



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research

جامعة محمد الحميد ابن باديس - مستغانم
Abdelhamid Ibn Badis University of Mostaganem

كلية العلوم والتكنولوجيا
Faculty of Sciences and Technology

قسم المهندسة الميكانيكية
Department of Mechanical Engineering



N° d'ordre : M...../06/2020

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE MASTER ACADEMIQUE

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Thème

**Effet de la température sur les matériaux FGM en utilisant la théorie
du gradient de déformation nonlocale**

Présenté par :

- ❖ RAHMOUN YASMINE
- ❖ YAGOUBI ZOHRA

Soutenu le 25/06/2020 devant le jury composé de :

Président	Dr. M. Sahnoun	M.C.A. Université de Mostaganem
Examineur	Mme. A. Belhachemi	M.A.A. Université de Mostaganem
Examineur	Mr. A. Rachid	Doctorant, Université de Mostaganem
Encadreur	Pr. D.Ouinas	Université de Mostaganem

Année Universitaire : 2019/2020

Remerciment

En préambule à ce mémoire nous remercions ALLAH le tout puissant et le tout miséricordieux, qui nous aide et nous approvisionne la patience et le courage pour endurer toute difficulté.

En second lieu, nous tenons à exprimer nos sincères remerciements :

*À mon cher encadreur **Pr. Djemal Ouinas**, pour ses précieux conseils, sa patience et son aide continue tout au long de ce projet. .*

***Aux** membres du jury **Dr. Sahnoun** , **Mme. Belhachemi** et **Mr. Rachid** pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail.*

L'expression de mon profond respect à tout le staff du département de Génie Mécanique, de la faculté des sciences et technologies de Mostaganem, et à tout le personnel de l'université.

À mes chers parents et mes sœurs pour m'avoir instillé l'importance du savoir et de la connaissance et pour être une source importante d'encouragements et de soutiens spirituels.

Dédicace

A nos chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout le long de nos études.

*A notre encadreur académique **PR. DJAMEL OUINAS** pour ses conseils précieux, son aide dans le cheminement de cette étude et pour la peine qu'elle s'est donnée tout le long de ce travail afin de faire de ce document ce qu'il représente.*

A nos amis : Abderrahman Rachid et Imane Beloufa en souvenir de notre sincère et profonde amitié et des moments agréables que nous avons passés ensemble.

A toute nos familles pour leur soutien, leur encouragement tout le long de nos parcours universitaire.

Résumé:

L'analyse de la propagation d'ondes d'une nano-plaque non homogène de niveau fonctionnel (FG) soumise à une charge thermique non linéaire est étudiée au moyen de la théorie du gradient de déformation non-local. Le modèle introduit un paramètre de champ de contrainte non local et un paramètre d'échelle de longueur pour capturer l'effet de taille. Les effets de déformation de cisaillement sont pris en compte en utilisant une théorie de plaque de déformation de cisaillement à cinq variables. La relation de charge thermique non linéaire est obtenue par la résolution d'un problème de conduction thermique à travers l'épaisseur de la nano-plaque. Les propriétés de matériau sont supposées dépendantes de la température et changent progressivement à travers l'épaisseur via le modèle Mori-Tanaka. Les équations sont développées en utilisant le principe de Hamilton. Les résultats du travail actuel sont validés par comparaison avec ceux des travaux précédents. On a étudié les effets de divers paramètres tels que le paramètre non-local, le paramètre de l'échelle de longueur, l'indice de gradient et la distribution de température sur les caractéristiques de dispersion d'onde des nano-plaques dépendantes de la taille.

Mots clés : FGM, nano-plaque, champ de contrainte nonlocale, un paramètre d'échelle

Abstract:

Analysis of the wave propagation of a non-homogeneous functional-level nanoplate (FG) subjected to a non-linear thermal load is studied using the theory of the non-local deformation gradient. The model introduces a non-local stress field parameter and a length scale parameter to capture the size effect. The shear strain effects are considered using a five-variable shear strain plate theory. The nonlinear thermal load relationship is obtained by solving a thermal conduction problem through the thickness of the nano-plate. The material properties are assumed to be temperature dependent and gradually change through thickness via the Mori-Tanaka model. The equations are developed using the Hamilton principle. The results of the current work are validated by comparison with those of the previous work. The effects of various parameters such as the non-local parameter, length scale parameter, gradient index, and temperature distribution on the wave dispersion characteristics of size-dependent nanoplates were studied.

Keywords: FGM, nano-plate, nonlocal stress field, a scale parameter

ملخص

يتم تحليل انتشار الموجة للوحة النانو غير المتجانسة من المستوى الوظيفي المعرضة للحمل الحراري غير الخطي باستخدام نظرية تدرج التشويه غير محلي. يقدم النموذج مجال الإجهاد غير المحلي و مقياس الطول لالتقاط تأثير الحجم. تؤخذ تأثيرات تشوه القص في الاعتبار باستخدام نظرية لوحة تشوه القص ذات خمسة متغيرات. يتم الحصول على علاقة الحمل الحراري غير الخطي من خلال حل مشكلة التوصيل الحراري من خلال سمك لوحة النانو. من المفترض أن خواص المواد تعتمد على درجة الحرارة وتتغير تدريجياً من خلال السمك عبر نموذج موري تاناكا. تم تطوير المعادلات باستخدام مبدأ هاميلتون. يتم التحقق من نتائج العمل الحالي من خلال المقارنة مع نتائج العمل السابق. لقد درسنا تأثيرات مختلفة القيم مثل قيم غير المحلية ، وقيم مقياس الطول ، ومؤشر التدرج وتوزيع درجة الحرارة على خصائص تشتت الموجة للوحات النانو التي تعتمد على مقياس.

الكلمات الأساسية: صفيحة، حقل النانو، الضغط غير المحلي، معلمة مقياس

Table de matière

Résumé.....	I
Abstract.....	II
ملخص.....	III
Liste des figures.....	IV
Liste des tableaux.....	V
Liste des notations.....	VI
Introduction générale.....	1

Chapitre I : Généralités sur les matériaux Fonctionnellement gradués

I.1	Introduction.....	3
I.2	Concept des matériaux fonctionnellement gradués.....	3
I.3	Application des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs).....	5
I.4	Comparaison entre FGM et les matériaux composites traditionnels.....	6
I.5	Les avantages et inconvénients des matériaux à gradient fonctionnel.....	6
I.5.1	Avantage des matériaux fonctionnellement gradués.....	6
I.5.2	Inconvénients des matériaux fonctionnellement gradués.....	7

Chapitre II : La théorie de gradient de déformation non local

II.1	Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....	8
II.2	Les propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	9
II.3	Cinématique de la théorie.....	11
II.3.1	Le champ de déplacement.....	11
II.3.2	Le champ de déformation.....	12
II.3.3	La théorie du gradient de déformation non locale.....	12
II.4	Les équations de mouvement.....	13
II.5	Procédure analytique de Navier.....	19
II.6	Les résultats numériques et discussions.....	21
	Conclusion.....	30
	Références Bibliographiques.....	31

Liste des Figures

Chapitre I

Figure I. 1. Matériaux FGM en céramique et métal.....	3
Figure I. 2. Concept des matériaux à gradient.....	5
Figure I. 3. Les champs potentiels de l'application des FGMs.....	5

Chapitre II

Figure II.1. Géométrie d'une plaque FGM.....	9
Figure II. 2. Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	10
Figure II. 3. Effets du paramètre d'échelle de longueur sur la fréquence des nanoplaques FG pour divers nombres d'ondes ($p = 1, \mu = 1 \text{ nm}^2, \Delta T = 500$).....	27
Figure II. 4. Effets des distributions de température sur la fréquence des nanoplaques FG pour divers nombres d'ondes ($p = 1, \mu = 2 \text{ nm}^2, \eta = 1$).....	27
Figure II. 5. Les effets du paramètre d'échelle de longueur η sur la fréquence Ω des nanoplaques FG pour différents paramètre non local et l'indice de gradient p avec $a/h = 10, a/b = 1$ et $a = 10 \text{ nm}$: (a) Figure 3D, (b) pour un paramètre non local constant, μ (c) pour un indice de gradient constant, p	29

Liste des Tableaux

Chapitre I

Tableau I.1. Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....4

Chapitre II

Tableau II.1. Propriétés des matériaux du panneau FGM.....21

Tableau II.2. Propriétés physiques et mécaniques des matériaux constituants.....21

Tableau II.3. Comparaison de la contrainte axiale sans dimension et de la déformation de la plaque carrée Al/Al₂O₃ simplement supportée sous charge mécanique transversale bisinusoïdale.....22

Tableau II.4. Comparaison de la fréquence fondamentale $\omega h \sqrt{\frac{\rho}{G}}$ pour une nanoplaque. (Si₃N₄/SUS304).....23

Tableau II.5. Effet du rapport de la plaque a/b, de l'épaisseur de la plaque a/h, du paramètre non local μ et la condition aux limites sur la fréquence naturelle d'une plaque FG avec a=10 et indice de gradient p = 5. (Si₃N₄/SUS304).....24

Tableau II.6. Fréquence naturelle adimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{G_c}}$ d'une plaque carrée SSSS SUS304/Si₃N₄.....25

Tableau II.7. Comparaison des résultats de la flexion de la plaque carrée FGM S-S-S-S Si₃N₄/SUS304 avec un gradient de température différent. T₀=300K, $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho_m h / D_m}$, $D_m = E_m h^3 / 12(1 - \nu^2)$ (FSDT).....26

Liste des notations

FGM	Les matériaux à gradient de propriétés ou fonctionnellement gradués.
2D, 3D	Bidimensionnelle et tridimensionnelle respectivement.
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z ».
E_c	Module de Young de la céramique.
E_m	Module de Young du métal.
ρ	La masse volumique.
ρ_c	Masse volumique du métal
ρ_m	Masse volumique de la céramique
ν	Coefficient de Poisson.
V	La fraction volumique.
V_c	La fraction volumique de la céramique.
V_m	La fraction volumique du métal.
α	Coefficient de dilatation thermique.
α_c	Coefficient de dilatation thermique de la céramique
α_m	Coefficient de dilatation thermique du métal
k	Coefficient de la conductivité thermique
P	Les propriétés matérielles de la plaque
P_0, P_{-1}, P_1, P_2 et P_3	Les coefficients de la température T
a	Longueur de la plaque suivant la direction de x.
b	Largeur de la plaque suivant la direction de y.
h	L'épaisseur de la plaque suivant la direction de z.

u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.
w_b, w_s	La déflexion réalisée par flexion et la déflexion en cisaillement respectivement.
$f(z), g(z)$	Fonctions de forme de déformation de cisaillement.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales.
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$	Contraintes de cisaillement.
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z.
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$	Déformations de distorsion.
μ	Paramètre non-local.
η	Paramètre d'échelle de longueur.
δU	Variation de l'énergie de déformation.
δV	Variation du travail effectué par des forces externes (appliquées).
δK	Variation de l'énergie cinétique.
A	L'aire supérieure de la coque.
I_i, J_i, K_i	Les inerties de masse.
$A_{ij}, A_{ij}^{st}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s$	Les composantes de rigidité.
ω	La fréquence fondamentale.
T	La température de la plaque FGM.
N^T	La charge thermique.
$[a_{ij}]$	Matrice de rigidité.
$[m_{ij}]$	Matrice masse.



