 2^{ème} loi de Newton : $\sum \vec{F} = m\vec{a} \iff \vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$

On a : $\tan\theta = \frac{F}{P}$. (L'angle étant petit, alors $\sin\theta = \tan\theta$)

$$\text{d'où } \frac{x}{l} = K \frac{q_1^2}{mg(2x)^2} \Rightarrow x = (K \frac{lq_1^2}{4mg})^{1/3}$$

AN. Cas a: $x = 1.93\text{cm}$. Cas b: $x = 3.79\text{cm}$. Cas c: $x = 2.24\text{cm}$.

Exercice I.3

Deux sphères conductrices identiques portant des charges de signes opposés s'attirent avec une force de 0.108 N, quand la distance qui les sépare est $d = 0.5$ m. On les relie à l'aide d'un fil conducteur. Après avoir enlevé le fil, elles se repoussent avec une force de 0.036N, pour la même distance.

Quelle était la charge initiale de chaque sphère ? (Les rayons des sphères sont très négligeables devant la distance d).

Données : $F = 0.108\text{N}$, $d = 0.5\text{m}$, $F' = 0.036$ N [8].

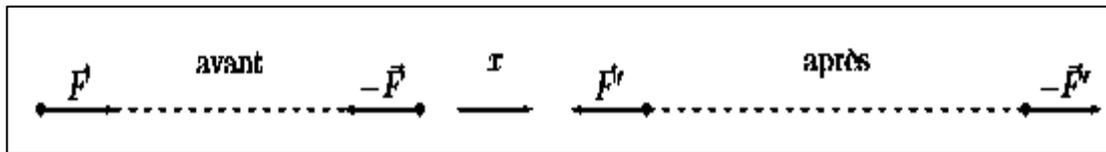
Solution Exercice I.3

Soient q_1 et q_2 les charges initiales des deux sphères.

La force est $F = -K \frac{q_1 q_2}{d^2}$ (car $q_1 q_2 < 0$).

Le fil conducteur permet le déplacement des charges d'une sphère à l'autre pour avoir la même charge

$$q' = \frac{q_1 + q_2}{2} \text{ (Conservation de la charge et sphères identiques).}$$



La force après avoir enlevé le fil est $F' = K \frac{q'^2}{d^2} = K \frac{(q_1 + q_2)^2}{4d^2}$.

On a donc un système de deux équations du second degré :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 q_2 = -\frac{Fd^2}{K} \\ (q_1 + q_2)^2 = \frac{4F'd^2}{K} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_1 q_2 = -3.0 \times 10^{-12} \\ q_1 + q_2 = \pm 2.0 \times 10^{-6} \end{array} \right.$$

La solution dépend du signe (\pm) de $q_1 + q_2$. Pour le signe (-),

on aura ($q_1 = -3.0 \times 10^{-6}$ C, $q_2 = 1.0 \times 10^{-6}$ C),

ou l'inverse ($q_1 = 1.0 \times 10^{-6}$ C, $q_2 = -3.0 \times 10^{-6}$ C).

Pour le signe (+), on aura ($q_1 = -1.0 \times 10^{-6}$ C, $q_2 = 3.0 \times 10^{-6}$ C),

ou l'inverse ($q_1 = 3.0 \times 10^{-6}$ C, $q_2 = -1.0 \times 10^{-6}$ C).

On a quatre solutions parce qu'on peut permuter les charges q_1 et q_2 , ainsi que leurs signes, sans changer ni F ni F' .

Exercice I.4

La figure ci-dessous représente un pendule constitué d'un fil de longueur $l = 10$ cm et d'une boule de masse $m = 9$ g portant une charge électrique $Q_1 = +2 \times 10^{-8}$ C.

On place à une distance $d = 4$ cm de cette boule une charge ponctuelle

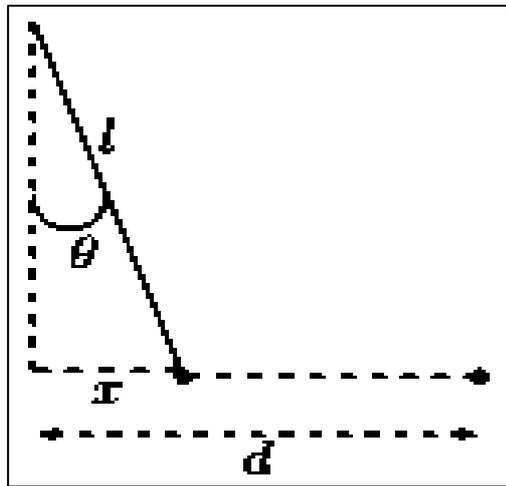
$Q_2 = -5 \times 10^{-8}$ C. On prendra $g = 10$ m/s² [9].

1. Calculer l'angle θ d'inclinaison du pendule (on le supposera suffisamment petit).

2. Calculer la force électrostatique qui s'exerce sur la boule.

Données : $l = 10^{-1}$ m, $m = 10^{-2}$ kg, $Q_1 = 2 \times 10^{-8}$ C, $d = 4 \times 10^{-2}$ m,

$Q_2 = -5 \times 10^{-8}$ C.



Solution I.4

1-Les forces électriques sont attractives.

L'approximation du petit angle permet d'écrire (voir exercice I.2):

$$\frac{x}{l} = \sin\theta = \tan\theta = \frac{F}{mg}$$

où $F = -K \frac{Q_1 Q_2}{(d-x)^2}$ (en module).

$$\text{Donc } \frac{x}{l} = -K \frac{Q_1 Q_2}{mg(d-x)^2} \Rightarrow (d-x)^2 = -K l \frac{Q_1 Q_2}{mg} \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x^3 - 2dx^2 + d^2x + K \frac{l Q_1 Q_2}{mg} = 0.$$

$$\text{D'où } x^3 - 8 \cdot 10^{-2} x^2 + 16 \cdot 10^{-4} x - 9 \cdot 10^{-6} = 0$$

L'équation se simplifie en posant $x = y \times 10^{-2}$ (on travaille en cm).

On obtient: $y^3 - 8y^2 + 16y - 9 = 0$. On remarque que $y = 1$ est une solution 1.

L'équation devient alors: $(y-1)(y^2 - 7y + 9) = 0$.

Les deux solutions, qui restent, sont celles de $(y^2 - 7y + 9) = 0$. On trouve $y = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$.

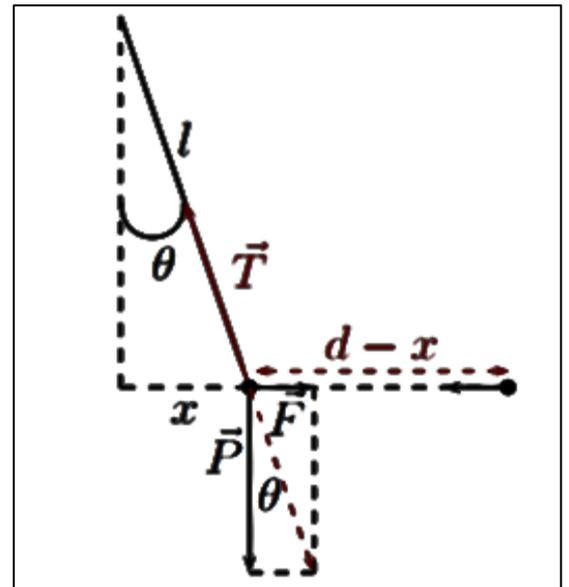
A ces trois solutions correspondent $x = 1\text{cm}$, $x = 1.7\text{cm}$ ou $x = 5.30\text{cm}$.

On constate que la dernière solution correspond à $x > d$.

De plus, $\theta = \arcsin \frac{x}{l} = \arcsin(0.53) \approx 32^\circ$ ce qui ne vérifie pas l'approximation $\sin\theta \approx \theta$.

Les deux premières solutions sont acceptables et correspondent à des θ différents tout en vérifiant l'approximation $\sin\theta \approx \theta$.

On choisit $x = 1\text{cm}$ car elle correspond à la meilleure approximation ($\theta = \arcsin(0.1) = 5.7^\circ$ est le plus petit).



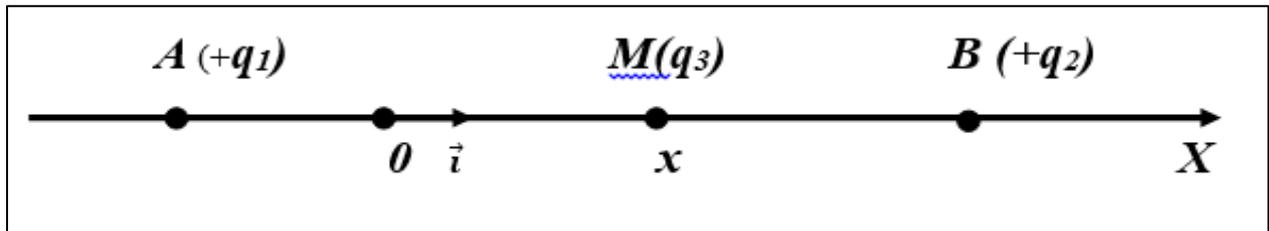
$$2- F = -K \frac{Q_1 Q_2}{(d-x)^2} = \frac{x}{l} mg = 10^{-2} \text{ N.}$$

Exercice I.5

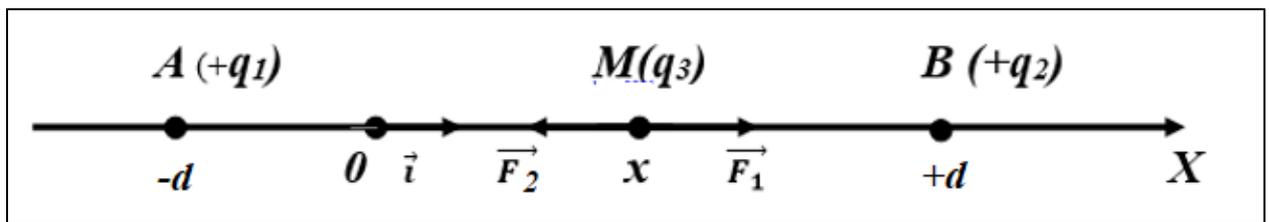
On considère le système de charges ponctuelles, représenté sur la figure ci-dessous. Les charges positives q_1 et q_2 sont fixées respectivement aux points A et B distants de d . Soit une charge q_3 , assujettie à se déplacer le long du segment AB:

1- Donner l'expression de la force qui s'exerce sur q_3 au point M.

2- A quelle abscisse x_0 , la charge q_3 est dans une position d'équilibre ? A.N : $d = 4\text{cm}$ [8].



Solution I.5



M : est la position de la charge q_3 .

1- La force résultante sur la charge q_3 : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

En valeurs algébriques : $F_1 = K \frac{q^2}{AM^2} = K \frac{q^2}{x^2}$

$$F_2 = -K \frac{q^2}{BM^2} = -K \frac{q^2}{9(d-x)^2}$$

$$F = K \frac{q^2}{x^2} - K \frac{q^2}{9(d-x)^2} = K q^2 \frac{9(d-x)^2 - x^2}{9x^2(d-x)^2} = K q^2 \frac{(3d-2x)(3d-4x)}{9(d-x)^2 x^2}.$$

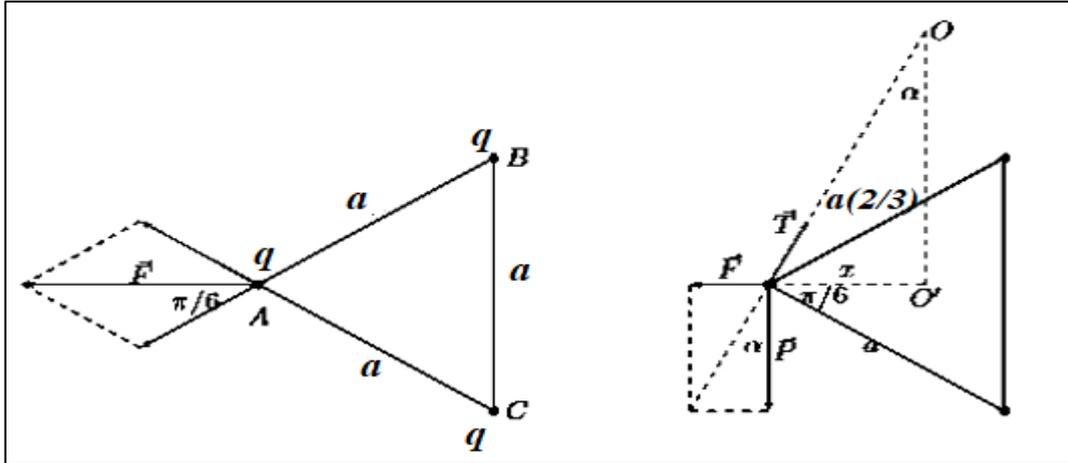
2- Équilibre : $F = 0 \Rightarrow (3d-2x)(3d-4x) = 0$. Alors $x = \frac{3d}{4} = 3\text{cm}$ (l'autre solution $x = \frac{3d}{2}$ est inacceptable car elle correspond à $x > d$).

Exercice I.6

Trois petites boules identiques (A, B, C) de masse $m = 10\text{g}$, sont suspendues à un même point au moyen de trois fils (AO=BO=CO) de soie distincts de longueur $l = 1\text{m}$. Ces trois boules de même charge q se positionnent alors au sommet d'un triangle (ABC) équilatéral de côté $a = 0.1\text{m}$. Calculer la charge q .

Données : $m = 10^{-2}\text{kg}$, $l = 1\text{m}$, $a = 0.1\text{m}$ [6].

Solution I.6



La résultante des forces électriques sur l'une des charges : $\vec{F}_A = \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{CA}$

Puisque : $F_{BA} = F_{CA} = K \frac{q^2}{a^2} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, Alors : $F = 2K \frac{q^2}{a^2} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ (1)

D'après le schéma, la projection de O est le point O' (centre du triangle ABC) à une distance x de A :

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{x}{a/3}$ donc : $x = \frac{2}{3} a \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ (2)

Puisque l'angle α étant petit, on a : $\sin\alpha = \tan\alpha \Rightarrow \frac{x}{l} = \frac{F}{mg}$ (3)

En remplaçant les relations (1) et (2) en (3) : $\frac{2}{3} \frac{a}{l} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2K}{mg} \frac{q^2}{a^2} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Donc $q = \sqrt{\frac{a^3 mg}{3Kl}} = 6 \times 10^{-8} \text{ C}$.

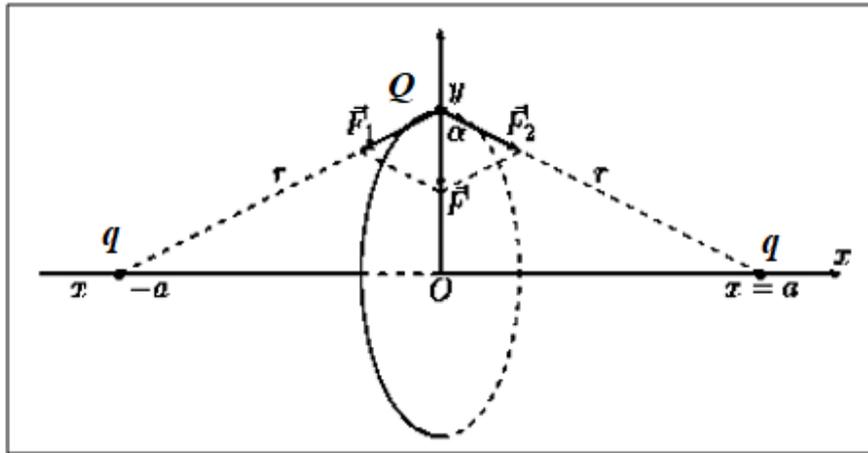
Exercice I.7

Deux charges électriques ponctuelles (+q) sont séparées par une distance 2a. On place une autre charge ponctuelle (Q = -q) mobile dans le plan médiateur du segment 2a.

Montrer qu'il existe, dans ce plan, un cercle pour lequel la charge mobile est soumise à une force maximale. Déterminer son rayon [9].

Solution I.7

Soient O le milieu de $[x = -a, x = +a]$ et y la position de la troisième charge (Q = -q).



La résultante des forces électriques étant : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Par projection : $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = K \frac{qQ}{r^2} \vec{u}$

A cause de la symétrie, on a :

$$F_1 = F_2 = K \frac{qQ}{r^2} .$$

La force résultante exercée sur Q est parallèle à y'Oy.

Par conséquent, $F = 2K \frac{qQ}{r^2} \cos \alpha$

$$\text{où } r^2 = y^2 + a^2 \text{ et } \cos \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{(y^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{Donc, } F = 2K \frac{qQy}{(y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

D'après le schéma, le rayon : $R = y$

Alors, on aura une force de même module et dirigée vers O.

$$\frac{dF}{dy} = 0 \Rightarrow -2KQq \frac{(2y^2 - a^2)}{(y^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

$$\Rightarrow y = -\frac{a}{\sqrt{2}} \text{ et } y = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{On obtient un cercle de rayon } R = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad F = 2K \frac{qQa}{\sqrt{2} \left(\frac{a^2}{2} + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{9} \sqrt{3} K \frac{Qq}{a^2}$$

Electrostatique (Champs et potentiels électriques)

Exercice II.1 (champ électrostatique créé par les charges)

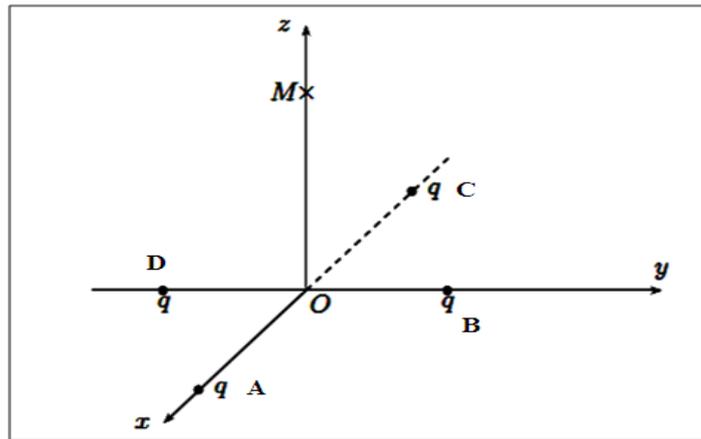
On place des charges électriques ponctuelles identiques de valeur q aux points :

$$A(a, 0, 0), \quad B(0, a, 0), \quad C(-a, 0, 0) \text{ et } D(0, -a, 0).$$

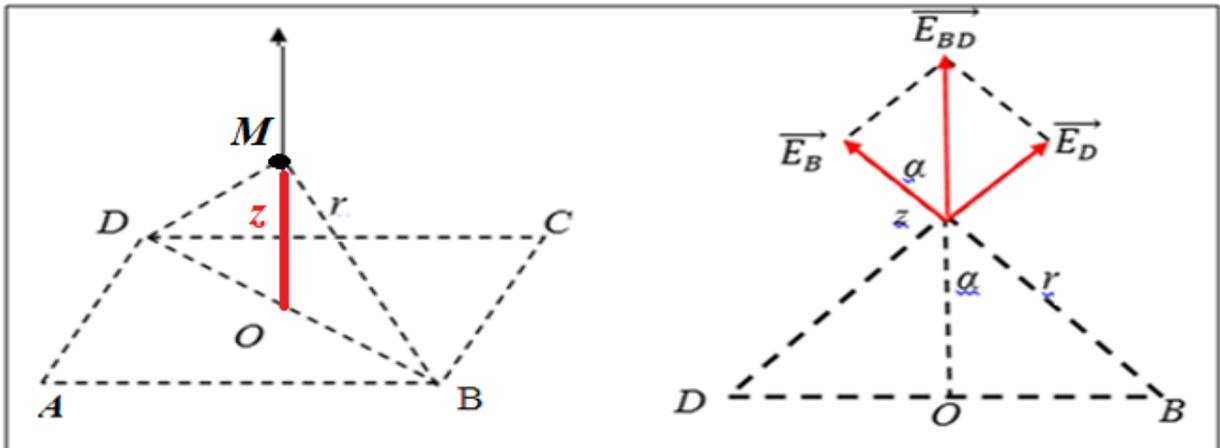
1- Calculer le champ électrique créé par ces charges en un point M quelconque sur l'axe Oz , tel que $OM = z$.