Introduction

Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont connus comme étant les matériaux de grande qualité dans les propriétés mécaniques, la résistance thermique et la résistance corrosive. Pour la première fois, un groupe de scientifiques japonais au milieu des années 80, introduit les FGM comme nouvelle génération de composites de matériaux microscopiquement hétérogènes et comme matériaux de barrière thermique dans des environnements à température élevée. Les FGM ont été récupérés en contrôlant les fractions de volume, la microstructure, la porosité, etc... des composants de matériaux pendant la fabrication, ce qui entraîne un gradient spatial des propriétés du matériau macroscopique. Au cours de la dernière décennie, la tendance à l'utilisation des poutres et des plaques fabriquées de FGM pour les structures d'ingénierie s'est considérablement (accrue, augmenté). Par conséquent, il est très important de comprendre le comportement des structures fabriquées à partir de FGM soumises à diverses charges mécaniques et thermiques pour leur conception précise.

Les structures (nano-scopiques, nano dimensionnelles) sont importantes dans le domaine de la nano-mécanique, il est donc essentiel de tenir compte des influx de petite taille dans leur analyse mécanique. L'absence d'un paramètre d'échelle dans la théorie des milieux continus rend impossible la description des effets de taille. Par conséquent, des théories continues dépendantes de la taille comme la théorie de l'élasticité non locale [1,2] et théorie non locale du gradient de déformation [3] sont développés pour tenir compte des effets à petite échelle. La théorie de l'élasticité non locale est utilisée pour analyser la réponse mécanique des nanostructures par de nombreux auteurs [4-10].

L'étude des effets de taille sur le comportement de propagation des ondes des nano-plaques sur un milieu élastique est effectuée par Wang et al. [11,12] ont également étudié les effets de taille sur la propagation des ondes axiales des nano-plaques utilisant l'élasticité non locale. L'étude des effets thermiques sur les caractéristiques de propagation des ondes ultrasonores des nano-plaques. Un effet de faible taille sur la propagation d'ondes d'une nano-plaque piézoélectrique est étudié par Zhang et al. [13] via la théorie de l'élasticité non locale. Zhang et al. [14] ont étudié le comportement de propagation des ondes de nano-plaques incorporant des effets de contrainte de surface. De plus, Zang et al. [15] ont montré les effets de la taille sur la propagation axiale de l'onde d'une nano-plaque piézoélectrique en tenant compte des effets de surface. Bien que la théorie d'Eringen soit largement appliquée pour prendre en considération les effets à petite échelle, elle ne considère que l'effet d'adoucissement de la rigidité. Divers chercheurs [16-18] ont indiqué une amélioration de la rigidité qui n'est pas incluse dans l'élasticité non locale. On rapporte que la théorie de l'élasticité non locale ne peut pas prédire les effets de durcissement de la rigidité en introduisant le paramètre de l'échelle de longueur. Dans la théorie du gradient de déformation non-locale, le champ de contrainte tient compte non seulement du champ de contrainte non locale, mais aussi du champ de contrainte des gradients de contrainte. Akgöz & Civalek [19] ont développé une nouvelle théorie de déformation du cisaillement par le biais de la théorie du gradient de déformation. Les réponses aux vibrations non linéaires des nano-poutre qui sont liés élastiquement aux nano-poutres piézoélectriques ont été démontrées en appliquant la théorie du gradient de déformation [20]. Les caractéristiques de flexion en fonction de la taille d'un nano-poutre bilayer électro-élastique est étudié par Zhou et al. [21]. Il est clair que la théorie conventionnelle du gradient


de déformation n'est pas en mesure de tenir compte du non localisation du champ de contrainte du gradient de déformation. Récemment, [Lim et al. \[22\]](#) ont proposé une théorie non locale de l'élasticité et du gradient de déformation pour l'analyse de la propagation des ondes de structures dépendantes de la taille. [Farajpour et al. \[23\]](#) ont récemment utilisé la théorie du gradient de déformation non local pour étudier les caractéristiques du flambage des nano-plaques. [Li et al. \[24\]](#) ont analysé la propagation des ondes dans les nanotubes de carbone avec des effets de surface basés sur la théorie du gradient de déformation non local.

[Nejad et al. \[25\]](#) ont utilisé la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen pour l'analyse de flexion des nano-poutres bidirectionnels d'Euler-Bernoulli. [Kiani \[26\]](#) a étudié l'analyse thermo-élasto-dynamique des nano-poutres non uniformes à gradation fonctionnelle axiale en tenant compte des effets de l'énergie de surface. Le flambage thermique et les caractéristiques de vibration libre des nano-poutres FG soumis à des distributions de température ont été étudiés par [Ebrahimi et al. \[27,28\]](#) ont étudié la réponse aux vibrations thermomécaniques des nano-poutres FG sous des charges thermiques linéaires et non linéaires. [Ebrahimi & Barati \[29\]](#) ont étudié les comportements vibratoires des nano-poutres FG magnéto-électro-thermo-élastiques sur la base d'une théorie de la poutre de déformation de cisaillement de la poutre du troisième ordre. L'analyse du flambement des nano-poutres piézoélectriques FG reposant sur une base élastique est réalisée par [Ebrahimi & Barati \[30\]](#) dans le cadre d'une théorie de poutre d'ordre supérieur.

Il est évident que l'analyse des vibrations et du flambage des nano-poutre FG et des nano-plaques FG sont abondantes, cependant, il y a peu de travaux qui étudient la propagation des ondes de ces structures. [Zhang et al. \[31\]](#) ont étudié les effets de surface et thermiques sur la propagation des ondes de flexion des nano-poutres piézoélectriques FG par la théorie de l'élasticité non locale. [Li et al. \[32\]](#) présentent l'analyse de la propagation par ondes flexibles des poutres de FG à petite échelle en appliquant une théorie non locale du gradient de déformation.

Dans ce mémoire, deux chapitres sont présentés : des généralités sur les FGM dans le chapitre I, et notre travail dans le chapitre II sur la théorie du gradient de déformation non locale, qui contient à la fois un paramètre à l'échelle non locale et à l'échelle de longueur pour une description plus précise des effets de taille, est utilisée pour examiner le comportement de propagation des ondes des nano-plaques FG en fonction de la taille dans des environnements similaires. Les propriétés des matériaux des nanoplaques varient progressivement à travers l'épaisseur via le schéma de Mori-Tanaka et sont considérées comme fonctions de la température. Les équations gouvernantes de FG nano-plate modélisé par une théorie raffinée de cinq inconnus sont dérivées en utilisant le principe de Hamilton. Une solution analytique est appliquée pour trouver la fréquence d'onde et les vitesses de phase de la nano-plaque FG. Les influences de différents paramètres tels que l'élévation de la température, l'absence de localité, le paramètre de l'échelle de longueur et la composition du matériau sur les caractéristiques des ondes de la nano-plaque FG dépendante de la température sont étudiées dans le second chapitre.

Généralités sur les matériaux Fonctionnellement gradués



Chapitre I

I.1 Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont de nouveaux matériaux conçus pour obtenir une performance fonctionnelle avec des propriétés progressivement variables dans la direction de l'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé, conférant un avantage considérable par rapport aux matériaux homogènes. Les FGMs sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie : aéronautique, aérospatiale, réacteurs nucléaire, semi-conducteurs, les constructions navales et en génie civil et trouvent également leurs applications dans le domaine de la biomédicale [33].

Les FGM sont une nouvelle classe des matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continument avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent.

I.2 Concept des matériaux fonctionnellement gradués

Les matériaux à gradient de propriété sont généralement faits à partir d'un mélange de métaux et de céramique (Figure I.1). La plupart des chercheurs emploient trois fonctions pour d'écrire la variation de la fraction volumique qui sont :

- La fonction de puissance (P-FGM)
- La fonction de sigmoïde (S-FGM)
- La fonction de puissance exponentielle (E-FGM)

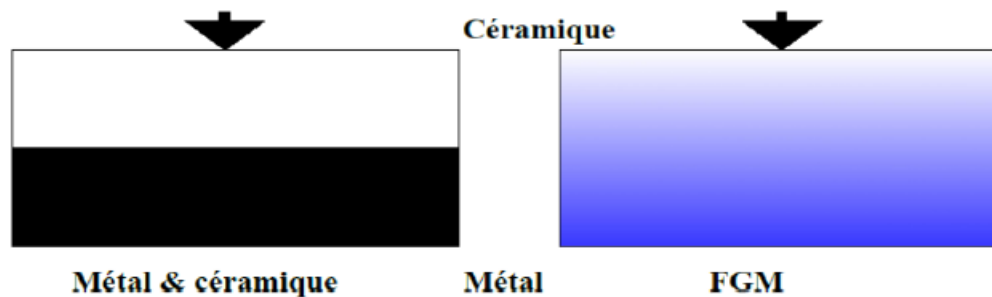


Figure I. 1. Matériaux FGM en céramique et métal [34].

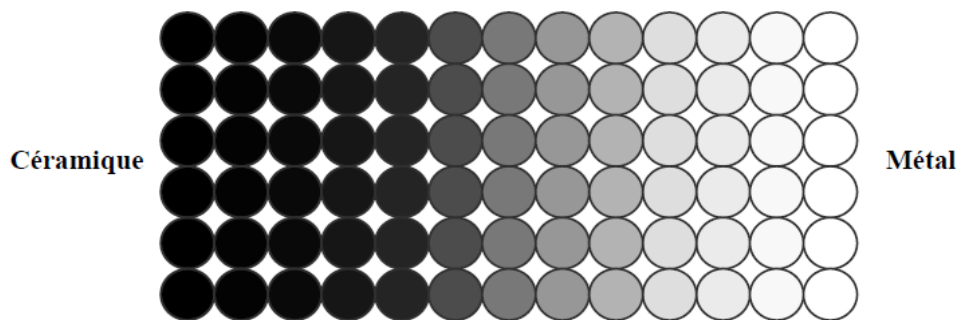
Dans la catégorie des matériaux composites, il y a les matériaux fonctionnellement gradués, ce concept a vu le jour dans les années 80 au Japon par un groupe de chercheurs au laboratoire

national d'aérospatiale. Généralement les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites macroscopiquement hétérogènes.

Tableau I.1. Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal [35].

La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none"> - Bonne résistance thermique. - Bonne résistance à l'oxydation - Faible conductivité thermique
« Couches intermédiaires »	Céramique-métal	<ul style="list-style-type: none"> - Elimination des problèmes de l'interface. - Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	<ul style="list-style-type: none"> - Bonne résistance mécanique. - Conductivité thermique élevée - Très bonne ténacité.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau «FGM» est illustré dans la figure I.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des «FGM». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente.



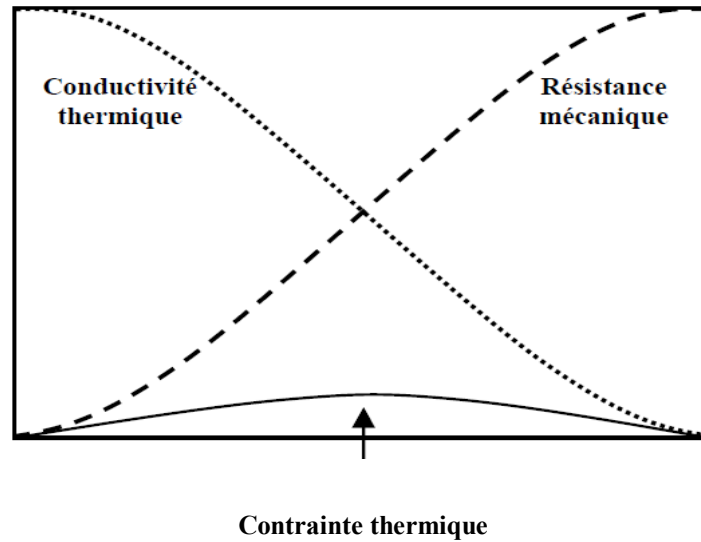


Figure I. 2. Concept des matériaux à gradient [36].

I.3 Application des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)

On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations, le matériau FGM peut être utilisé dans plusieurs domaines (Figure I. 3).

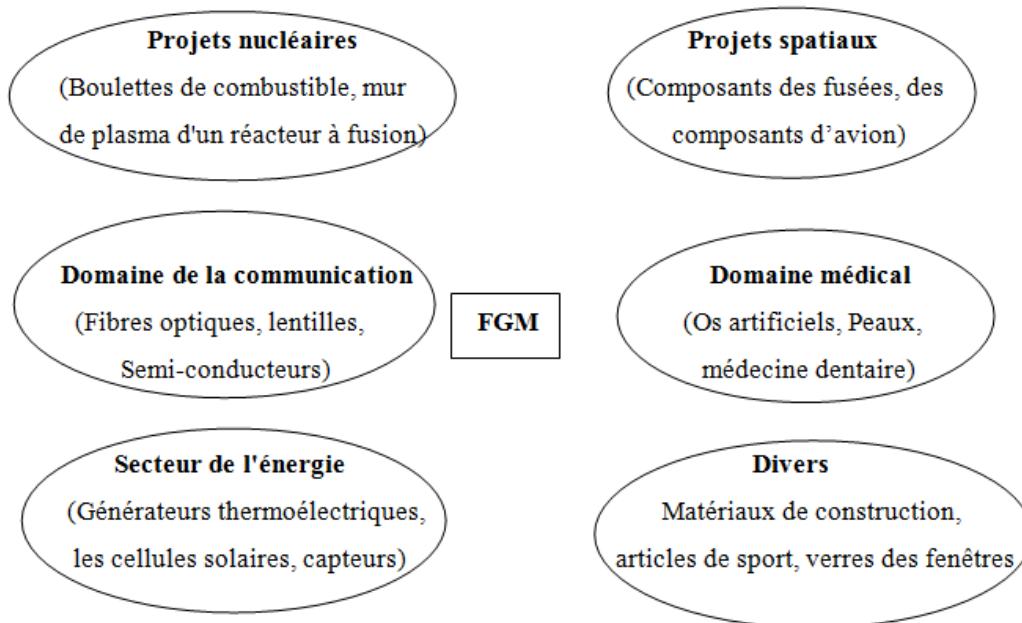


Figure I. 3. Les champs potentiels de l'application des FGMs.

I.4 Comparaison entre FGM et les matériaux composites traditionnels

Un matériau composite est constitué de deux ou plusieurs matériaux de types différents, dont la performance de combinaison est meilleure que ces composants pris séparément de telles manières à avoir un matériau qui a des propriétés convoitées tels que la rigidité, la résistance mécanique, la résistance à la corrosion, la résistance à l'usure.

Les matériaux à gradient de propriété sont des matériaux intelligents qui font partie des matériaux composites, dont leurs variations des propriétés sont continuées d'une surface à une autre. Cette variation progressive continue des fractions volumiques de chaque constituant induit des changements et élimine les discontinuités aux interfaces, tandis que les propriétés des matériaux sont conservées. Ces matériaux sont usuellement fabriqués à partir de composants d'isotropie tels que des céramiques et des métaux, les céramiques présentent une résistance à la chaleur et à la corrosion contrairement au métal qui procure la ténacité et la résistance.

I.5 Les avantages et inconvénients des matériaux à gradient fonctionnel

Les matériaux fonctionnellement gradués exhibent des avantages et des inconvénients :

I.5.1 Avantage des matériaux fonctionnellement gradués

L'usage des matériaux fonctionnellement gradués ne cesse de croître dans différents domaines. En effet, ces matériaux présentent de nombreux avantages [37] :

- Une très bonne adhérence entre différents matériaux, à titre exemple un matériau composé de céramique et métal.
- Possibilité de réaliser des structures de forme complexe réduisant ainsi les coûts d'assemblages.
- Possibilité de fabriquer des matériaux avec des propriétés particulières (coefficient de poisson négative, dilatation quasi-nulle).
- Possibilité de dimensionner les structures avec des propriétés uniquement dans les axes de chargement.
- Meilleur contrôle des contraintes qui sont déduites à l'absence d'interface nette.
- Faible sensibilité à la fatigue.
- Faible sensibilité à la corrosion.

- Une ténacité élevée à la rupture.

I.5.2 Inconvénients des matériaux fonctionnellement gradués

- L'inadéquation entre les différentes propriétés des matériaux fonctionnellement gradués cause des obstacles dans la fabrication de ce matériau, on peut conjurer la taille, la morphologie et la température etc.
- Porosité élevée et une faible adhérence entre les différents constituants sont présentées au premier lieu par la composition du FGM car il est claire que un tel mélange est déterminé par une telle température est inférieure à l'autre (la température du céramique et la température du métal) cela due à une application intolérante du matériau FG.
- Les procédés de la fabrication du matériau fonctionnellement gradué sont onéreuses car la production se fait dans des conditions atmosphériques protectrices ou à une basse pression.

La théorie de gradient de déformation non local



Chapitre II

Chapitre II

II.1. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Un matériau à gradient de propriétés est un matériau fonctionnel. La combinaison de matériaux distincts permet d'améliorer les propriétés électriques, magnétiques, mécaniques, thermiques du système global [38].

Les propriétés mécaniques sont intimement liées à la microstructure sollicitée. La nature des phases, leurs pourcentages, leurs morphologies sont des paramètres qui vont jouer sur les propriétés mécaniques. Il existe plusieurs lois de mélange qu'on peut utiliser dans la modélisation du comportement de matériaux. Nous citons à titre d'exemple : le modèle de Voigt, Reuss, Hirsch-Dougill, Les approches de Tsai-Pagano... etc

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général.

1-La loi de Voigt se réduit à :

$$E(z) = \frac{9K_e\mu_e}{3K_e + \mu_e} \quad (1a)$$

$$\nu(z) = \frac{3K_e - 2\mu_e}{6K_e + 2\mu_e} \quad (1b)$$

$$\rho(z) = \rho_c V_c + \rho_m V_m \quad (1c)$$

2- La loi des mélanges :

$$E(z) = E_c V_c + E_m V_m \quad (2a)$$

$$\nu(z) = \nu_c V_c + \nu_m V_m \quad (2b)$$

$$\rho(z) = \rho_c V_c + \rho_m V_m \quad (2c)$$

Avec :

$$V_c + V_m = 1$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

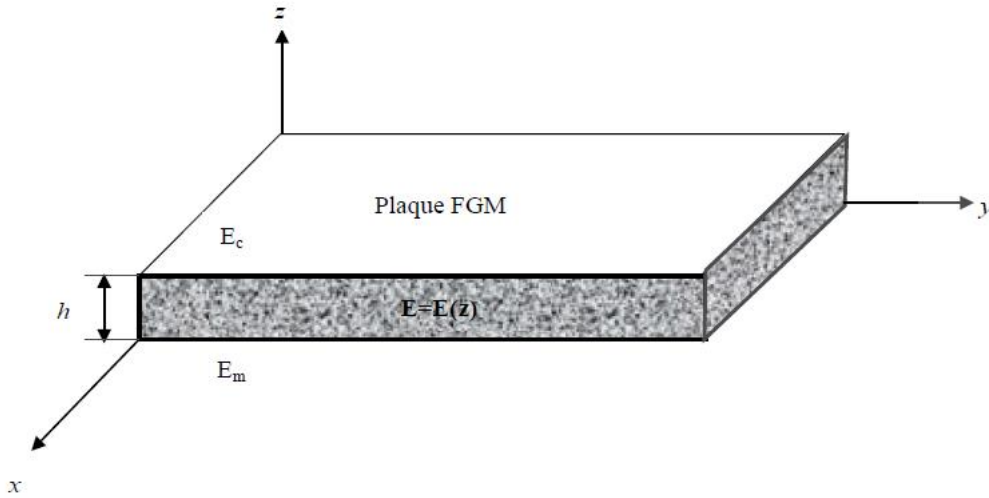


Figure II.1. Géométrie d'une plaque FGM

II.2. Les propriétés matérielles de la plaque P-FGM

Les plaques FGM fabriquées par un mélange de métal et de céramique sont considérées dans la présente étude et les matériaux pour la surface supérieure et la surface inférieure de la plaque sont respectivement la céramique et le métal. Les propriétés de la plaque varient dans le sens de l'épaisseur de la plaque avec une distribution selon la loi de puissance des fractions volumiques des matériaux métalliques et céramiques.