2- Calculer le potentiel créé en ce point.

3- Que deviennent ces expressions si on met des charges $+q$ en A et C et $-q$ en B et D ? [9].



Solution II.1



1- Le champ électrique créé par les charges en un point M sur l'axe Oz : $\vec{E}_M = \vec{E}_{BD} + \vec{E}_{AC}$

Par symétrie (schéma) des triangles BDM et ACM : $\vec{E}_{BD} = \vec{E}_{AC}$ et :

- ✓ les charges B et D créent le même champ (en module) $E_B = E_D = Kq/r^2$
- ✓ les charges A et C créent aussi le même champ (en module) $E_A = E_C = Kq/r^2$

Le champ total est parallèle à OZ à cause de la symétrie :

$$\text{Alors : } \vec{E}_{BD} = 2\vec{E}_B = 2E_B \cos(\alpha) \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{AC} = 2\vec{E}_A = 2E_A \cos(\alpha) \vec{k}$$

$$\text{où } \cos(\alpha) = z/r.$$

La distance séparant chaque charge de O est $OA = OB = OC = OD = a$,

donc $r = \sqrt{a^2 + z^2}$ (voir figure).

Le champ total est $\vec{E}(z) = \vec{E}_{AC} + \vec{E}_{BD} = 4kqz(a^2 + z^2)^{-3/2}\vec{k}$

2- $V(M) = V_A + V_B + V_C + V_D = 4Kq/r = 4Kq/\sqrt{a^2 + z^2}$

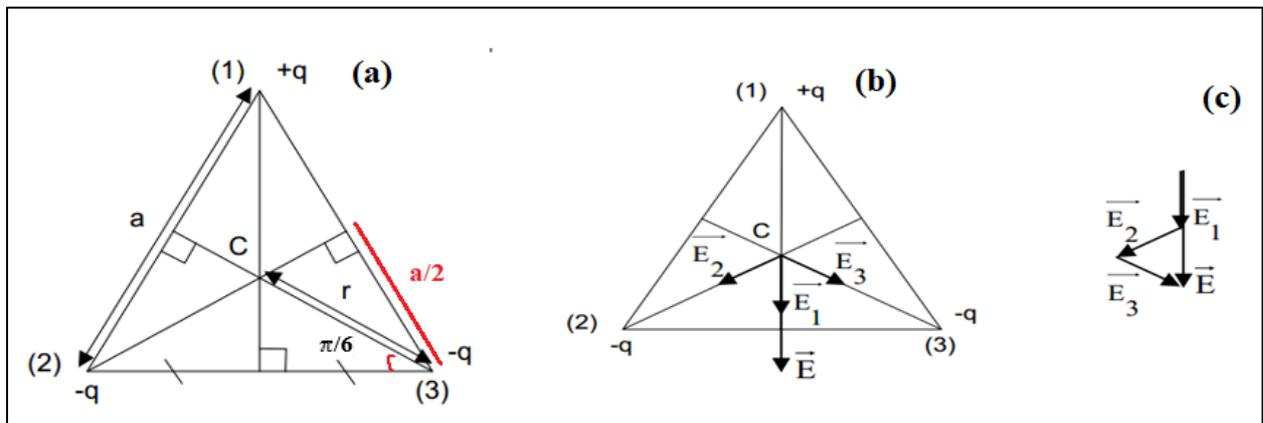
3- $\vec{E}_{AC} = -\vec{E}_{BD}$. Le champ total est donc nul. De même $V(z) = 0$.

Exercice II.2 (champ électrostatique créé par les charges)

Trois charges ponctuelles +q, -q et -q sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral de côtés (a). Déterminer les caractéristiques du champ électrostatique régnant au centre du triangle [8].

Données : $q = 0,1 \text{ nc}$ et $a = 10 \text{ cm}$.

Solution II.2



Le centre C est situé à la distance : $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$ Car : $\cos(\pi/6) = a/2r$

Théorème de superposition : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

D'après la figure (c), le champ \vec{E} a la même direction que \vec{E}_1 .

En intensité : $E = E_1 \cos(0) + E_2 \cos 60 + E_3 \cos 60$

$$E_2 = E_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} (1 + 2 \cos 60)$$

AN: $E = \frac{0.1}{4 \times 3.14 \times (8,854 \cdot 10^{-12}) \cdot \frac{10^{-2}}{3}} (1 + 2 \cos 60)$

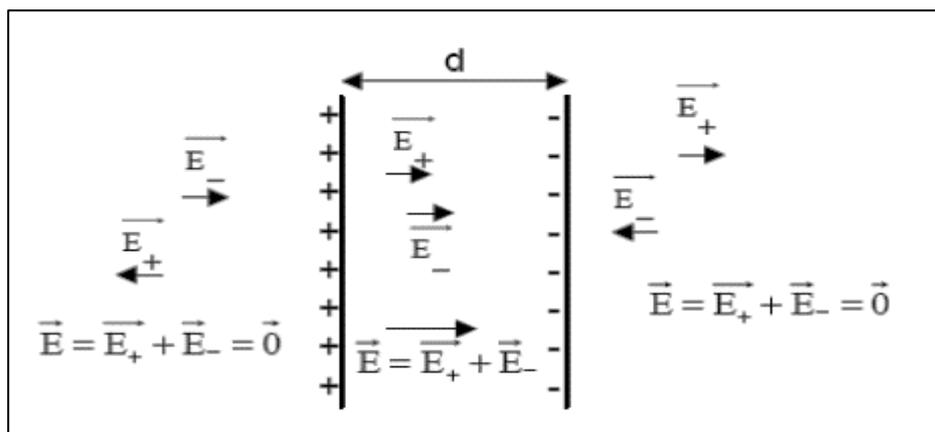
$E = 540 \text{ V/m}$

Exercice II.3 (Champ électrostatique créée par deux plans)

Considérons deux plans parallèles distants de d. Le premier plan est chargé positivement avec une densité surfacique de charge +σ (en C/m²). Le second plan est chargé négativement avec une densité surfacique de charge -σ.

Déterminer le champ électrostatique créé par les deux plans en un point quelconque de l'espace [6].

Solution II.3



E et $-E$ désignent respectivement les champs créés par le plan chargé positivement et le plan chargé négativement.

Entre les deux plans, le champ E est uniforme : c'est la somme de deux champs uniformes de même sens et de même intensité : $E = E_1 + E_2$ et $E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

Donc : $E = 2 * \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ (Indépendant de la distance entre les deux plans).

En dehors des deux plaques, le champ est nul car les champs créés par chaque plaque se compensent exactement.

Exercice II.4

Déterminer le vecteur champ électrique \vec{E}_0 et le potentiel V_0 , au centre O du carré de côté a (voir figure).

Données : $K = 9 \times 10^9 \text{ SI}$, $a = 3 \times 10^{-2} \text{ m}$, $q = 10^{-11} \text{ C}$ [9].

Solution II.4

1- Au centre du carré O : (voir figure)

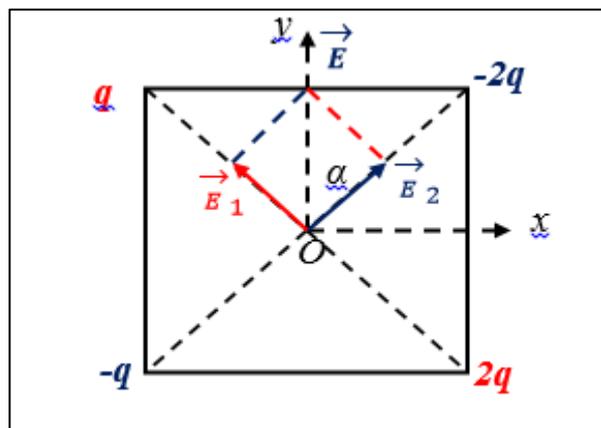
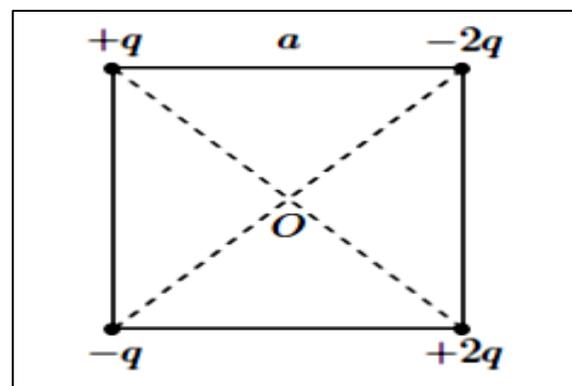
Les charges $(+2q)$ et $(+q)$ donnent un champ total \vec{E}_1

Les charges $(-2q)$ et $(-q)$ donnent un champ total \vec{E}_2

Le champ électrique total : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

Par projection : $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \frac{kq}{a^2} \cos\alpha \vec{j}$

Alors : $\vec{E} = 2E_1 \cos\alpha \vec{j}$



$$\mathbf{E} = 2\mathbf{E}_1 \cos \alpha = 2 \frac{kq}{a^2} \cos \alpha$$

$$\text{Avec : } r = \frac{a/2}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad (\alpha = \pi/4)$$

$$\mathbf{E} = 2\sqrt{2} \frac{k}{a^2} q = 282,84 \text{ V/m}$$

2- Le potentiel est nul en O, $V = \sqrt{2}K q/a - \sqrt{2}K q/a + 2\sqrt{2}K q/a - 2\sqrt{2}K q/a = 0$.

Exercice II.5 (Expérience de Millikan (1911))

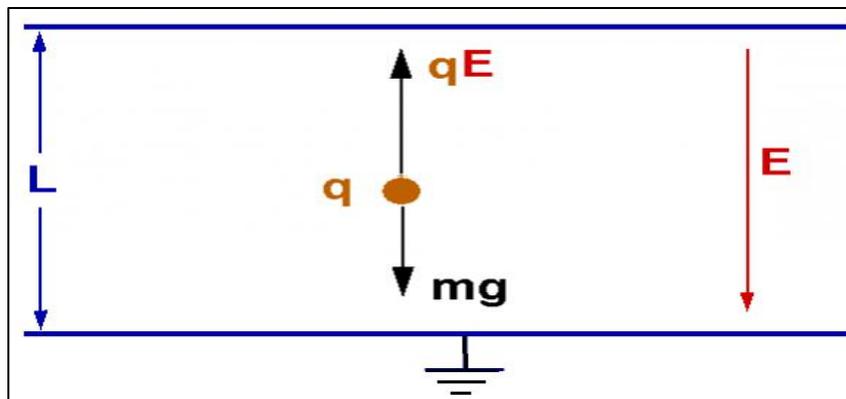
Entre deux plaques métalliques horizontales distantes de 1,5 cm, on applique une différence de potentiel de 3 kV. On constate alors que de petites gouttes d'huile chargées négativement sont en équilibre entre les deux plaques.

- Quelles sont les polarités des plaques ?
- Quelle est la charge d'une goutte d'huile ?

Comparer à la charge d'un électron [8].

- On donne :
- masse volumique de l'huile : $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$
 - diamètre d'une goutte : $D = 4,1 \text{ }\mu\text{m}$
 - intensité du champ de pesanteur : $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Solution II.5



a) C'est la force électrostatique qui empêche les gouttes de tomber. La force électrostatique est donc dirigée vers le haut. La charge étant négative, force électrostatique et champ électrostatique sont de sens opposés. Le champ électrostatique est donc dirigé vers le bas. La plaque du haut est donc chargée positivement, celle du bas négativement.

b) A l'équilibre, la somme des forces qui s'applique sur une goutte est nulle.

$$\text{Le poids est exactement compensé par la force électrostatique : } m\vec{g} + q\vec{E} = \vec{0}$$

Par projection : $m\mathbf{g} - |q|\mathbf{E} = \mathbf{0}$ (m et q désignent la masse et la charge d'une goutte)

Millikan a mesuré la quantité de la charge (quantifié) qui est : $q = n \cdot e$,

Puisque l'électron e est négatif, et q doit être positive, alors :

$$|q| = \frac{mg}{E} = \frac{mgl}{U} = \frac{\rho V gl}{U} = \frac{4\rho\pi R^3 gl}{3U} \approx 1.6 * 10^{-18} C$$

R est le rayon de la goutte ; $l = 1,5 \text{ cm}$; $U = 3 \text{ kV}$.

V est le volume de la goutte de forme sphérique.

$Q = -10 e$: une goutte contient dix électrons excédentaires.

Exercice II.6 (Champ électrostatique créée par une boule métallique)

Considérons une boule en métal de rayon R ayant une charge globale Q . A l'équilibre, comment se répartissent les charges dans le conducteur ? En déduire l'expression de la densité surfacique de charge σ (en C/m^2). Que vaut le champ électrostatique dans le conducteur ?

En appliquant le théorème de Coulomb, vérifier qu'à la surface du conducteur : $E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2}$

En utilisant le théorème de Gauss, montrer que l'intensité du champ électrostatique créée à la distance r ($r \geq R$) du centre du conducteur est : $E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} = 0$ [8].

Solution II.6

A l'équilibre, les charges se répartissent uniformément sur la

surface : $\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$ (C/m^2)

S est la surface d'une sphère.

Dans un conducteur à l'équilibre, le champ électrostatique est nul.

A la surface (théorème de Coulomb) : $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3}$

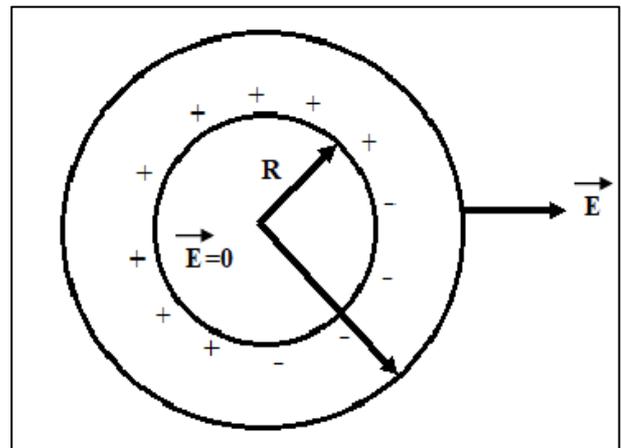
Considérons une surface fermée sphérique de rayon r .

Le flux du champ électrostatique à travers cette surface est : $\Phi =$

$$ES = E 4\pi r^2$$

L'application du théorème de Gauss donne : $E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$

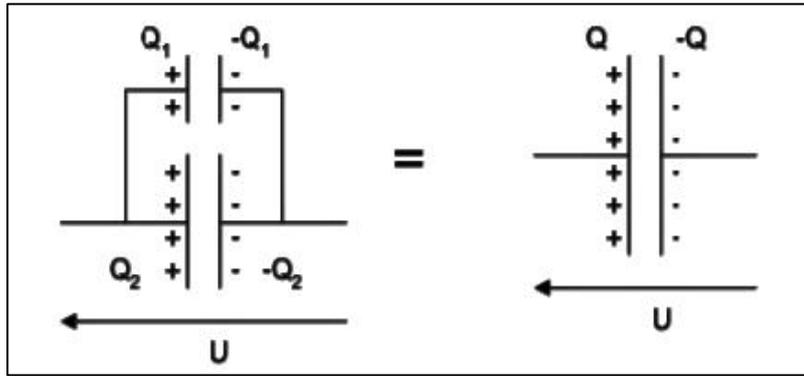
L'intensité du champ électrostatique à la distance $r \geq R$ est donc : $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$



Exercice II.7 (Association de condensateurs)

Montrer que pour des condensateurs branchés en parallèle, les capacités s'additionnent.

Montrer que pour des condensateurs branchés en série, les inverses des capacités s'additionnent [8].

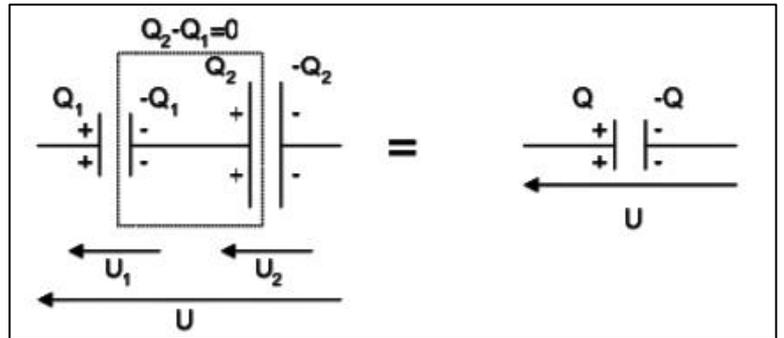


Solution II.7

$$Q_1 = C_1 U \quad , \quad Q_2 = C_2 U \quad Q = C_{eq} U$$

Il y a conservation de la charge : $Q = Q_1 + Q_2$

Donc : $C_{eq} = C_1 + C_2$



En série, tous les condensateurs ont la même charge:

$$Q = Q_1 = Q_2, \quad U = U_1 + U_2$$

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad \text{d'où :} \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Exercice II.8 (Décharge de condensateurs)

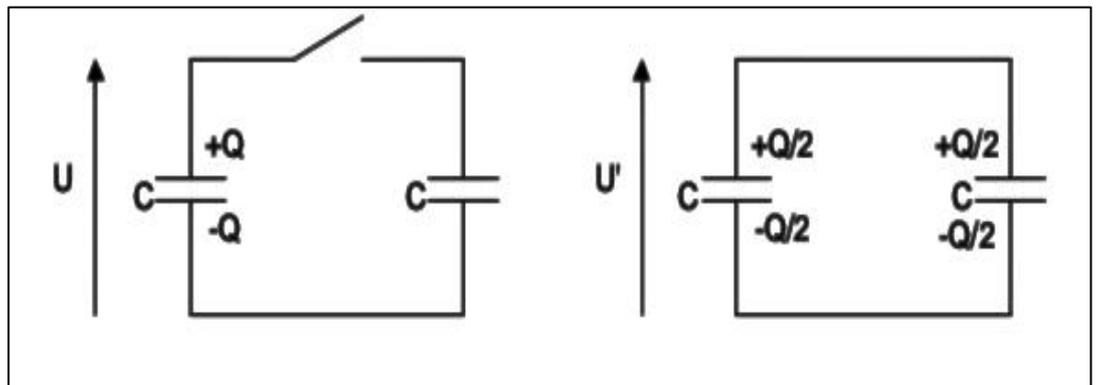
Un condensateur de capacité $C = 100 \text{ nF}$ est chargé sous une tension $U=20 \text{ V}$. On le relie à un condensateur de même capacité C , mais initialement déchargé.