Les propriétés du matériau dépendant de la température peuvent être exprimées comme suit:

$$P = P_0 (P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3) \quad (3)$$

Où P_0, P_{-1}, P_1, P_2 et P_3 désignent les coefficients de la température T (K).

Le module d'élasticité E , le coefficient de dilatation thermique α , la masse volumique ρ , la conductivité thermique k et le coefficient de Poisson ν de la plaque FGM peuvent être écrits respectivement comme suit :

$$E(z, T) = E_m(T) + (E_c(T) - E_m(T))V(z) \quad (4a)$$

$$\alpha(z, T) = \alpha_m(T) + (\alpha_c(T) - \alpha_m(T))V(z) \quad (4b)$$

$$\rho(z, T) = \rho_m(T) + (\rho_c(T) - \rho_m(T))V(z) \quad (4c)$$

$$k(z, T) = k_m(T) + (k_c(T) - k_m(T))V(z) \quad (4d)$$

$$v(z, T) = v_m(T) + (v_c(T) - v_m(T))V(z) \quad (4e)$$

Dans une plaque P-FGM, la fraction volumique obéit à une loi de puissance sous la forme :

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (5)$$

Où p est le paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque et z présente la coordonnée suivant l'épaisseur. Les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM sont respectivement E_m et E_c . La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la (Figure II.2)

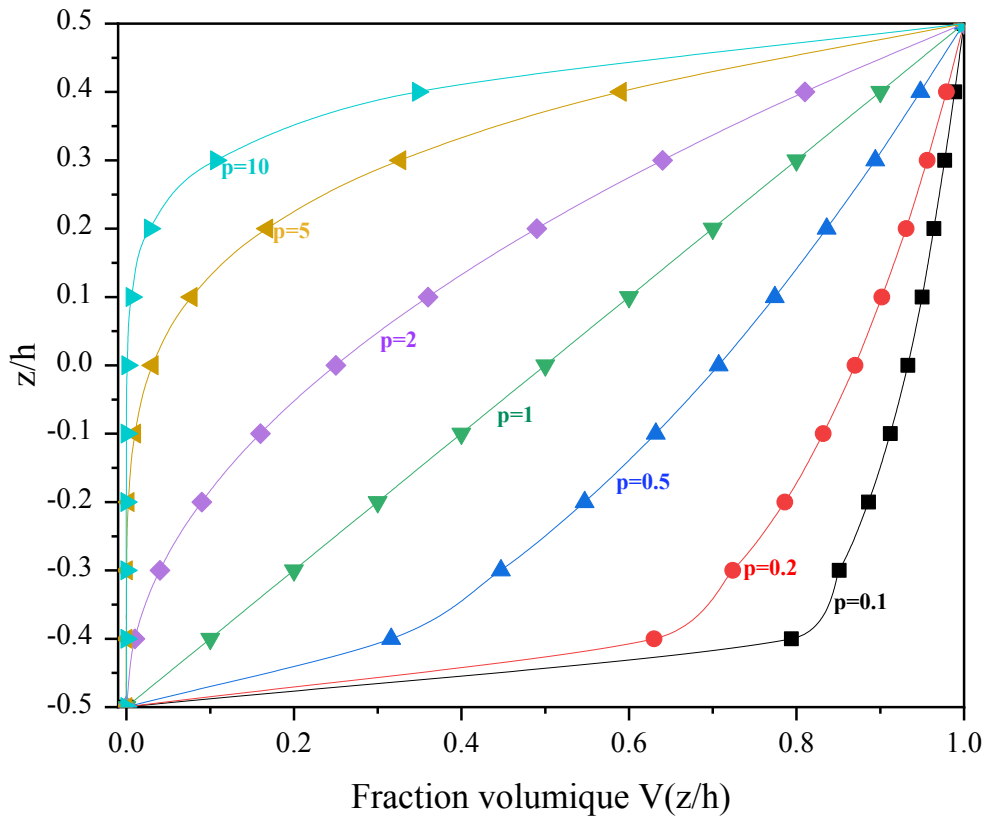


Figure II. 2. Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

On suppose que la variation de température ne se produit que dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM et la distribution du champ de température à travers l'épaisseur de la plaque peut être calculée par l'équation de conduction thermique de Fourier unidimensionnelle suivante :

$$\frac{d}{dz} \left(k(z) \frac{dT}{dz} \right) = 0, \begin{cases} T = T_c \text{ à } z = h/2 \\ T = T_m \text{ à } z = -h/2 \end{cases} \quad (6)$$

La solution de l'équation (6) peut s'écrire :

$$T(z) = T_m + (T_c - T_m) \eta(z) \quad (7)$$

Où

$$\eta(z) = \frac{\int_{-h/2}^z \frac{1}{k(z)} dz}{\int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{k(z)} dz} \quad (8)$$

II.3. Cinématique de la théorie

II.3.1. Le champ de déplacement

Le champ des déplacements sera exprimé par les équations suivantes :

$$U(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad 9a$$

$$V(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad 9b$$

$$W(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) + g(z) \phi(x, y, t) \quad 9c$$

Où u_0 , v_0 et w_0 sont les déplacements du plan moyen de la plaque et w_b , w_s sont respectivement la déflexion réalisée par flexion et la déflexion en cisaillement.

Deux fonctions de forme de déformation de cisaillement sont utilisées:

$$f(z) = -\frac{z}{4} + \frac{5z^3}{3h^2} \text{ et } g(z) = 1 - \frac{df}{dz} \quad [39] \quad 10a$$

$$f(z) = \frac{\pi h}{\pi^4 + h^4} e^{(hz/\pi)} \left(\pi^2 \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) + h^2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) - \frac{\pi h^3}{\pi^4 + h^4} \text{ et } g(z) = \frac{df}{dz} \quad [40] \quad 10b$$

II.3.2. Le champ de déformation

Les expressions des déformations linéaires obtenues à partir des équations (9a–c), en appliquant la théorie d'élasticité linéaire sont les suivantes:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy_z}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy_z}^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad 11$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy_z}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad 12a$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{Bmatrix}, \varepsilon_z^0 = \phi_z \text{ et } g'(z) = \frac{\partial g(z)}{\partial z} \quad 12b$$

II.3.3. La théorie du gradient de déformation non locale

Dans cette étude, Askes et Aifantis [41] ont présenté un modèle non classique dans lequel la non-localité et la dépendance de la taille du gradient de déformation sont considérées en utilisant la relation contrainte-déformation suivante :

$$(1 - \mu \nabla^2) \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = (1 - \eta \nabla^2) \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad 13$$

Tels que, $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les vecteurs de contraintes et de déformations, respectivement. μ est un paramètre non-local et η est un

paramètre d'échelle de longueur. Les coefficients de rigidités sont dépendantes de la déformation normale ε_z tel que :

- la déformation normale $\varepsilon_z = 0$ (2D), alors les coefficients Q_{ij} sont:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{(1-\nu^2)}, \quad 14a$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{(1-\nu^2)}, \quad 14b$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad 14c$$

- la déformation normale $\varepsilon_z \neq 0$ (quasi-3D), alors les coefficients Q_{ij} sont:

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = \frac{E(z)(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad 15a$$

$$Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad 15b$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad 15c$$

II.4. Les équations de mouvement

- Le principe de Hamilton s'écrit :

$$\int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad 16$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation; δV est la variation du travail effectué par des forces externes (appliquées); et δK c'est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation est définie par:

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \quad 17$$

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \int_V \left[\sigma_x \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} \right) + \sigma_y \left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \right) + \sigma_z (g'(z) \delta \phi) \right. \\
 &\quad \left. + \sigma_{xy} \left(\left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - 2f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} \right) + \sigma_{xz} \left(g(z) \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} \right) + \sigma_{yz} \left(g(z) \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \right) \right] dV \\
 \delta U &= \int_A \left[\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \right) - \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} \left(\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz \right) - \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} \left(\int_{-h/2}^{h/2} f(z) \sigma_x dz \right) + \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \right) - \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} \left(\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \left(\int_{-h/2}^{h/2} f(z) \sigma_y dz \right) + \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) \left(\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz \right) - 2 \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} \left(\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz \right) - 2 \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} \left(\int_{-h/2}^{h/2} f(z) \sigma_{xy} dz \right) \right] dA \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} \left(\int_{-h/2}^{h/2} g(z) \sigma_{yz} dz \right) + \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \left(\int_{-h/2}^{h/2} g(z) \sigma_{xz} dz \right) + \delta \phi \left(\int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz \right) \right] \\
 \int \delta U dt &= \iint_{T A} \left[-\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 - \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} \delta w_s - \frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v_0 - \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} \delta w_s - \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0 \right) \right. \\
 &\quad \left. - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} \delta w_b - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} \delta w_s - \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} \delta w_s - \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} \delta \phi - \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \delta w_s - \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \delta \phi + N_z \delta \phi \right] dAdt \\
 \int \delta U dt &= \iint_{T A} \left[-\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u_0 - \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \delta v_0 - \left(\frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} \right) \delta w_b \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \right) \delta w_s + \left(N_z - \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \right) \delta \phi \right] dAdt \quad 18
 \end{aligned}$$

Où A est l'aire supérieure de la coque et les moments résultants N , M , S et Q sont déterminés par :

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy), \quad N_z = \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz \quad (Q_{xz}, Q_{yz}) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz, \quad 19$$

La variation du travail effectué par des forces externes (appliquées) est définie par:

$$\delta V = \int_0^L \left[N^T \frac{\partial (w_b + w_s + \phi g(z))}{\partial x} \frac{\partial \delta (w_b + w_s + \phi g(z))}{\partial x} + N^T \frac{\partial (w_b + w_s + \phi g(z))}{\partial y} \frac{\partial \delta (w_b + w_s + \phi g(z))}{\partial y} \right] \quad 20$$

$$\int_T \delta V = \int_A \int_t N^T \left[\begin{array}{l} \left(-\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \delta w_s - g(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \delta \phi - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \delta w_s - g(z) \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \delta \phi \right) \\ -g(z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \delta w_s - g(z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \delta w_b - g^2(z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \delta \phi \\ + \left(-\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \delta w_s - g(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \delta \phi - \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \delta w_s - g(z) \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \delta \phi \right) \\ -g(z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \delta w_s - g(z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \delta w_b - g^2(z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \delta \phi \end{array} \right]$$

$$\int_T \delta V = -N^T \left[\delta w_b (\nabla^2 w_s + \nabla^2 w_b + g(z) \nabla^2 \phi) + \delta w_s (\nabla^2 w_s + \nabla^2 w_b + g(z) \nabla^2 \phi) + g(z) \delta \phi (\nabla^2 w_s + \nabla^2 w_b + g(z) \nabla^2 \phi) \right]$$

La variation de l'énergie cinétique peut être écrite sous la forme suivante :

$$\delta K = \int \left\{ \left[\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w} \right] \rho(z) dV \right\} \quad 22$$

$$\delta K = \int \rho \left[\begin{array}{l} \left(\dot{u} - z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \right) \left(\delta \dot{u} - z \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} \right) + \\ \left(\dot{v} - z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \right) \left(\delta \dot{v} - z \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right) + (\dot{w}_b + \dot{w}_s + \dot{\phi} g(z)) (\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s + \delta \dot{\phi} g(z)) \end{array} \right] dV$$

$$\begin{aligned} \int_T \delta K dt = \int_v \rho \left[\left(-\ddot{u} \delta u - z \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} \delta w_b - f(z) \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} \delta w_s + z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u} + z^2 \frac{\partial^2 \dot{w}_b}{\partial x^2} \delta w_b + z f(z) \frac{\partial^2 \dot{w}_b}{\partial x^2} \delta w_s + f(z) \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u} \right. \right. \\ \left. \left. + z f(z) \frac{\partial^2 \dot{w}_s}{\partial x^2} \delta w_b + f^2(z) \frac{\partial^2 \dot{w}_s}{\partial x^2} \delta w_s \right) + \left(\dot{v} \delta v - z \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \delta w_b - f(z) \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \delta w_s + z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v} + z^2 \frac{\partial^2 \dot{w}_b}{\partial y^2} \delta w_b \right. \right. \\ \left. \left. + z f(z) \frac{\partial^2 \dot{w}_b}{\partial y^2} \delta w_s + f(z) \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v} + z f(z) \frac{\partial^2 \dot{w}_s}{\partial y^2} \delta w_b + f^2(z) \frac{\partial^2 \dot{w}_s}{\partial y^2} \delta w_s \right) - (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s + \ddot{\phi} g(z)) \right. \\ \left. (\delta w_b + \delta w_s + g(z) \delta \phi) \right] dV \quad 23 \end{aligned}$$

Où l'exposant ($\dot{}$) présente la dérivée par rapport au temps t ; $\rho(z)$ est la masse volumique donnée par l'équation (4c); et (I_i, J_i, K_i) sont les inerties de masse exprimées par :

$$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, J_0, K_0, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f, zf, g, g^2, f^2) \rho(z) dz \quad 24$$

En employant les formules généralisées des déplacements-déformations (Eq. 12a et 12b) et les relations contraintes-déformations (Eq. 13), en intégrant par parties et en rassemblant les coefficients de δu_0 , δv_0 , δw_b , δw_s et $\delta \phi$ dans l'équation (16), les équations de mouvement ci-dessous sont obtenues:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} - N^T \nabla^2 (w_b + w_s + g(z) \phi) &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\ &\quad - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s + J_0 \ddot{\phi} \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - N^T \nabla^2 (w_b + w_s + g(z) \phi) &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \\ &\quad + J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s + J_0 \ddot{\phi} \\ \delta \phi : \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - N_z + N^T g(z) \nabla^2 (w_b + w_s + g(z) \phi) &= J_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + K_0 \ddot{\phi} \end{aligned} \quad 25$$

Les résultantes des efforts et de moments sont déterminées dans le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} (1 - \mu \nabla^2) N_x &= (1 - \eta \nabla^2) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} A_{11} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} B_{11}^b - \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} B_{11}^s + \frac{\partial v_0}{\partial y} A_{12} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} B_{12}^b - \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} B_{12}^s + \phi F_{13} \right) \\ (1 - \mu \nabla^2) N_y &= (1 - \eta \nabla^2) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} A_{12} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} B_{12}^b - \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} B_{12}^s + \frac{\partial v_0}{\partial y} A_{22} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} B_{22}^b - \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} B_{22}^s + \phi F_{23} \right) \\ (1 - \mu \nabla^2) N_z &= (1 - \eta \nabla^2) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} F_{13} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} E_{13} - \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} E_{13}^s + \frac{\partial v_0}{\partial y} F_{23} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} E_{23} - \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} E_{23}^s + \phi Z_{33} \right) \\ (1 - \mu \nabla^2) N_{xy} &= (1 - \eta \nabla^2) \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) A_{66} - 2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} B_{66}^b - 2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} B_{66}^s \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1-\mu\nabla^2)M_x^b &= (1-\eta\nabla^2) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} B_{11}^b - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} D_{11} - \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} D_{11}^s + \frac{\partial v_0}{\partial y} B_{12}^b - \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} D_{12} - \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} D_{12}^s + \phi E_{13} \right) \\
(1-\mu\nabla^2)M_x^s &= (1-\eta\nabla^2) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} B_{11}^s - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} D_{11}^s - \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} H_{11}^s + \frac{\partial v_0}{\partial y} B_{12}^s - \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} D_{12}^s - \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} H_{12}^s + \phi E_{13}^s \right) \\
(1-\mu\nabla^2)M_y^b &= (1-\eta\nabla^2) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} B_{12}^b - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} D_{12} - \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} D_{12}^s + \frac{\partial v_0}{\partial y} B_{22}^b - \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} D_{22} - \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} D_{22}^s + \phi E_{23} \right) \\
(1-\mu\nabla^2)M_y^s &= (1-\eta\nabla^2) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} B_{12}^s - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} D_{12}^s - \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} H_{12}^s + \frac{\partial v_0}{\partial y} B_{22}^s - \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} D_{22}^s - \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} H_{22}^s + \phi E_{23}^s \right)
\end{aligned}$$

$$(1-\mu\nabla^2)M_{xy}^b = (1-\eta\nabla^2) \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) B_{66}^b - 2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} D_{66} - 2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} D_{66}^s \right) \quad 26$$

$$(1-\mu\nabla^2)M_{xy}^s = (1-\eta\nabla^2) \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) B_{66}^s - 2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} D_{66}^s - 2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} H_{66}^s \right)$$

$$(1-\mu\nabla^2)Q_{xz} = (1-\eta\nabla^2) \left(\frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) A_{55}^{st}, \quad (1-\mu\nabla^2)Q_{yz} = (1-\eta\nabla^2) \left(\frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) A_{44}^{st}$$

où A_{ij} , A_{ij}^s sont les rigidités de la coques définies par :

$$(A_{ij}, A_{ij}^{st}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, g^2(z), z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad 27a$$

$$(F_{ij}, E_{ij}, E_{ij}^s, Z_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, z, f(z), g'(z)) g'(z) dz \quad 27b$$

Les équations gouvernantes de la théorie proposée peuvent être écrites en termes des déplacements (u_0 , v_0 , w_b , w_s , ϕ) comme suit :

$$\begin{aligned}
& (1 - \eta \nabla^2) \left[A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - B_{11}^b \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - B_{16}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^b + 2B_{66}^b) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} \right. \\
& \quad \left. - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} F_{13} \right] + (1 - \mu \nabla^2) \left(-I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} + J_1 \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \right) = 0 \\
& (1 - \eta \nabla^2) \left[A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) - B_{22}^b \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - (B_{12}^b + 2B_{66}^b) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} \right. \\
& \quad \left. - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} F_{23} \right] + (1 - \mu \nabla^2) \left(-I_0 \ddot{v}_0 + I_1 \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} + J_1 \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \right) = 0 \\
& (1 - \eta \nabla^2) \left[\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} B_{11}^b - \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} D_{11} - \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} D_{11}^s + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} B_{12}^b + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} E_{13} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} B_{12}^b + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} B_{22}^b - \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} D_{22} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} D_{22}^s + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} E_{23} + 2 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \right) B_{66}^b - 2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} (D_{12} + 2D_{66}) - 2 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \right] \\
& \quad + (1 - \mu \nabla^2) \left(-I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) + I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b + J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \right) = 0 \\
& \quad \quad \quad - J_0 \ddot{\phi} - N^T \nabla^2 (w_b + w_s + g(z) \phi) \tag{28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 - \eta \nabla^2) \left[\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} B_{11}^s - \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} D_{11}^s - \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} H_{11}^s + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} B_{12}^s + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} E_{13}^s + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} B_{12}^s + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} B_{22}^s - \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} D_{22}^s \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} H_{22}^s + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} E_{23}^s + 2 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \right) B_{66}^s - \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) - \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) A_{55}^{st} + \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) A_{44}^{st} \right] + (1 - \mu \nabla^2) \left[-I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) + J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b \right. \\
& \quad \left. + K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s - J_0 \ddot{\phi} - N^T \nabla^2 (w_b + w_s + g(z) \phi) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 - \eta \nabla^2) \left[\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) A_{55}^{st} + \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) A_{44}^{st} - \frac{\partial u_0}{\partial x} A_{13} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} B_{13}^b - \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} B_{13}^s + \frac{\partial v_0}{\partial y} A_{23} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} B_{23}^b \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} B_{23}^s + \phi F_{33} \right] + (1 - \mu \nabla^2) \left[-J_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - K_0 \ddot{\phi} - N^T \nabla^2 (w_b + w_s + g(z) \phi) \right] = 0
\end{aligned}$$

II.5 Procédure analytique de Navier

Pour résoudre les équations de mouvements, nous avons opté à l'utilisation de la procédure de Navier pour définir les solutions analytiques des équations différentielles (Eq. 28) pour laquelle les variables de déplacement satisfaisant les conditions aux limites peuvent être supposées sur la base de séries de Fourier comme suit :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \\ \phi \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \\ W_{bmn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ W_{smn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ \phi_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad 29$$

Où $(U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}, \phi_{mn})$ sont des paramètres inconnus à déterminer et ω est la fréquence fondamentale. Les paramètres α et β sont exprimés par :

$$\alpha = m\pi/a \text{ et } \beta = n\pi/b \quad 30$$

Après substitution de l'équation (28) dans les équations de mouvement (29), le système d'équations des valeurs propres suivant est obtenu pour le problème de vibration libre des coques FGM:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{45} \\ 0 & 0 & m_{35} & m_{45} & m_{55} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \\ \phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 31$$

Avec :