- a) Calculer la tension qui apparaît aux bornes de l'ensemble.
- b) Faire le bilan énergétique avant et après connexion. Commentaire ? [8].

Solution II.7

a) La charge initiale Q va se répartir, après liaison, de la façon suivante :

$$Q/2 = C U'$$



Tension qui apparaît aux bornes de l'ensemble : $U' = Q/(2C) = U/2 = 10 \text{ V}$

b) Bilan énergétique

$$\text{Avant liaison : } W = \frac{1}{2}CU^2 + 0 = 20\mu\text{J}$$

$$\text{Après liaison : } W' = \frac{1}{2}CU'^2 + \frac{1}{2}CU'^2 = \frac{W}{2} = 10\mu\text{J}$$

Commentaire : il « manque » $10 \mu\text{J}$.

Cette énergie n'a pas disparu !

Lors de la liaison, le courant de décharge crée un champ électromagnétique : $10 \mu\text{J}$ sont donc rayonnée (à la manière d'une antenne émettrice).

Pour s'en convaincre, il suffit de placer un récepteur radio à proximité du dispositif.

On entend un craquement, caractéristique de la réception d'une onde électromagnétique (pour les mêmes raisons, on peut « entendre » la foudre à la radio).

Exercice II.8

On considère qu'un atome est constitué d'un noyau de rayon R_n entouré d'un nuage électronique de densité de charge : $\rho(\mathbf{r}) = A/r^6$

où r représente la distance entre le centre du noyau et un point de l'espace.

A l'intérieur du noyau, le champ électrique est radial et son intensité varie linéairement en fonction de r .

1- Interpréter cette hypothèse.

En utilisant le fait que l'atome soit électriquement neutre,

2- déterminer la valeur de la constante A .

3- Établir à l'aide du théorème de Gauss, l'expression du champ électrique $\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$:

a) juste à la surface du noyau ($r = R_n$).

b) autour du noyau ($r > R_n$).

4- Représenter qualitativement la variation du champ électrique pour r variant de 0 à l'infini. En déduire la variation du potentiel $V(r)$ [9].

Solution II.8

1. Le champ est radial parce que la distribution des charges a une symétrie sphérique. Il possède la variation linéaire car cette distribution est supposée uniforme.

2. La charge du noyau est Z_e (dans la sphère de rayon R_n).

Les électrons peuvent être dans tout l'espace mais à l'extérieur de la sphère de rayon R_n . En choisissant l'élément de volume $d\tau$ entre deux sphères concentriques de rayons r et $r + dr$, on pourra le calculer de trois façons équivalentes (la première est la plus simple) :

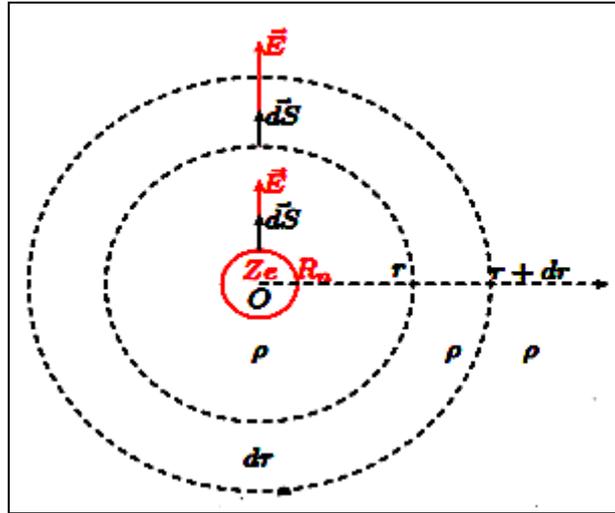
$d\tau = S_r dr = 4\pi r^2 dr$ (surface de la sphère de rayon r multipliée par l'épaisseur dr).

$d\tau = S_{r+dr} dr = 4\pi (r + dr)^2 dr = 4\pi r^2 dr + 8\pi r dr^2 + 4\pi dr^3 = 4\pi r^2 dr$ (dr^2 et dr^3 sont négligeables car le calcul infinitésimal s'arrête au premier ordre).

$$d\tau = V_{r+dr} - V_r = \frac{4}{3}\pi (r + dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi dr^3 + 4\pi r dr^2 + 4\pi r^2 dr = 4\pi r^2 dr.$$

$$\text{Charge des électrons} = \int_{R_n}^{\infty} \rho(r) dr = 4\pi \int_{R_n}^{\infty} \frac{A \times r^2}{r^6} dr = 4\pi A \left[-\frac{1}{3r^3} \right]_{R_n}^{\infty} = \frac{4\pi A}{3R_n}$$

$$\text{Atome neutre (charge des électrons} = - \text{charge du noyau)} : \frac{4\pi A}{3R_n} = -Z_e, \text{ donc : } A = \frac{-3R_n^3 e}{4\pi}$$



3.a) Surface de Gauss est une sphère de $R_n \Rightarrow \int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_G} E \cdot dS = E \int_{S_G} dS = E 4\pi R_n^2$

La charge à l'intérieur de cette surface est toute la charge du noyau $Q_{int} = Z_e$.

Théorème de Gauss : $E 4\pi R_n^2 = Z_e / \epsilon_0$, alors : $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_e}{R_n^2}$

b) Surface de Gauss en r avec $r > R_n$: $\int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_G} E \cdot dS = E \int_{S_G} dS = E 4\pi r^2$

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss se compose de la charge du noyau et de celle du nuage électronique situé entre R_n et r :

$$Q_{int} = Z_e + \int_{R_n}^r \rho(r) 4\pi r^2 dr = Z_e + A \left[-\frac{4\pi}{3r^3} \right]_{R_n}^r$$

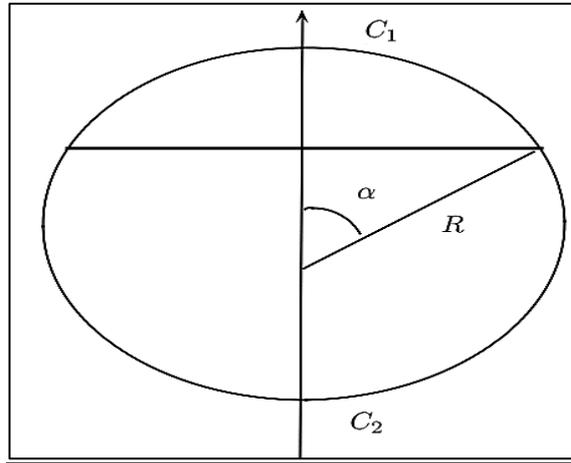
$$= Z_e + A \frac{4\pi}{3R_n^3} - A \frac{4\pi}{3r^3} = -A \frac{4\pi}{3r^3} = Z_e \frac{R_n^3}{r^3}$$

Théorème de Gauss : $E 4\pi r^2 = Z_e \frac{R_n^3}{\epsilon_0 r^3}$, alors $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_e R_n^3}{r^5}$

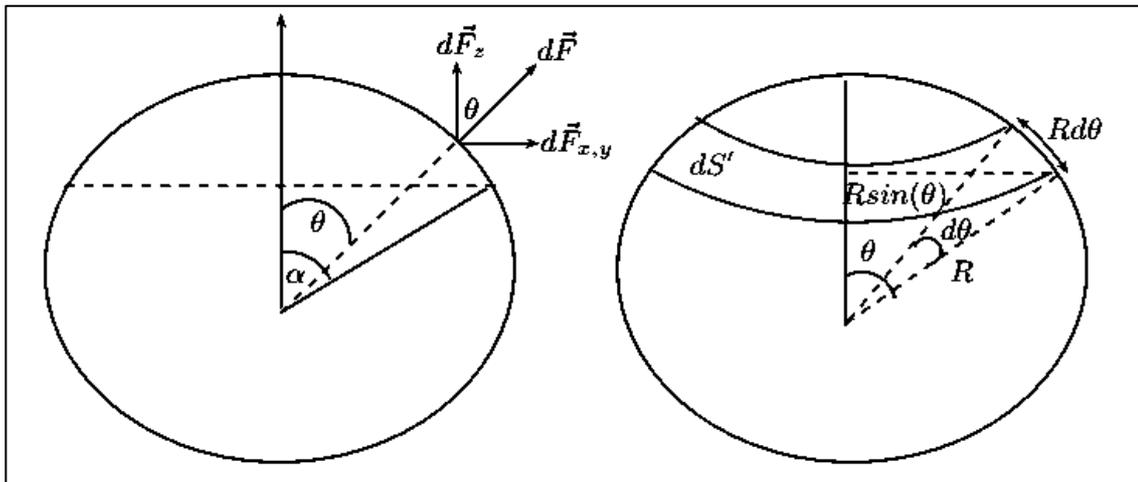
Conducteur

Exercice III.1

Une sphère métallique de rayon R est portée à un potentiel électrique V . Elle est constituée de deux calottes sphériques C_1 et C_2 (voir figure). Donner, en fonction de V et α , les résultantes des forces électrostatiques qui agissent sur les deux calottes [9].



Solution III.1



Le champ juste à l'extérieur d'un conducteur (normal à la surface) est : $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Dans la surface chargée, le champ moyen est : $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

La force appliquée à dq est : $d\mathbf{F} = dq\mathbf{E}_m$.

A cause de la symétrie, on calcule la composante sur Oz uniquement

$$dF_z = dF \cos\theta = dq \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cos\theta.$$

Les charges qui se trouvent sur la surface dS' de la couronne comprise entre θ et $\theta + d\theta$ donnent la même valeur de dF_z .

En coordonnées sphériques, la méthode générale est de choisir $dq = \sigma dS$

$$\text{Où : } dS' = R^2 d\Omega = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

$$dq = \sigma dS' = \sigma 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

$$\text{Alors, } F_{1z} = \int dF_z = \int_0^\alpha \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} 2\pi R^2 \sin\theta \cos\theta d\theta = \frac{\sigma^2 \pi R^2}{2\epsilon_0} \sin^2 \alpha.$$

$$\text{Le potentiel d'un conducteur sphérique est } V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0},$$

$$\text{alors, } F_{1z} = \frac{1}{2} \pi \epsilon_0 V^2 \sin^2 \alpha.$$

La force appliquée à toute la sphère est nulle (symétrie), par conséquent $F_{2z} = -F_{1z}$.

Exercice III.2

Soit une sphère conductrice, de rayon r , portant une charge Q .

- 1- Calculer son énergie interne.
- 2- On décharge cette sphère en la reliant à la terre par un fil conducteur. Que devient l'énergie préalablement emmagasinée.
- 3- Cette sphère avait été chargée à l'aide d'un générateur de f.e.m. constante V .
Quelle est l'énergie fournie par le générateur ? La retrouve-t-on sous forme d'énergie potentielle ?
Expliquer [7].

Solution III.2

$$1- \quad U = \frac{1}{2} QV = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2$$

$$\text{Pour un conducteur sphérique } V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \longrightarrow \quad C = 4\pi\epsilon_0 r$$

$$\text{d'où } U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

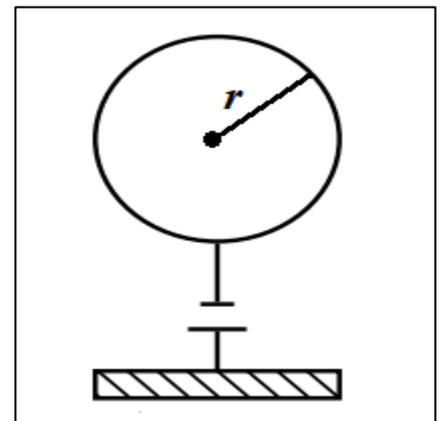
- 2- Cette énergie se dissipe entièrement sous forme de chaleur par effet Joule.
3. a- Le générateur a fourni l'énergie $W_0 = QV$.
3. b- On retrouve la moitié sous forme d'énergie potentielle $U = \frac{1}{2} QV$.
3. c- L'autre moitié a été perdue sous forme de chaleur durant la charge.

Exercice III.3

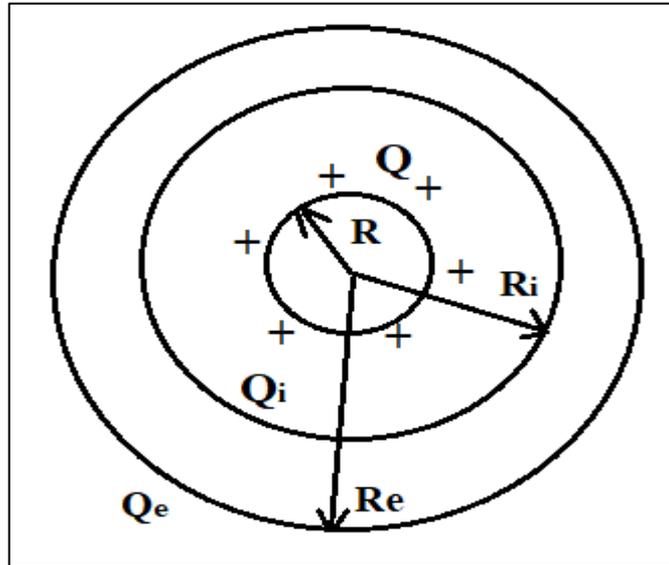
Un condensateur sphérique est constitué :

- D'une sphère interne conductrice pleine portant la charge Q ,
- D'une couronne sphérique conductrice de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e , (figure ci-dessous),

1. En appliquant le théorème de Gauss à une surface fermée sphérique de rayon compris entre R_i et R_e , calculer la charge portée par la paroi interne de la couronne conductrice.
- 2- Calculer le champ entre les deux armatures.



- 3-Que devient ce champ si on place entre les deux armatures du condensateur un matériau de permittivité relative ?
- 4-En déduire le potentiel entre les deux armatures.
- 5-Calculer la capacité de ce condensateur.
- 6- Retrouver l'expression de la capacité d'un condensateur plan en considérant R_i très voisin de R : $R_i = R + d$ [6].



Solution III.3

1- On applique le théorème de Gauss à une surface sphérique fermée de rayon compris

entre R_e et R_i : $\phi = ES = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

A l'intérieur de cette surface, le champ est nul ($E = 0$) en raison de l'équilibre du conducteur. La charge que porte la paroi intérieure de la couronne est donc :

$$\left. \begin{array}{l} E = 0 \\ \phi = ES = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0 \\ Q_{int} = Q + Q_i \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{Q_i = -Q}$$

2- Là aussi, on applique le théorème de Gauss. La surface de Gauss est une sphère de rayon

$$\left. \begin{array}{l} R_i > r > R : \\ \phi = E'S = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ Q_{int} = Q \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{E' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

3- Dans ce cas, on sait que la permittivité absolue (ϵ) de l'isolant est égale au produit de la permittivité du vide (ϵ_0) par la permittivité relative (ϵ_r) de l'isolant $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$. Sachant que $\epsilon > \epsilon_0$, et puisque le

champ est inversement proportionnel à la permittivité, le résultat est la diminution de l'intensité du champ.

$$\left. \begin{array}{l} E'' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \\ \epsilon_0\epsilon_r > \epsilon_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{E'' < E'}$$

4- Le potentiel entre les armatures est :

$$\int dV' = - \int E' dr \Rightarrow V' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + cte$$

Pour trouver: **cte**, à l'intérieur de surface fermée : $\mathbf{E} = \mathbf{0} \Rightarrow V = 0$

$$\begin{aligned} \text{Nous avons donc : } V'(R_i) = V &\Rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_i} + cte = 0 \Rightarrow cte = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_i} \\ \Rightarrow V' &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_i} \right) \end{aligned}$$

5- La capacité du condensateur : on calcule d'abord la différence de potentiel entre les armatures, puis on

en déduit la capacité : $U = V - V_i \Rightarrow U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_i} \right]$

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R R_i}{R_i - R}$$

6- Dans ce cas on a $R R_i = R_i (R_i + d) = R_i^2 \left(1 + \frac{d}{R_i} \right) \approx R_i^2$ et $R_i - R \approx d$.

On peut donc écrire :

$$\left. \begin{array}{l} S = 4\pi R_i^2 \\ d = R_i - R \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{C = \epsilon_0 \frac{S}{d}}$$

Telle est la capacité du condensateur plan.

Exercice III.4

On considère un condensateur idéal, constitué de deux conducteurs plans, de surfaces « S » et distants de « e₀ ». On applique une d.d.p. V₀ entre ses armatures.

1. Calculer : a) la charge Q du condensateur ;

b) l'énergie potentielle emmagasinée ;

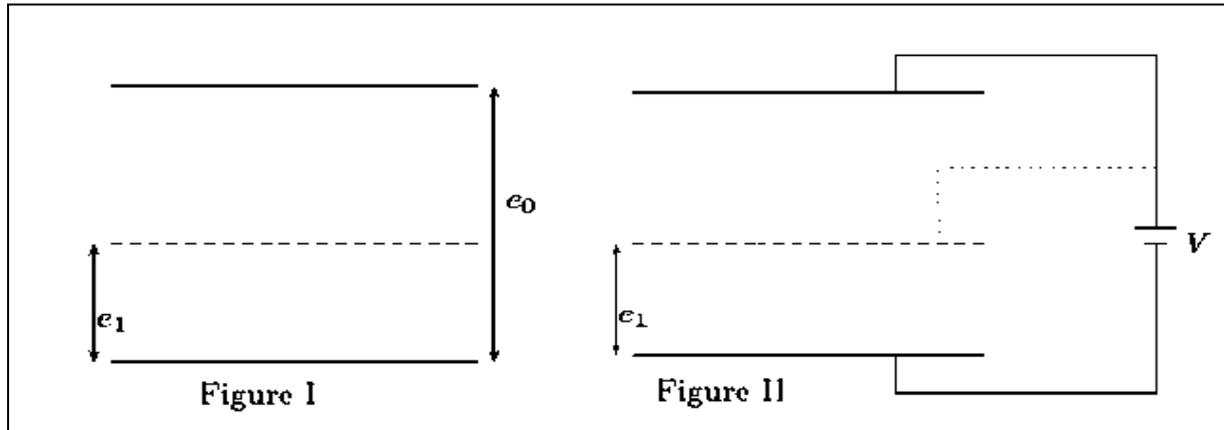
c) la force agissant sur chacune des armatures.

2. On isole le condensateur de la source. Une des armatures étant fixe, on approche l'autre jusqu'à e₁ (e₀ > e₁), (figure I).

Expliquer, qualitativement, les phénomènes qui se produisent au cours de ce déplacement (transport de charge, variation de potentiel, de capacité,.....)

Montrer, à travers un bilan précis, que le principe de conservation de l'énergie est vérifié.

- 3- On réalise maintenant le même déplacement tout en gardant le générateur branché au condensateur (figure II). Mêmes questions que précédemment (ne pas oublier de tenir compte, dans le bilan, de l'énergie mise en jeu dans le générateur)
4. Refaire les bilans d'énergie du 2°) et du 3°) dans le cas d'un déplacement de e_0 à e_1 lorsque $e_0 < e_1$ [9].



Solution III.4

1-a) $Q = C_0 V_0$ avec $C_0 = (\epsilon_0 S / e_0)$.

Rappel : $V_0 = E e_0$ et $E = \sigma / \epsilon_0 = Q / S \epsilon_0 \Rightarrow Q = (S \epsilon_0 / e_0) V_0$.

1-b) C'est l'énergie interne $U = Q V_0 / 2 = Q^2 / 2 C_0 = (1/2) C_0 V_0^2$

1-c) C'est la force moyenne $F = Q E_m$ où $E_m = -\sigma / 2 \epsilon_0 = -Q / 2 S \epsilon_0$. Donc, $F = -Q^2 / 2 S \epsilon_0$.

On retrouve le même résultat avec la relation $F = - \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_Q$ avec $C_0 = \epsilon_0 S / y$

2-a) Explication : Quand un opérateur ($\overline{F_{op}}$) déplace une armature, la charge sur chaque armature (isolée électriquement) est conservée et la capacité doit augmenter car l'influence augmente par rapprochement.

Le potentiel doit diminuer. La relation $Q = C_1 V_1$,

où $C_1 = (\epsilon_0 S / e_1)$, montre que la différence de potentiel doit diminuer ($V_1 = (e_1 / e_0) V_0$).

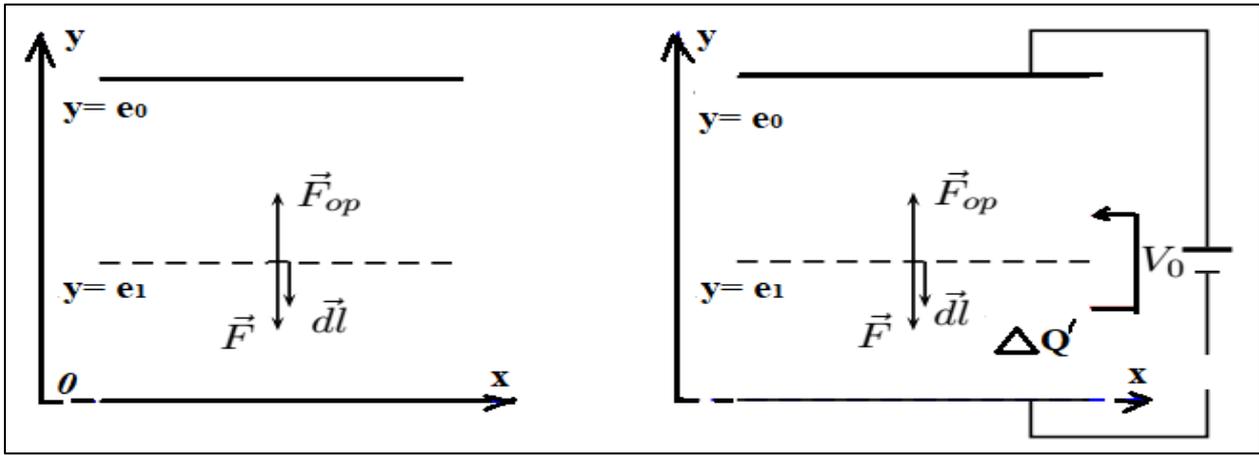
2-b) Bilan d'énergie : Variation de l'énergie interne

$$\Delta U = Q^2 / 2 C_1 - Q^2 / 2 C_0 = (Q^2 / 2 S \epsilon_0) (e_1 - e_0).$$

Le condensateur cède de l'énergie car $\Delta U < 0$.

Travail des forces électrostatiques de l'armature qui s'est déplacée :

la force $F = -Q^2 / 2 S \epsilon_0$ est constante de sorte que : $W = F (e_1 - e_0) = (Q^2 / 2 S \epsilon_0) (e_1 - e_0)$.



On voit bien que $\Delta U = -W$ ce qui correspond bien à la définition de l'énergie interne. L'énergie perdue par le condensateur est récupérée par le milieu extérieur (voir remarque b à la fin de l'exercice).

3-a) Explication : cette fois, c'est la différence de potentielle qui est maintenue constante par le générateur. La capacité augmente par augmentation de l'influence (rapprochement) et la charge aussi car les armatures ne sont pas isolées électriquement. $Q_1 = C_1 V_0$.

3-b) Bilan d'énergie : Variation de l'énergie interne :

$$\Delta U = (C_1 V_0^2 / 2) - (C_0 V_0^2 / 2) = (V_0^2 S \epsilon_0 / 2) (1/e_1 - 1/e_0) . \text{ Le condensateur reçoit de l'énergie car } \Delta U > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Énergie fournie par le générateur : } U_{\Delta Q} &= V_0(Q_1 - Q_0) = V_0^2(C_1 - C_0) \\ &= (V_0^2 S \epsilon_0) / (1/e_1 - 1/e_0) \end{aligned}$$

La charge positive ΔQ passe de la borne négative à la borne positive à travers le générateur.

Elle voit son potentiel augmenter de V_0 et son énergie potentielle augmenter de $U_{\Delta Q}$.

Cette dernière est l'énergie fournie par le générateur.

Travail des forces électrostatiques de l'armature qui s'est déplacée : Pour chaque position y de l'armature, on a $Q = V_0 C$ avec $C = \epsilon_0 S / y$.

La force : $F = -Q^2 / 2S \epsilon_0 = -(S \epsilon_0 / 2y^2) V_0^2$ varie donc avec la distance y entre les deux armatures (On retrouve le même résultat avec la relation :

$$F = \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_v$$

$$\text{Le travail est alors: } W = \int_{e_0}^{e_1} F dy = - \int_{e_0}^{e_1} (S \epsilon_0 / 2y^2) V_0^2 dy = (V_0^2 S \epsilon_0 / 2) (1/e_1 - 1/e_0)$$

Comme dans le cas précédent, ce travail positif correspond à une perte d'énergie du condensateur récupérée par le milieu extérieur.

On voit que $\Delta U = U_{\Delta Q} - W$: Lors du déplacement, le condensateur reçoit l'énergie fournie par le générateur et cède de l'énergie au milieu extérieur. La variation totale de son énergie est égale à la somme des deux variations.

4) Dans ce cas, on retrouve évidemment les mêmes résultats changés de signe.

Générateur débranché : $\Delta U = -W > 0$ Le condensateur reçoit de l'énergie cédée par le milieu extérieur.

Générateur branché : $\Delta U = U_{\Delta Q} - W$ avec $\Delta U = \left(\frac{V_0^2 S \epsilon_0}{2}\right) (1/e_0 - 1/e_1) < 0$

$$\text{Et } U_{\Delta Q} = (V_0^2 S \epsilon_0) / (1/e_0 - 1/e_1) < 0 \text{ et } W = (V_0^2 S \epsilon_0 / 2) (1/e_0 - 1/e_1) < 0.$$

Le condensateur reçoit l'énergie W du milieu extérieur mais ne la garde pas et la transfère au générateur.

De plus, il cède l'énergie ΔU au générateur. Ce dernier reçoit donc :

$$U_{\Delta Q} = \Delta U + W.$$

Remarques :

a) $U_{\Delta Q} = -V_0(Q_1 - Q_0)$ car la charge positive $\Delta Q = (Q_1 - Q_0)$ passe de l'armature positive à l'armature négative (le condensateur se décharge par diminution de l'influence à potentiel constant).

b) En général, on parle d'énergie cédée au milieu extérieur par le condensateur si $W > 0$ car $\Delta U = -W < 0$, et d'énergie reçue du milieu extérieur si $W < 0$ ($\Delta U > 0$).

Le milieu extérieur peut être vu comme un opérateur qui applique une force égale et opposée à la force électrostatique (car l'armature doit se déplacer à une vitesse constante très faible).

Exercice III.5

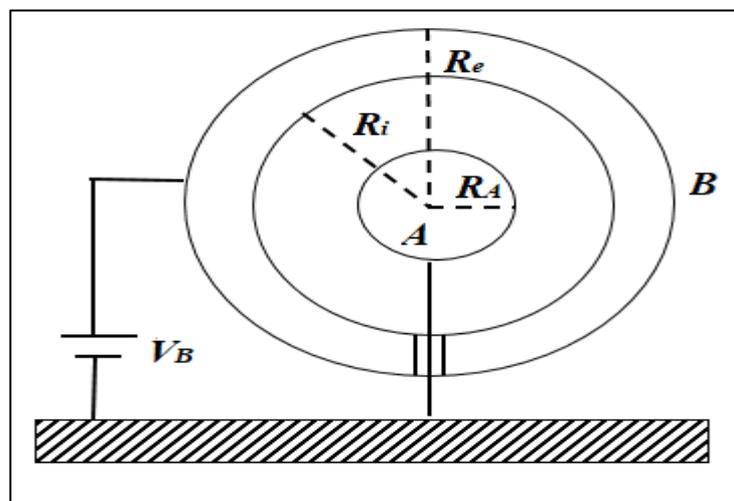
Une sphère A, reliée au sol, est placée au centre d'une coquille sphérique B portée à un potentiel V_B par rapport au sol (voir figure ci-dessous).

1. Donner les expressions du champ et du potentiel électriques :

a) dans la région comprise entre les deux sphères ($R_A < r < R_i$) ;

b) à l'extérieur de B ($r > R_e$).

2. Trouver les expressions des charges portées par les surfaces intérieure et extérieure de la sphère B [8].



Solution III. 5

1.a. Pour $R_A < r < R_i$, on a : $E_a(r) = K \frac{Q_A}{r^2}$ par application du théorème de Gauss à la sphère A (voir cours). Donc $V_a(r) = K \frac{Q_A}{R_A} + C_A$.

La constante se détermine par :

$$V_a(R_A) = K \frac{Q_A}{R_A} + C_A = 0. \text{ (A est liée à la terre). Donc } V_a(r) = K Q_A \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_A} \right).$$

1.b. Pour $r > R_e$, on a : $E_b(r) = K \frac{Q}{r^2}$ et $V_b(r) = K \frac{Q}{r} + C_B$, où $C_B = 0V$ car $V_b(\infty) = 0V$, et $Q = Q_A + Q_i + Q_e = Q_e$ à cause de l'influence totale ($Q_i = -Q_A$).

2. On a deux équations $V_a(R_i) = V_B$, $V_b(R_e) = V_B$

$$K Q_A \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_A} \right) = V_B \quad (1)$$

$$K \frac{Q_e}{R_e} = V_B \quad (2)$$

Par conséquent, $Q_A = -\frac{V_B R_i R_A}{K (R_i - R_A)} = -Q_i$ et $Q_e = \frac{V_B R_e}{K}$

Remarque : la charge totale de B est passée de $0C$ à $Q_B = Q_i + Q_e = \frac{V_B R_i R_A + R_i R_e - R_A R_e}{K (R_i - R_A)} \neq 0C$

Elle n'a pas été conservée car B n'est pas isolé.

Exercice III.6

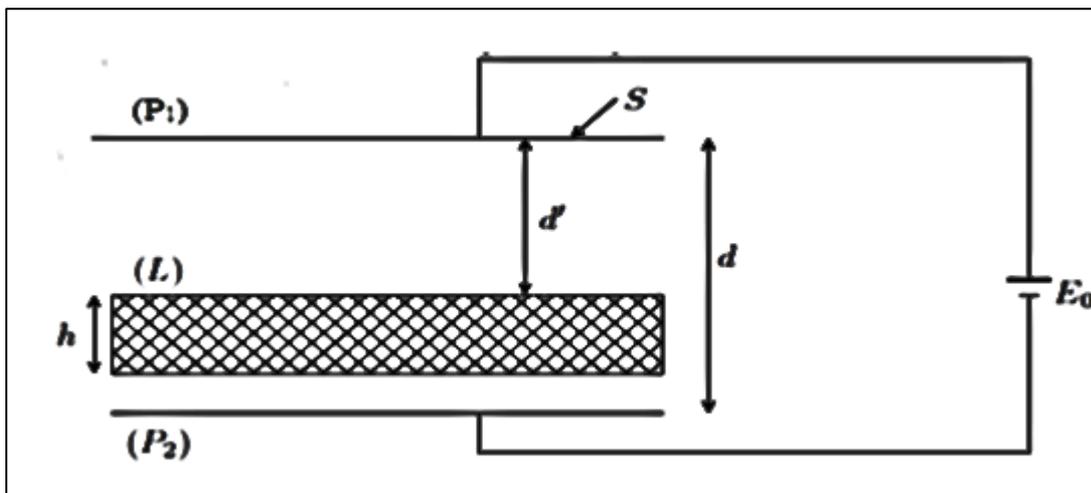
Soit un condensateur plan idéal formé par deux armatures (P_1) et (P_2) conductrices de surfaces $S = 226 \text{ cm}^2$ et séparées par du vide d'épaisseur $d = 0.3 \text{ mm}$.

1. Le condensateur est branché à un générateur de f.e.m $E_0 = 120V$.

- Trouver l'expression de la capacité du condensateur et la calculer.
- Calculer la charge portée par chaque armature ainsi que l'énergie emmagasinée.
- Déterminer les forces qui s'exercent sur les armatures.

2. On introduit parallèlement entre les armatures une plaque conductrice (L), neutre, de même dimensions et d'épaisseur h (figure ci-dessous). Le générateur étant branché :

- Expliquer qualitativement ce qui se passe et représenter la nouvelle répartition des charges.
- Donner l'expression de la capacité équivalente du système.
- Quelle est l'épaisseur h de la plaque si la capacité équivalente vaut 1 nF ? [7].



Solution III. 6

1. a. Chaque armature est considérée comme un plan infini qui crée un champ constant $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

où $Q = \sigma S$. Le champ dû aux deux armatures est $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{S\epsilon_0}$.

La différence de potentiel est donc $E_0 = V = Ed = \frac{dQ}{S\epsilon_0}$

(attention : ne pas confondre la fem E_0 et le champ E).

La capacité est $C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$; A. N. $C = 66,61 \text{ nF}$.

1.b. La charge portée par chaque armature : $Q = CE_0$, $U = \frac{1}{2} CE_0^2$

1.c. Les forces qui s'exercent sur les armatures c'est la force moyenne : $F = QE_m$

où : $E_m = \sigma/2\epsilon_0 = Q/2S\epsilon_0$. Donc : $F = Q^2/2S\epsilon_0$.

2.a. La plaque est en influence (totale). La charge $-Q$ se déplace vers la surface en face de P_1 et la charge Q vers la surface en face de P_2 .

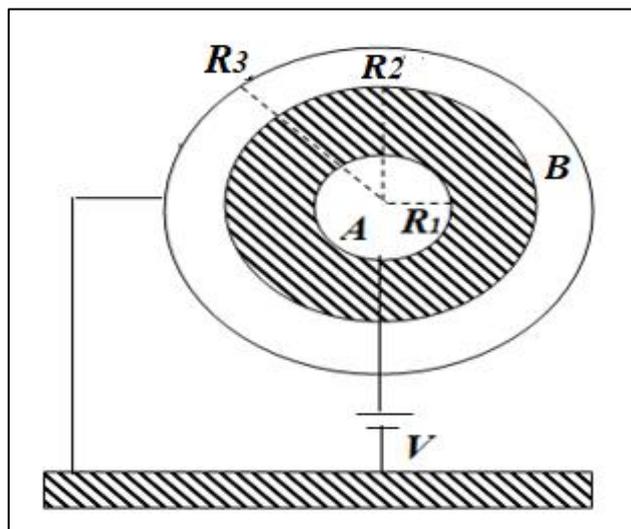
2.b. On a deux condensateurs en série de capacités $C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{d'}$ et $C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{(d-d'-h)}$

La capacité équivalente est: $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{\epsilon_0}{S(d-h)}$; d'ou $C_{eq} = \frac{S(d-h)}{\epsilon_0}$

2.c. $h = d - \frac{\epsilon_0 C_{eq}}{S}$, AN: $h = 3.10^{-4} - \frac{1}{4\pi 910^9 22610^{-4}} = 2.99.10^{-4} \text{ m}$

Exercice III.7

La figure ci-dessous représente un condensateur sphérique formé de deux conducteurs A (de rayon R_1) et B (de rayons R_2 et R_3) séparés par un milieu isolant de permittivité ϵ et résistivité ρ .



1. Représenter la répartition de charge sur les conducteurs A et B.
2. Déterminer le champ électrique à l'intérieur du condensateur ($R_1 \leq r \leq R_2$).
3. Trouver l'expression de la différence de potentielle entre les deux conducteurs.
4. Déduire la capacité de ce condensateur [4].

Solution III.7

1. L'influence totale implique $Q(R_1) = Q$ et $Q(R_2) = -Q$.

Conservation de la charge de B (supposé neutre) : $Q(R_2) + Q(R_3) = 0$.

Donc: $Q(R_3) = Q$.

2. La distribution des charges admet une symétrie sphérique, ce qui implique :

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B \quad \text{avec} \quad \vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{U}_r$$

(Théorème de Gauss pour l'extérieur de A) et $\vec{E}_B = \vec{0}$ (intérieur de B).

Donc : $E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2}$.

3. $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dr$. Donc : $V_B - V_A = -\int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$.

$$|V_B - V_A| = \frac{|Q|}{C} \quad \text{donc} \quad C = 4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Courants Continus

Exercice IV.1

Un conducteur cylindrique en cuivre, de section $S = 1\text{mm}^2$ et de longueur $L = 10\text{m}$, est parcouru par un courant constant de 5A .