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2))(\alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}) \\ a_{12} &= -(1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2))\alpha\beta(A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= (1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2))\alpha[\alpha^2 B_{11}^b + \beta^2(B_{12}^b + 2B_{66}^b)] \\ a_{14} &= (1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2))\alpha[\alpha^2 B_{11}^s + \beta^2(B_{12}^s + 2B_{66}^s)] \\ a_{15} &= (1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2))\alpha F_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= -(1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) \alpha \beta (A_{12} + A_{66}) \\
a_{22} &= -(1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) (\alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}) \\
a_{23} &= (1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) \beta [\beta^2 B_{22}^b + \alpha^2 (B_{12}^b + 2B_{66}^b)] \\
a_{24} &= (1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) \beta [\beta^2 B_{22}^s + \alpha^2 (B_{12}^s + 2B_{66}^s)] \\
a_{25} &= (1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) \beta F_{23} \\
a_{31} &= (1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) \alpha [\alpha^2 B_{11}^b + \beta^2 (B_{12}^b + 2B_{66}^b)] \\
a_{32} &= (1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) \beta [\beta^2 B_{22}^b + \alpha^2 (B_{12}^b + 2B_{66}^b)] \\
a_{33} &= -(1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) [\alpha^4 D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 \beta^2 + \beta^4 D_{22}] + [N^T(\alpha^2 + \beta^2)(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2))] \\
a_{34} &= -(1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) [\alpha^4 D_{11}^s + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha^2 \beta^2 + \beta^4 D_{22}^s] + [N^T(\alpha^2 + \beta^2)(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2))] \\
a_{35} &= -(1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) [\alpha^2 E_{13} + \beta^2 E_{23}] + [N^T g(z)(\alpha^2 + \beta^2)(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2))] \\
a_{41} &= (1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) \alpha [\alpha^2 B_{11}^s + \beta^2 (B_{12}^s + 2B_{66}^s)] \\
a_{42} &= (1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) \beta [\beta^2 B_{22}^s + \alpha^2 (B_{12}^s + 2B_{66}^s)] \\
a_{43} &= -(1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) [\alpha^4 D_{11}^s + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha^2 \beta^2 + \beta^4 D_{22}^s] + [(N^T)(\alpha^2 + \beta^2)](1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)) \\
a_{44} &= -(1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) [\alpha^4 H_{11}^s + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\alpha^2 \beta^2 + \beta^4 H_{22}^s + (\alpha^2 + \beta^2)A_{44}^{st}] \\
&\quad + [N^T(\alpha^2 + \beta^2)(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2))] \tag{32} \\
a_{45} &= -(1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) [\alpha^2 E_{13}^s + \beta^2 E_{23}^s + (\alpha^2 + \beta^2)A_{44}^{st}] + [N^T g(z)(\alpha^2 + \beta^2)(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2))] \\
a_{51} &= (1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) \alpha F_{13} \\
a_{52} &= (1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) \beta F_{23} \\
a_{53} &= -(1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) [\alpha^2 E_{13} + \beta^2 E_{23}] + [N^T g(z)(\alpha^2 + \beta^2)(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2))] \\
a_{54} &= -(1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) [\alpha^2 E_{13}^s + \beta^2 E_{23}^s + (\alpha^2 + \beta^2)A_{44}^{st}] + [N^T g(z)(\alpha^2 + \beta^2)(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2))] \\
a_{55} &= -(1 + \eta(\alpha^2 + \beta^2)) [Z_{33} + (\alpha^2 + \beta^2)A_{44}^{st}] + [N^T g(z)(\alpha^2 + \beta^2)(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2))] \\
m_{11} &= -I_0(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)), m_{13} = \alpha I_1(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)), m_{14} = \alpha J_1(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)), \\
m_{22} &= -I_0(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)), m_{23} = \beta I_1(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)), m_{24} = \beta J_1(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)), \\
m_{31} &= \alpha I_1(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)), m_{32} = \beta I_1(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)), m_{33} = -(I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2))(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)) \\
m_{34} &= -(I_0 + J_2(\alpha^2 + \beta^2))(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)), m_{41} = \alpha J_1(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)), m_{42} = \beta J_1(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)) \\
m_{34} &= -(I_0 + J_2(\alpha^2 + \beta^2))(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)), m_{44} = -(I_0 + K_2(\alpha^2 + \beta^2))(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)) \\
m_{35} &= m_{45} = m_{53} = m_{54} = -J_0(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)), m_{55} = -K_0(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2))
\end{aligned}$$

II.6. Résultats numériques et discussions

Nous avons traité un ensemble de résultats obtenus suite à l'exécution du programme de calcul Maple, développés pour la vibration libre et la propagation des ondes de dispersion pour un FGM parfait en commençant en premier lieu par la validation et comparaison de la nouvelle théorie raffinée de déformation de cisaillement à cinq variables, en confrontant nos résultats avec ceux publiés dans la littérature. Les résultats sont représentés par des courbes de fréquences propres et vitesse de phase de la propagation des ondes pour différents types des plaques FGM. Les effets des distributions de la fraction volumique et la température sur la propagation des ondes de la plaque fonctionnellement graduée sont discutés dans ce présent mémoire. Des exemples numériques sont présentés pour vérifier l'exactitude de la théorie actuelle. Pour montrer la précision et l'efficacité des théories 2D et quasi-3D, les résultats obtenus sont comparés avec les résultats des autres théories de cisaillement existant dans la littérature.

Dans cette section, le problème des valeurs propres pour une plaque en matériau fonctionnellement gradué Si₃N₄ / SUS304 est considéré. L'épaisseur de la plaque FGM est de h . Le module de Young E , la densité ρ , le coefficient de Poisson ν et la dilatation thermique α de ces matériaux sont énumérés dans le tableau 1 [42]

Tableau II.1. Propriétés des matériaux du panneau FGM [42]

	<i>AL</i>	<i>SUS304</i>	<i>Si₃N₄</i>	<i>AL₂O₃</i>
<i>E(GPa)</i>	70	201.04	348.43	380
ν	0.3	0.3	0.3	0.3
$\rho(kg/m^3)$	2707	8166	2370	3800

Tableau II.2. Propriétés physiques et mécaniques des matériaux constituants [42]

Coefficients dépendants de la température pour *Si₃N₄* / *SUS304* :

Matériaux	Propriétés	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
<i>Si₃N₄</i>	<i>E(Pa)</i>	348.43e+9	0	-3.070e-4	2.160e-7	-8.946e-11
	$\alpha(K^{-1})$	5.8723e-6	0	9.095e-4	0	0
	$\rho(kg/m^3)$	2370	0	0	0	0
	<i>k(W/mK)</i>	13.723	0	-1.032e-3	5,466e-7	-7.876e-11
<i>SUS304</i>	ν	0.24	0	0	0	0
	<i>E(Pa)</i>	201.04e+9	0	3.079e-4	-6.534e-7	0
	$\alpha(K^{-1})$	12.330e-6	0	8.086e-4	0	0
	$\rho(kg/m^3)$	8166	0	0	0	0

$k(W / mK)$	15.379	0	-1.264e-3	2.092e-6	-7.223e-10
ν	0.3262	0	-2.002e-4	3.797e-7	0

Analyse statique

Le premier exemple présenté ici montre la réponse statique des nanoplaques FG en considérant la composition du matériau Al/Al₂O₃. Les résultats sont sur le tableau 3. Il est à noter que la longueur de la nanoplaque étudiée est supposée $a = 10\text{nm}$. Cependant, avant de présenter les résultats de l'analyse de fréquences des nanoplaques anisotropes FG, la validité et la précision du présent modèle sont vérifiées pour un matériau isotrope. Par conséquent, nous ignorons la non-localité et la dépendance de la taille du gradient de déformation. La contrainte axiale adimensionnelle et la flèche maximale d'une plaque FG simplement appuyée en matériaux isotropes (Al/Al₂O₃) soumis à une charge bi-sinusoidale sont calculées pour différentes valeurs d'indices de loi de puissance (p) et de rapport longueur/épaisseur (a/h). Ils sont ensuite comparés à ceux rapportés par d'autres théories des plaques 2D et quasi-3D disponibles dans la littérature [39] en utilisant la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT). Le tableau 3 montre un excellent accord confirmant l'exactitude de la méthodologie suivie dans ce mémoire.

Tableau II.3. Comparaison de la contrainte axiale sans dimension et de la déflexion de la plaque carrée Al/Al₂O₃ simplement supportée sous charge mécanique transversale bi-sinusoidale.

p	Méthode	ε_x	$\bar{\sigma}_x (h/3)$			$\bar{w} (0)$		
			a/h=4	a/h=10	a/h=100	a/h=4	a/h=10	a/h=100
0	[39] (2D)	=0	0.5151	1.3124	13.161	0.3786	0.2961	0.2803
	[39] (Quasi-3D)	≠0	0.5278	1.3176	13.161	0.3665	0.2942	0.2803
	Présent 2D	=0	0.5149	1.3124	13.1713	0.3786	0.2961	0.2804
	Présent 3D	≠0	0.5131	1.3117	13.1712	0.3824	0.2967	0.2804
0.5	[39] (2D)	=0	0.5736	1.4629	14.672	0.5699	0.4579	0.4365
	[39] (Quasi-3D)	≠0	0.5860	1.4680	14.673	0.5493	0.4548	0.4365
	Présent 2D	=0	0.5716	1.4588	14.6446	0.5655	0.4537	0.4326
	Présent 3D	≠0	0.5583	1.4294	14.3567	0.5650	0.4490	0.4270
1	[39] (2D)	=0	0.5806	1.4874	14.944	0.7308	0.5913	0.5648
	[39] (Quasi-3D)	≠0	0.5911	1.4917	14.945	0.7020	0.5868	0.5647
	Présent 2D	=0	0.5812	1.4898	14.9676	0.7284	0.5890	0.5625

4	Présent 3D	$\neq 0$	0.5618	1.4467	14.5468	0.7184	0.5736	0.5462
	[39] (2D)	$= 0$	0.4338	1.1592	11.737	1.1552	0.8770	0.8241
	[39] (Quasi-3D)	$\neq 0$	0.4330	1.1588	11.737	1.1108	0.8700	0.8240
10	Présent 2D	$= 0$	0.4449	1.1794	11.9209	1.1599	0.8815	0.8287
	Présent 3D	$\neq 0$	0.4164	1.1235	11.3919	1.1348	0.8478	0.7934
	[39] (2D)	$= 0$	0.3112	0.8468	8.6011	1.3760	0.9952	0.9228
	[39] (Quasi-3D)	$\neq 0$	0.3097	0.8462	8.6010	1.3334	0.9888	0.9227
	Présent 2D	$= 0$	0.3259	0.8785	8.9060	1.3908	1.0087	0.9362
	Présent 3D	$\neq 0$	0.3060	0.8440	8.5899	1.3823	0.9887	0.9141

En outre, le tableau 4 donne les résultats de la fréquence adimensionnelle pour une plaque carrée simplement supportée pour différentes valeurs de paramètre non local, l'épaisseur de la plaque et le rapport d'aspect de la plaque. Les résultats numériques de la présente formulation s'avèrent être en très bon accord avec les solutions existantes. Il est à signaler que les fréquences obtenues par la théorie non locale prédit des valeurs de fréquence naturelle plus grandes que les théories autres l'élasticité non locale. Il est clair qu'une nette stabilité est remarquée en fonction de l'accroissement du paramètre μ .