1. Calculer le module du vecteur densité de courant.
2. Calculer le nombre d'électrons libres par unité de volume sachant qu'un atome de cuivre libère un électron. On donne : La masse atomique du cuivre $M = 64\text{g}$, sa masse volumique $\rho_{\text{Cu}} = 8900\text{ kg/m}^3$ et le nombre d'Avogadro $N = 6,023 \times 10^{23}$.
3. Calculer la valeur de la vitesse de dérive des électrons libres [8].

Solution IV.1

1. $\mathbf{j} = \mathbf{I}/S = 5 \times 10^6 \text{ A}\cdot\text{m}^{-2}$.
2. Nombre d'atomes : $n_A = \frac{\rho_{\text{Cu}}}{M} N = 8,38 \times 10^{28} \text{ atom/m}^3$.
 $n = 8,38 \times 10^{28} \text{ e}^-/\text{m}^3$.
3. $\mathbf{j} = n\mathbf{e}\mathbf{v}$. Don : $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{j}}{ne} = 3,73 \times 10^{-4} \text{ m/s}$.

Exercice IV.2

Un cylindre homogène en argent, de diamètre (d) égal à $1,2\text{mm}$ et de longueur (l) égale à 42 cm , est parcouru par un courant $I = 50\text{A}$ lorsque la d.d.p appliquée entre ses deux bases vaut $V = 0,3\text{V}$.

1. Calculer la conductivité σ de l'argent.
2. Sachant que chaque atome d'argent libère un électron pour la conduction, trouver le nombre n d'électrons libres par mètre cube. On rappelle que pour l'argent le nombre de masse est $A = 108$ et la masse volumique $\rho = 10,5 \text{ g/cm}^3$.
3. À partir de deux expressions différentes du vecteur densité de courant, trouver la vitesse de dérive des électrons de conduction.
4. Calculer la mobilité μ des porteurs de charges libres pour l'argent [9].

Solution IV.2

- 1) Pour un conducteur cylindrique homogène : $V = RI$ et $\sigma = l/RS$.

$$\text{Donc : } \sigma = 4l/(\pi V d^2) = 6,19 \times 10^7 \Omega^{-1}\cdot\text{m}^{-1}.$$

- 2) $\rho = A(n_A/N_A)$ (N_A est le nombre d'Avogadro) et n_A est la densité d'atomes.

Comme un atome libère un seul électron $n = n_A$,

la densité électronique est $n = \rho N_A/A = 10,5 \cdot 10^{-3} \cdot 6,023 \cdot 10^{23}/108 = 5,855 \cdot 10^{19} \text{ e/m}^3$

3) En module, $\mathbf{j} = \mathbf{env} = \mathbf{I/S}$ ce qui donne $\mathbf{v} = \mathbf{IS/ne}$.

De même $\mathbf{j} = \mathbf{env} = \sigma\mathbf{E} = \sigma \frac{V}{L}$, $\mathbf{j} = 6,19 \cdot 10^7 \cdot \frac{0,3}{42 \cdot 10^{-2}} = 4,42 \cdot 10^7 \text{ A.m}^{-2}$.

Donc : la vitesse de dérive des électrons de conduction :

$$\mathbf{v} = \frac{\sigma V}{enL} = \frac{6,19 \cdot 10^7 \cdot 0,3}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5,855 \cdot 10^{19} \cdot 42 \cdot 10^{-2}} = 4,72 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

4) $\mathbf{v} = \mu\mathbf{E} = \mu\mathbf{V/l}$ donc $\mu = \mathbf{lv/V} = \frac{42 \cdot 10^{-2} \cdot 4,72 \cdot 10^6}{0,3} = 660,8 \cdot 10^4 \text{ m}^2/\text{v.s}$

Exercice IV.3

Un fil de cuivre, de section $S = 1\text{mm}^2$ et de longueur $l = 58 \text{ cm}$, transporte une charge de 22500C en $1 \text{ h}15\text{mn}$. Le cuivre contient $8,4 \times 10^{22}$ électrons par cm^3 .

1. Quelle est l'intensité du courant qui parcourt le fil ?

2. Trouver la vitesse de dérive des électrons.

3. Au cours de leur mouvement, les électrons sont soumis, de la part des ions du réseau, à une force de frottement de la forme $\vec{f} = -k\vec{v}$. Sachant que la constante k est égale à $3,7 \times 10^{-17}$ (MKSA), calculer la résistance du fil de cuivre [8].

Solution IV.3

1) Courant : $\mathbf{I} = \mathbf{q/t}$.

2) Vitesse de dérive : $\mathbf{j} = \mathbf{nev}_m = \mathbf{I/S}$ donc $\mathbf{v}_m = \mathbf{I/(neS)}$.

3) Résistance : $\mathbf{f} = \mathbf{eE} = \mathbf{kv}_m$ avec $\mathbf{E} = \mathbf{V/l} = \mathbf{RI/l}$.

En utilisant le résultat de la question précédente, on trouve : $\mathbf{RIe/l} = \mathbf{kI/(neS)}$

et par conséquent $\mathbf{R} = \mathbf{kl/(ne^2S)} = \frac{3,7 \cdot 10^{-17} \cdot 58 \cdot 10^{-2}}{8,4 \cdot 10^{22} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot (10^{-3})^2} = 9,979 \cdot 10^9 \Omega$

Exercice V.4

Un fil de tungstène de $1,00\text{mm}$ de diamètre transporte un courant d'intensité $15,0\text{A}$.

Déterminer le champ électrique à l'intérieur du fil sachant que la résistivité du tungstène est $5,5 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$ [9].

Solution V.4

La relation entre la densité de courant, la conductivité et le champ électrique :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

La densité de courant est donnée par : $\mathbf{J} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{S}}$

Alors, le champ électrique s'écrit : $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{I}}{\sigma\mathbf{S}}$

La conductivité est égale à l'inverse de la résistivité : $\sigma = \frac{1}{\rho}$

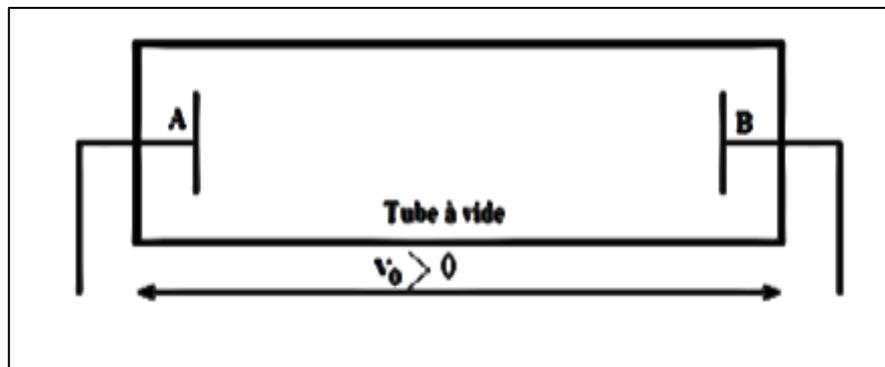
Alors, on obtient : $E = \rho \frac{I}{S} = \rho \frac{I}{\pi r^2}$

A.N : $E = 5,5 \cdot 10^{-8} \frac{15,0}{3,14 \cdot 0,25 \cdot 10^{-6}} = 1,05 \text{Vm}^{-1}$

Exercice IV.5

Partie I — Déplacement des électrons dans le vide

Dans un tube à vide se trouve deux plaques parallèles A et B, soumises à une différence de potentiel positif $V_A - V_B = V_0$ (voir figure ci-dessous). On considère que les électrons quittent la plaque B par effet thermoélectrique avec une vitesse supposée nulle.



1. Quelle est la nature du mouvement des électrons ?
2. Donner l'énergie cinétique des électrons lorsqu'ils atteignent A.

Partie II — Déplacement des électrons dans un milieu conducteur ; Loi d'Ohm

On considère un conducteur homogène de forme cylindrique et de section S . On soumet les deux extrémités A et B du cylindre à une d.d.p. V_0 . On constate que le conducteur est traversé par un courant électrique d'intensité I donnée par : $I = V_0/R$ où R est une constante caractéristique du conducteur appelée résistance.

- 1) Représenter les lignes de courant et montrer que le vecteur densité de courant est constant.
- 2) Établir la relation qui lie le vecteur densité de courant au vecteur champ électrique.
- 3) En déduire le vecteur vitesse de dérive des électrons dans le conducteur.
- 4) Comparer au résultat obtenu dans la partie I.

Partie III — Déplacement des électrons dans un milieu conducteur ; Loi de Joule

Lors de leur déplacement dans un conducteur, les électrons, de vitesse \vec{v} , sont soumis à une force de frottement de type visqueux $\vec{f} = -k\vec{v}$, où k représente une constante caractéristique du matériau conducteur.

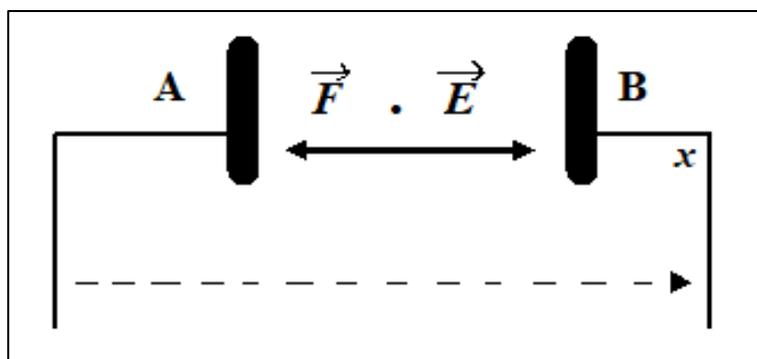
- 1) Établir l'équation différentielle du mouvement des électrons soumis à la force électrique et la force de frottement.
- 2) Vérifier que la fonction : $v = v_{\text{lim}}(1 - e^{-t/\tau})$, est solution de l'équation précédente. Déterminer la vitesse limite v_{lim} et la constante de temps τ en fonction du champ électrique E , de la masse m de l'électron, de sa charge électrique e et du coefficient k .
- 3) Déterminer le travail de la force de frottement lorsque l'électron se déplace de B à A. Sous quelle forme d'énergie se retrouve-t-il?
- 4) Quelle est la puissance calorifique dégagée dans le conducteur lorsqu'il est parcouru par un courant I [7].

Solution IV.5

I) Déplacement des électrons dans le vide :

1) Les électrons sont soumis à la force électrostatique :

$$\vec{F} = q\vec{E} \text{ où } q = -e.$$



Le poids des électrons est négligeable. Leur mouvement est donc accéléré de B vers A

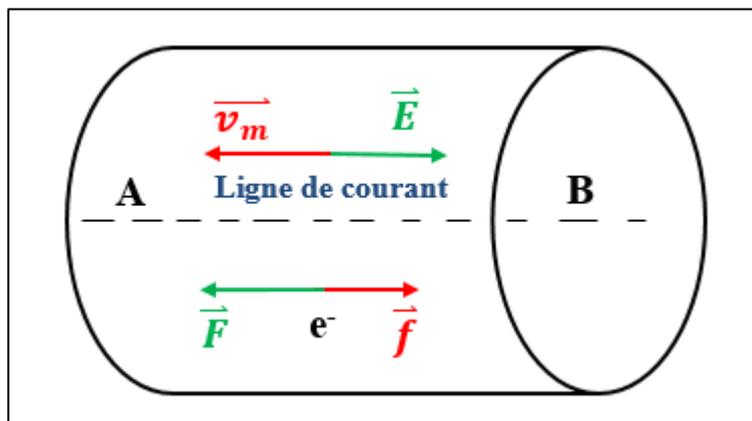
avec une accélération : $\vec{a} = (q/m)\vec{E}$. Sachant que le champ est constant,

on a $E = V_0/L$ et $a = -(eV_0/mL)$ où $L = AB$.

2) La force $\vec{F} = -q\vec{\nabla}V$ dérive d'un potentiel. Par conséquent, l'énergie totale de l'électron se conserve $E_T(B) = E_T(A)$ et nous avons :

$$E_c(A) + qV_A = E_c(B) + qV_B \Rightarrow E_c(B) = eV_0 \text{ car } E_c(A) = 0, q = -e \text{ et } V_A - V_B = V_0.$$

II) Déplacement des électrons dans un milieu conducteur. Loi d'Ohm :



1) Une ligne de courant d'une charge positive est dirigée du potentiel le plus élevé vers potentiel le plus bas. L'homogénéité du cylindre implique que ces lignes sont des droites parallèles à l'axe du cylindre.

2) Comme \mathbf{j} et le champ \mathbf{E} sont constants, la loi d'Ohm $\mathbf{V} = \mathbf{RI}$ peut s'écrire $\mathbf{EL} = \mathbf{RjS}$.

D'où $\mathbf{j} = (\mathbf{L/RS}).\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}$. Cette relation s'écrit sous forme vectorielle, $\vec{\mathbf{j}} = \sigma \vec{\mathbf{E}}$ car la densité de courant et le champ ont la même direction et le même sens (la conductivité $\sigma = (\mathbf{L/RS})$ est l'inverse de la résistivité $\rho = 1/\sigma$).

3) On sait que : $\vec{\mathbf{j}} = -en\vec{\mathbf{v}}$. Donc : $-en\vec{\mathbf{v}} = \sigma \vec{\mathbf{E}}$,

on trouve : $\vec{\mathbf{v}}_m = -(\sigma/ne) \vec{\mathbf{E}} = -(\mathbf{L/RSne}) \vec{\mathbf{E}}$.

4) La vitesse \mathbf{v}_m est constante dans un conducteur alors qu'elle augmente uniformément dans le vide.

III) Déplacement des électrons dans un milieu conducteur. Loi de Joule :

$$1) \quad \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{f}} = m \vec{\mathbf{a}} \quad \text{où} \quad \vec{\mathbf{F}} = -e \vec{\mathbf{E}} \quad \text{et} \quad \vec{\mathbf{f}} = -k \vec{\mathbf{v}} .$$

Le mouvement étant rectiligne, la projection donne : $-e \mathbf{E} - k \mathbf{v} = m \mathbf{d} \mathbf{v} / \mathbf{d}t$

Soit : $\mathbf{d} \mathbf{v} / \mathbf{d}t + k \mathbf{v} / m = (-e/m).\mathbf{E}$.

$$2) \quad \mathbf{d} \mathbf{v} / \mathbf{d}t = \mathbf{d}(\mathbf{v}_{lim}(1 - e^{-t/\tau}))/\mathbf{d}t = \mathbf{v}_{lim} \cdot \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$\mathbf{d} \mathbf{v} / \mathbf{d}t + (k/m) \mathbf{v} = (\mathbf{v}_{lim}) e^{-t/\tau} [t/\tau - k/m] + \mathbf{v}_{lim} (k/m) = (-e/m) \mathbf{E}.$$

L'égalité doit être vérifiée quelque soit le temps t (t tend vers l'infini, le terme exponentielle est nul, ainsi : $\mathbf{v}_{lim} \cdot k/m = (-e/m)\mathbf{E}$.

On en déduit que $\tau = m/k$ et $\mathbf{v}_{lim} = -(e/k)\mathbf{E}$.

3) $\vec{\mathbf{f}}$ est la seule force non conservative. Donc : $w_B^A(\vec{\mathbf{f}}) = E_T(A) - E_T(B)$.

Avec $E_T(A) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{lim}^2 - eV_A$ et $E_T(B) = -eV_B$,

$$\text{d'où } W_B^A(\vec{f}) = \frac{1}{2} m v_{lim}^2 - eV_0 = \frac{1}{2} m \left(\frac{e^2}{k^2} \right) E - eEL \simeq eEL.$$

Ce travail est l'énergie calorifique transformée par le conducteur sous forme de chaleur (effet Joule).

Autres méthodes de calcul de $W_B^A(\vec{f})$

a) $W_B^A(\vec{f}) = \int_B^A -kvdx \simeq -kv_{lim}(x_A - x_B) = eEL$ car v_{lim} est très rapidement atteinte (sur une très petite longueur) ce qui est négligeable dans l'intégrale de A à B (régime transitoire négligeable).

$$\text{b) } W_B^A(\vec{f}) = \int_B^A -kvdx = \int_{t_B}^{t_A} -kv \frac{dx}{dt} dt = \int_{t_B}^{t_A} -kv^2 dt = -kv_{lim}^2 \int_0^{\frac{L}{v_{lim}}} \left(1 - 2e^{-t/\tau} + e^{-2t/\tau} \right) dt \text{ car } t_B = 0 \text{ s et } t_A \simeq \frac{L}{v_{lim}}$$

En toute rigueur, on détermine t_A par :

$$L = x_A - x_B = \int_0^{t_A} \left(1 - e^{-t/\tau} \right) dt = v_{lim} \left[t_A + \tau \left(1 - e^{-t_A/\tau} \right) \right].$$

Cette équation est difficile mais elle montre que $L \simeq v_{lim} t_A$ car $t_A \gg \tau > \tau (1 - e^{-t_A/\tau})$.

4) $W_B^A(\vec{f})$ est l'énergie calorifique dégagée par une seule charge dans le conducteur en un temps $T = -L/v_{lim}$.

En ce temps N charges parcourent le conducteur avec le nombre de charges $N = IT$.

L'énergie dégagée par toutes ces charges est : $W(N) = |NW_B^A(\vec{f})|$

et la puissance est : $P = |NW_B^A(\vec{f})|/T$. Soit $P = eELI$.

Exercice IV.6

1. On reprend les données de l'exercice III.7 : (un condensateur sphérique formé de deux conducteurs A (de rayon R_1) et B (de rayons R_2 et R_3) séparés par un milieu isolant de permittivité ϵ et résistivité ρ .)

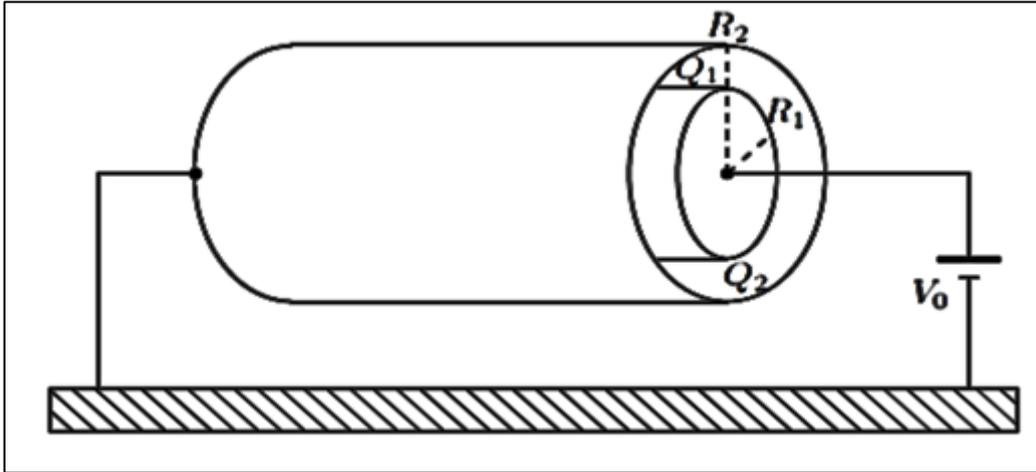
a) En utilisant la loi de joule locale ($\vec{j} = \sigma \vec{E}$), déterminer la résistance de fuite.

b) Quelle relation qui lie la capacité à la résistance de ce condensateur ?