Tableau II.4. Comparaison de la fréquence fondamentale $\omega h \sqrt{\frac{\rho}{G}}$ pour une nanoplaque. (Si₃N₄/SUS304).

a/b	a/h	μ	[43]	[44]	[45] (2D)	[45] (Quasi-3D)	Présent (2D)	Présent (Quasi-3D)
1	10	0	0.0930	0.0929	0.0930	0.0920	0.0930	0.0932
		1	0.0850	0.0849	0.0850	0.0841	0.0850	0.0851
		2	0.0788	-	0.0788	0.0797	0.0788	0.0789
		3	0.0737	-	0.0737	0.0729	0.0737	0.0738
		4	0.0696	-	0.0695	0.0688	0.0695	0.0696
	5	0.0660	0.0659	-	-	0.0660	0.0661	
	20	0	0.0239	0.0239	0.0239	0.0239	0.0239	0.0239
		1	0.0218	0.0219	0.0218	0.0218	0.0218	0.0218
		2	0.0202	-	0.0202	0.0202	0.0202	0.0202
		3	0.0189	-	0.0189	0.0189	0.0189	0.0189
4		0.0178	-	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178	
		5	0.0169	0.0170	-	-	0.0169	0.0169
2	10	0	0.0589	0.0590	-	-	0.05888	0.05893
		1	0.0556	0.0556	-	-	0.05556	0.05560

	2	0.0527	-	-	-	0.05274	0.05278
	3	0.0503	-	-	-	0.05031	0.05035
	4	0.0482	-	-	-	0.04818	0.04822
	5	0.0463	0.0464	-	-	0.04631	0.04635
20	0	0.0150	0.0151	-	-	0.01496	0.01497
	1	0.0141	0.0141	-	-	0.01412	0.01412
	2	0.0134	-	-	-	0.01340	0.01341
	3	0.0128	-	-	-	0.01278	0.01279
	4	0.0123	-	-	-	0.01225	0.01225
	5	0.0118	0.0118	-	-	0.01177	0.01177

Effet des conditions aux limites

L'effet de différentes conditions aux limites est tabulé sur le tableau 5 pour une plaque carrée et rectangulaire simplement appuyée avec une épaisseur de plaque $a/h = 10, 20$ et un indice de gradient $p=5$. On peut voir que la condition aux limites et le paramètre non local ont une influence sur le rapport de fréquence. Plus le paramètre non local est élevé, plus l'influence est importante, quelle que soit la condition aux limites.

Tableau II.5. Effet du rapport de la plaque a/b , de l'épaisseur de la plaque a/h , du paramètre non local μ et la condition aux limites sur la fréquence naturelle d'une plaque FG avec $a=10$ et indice de gradient $p = 5$. ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$)

a/b	a/h	μ	Mode1 (1, 1)			Mode2 (1, 2)			Mode3 (1, 3)		
			[44]	Présent (2D)	Présent (Quasi-3D)	[44]	Présent (2D)	Présent (Quasi-3D)	[44]	Présent (2D)	Présent (Quasi-3D)
1	10	0	0.0441	0.0441	0.0442	0.1051	0.1049	0.1053	0.1051	0.1049	0.1053
		1	0.0403	0.0403	0.0404	0.0860	0.0858	0.0862	0.0860	0.0858	0.0862
		2	0.0373	0.0373	0.0374	0.0745	0.0744	0.0747	0.0746	0.0744	0.0747
		4	0.0330	0.0330	0.0331	0.0609	0.0608	0.0611	0.0610	0.0608	0.0611
	20	0	0.0113	0.0113	0.0113	0.0279	0.0279	0.0280	0.0279	0.0279	0.0280
		1	0.0103	0.0104	0.0104	0.0228	0.0229	0.0229	0.0228	0.0229	0.0229
		2	0.0096	0.0096	0.0096	0.0197	0.0198	0.0199	0.0198	0.0198	0.0199
		4	0.0085	0.0085	0.0085	0.0161	0.0162	0.0162	0.0162	0.0162	0.0162
2	10	0	0.1055	0.1049	0.1053	0.1615	0.1606	0.1614	0.2430	0.2448	0.2462
		1	0.0863	0.0858	0.0862	0.1208	0.1201	0.1206	0.1637	0.1620	0.1630
		2	0.0748	0.0744	0.0747	0.1006	0.1000	0.1005	0.1310	0.1296	0.1304
		4	0.0612	0.0608	0.0611	0.0793	0.0788	0.0791	0.0999	0.0989	0.0994
	20	0	0.0279	0.0279	0.0280	0.0440	0.0441	0.0442	0.0701	0.0701	0.0704
		1	0.0229	0.0229	0.0229	0.0329	0.0330	0.0331	0.0464	0.0464	0.0466
		2	0.0198	0.0198	0.0199	0.0274	0.0275	0.0275	0.0371	0.0371	0.0373
		4	0.0162	0.0162	0.0162	0.0216	0.0216	0.0217	0.0283	0.0283	0.0284

On considère une nanoplaque carrée de couple SUS304 / Si3N4 de longueur $a=10$ et de $a/h=10$, soumise à une charge uniforme q_0 pour l'analyse vibratoire. Les résultats de fréquence des nanoplaques FGM avec la théorie nonlocale sont montrés sur le tableau 6. Les résultats sont comparés à ceux rapportés par Natarajan et al. [45] pour $p=5$. Il est évident de voir que pour le premier mode, les résultats de deux théories sont presque identiques et sont en excellent accord avec ceux de Natarajan et al. [45] pour les autres $p=1,2$, et 10. Cependant, pour le deuxième mode, les résultats actuels divergent légèrement par rapport à [45]. De plus, les résultats obtenus par le présent modèle quasi-3D sont légèrement supérieurs à ceux du modèle de Natarajan et al. [45]. L'augmentation du paramètre non local μ et de l'indice de matériau p entraîne des réductions de la fréquence de la nanoplaque.

Tableau II.6. Fréquence naturelle adimensionnelle $\varpi = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{G_c}}$ d'une plaque carrée SSSS SUS304/Si3N4.*

p	Model	Mode 1				Mode 2			
		μ				μ			
		0	1	2	4	0	1	2	4
1	[45] (2D)	0.0542	0.0495	0.0459	0.0405	0.1293	0.1058	0.0917	0.0750
	[45] (Quasi-3D)	0.0538	0.0491	0.0455	0.0402	0.1259	0.1031	0.0894	0.0730
	Présent 2D	0.0547	0.0500	0.0463	0.0409	0.1305	0.1068	0.0926	0.0757
	Présent (Quasi-3D)	0.0549	0.0502	0.0465	0.0411	0.1312	0.1074	0.0931	0.0761
2	[45] (2D)	0.0485	0.0443	0.0410	0.0362	0.1154	0.0944	0.0819	0.0669
	[45] (Quasi-3D)	0.0480	0.0439	0.0406	0.0359	0.1122	0.0918	0.0796	0.0651
	Présent 2D	0.0488	0.0446	0.0413	0.0365	0.1162	0.0951	0.0825	0.0674
	Présent (Quasi-3D)	0.0490	0.0448	0.0415	0.0366	0.1168	0.0956	0.0829	0.0677
5	[45] (2D)	0.0438	0.0400	0.0371	0.0327	0.1042	0.0853	0.0739	0.0604
	[45] (Quasi-3D)	0.0433	0.0396	0.0367	0.0324	0.1010	0.0827	0.0717	0.0586
	[44]	0.0441	0.0403	0.0374	0.0330	0.1051	0.0860	0.0745	0.0609
	Présent 2D	0.0441	0.0403	0.0373	0.0330	0.1049	0.0858	0.0744	0.0608
10	Présent (Quasi-3D)	0.0442	0.0404	0.0374	0.0331	0.1053	0.0862	0.0747	0.0611
	[45] (2D)	0.0416	0.0380	0.0352	0.0311	0.0990	0.0810	0.0702	0.0574
	[45] (Quasi-3D)	0.0411	0.0375	0.0348	0.0307	0.0959	0.0785	0.0680	0.0556
	Présent 2D	0.0418	0.0382	0.0354	0.0313	0.0996	0.0815	0.0706	0.0577
10	Présent (Quasi-3D)	0.0419	0.0383	0.0355	0.0313	0.0999	0.0817	0.0708	0.0579

L'analyse de flexion-thermo-élastique de la plaque FGM est également effectuée pour valider davantage la formulation étudiée. Les paramètres géométriques et matériels de la plaque FGM parfaite sont les mêmes que ceux utilisés dans la partie étude de convergence. Le paramètre μ/M^∞ est défini par 0,001 et la température de référence $T_0=300K$. Deux types de distributions de gradient de température sont pris en considération dans cette partie. On peut observer que les

résultats des fréquences naturelles adimensionnelles de la plaque FGM et les résultats de Zhou et al. [47] la liste du tableau 7 est en bon accord.