2. Soit un câble coaxial, cylindrique, constitué de deux cylindres conducteurs infiniment longs, d'axe Oz , séparés par le vide. Le premier est plein de rayon R_1 , de potentiel V_0 et porte une charge Q_1 . Le second est creux, de rayon R_2 est relié au sol (voir figure).

a) En appliquant l'expression locale de la loi d'Ohm ($\vec{j} = \sigma \vec{E}$) donner l'expression de la résistance de ce câble.

b) Donner la relation liant la résistance à la capacité [7].



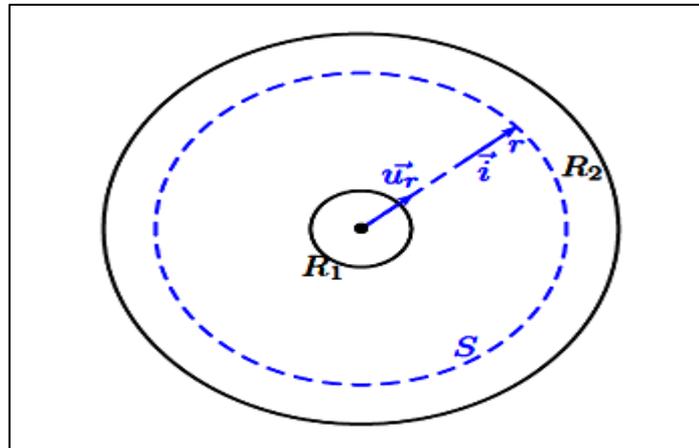
Solution IV.6

Loi d'Ohm : $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma}$. Circulation du champ $\mathbf{V}(\mathbf{B}) - \mathbf{V}(\mathbf{A}) = - \int_A^B \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\sigma}$.

On pose : $\vec{j} = \frac{I}{S} \vec{u}$ et on obtient $\mathbf{V}(\mathbf{B}) - \mathbf{V}(\mathbf{A}) = -I \int_A^B \frac{\vec{u} \cdot d\vec{l}}{S\sigma}$.

Donc $\mathbf{R} = - \int_A^B \frac{\vec{u} \cdot d\vec{l}}{S\sigma}$.

1.a) Le courant de fuite et un courant radial qui passe de l'armature positive R_1 à l'armature négative R_2 à travers le diélectrique (de conductivité σ très faible). La densité de courant est radiale ($\vec{u} = \vec{u}_r$) et constante sur chaque surface sphérique $S = 4\pi r^2$ (de rayon r compris entre R_1 et R_2).



Par conséquent : $\mathbf{R} = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{\vec{u}_r \cdot d\vec{l}}{S\sigma} = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{\sigma 4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

1.b) Pour le conducteur sphérique $C = \epsilon \frac{4\pi R_1 R_2}{R_2 - R_1}$. Donc $\frac{C}{R} = (4\pi)^2 \frac{\epsilon}{\rho}$.

2.a) En utilisant les coordonnées polaires dans la base du cylindre, la figure précédente représente maintenant un plan parallèle à cette base. La densité de courant est radiale dans ce plan ($\vec{u} = \vec{u}_r$) et constante sur chaque surface cylindrique $S = 2\pi r l$.

Par conséquent :
$$\mathbf{R} = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{\vec{u}_r \cdot d\vec{l}}{\sigma S} = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{\sigma 2\pi r l} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

2.b) Pour le conducteur cylindrique $C = \varepsilon \frac{2\pi l}{\ln(R_2/R_1)}$. Donc $\frac{C}{R} = (2\pi)^2 \frac{\rho}{\varepsilon}$.

Exercice IV.7

Un solénoïde de longueur 10 cm porte 8 couches de spires circulaires de diamètre de 10 cm à raison de 2500 spires par mètre. Le fil est un conducteur dont la conductivité est : $\sigma = 10^8 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$.

1. Calculer la résistance du solénoïde.

2. Quelle est l'intensité du courant dans le solénoïde quand il est soumis à une d.d.p de 100V ? [9].

Solution IV.7

Le diamètre d'une spire, le nombre de couches, le nombre de spires par mètre et la longueur du solénoïde sont respectivement d , n_c , n_s et l .

1) La résistance du solénoïde : $\mathbf{R} = \rho (\mathbf{L}/\mathbf{S})$ avec $\rho = 1/\sigma$ et $\mathbf{L} = (\pi d) n_c n_s l$.

Où d : le diamètre de la spire, n_c : le nombre de couches, n_s : le nombre de spires par mètre, l : la longueur du solénoïde, la surface cylindrique $S = 2\pi r l$.

Alors : $\mathbf{R} = n_c n_s / \sigma = 8.2500/10^8 = 2.10^{-4} \Omega$.

2) l'intensité du courant : $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{R} = 100/2.10^{-4} = 5.10^5 \text{ A}$.

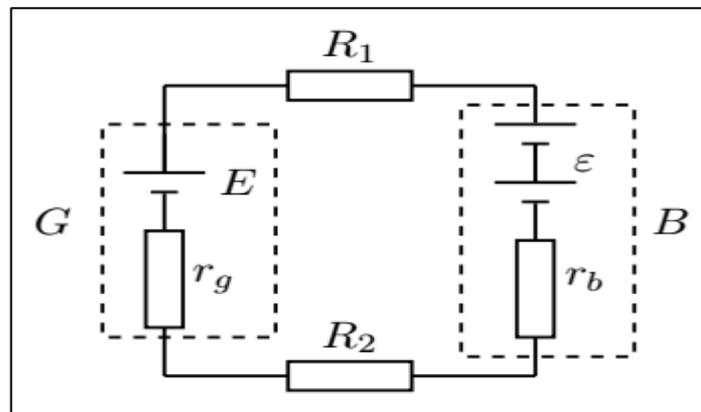
Réseaux électriques

Exercice V.1

On considère le circuit électrique de la figure ci-dessous comprenant un générateur G et une batterie B de fem E et ε , de résistances internes r_g et r_b , respectivement. R_1 et R_2 sont des résistances extérieures.

1. Calculer le courant qui circule dans le circuit ?
2. Déterminer la d.d.p. aux bornes du générateur G et aux bornes de la batterie B .
3. a) Quelle est la puissance électrique fournie ?
b) Quelle est la puissance électrique totale dissipée par effet Joule ?

A quelle vitesse l'énergie chimique s'emmagasine-t-elle et où ? [7]



Solution V.1

1- On remplace toutes les résistances en série par la résistance équivalente :

$$R = R_1 + R_2 + r_g + r_b.$$

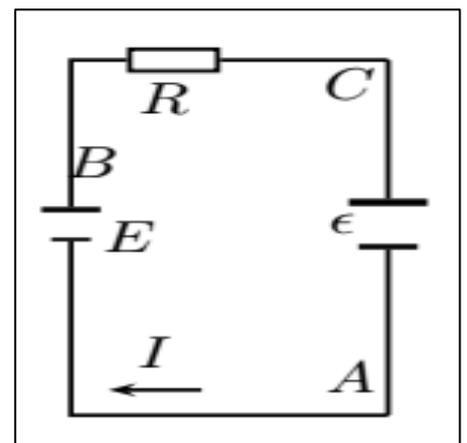
On obtient le schéma équivalent ci-contre.

$$V_A - V_B + V_B - V_C + V_C - V_A = 0$$

$$-E + RI + \varepsilon = 0 \Rightarrow I = \frac{(E - \varepsilon)}{R}$$

$$R = 3\Omega \Rightarrow I = 1,33A$$

$$V_{Gén} = E - r_g I = 15,85 V \text{ et } \Delta V_{Batt} = \varepsilon + r_b I = 12,13 V$$



1. Le courant étant positif, il correspond au courant réel. C'est le générateur qui fournit l'énergie et la batterie B fonctionne comme accumulateur de charges.

a) Puissance fournie $P = EI = 21,33 W$

b) Puissance totale dissipée par effet Joule : $P' = RI^2 = 5.33 W$.

L'énergie chimique W s'emmagine dans la batterie à la vitesse

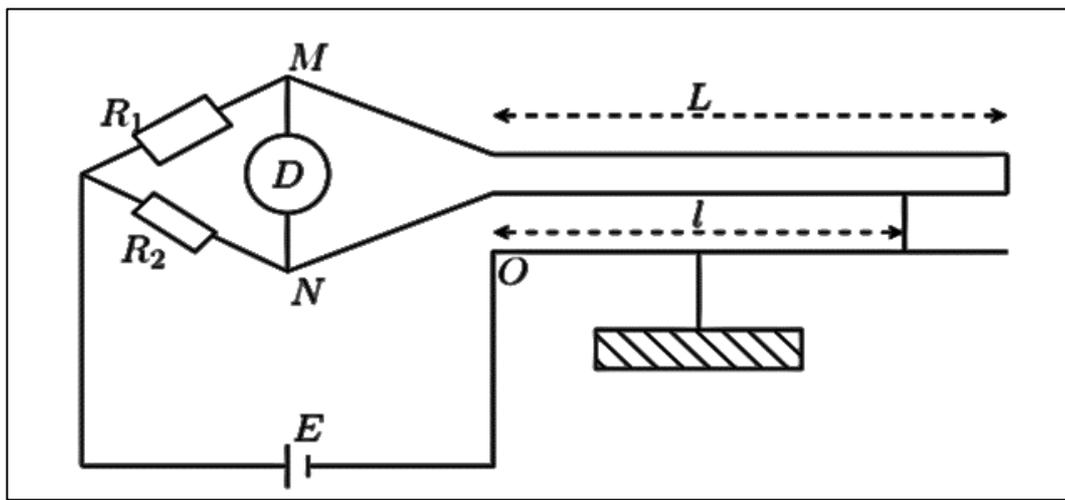
$$\left(\frac{dW}{dt}\right) = P_u = P - P' = \varepsilon I = 16 W.$$

Exercice V.2

On utilise un « pont de Weatstone » muni d'un détecteur D (figure ci-dessous) pour localiser un défaut dans un câble électrique souterrain, formé de deux fils conducteurs de longueur L chacun et de résistance λ par unité de longueur. Pour cela, on relie les fils l'un à l'autre à l'une des extrémités et on monte à l'autre extrémité le dispositif de détection.

Le défaut situé à la distance l de O est par exemple provoqué par la mise accidentelle du fil en contact avec la gaine protectrice reliée à la terre.

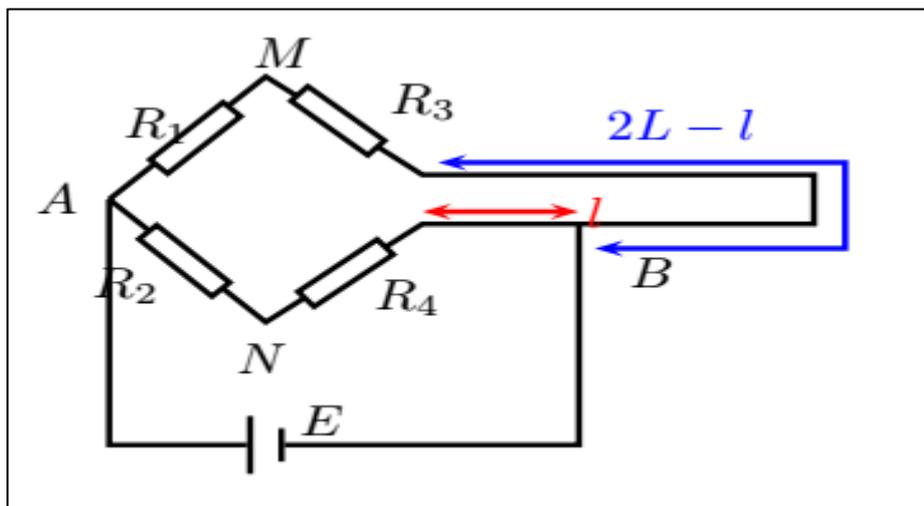
Trouver la distance l connaissant R_1 et R_2 à l'équilibre du pont (le détecteur de courant D indique ($I_D = 0$)). A. N. : $R_1 = 50\Omega$, $R_2 = 30\Omega$, $L = 20\text{km}$ [9].



Solution V.2

Le défaut situé au point B est un contact entre le fil et la terre qui est liée à la borne négative du générateur.

R_3 est la résistante correspondante.



à : $L + (L - l) : R_3 = \lambda (2L - l)$. Soit R_4 la résistance correspondant à l :

$$R_4 = \lambda l.$$

$I_D = 0 \Rightarrow V_M = V_N$. On aura donc

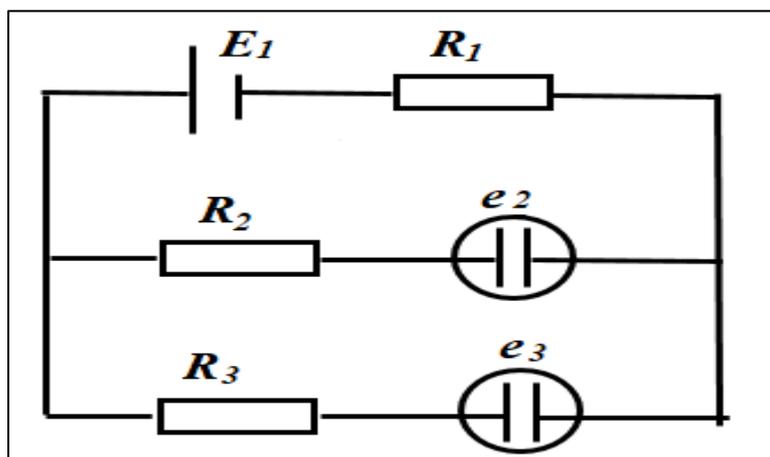
$$R_1 I_1 = R_2 I_2 \text{ et } R_3 I_1 = R_4 I_2 \Rightarrow R_1 / R_3 = R_2 / R_4 \Rightarrow R_1 \lambda l =$$

$$R_2 \lambda (2L - l) \Rightarrow l = 2L \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$A.N.l = 15 \text{ km}$$

Exercice V.3

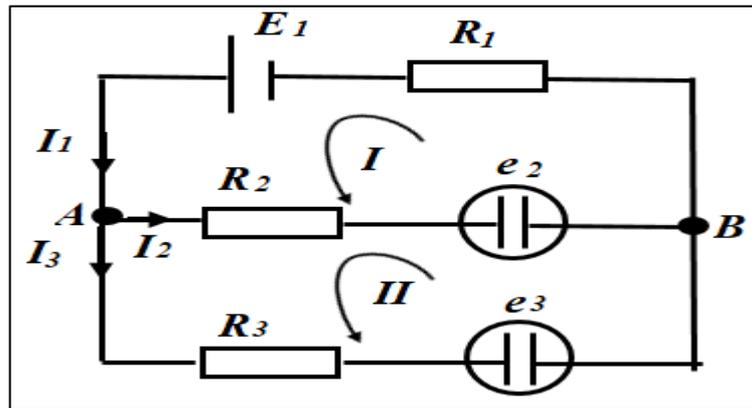
On considère le circuit électrique représenté ci-dessous.



1. Calculer les intensités des courants I_1 , I_2 et I_3 circulant respectivement dans les résistances R_1 , R_2 et R_3 .
2. La résistance R_3 étant formée par l'association en parallèle de résistances R_4 et R_5 , Calculer la résistance R_4 .

Données : $E_1=64\text{V}$, $e_2= 10\text{V}$, $e_3= 7\text{V}$, $R_1=6 \Omega$, $R_2=12 \Omega$, $R_3= 9 \Omega$, $R_5= 36 \Omega$ [8].

Solution V.3



La différence de potentiels ($V_A - V_B$) est calculée dans les trois branches :

$$\text{Loi des nœuds : } I_1 = I_3 + I_2 \quad \Rightarrow \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$\text{Maille 1 : } R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_1 - e_2 \quad \Rightarrow \quad 6 I_1 + 12 I_2 + 0 I_3 = 54$$

$$\text{Maille 2 : } -R_2 I_2 + R_3 I_3 = e_2 - e_3 \quad \Rightarrow \quad 0 I_1 - 12 I_2 + 9 I_3 = 3$$

Les trois équations constituent un système à trois inconnues :

Par la méthode des matrices, on aura :

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ 0 & -12 & 9 \end{vmatrix} = 234$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 54 & 12 & 0 \\ 3 & -12 & 9 \end{vmatrix} = 1170 \rightarrow I_1 = \frac{1170}{234} \rightarrow I_1 = 5 \text{ A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 6 & 54 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 468 \rightarrow I_2 = \frac{468}{234} \rightarrow I_2 = 2 \text{ A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & 12 & 54 \\ 0 & -12 & 3 \end{vmatrix} = 702 \rightarrow I_3 = \frac{702}{234} \rightarrow I_3 = 3 \text{ A}$$

2- R_3 étant formée par l'association en parallèle de résistances R_4 et R_5 :

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

$$\text{Alors : } \frac{1}{R_4} = \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_5}$$

$$R_4 = \frac{R_3 R_5}{R_5 - R_3}$$

$$R_4 = \frac{9 \cdot 36}{36 - 9} = 12 \Omega$$

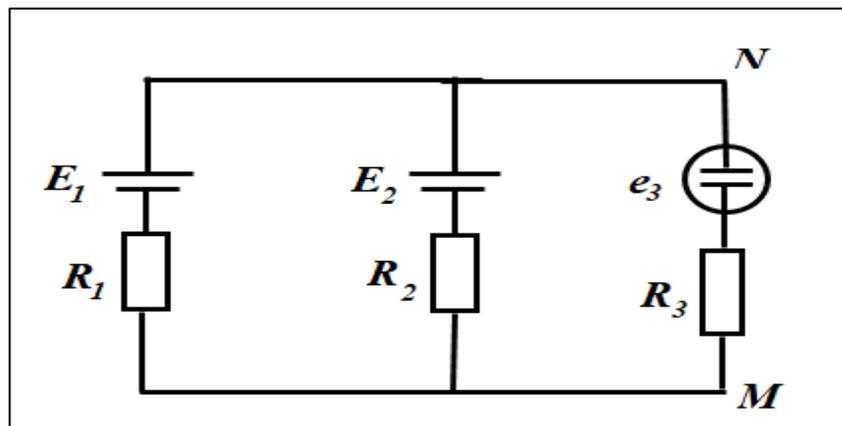
Exercice V.4

Soit le circuit électrique illustré à la figure ci-dessous :

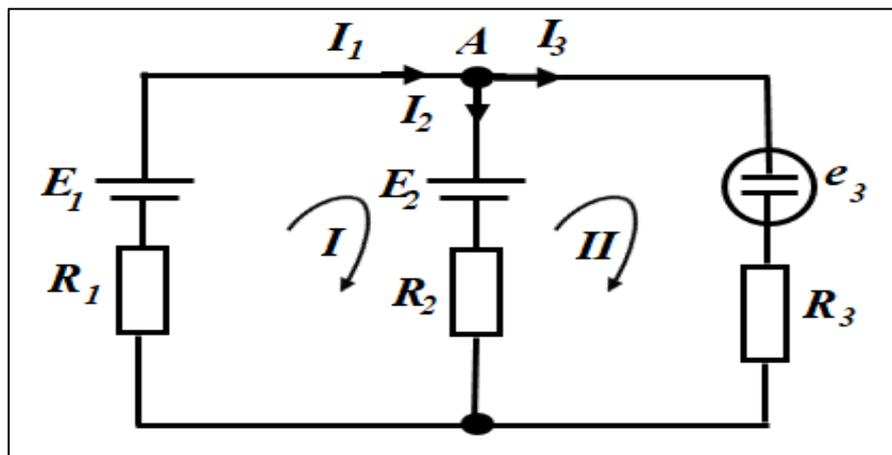
1- Calculer les intensités des courants I , I_1 et I_2 circulant respectivement dans les résistances R_1 , R_2 et R_3 en utilisant les lois de Kirchoff.

2- Calculer le courant I_3 circulant dans la branche MN en utilisant le théorème de Thevenin.

avec $E_1=100V$, $E_2= 10V$, $e_3= 16V$, $R_1=20 \Omega$, $R_2=30 \Omega$, $R_3= 12\Omega$ [8].



Solution V.4



1- A partir de la loi de Kirchoff, nous avons :

Loi des nœuds : $I_1 = I_2 + I_3 \quad \Rightarrow \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0$

Maille 1: $E_1 - E_2 - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 I_1 + R_2 I_2 + 0 I_3 = E_1 - E_2$

Maille 2 : $E_2 - e_3 + R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2 - e_3 \quad \Leftrightarrow$

Les trois équations constituent un système à trois inconnues :

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$20 I_1 + 30 I_2 + 0 I_3 = 90$$

$$0 I_1 - 30 I_2 + 12 I_3 = - 6$$

Par la méthode des matrices, on aura :

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 20 & 30 & 0 \\ 0 & -30 & 12 \end{vmatrix} = 1200$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 90 & 30 & 0 \\ -6 & -30 & 12 \end{vmatrix} = 3600 \rightarrow I_1 = \frac{3600}{1200} \rightarrow I_1 = 3 \text{ A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 20 & 90 & 0 \\ 0 & -6 & 12 \end{vmatrix} = 1200 \rightarrow I_2 = -\frac{1200}{1200} \rightarrow I_2 = 1 \text{ A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 20 & 30 & 90 \\ 0 & -30 & -6 \end{vmatrix} = 2400 \rightarrow I_2 = -\frac{2400}{1200} \rightarrow I_3 = 2 \text{ A}$$

2- A partir du Théorème de Thévenin, nous avons :

- Pour calculer I_3 :

Maille I: $E_1 - E_2 - R_1 I - R_2 I = 0$

$$\Rightarrow E_1 - E_2 = (R_1 + R_2) I$$

$$\Rightarrow I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$$

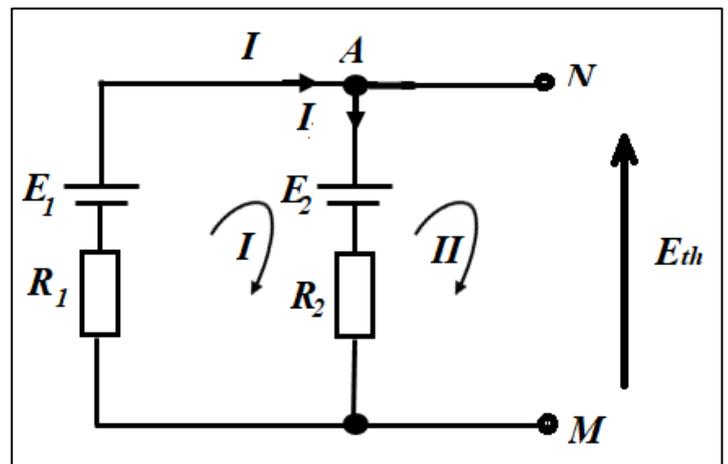
$$\Rightarrow I = \frac{90}{50} = 1,8 \text{ A}$$

Maille II: $R_2 I_2 + E_2 - E_{th} = 0$

$$\Rightarrow E_{th} = R_2 I_2 + E_2$$

$$\Rightarrow E_{th} = 30 \times 1,8 + 10$$

$$\Rightarrow E_{th} = 64 \text{ V}$$

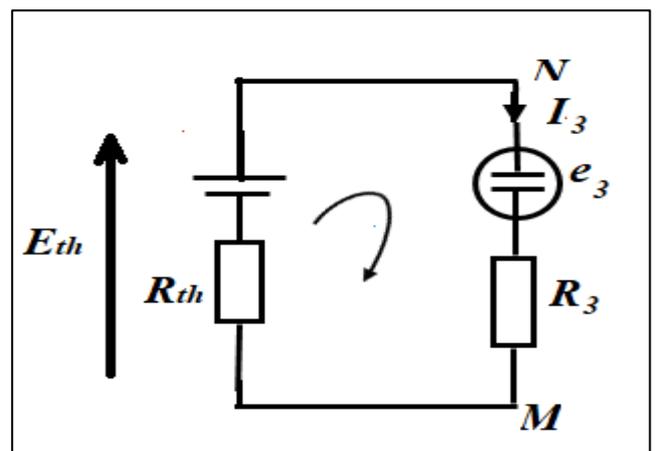


$$R_{th} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12 \Omega.$$

$E_{th} - e - R_{th} I_3 + R_3 I_3 = 0$

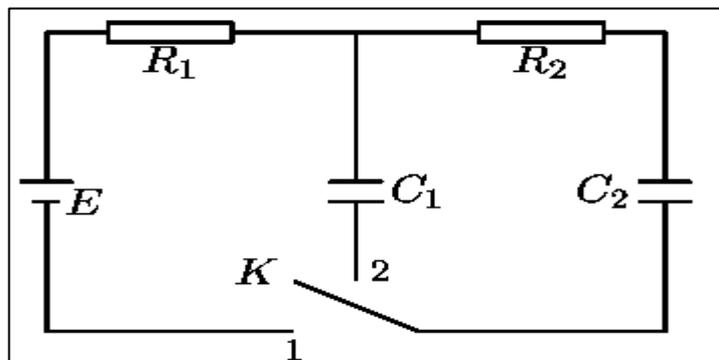
$$I_3 = \frac{E_{th} - e}{R_{th} + R_3} = \frac{64 - 16}{12 + 12}$$

$$I_3 = 2 \text{ A}.$$



Exercice V.5

On considère le circuit de la figure ci-contre, formé d'un générateur de f.e.m E et de deux résistances R_1 et R_2 ; C_1 et C_2 sont les capacités de deux condensateurs initialement non chargés.



1. L'interrupteur K étant en position 1 :

- Établir l'équation différentielle régissant la charge du condensateur C_2 .
- En déduire l'expression de la charge $q_2(t)$ et celles des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ traversant respectivement les résistances R_1 et R_2 .

2. Le condensateur C_2 étant entièrement chargé :

- Quelle est l'énergie WG fournie par le générateur ?
- Quelle est l'énergie WC_2 emmagasinée par C_2 ?
- Quelle a été l'énergie WJ dissipée par effet Joule dans le réseau ?
- Quelles sont les charges Q_1 et Q_2 respectives de C_1 et C_2 ?

3. Le condensateur C_2 étant toujours entièrement chargé, on met l'interrupteur K en position 2, déterminer à l'état d'équilibre final :

- Les charges Q'_1 et Q'_2 de C_1 et C_2 , respectivement.
- Les énergies WC'_1 et WC'_2 emmagasinées respectivement par C_1 et C_2 .
- En déduire l'énergie WJ' dissipée dans le réseau [8].

Solution V.5

1. a. K en position 1 : un seul courant : $i_1 = 0 \text{ A} \Rightarrow i = i_2 = dq_2/dt$.

Résistance équivalente $R = R_1 + R_2$.

Loi des mailles : $-E + Ri_2 + \frac{q_2}{C_2} = 0$.

D'où : $\frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{\tau} = \frac{E}{R}$ avec $\tau = RC_2$.

1. b. $q_2(t) = Ae^{-t/\tau} + B$

avec $q_2(0) = 0 \text{ C} \Rightarrow A = -B$

La constante $B = Q_{2f} = q_{2p}$ correspond à la charge complète Q_{2f}

où la solution particulière q_{2p} se détermine par $i_2 = dq_{2p}/dt = 0A$

Alors : $-E + R_{x0} + Q_{2f}/C_2 = 0$

Soit : $B = Q_{2f} = q_{2p} = EC_2$ et $q_2(t) = EC_2(1 - e^{-t/\tau})$

$i_1 = -0A$ et $i_2 = dq_2/dt = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$

2. a. $W_G = EQ_{2f} = E^2 C_2$ 2. b. $W_{C_2} = \frac{Q_{2f}^2}{2C} = \frac{1}{2} E^2 C_2$
 2. c. $W_J = W_G - W_{C_2} = \frac{1}{2} E^2 C_2$ 2. d. $Q_1 = 0C$ et $Q_2 = EC_2$
 3. a. Equilibre final: $i'_2 = 0A$

Loi des mailles : $\frac{-Q'_2}{C_2} + R_2 \times 0 + \frac{Q'_1}{C_1} = 0 \rightarrow (1)$

Conservation de la charge : $Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2 = EC_2 \rightarrow (2)$

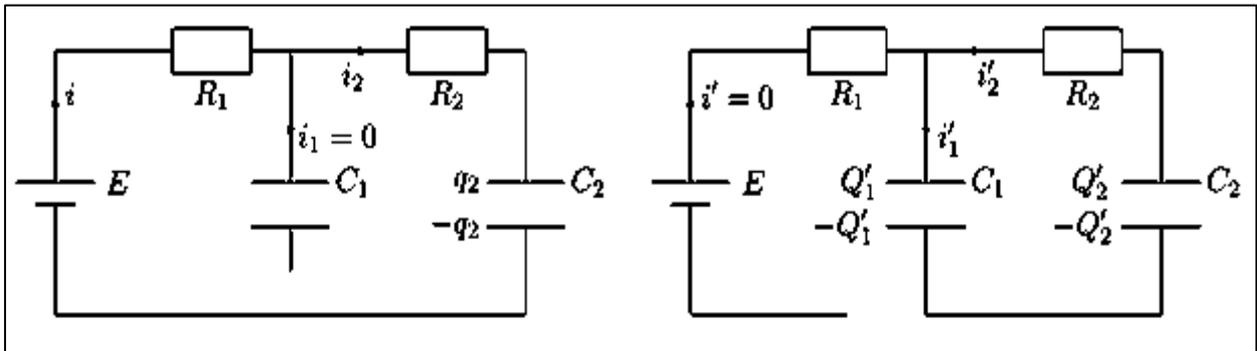
A partir des équations (1) et (2), on aura :

$$Q'_1 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} E \quad \text{et} \quad Q'_2 = \frac{C_2^2}{C_1 + C_2} E$$

3. b. $W'_{C_1} = \frac{Q'^2_1}{2C_1} = \frac{C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)^2} E^2$ et $W'_{C_2} = \frac{Q'^2_2}{2C_2} = \frac{C_2^3}{2(C_1 + C_2)^2} E^2$

Puisque C_2 joue le rôle d'un générateur,

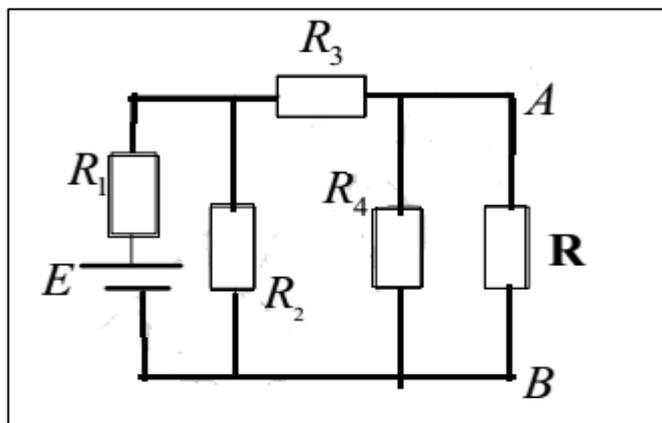
3. c. alors l'énergie s'écrit : $W'_J = W'_{C_2} - W'_{C_1} = \frac{C_2^2(C_2 - C_1)}{2(C_1 + C_2)^2} E^2$



Exercice V.6

Calculer les caractéristiques E_{Th} et R_{Th} du générateur de Thévenin correspondant au circuit représenté sur la figure ci-dessous, en déduire ensuite l'intensité I du courant qui passe dans le conducteur ohmique R .

Données : $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 10\Omega$, $R_5 = 5\Omega$, $E = 20V$ [1].

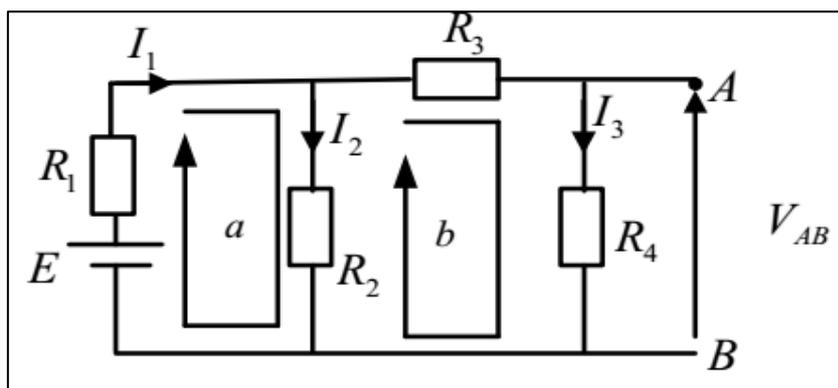


Solution V.6

1- Calcul de E_{th} en ouvrant la branche AB :

$$E_{th} = \bar{U}_{AB0}$$

$$\Leftrightarrow -R_3 I_3 + R_2 I_2 = R_4 I_3$$



Calcul de I_3 par :

$$\text{Loi des nœuds : } I_1 = I_2 + I_3 \rightarrow (1)$$

$$\text{Loi des mailles : maille (a) : } E = R_1 I_1 + R_2 I_2 \rightarrow (2)$$

$$\text{maille (b) : } 0 = (R_3 + R_4) I_3 - R_2 I_2 \rightarrow (3)$$

En remplaçant I_1 dans l'équation (2), on obtient

$$E = R_1 (I_2 + I_3) + R_2 I_2 \Leftrightarrow E = (R_1 + R_2) I_2 + R_1 I_3 \rightarrow (4)$$

$$\text{A partir de l'équation (3) : } I_2 = \frac{R_3 + R_4}{R_2} I_3 \rightarrow (5)$$

En remplaçant I_2 dans l'équation (4), on obtient :

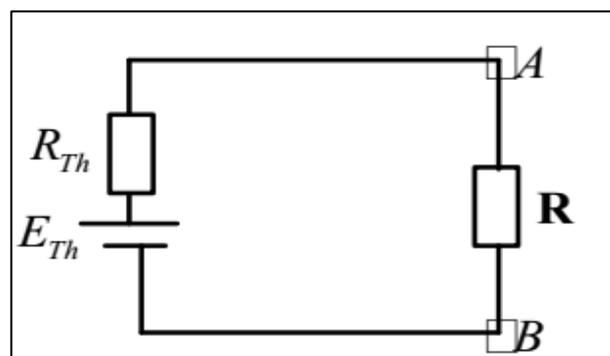
$$E = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_2} I_3 + R_1 I_3$$

$$\Leftrightarrow E = \left[\frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2}{R_2} \right] I_3$$

Calcul de I_3 et E_{th} :

$$I_3 = \frac{E R_2}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2}$$

$$E_{th} = \frac{E R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2} \Leftrightarrow E_{th} = 3,70V$$



2- Calcul de R_{th} après extinction du générateur :

La résistance équivalente du circuit sans la résistance R est :

$$R_{th} = [(R_1 // R_2) + R_3] // R_4$$

$$R_1 // R_2 \Rightarrow \frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0,715$$

$$\Rightarrow R_{12} = 1,43\Omega$$

La résistance équivalente de R_{12} et R_3 est :

$$R' = R_{12} + R_3 \Rightarrow R' = 5,43\Omega$$

Finalement, la résistance du générateur de Thévenin est :

$$\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R_4} \Rightarrow R_{th} = 3,52\Omega$$

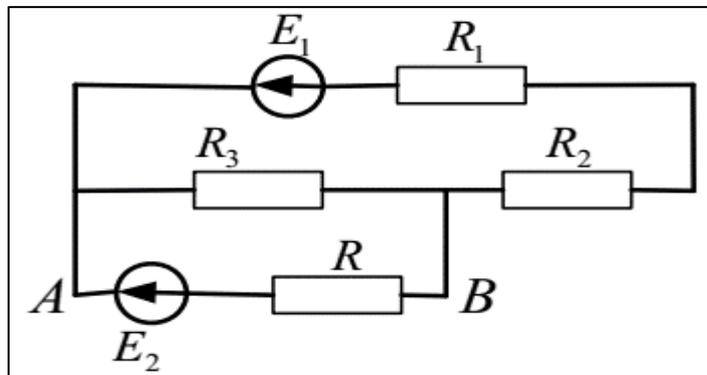
3- Calcul de l'intensité I :

$$E_{th} = (R + R_{th})I \Rightarrow I = \frac{E_{th}}{R + R_{th}}$$

$$\Rightarrow I = 0,43A$$

Exercice V.7

Déterminer littéralement l'intensité du courant qui traverse la branche AB (figure ci-dessous) en fonction de $E_1, E_2, R_1, R_2, R_3, R$ [7].



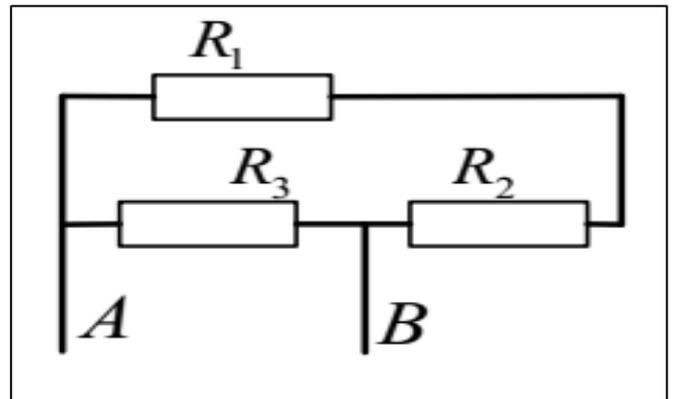
Solution V.7

Déterminer R_{Th} à partir du montage ci-dessous,

Pour cela, on enlève la branche AB et on éteint les sources de tension :

$$R_{th} = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Calculer E_{th} à partir de la figure ci-dessous,

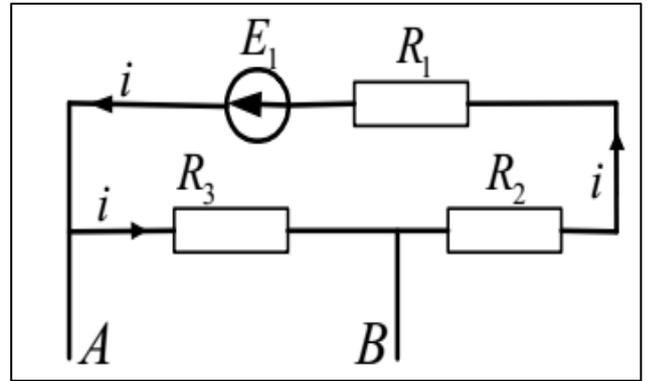


Pour cela, la branche AB est enlevée :

$$U_{AB_0} = R_3 i = -(R_1 + R_2) i - (E_1)$$

$$i = \frac{E_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$E_{th} = U_{AB_0} = \frac{R_3 E_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

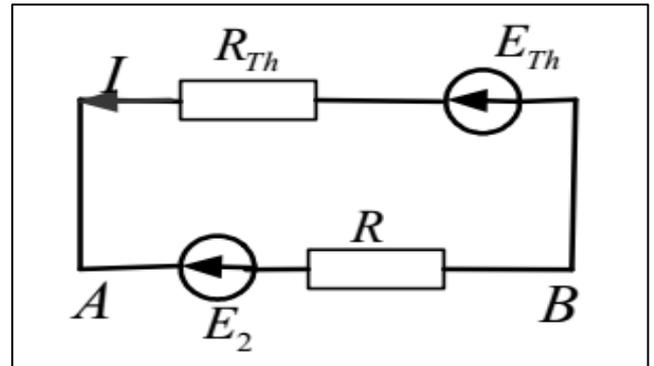


Déterminer I à partir de la figure suivante :

$$E_{th} = U_{AB_0} = R \cdot I - (E_2) = -R_{th} I$$

$$I = \frac{E_{th} - E_2}{R + R_{th}}$$

$$I = \frac{R_3 E_1 - E_2 (R_1 + R_2 + R_3)}{R (R_1 + R_2 + R_3) + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$



Electromagnétisme

Exercice VI.1

Un éclair transporte couramment un courant maximum de 20kA . quel est le champ magnétique maximum qu'il produit à 1m? à 300m? [7].

Solution VI.1

En admettant qu'une partie de l'éclair est rectiligne , on peut utiliser la loi:

$$B = \frac{\alpha_0 I}{2\pi r} \rightarrow B = \frac{4 \pi 10^{-7} \cdot 20 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 1} \Rightarrow B = 4 \cdot 10^{-3} T$$

Cette valeur est pour la distance de un mètre de l'éclair, mais à la distance de 300m le résultat est:

$$B = \frac{\alpha_0 I}{2\pi r} \rightarrow B = \frac{4 \pi 10^{-7} \cdot 20 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 300} \Rightarrow B = 1,33 \cdot 10^{-5} T$$

Exercice VI.2

Une ligne rectiligne de tension est située à une hauteur de 12cm au-dessus du sol. Elle transporte un courant de 300A dans la direction de l'Ouest.

Décrire le champ magnétique qu'elle produit et calculer sa valeur sous la ligne au niveau du sol.
comparer le avec le champ magnétique terrestre [6].

Solution VI.2

D'après la règle de la main droite : si le courant circule vers l'ouest, le vecteur du champ magnétique produit par ce courant est dirigé vers le sud :

Pour un courant rectiligne, l'intensité du champ magnétique est obtenue par l'application de la loi:

$$B = \frac{\alpha_0 I}{2\pi r} \rightarrow B = \frac{4 \pi 10^{-7} \cdot 300}{2\pi \cdot 12} \Rightarrow B = 5 \cdot 10^{-6} T$$

Comparons le au champ magnétique terrestre \vec{B}_0 : $\frac{B}{B_0} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-5}} = 10^{-1} \Rightarrow \frac{B}{B_0} = 10^{-1}$

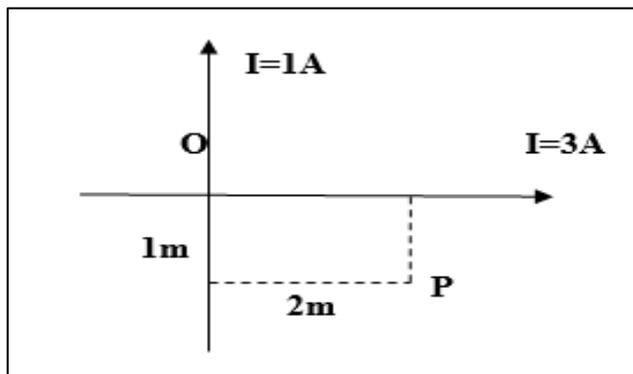
Le champ produit par la ligne électrique ne représente que 10% du champ magnétique terrestre.

Exercice VI.3

Deux courants électriques perpendiculaires de 1A et 3A sont orientés comme sur le dessin et se croisent au point O.

Quelles sont l'intensité et l'orientation du champ magnétique au point P situé dans le plan des deux

courants, à 1m et 2m des deux courants comme indiqué dans la figure ? [7].



Solution VI.3

Le champ magnétique produit par un courant rectiligne d'intensité I situé à une distance du conducteur est

donné par la loi: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

La direction du champ magnétique est déterminée par la règle de la main droite.

Le courant d'intensité 1A crée un champ magnétique perpendiculaire au plan des deux conducteurs

(entrant dans la feuille): $B_1 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{1}{2\pi \cdot 1} \rightarrow B_1 = 2 \cdot 10^{-7} T$

Le courant d'intensité 3A crée un champ magnétique perpendiculaire au plan des deux conducteurs

(entrant dans la feuille): $B_2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{1}{2\pi \cdot 2} \rightarrow B_2 = 3 \cdot 10^{-7} T$

Le champ magnétique total est égal à la somme des champs \vec{B}_1 et \vec{B}_2 . Puisque les deux champs ont même direction et même sens, le champ magnétique résultant est perpendiculaire au plan des deux conducteurs

et d'intensité: $B = B_2 + B_1 \rightarrow B = 5 \cdot 10^{-7} T$

Exercice VI.4

Soit une spire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I .

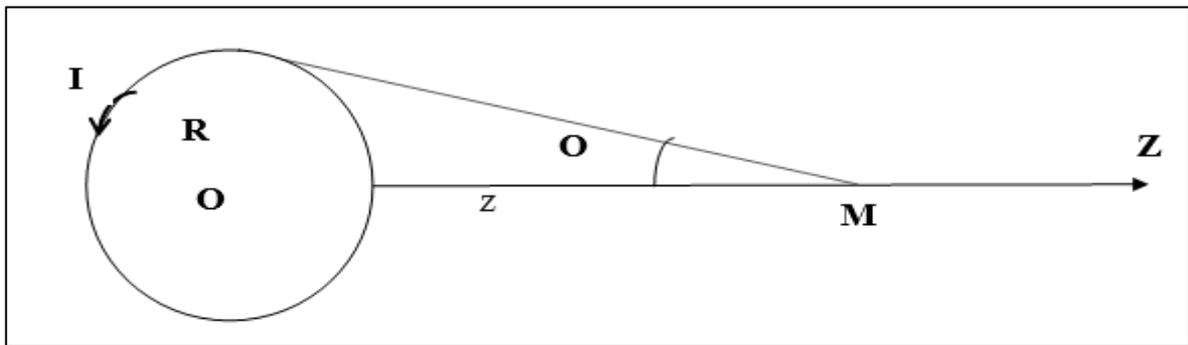
1/ Calculer le champ magnétique créé le long de l'axe OZ à une distance z du centre O en fonction de l'angle θ sous lequel on voit le spire (figure ci-dessous).

2/ Retrouver l'expression: $B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$

3/ Quelle est la forme approchée de cette expression à grandes distances de l'axe OZ ?

4/ Exprimer le champ magnétique B_z en fonction du moment magnétique M .

5/ En déduire le champ B_o créé au centre O de la spire [7].



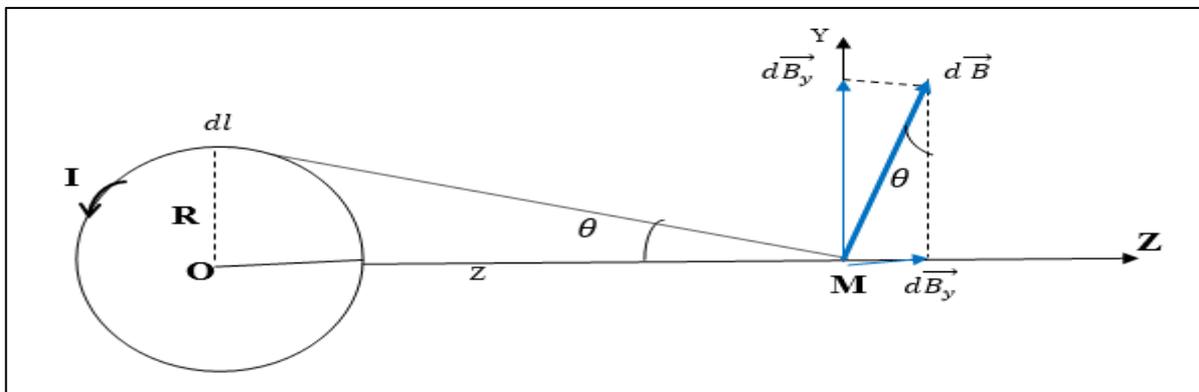
Solution VI.4

1/ D'après la loi de Biot et Savard, le champ magnétique élémentaire \vec{dB} produit par une longueur élémentaire $d\vec{l}$ de la spire parcourue par un courant électrique d'intensité I est: $\vec{dB} = \frac{\alpha_0 I}{4\pi r^2} d\vec{l} \wedge \vec{u}$

Puisque $\vec{r} = r\vec{u}_r$, on peut écrire la loi sous la forme: $\vec{dB} = \frac{\alpha_0 I}{4\pi r^3} d\vec{l} \wedge \vec{r}$

On remarque que $d\vec{l} \perp \vec{r}$, ce qui implique $|d\vec{l} \wedge \vec{r}| = dl \cdot r$, d'où: $dB = \frac{\alpha_0 I}{4\pi r^2} dl$

On peut décomposer \vec{dB} en deux composantes \vec{dB}_z et \vec{dB}_y , de telle façon que lors de l'intégration, toutes les composantes \vec{dB}_y s'annulent deux à deux en raison de la symétrie. Le champ total est la résultante de toutes les composantes \vec{dB}_z et donc \vec{B}_z résultant est parallèle à l'axe OZ.



Par projection (voir figure), $\vec{dB}_z = dB \cdot \sin\theta \rightarrow \vec{dB}_z = \frac{\alpha_0 I}{4\pi r^2} \sin\theta dl$

Pour trouver \vec{B}_z , on intègre l'expression précédente par rapport à la seule variable l , pour arriver à:

$$B_z = \frac{\alpha_0 I}{4\pi r^2} \sin\theta \oint dl$$

$$B_z = \frac{\alpha_0 I}{4\pi r^2} \sin\theta \cdot 2\pi R \Rightarrow B_z = \frac{\alpha_0 I R}{2 r^2} \sin\theta$$

Puisque $\theta = \frac{R}{r}$, on peut donc obtenir l'expression finale du champ: $B_z = \frac{\alpha_0 I R^2}{2\pi r^2}$

$$\Rightarrow B_z = \frac{\alpha_0 I}{2R} \sin^3\theta \Leftrightarrow \vec{B}_z = \frac{\alpha_0 I}{2R} \sin^3\theta \vec{u}_z$$

2/ En remplaçant cette fois $\sin\theta$ par $\frac{R}{r} = \frac{R}{(R^2+z^2)^{1/2}}$,

on obtient l'expression proposée : $B_z = \frac{\alpha_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$

3/ La forme approximative de cette expression à de grandes distances de l'axe OZ, est obtenue en négligeant le rayon de la spire devant la grande distance z, le résultat est : $B_z = \frac{\alpha_0 IR^2}{2z^3}$

4/ Expression de B_z en fonction du moment magnétique M :

$$B_z = \frac{\alpha_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\alpha_0 I}{2\pi} \frac{I\pi R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \left| \begin{array}{l} M = IS \\ S = \pi R^2 \end{array} \right. \rightarrow M = I\pi R^2 \Rightarrow B_z = \frac{\alpha_0}{2\pi} \frac{M}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

5/ On obtient le champ magnétique produit au centre de la spire en prenant $z=0$: $B_0 = \frac{\alpha_0 I}{2R}$

Exercice VI.5

Une particule de masse 5.10^{-4} kg porte une charge de $2.5 \cdot 10^{-8}$ C. On communique à la particule une vitesse initiale horizontale de $6 \cdot 10^4$ ms⁻¹.

Quelles sont la grandeur et la direction du champ magnétique minimum qui maintiendra la particule sur une trajectoire horizontale en compensant l'effet de la pesanteur ?

Solution VI.5

On sait qu'une charge qui se déplace dans un champ magnétique est soumise à une force magnétique

$$\vec{F} = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}, \text{ telle que son intensité soit égale à } F = qv_0 B \sin \alpha, \text{ avec } \alpha = (\vec{v}_0, \vec{B}).$$

La particule chargée est soumise à deux forces : la force magnétique \vec{F} et son poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

Pour que sa trajectoire reste horizontale, il faut que les deux forces soient directement opposées $\vec{F} = -\vec{P}$.

$$\vec{B} \perp \vec{v}_0 \Rightarrow \sin \alpha = 1 \Rightarrow F = qv_0 B \quad \left| \begin{array}{l} P = mg \end{array} \right. \Rightarrow B = \frac{mg}{qv_0}$$

Application numérique : $B = \frac{5.10^{-4} \cdot 9,8}{2,5.10^{-8} \cdot 6.10^4} \rightarrow B \approx 3,27T$

Quant à la direction de \vec{B} , elle est horizontale et perpendiculaire au plan vertical formé par la vitesse \vec{v}_0 et la force \vec{F} .

\vec{v}_0 est horizontale, et a pour direction l'axe $x'x$,

\vec{F} est verticale et a pour direction l'axe $z'z$,

\vec{B} est horizontale et a pour direction l'axe $y'y$.

Exercice VI.6

1/ Calculer la circulation du champ magnétique le long de l'axe (Ox) d'une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant I.

2/ Calculer de même la circulation du champ magnétique le long de l'axe (Ox) (de $-\infty$ à $+\infty$) d'un solénoïde circulaire de rayon R, de longueur l et comportant N spires jointives parcourues chacune par un courant I [7].

Solution VI.6

1/ On a vu en cours, et dans un exercice précédent que le vecteur champ magnétique produit par une spire circulaire (de rayon R et parcourue par un courant d'intensité I) en un point de son axe est donné par l'expression :

$$\vec{B}(M) = \frac{\alpha_0}{2R} \sin^3 \theta \cdot \vec{u}_x$$

La circulation du vecteur \vec{B} sur l'axe ($x'Ox$) est égale à : $C = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) dx$

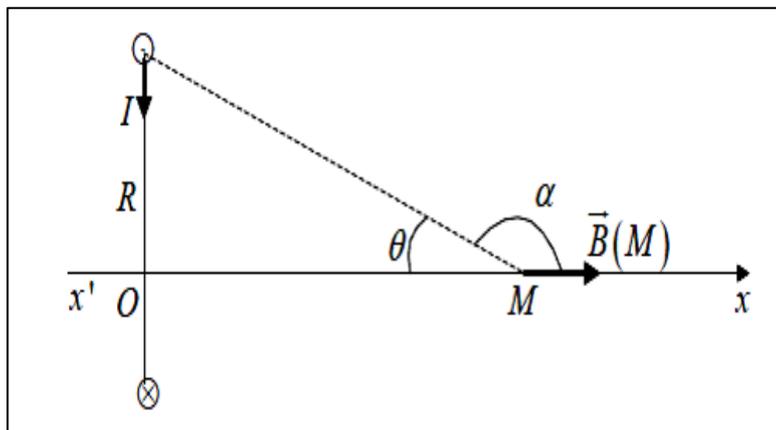
Sachant que $x = \frac{R}{\tan \alpha} \Rightarrow dx = \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$,

et puisque $\alpha + \theta = 180^\circ$,

on a $\sin \theta = \sin \alpha$.

$$C = \int_0^\pi \frac{\alpha_0 \sin^3 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} R d\alpha$$

$$\Rightarrow C = \alpha_0 I$$



2/ Le conducteur solénoïdal est constitué de N spires circulaires, pour obtenir la circulation du champ, il suffit de multiplier le résultat précédent par N, on trouve :

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) dx = C = N\alpha_0 I$$

Références bibliographiques

- [1] Dr. Afifa Yedjour, Dr. H. Aouabdi-Settaouti, Electricité, Université des sciences et technologie d'Oran, Mohamed Boudiaf USTO-MB. Algérie, - 2016/2017.
- [2] Mr Abdeladim Mustapha, Polycopié de Cours Physique 2, Université des sciences et technologie d'Oran, Mohamed Boudiaf, Algérie, - 2015/2016.
- [3] M.Berlin, J.P. Faroux et J. Renault, "Electromagnétisme 1, Electrostatique", Dunod, 1977.
- [4] Dr.Samir Khene, Electricité Notion de Base, Electrostatique, Electrocinétique, Electromagnétisme, Rappels de cours et exercices corrigés – OPU.
- [5] E. Amzallag, J. Cipriani, J. Ben Naim et N. Piccioli "La physique du Fac, Electrostatique et Electrocinétique" 2ième Edition, Edi-Science, 2006.
- [6] Pr. M. Chafik El Idrissi, Electricité cours exercices et problèmes corrigés, Faculté des sciences, Université Ibn Tofail. Kénitra.
- [7] A. Fizazi, " Electricité et Magnétisme", OPU, 2012.
- [8] Séries de travaux dirigés « Electricité » et Examens, Université des sciences et technologie Abd El Hamid Ibn Badis, Mostaganem 2015-2020.
- [9] Mahmoud Hachemane, Exercices d' Electricité avec solutions, Faculté de Physique, USTHB, 2014.