Tableau II.7. Comparaison des résultats de la flexion de la plaque carrée FGM S-S-S-S Si₃N₄/SUS304 avec un gradient de température différent. $T_0=300K$, $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho_m h / D_m}$, $D_m = E_m h^3 / 12(1 - \nu^2)$. FSDT

T _c =300K, T _m =300K (a=b=1m, h=0.05m)						
P	$\bar{\omega}_1$			$\bar{\omega}_2$		
	[46]	[47]	Present (2D)	[46]	[47]	Present2D
0	45.258	45.246	45.237	112.009	111.697	111.652
0.5	31.244	31.229	31.143	77.152	76.931	76.861
1	27.444	27.428	27.297	67.651	67.464	67.365
2.5	23.990	23.977	23.852	59.111	58.957	58.843
5	22.381	22.372	22.294	55.229	55.085	54.990
T _c =600K, T _m =300K (a=b=1m, h=0.05m)						
P	$\bar{\omega}_1$			$\bar{\omega}_2$		
	[46]	[47]	Present2D	[46]	[47]	Present2D
0	35.780	34.565	35.395	100.822	100.745	104.0567
0.5	22.254	21.944	21.535	68.233	67.834	69.375
1	18.772	18.326	17.518	59.197	58.734	59.825
2.5	15.286	14.815	13.948	50.846	50.413	51.347
5	13.288	12.925	12.348	46.788	46.456	47.513

Effet d'échelle et de la température sur la fréquence

Dans cette section, l'analyse de propagation des ondes d'une nanoplaque FG fabriquée de Si₃N₄ et SUS304 sous charge thermique est étudiée. Les propriétés des matériaux sont supposées dépendantes de la température afin d'obtenir des réponses plus précises. La théorie du gradient de déformation non locale est appliquée pour caractériser l'effet d'échelle. Les fréquences des nanoplaques FG à indice de gradient p=5 sont comparées à celles présentées par Natarajan [44] et les résultats sont présentés dans le tableau 4.

Il est à révéler que le modèle et la solution présentés peuvent prédire avec précision les fréquences des plaques nanométriques FG. La variation de la fréquence des ondes ($f = \omega / 2\pi$) de la nanoplaque FG en fonction de la température par rapport à différents paramètres d'échelle de longueur est illustrée sur la Figure II.3 à p = 1, $\mu = 1$, $\Delta T = 500$. Il est clair qu'en augmentant la valeur du paramètre d'échelle de longueur, l'amplitude de la fréquence des ondes augmente. Cela signifie que la théorie du gradient de déformation non locale introduit un effet de durcissement de la rigidité qui est négligé dans la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen. Cette tendance à la hausse est plus évidente dans les nombres d'ondes supérieurs à $k = 5 \cdot 10^9$. De plus, lorsque $\eta = 0$, la fréquence des ondes n'a pas de variation sensible sur toute la plage du nombre d'ondes. Ainsi, l'effet du paramètre d'échelle de longueur sur la fréquence d'onde dépend de la valeur du nombre d'onde.

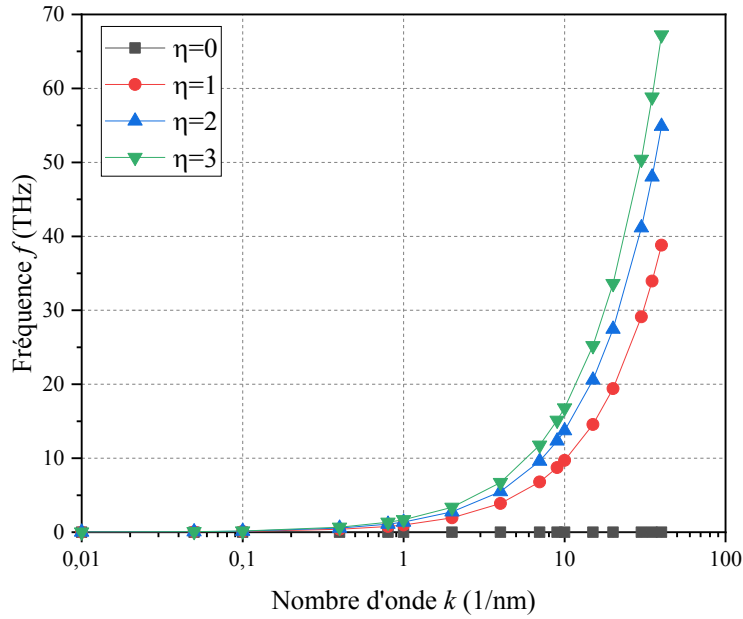


Figure II. 3. Effets du paramètre d'échelle de longueur sur la fréquence des nano plaques FG pour divers nombres d'ondes ($p = 1, \mu = 1 \text{ nm}^2, \Delta T = 500$).

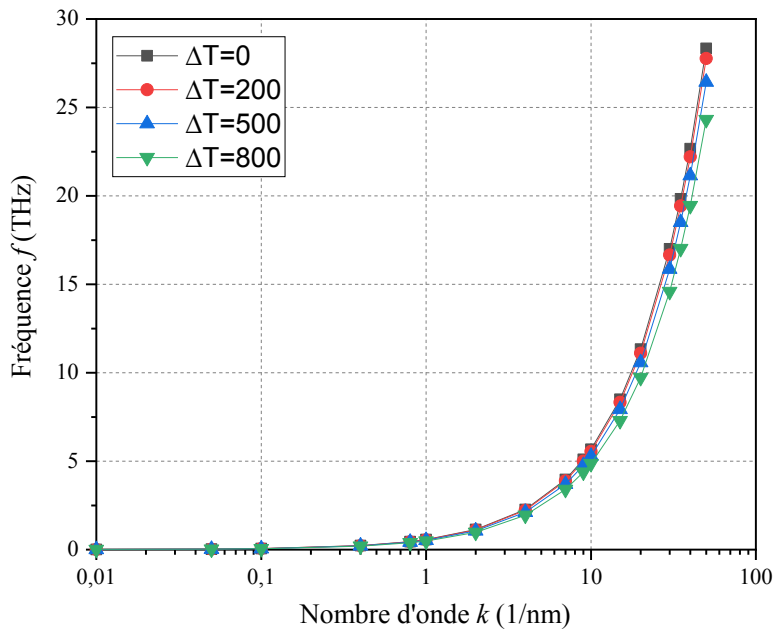
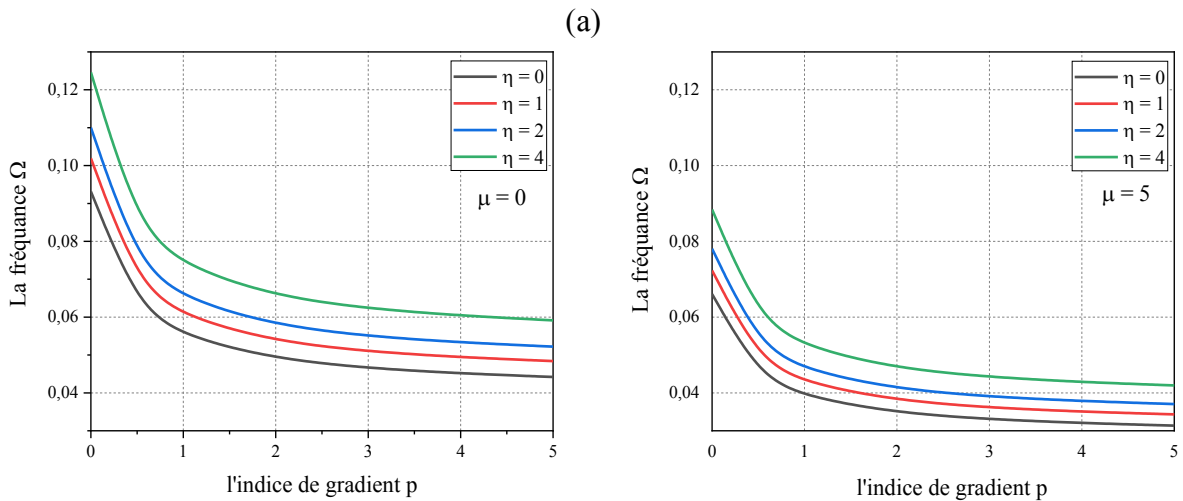
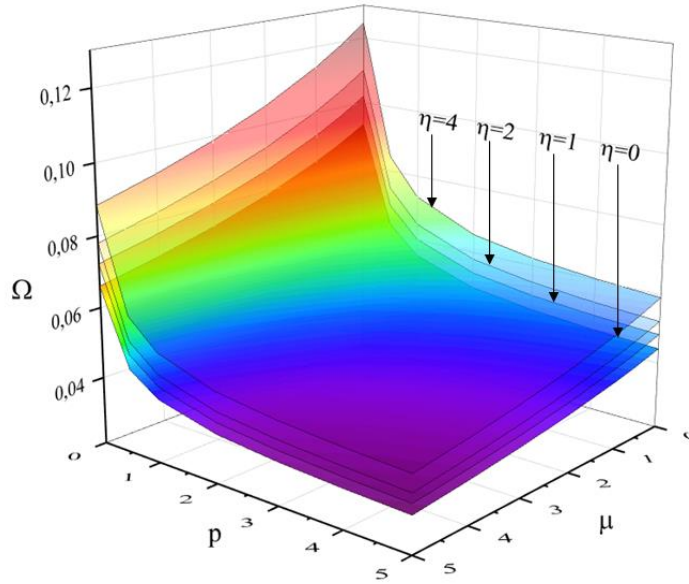
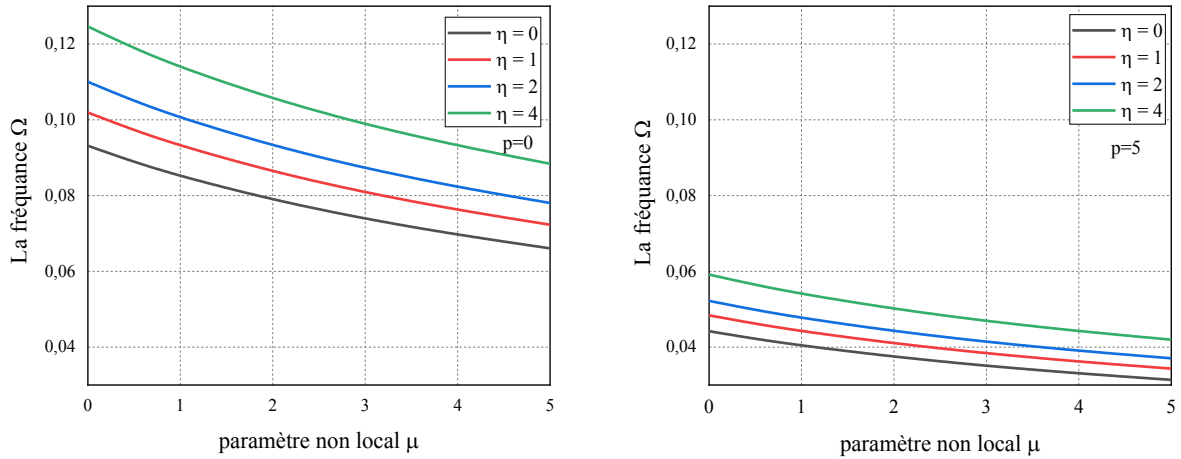


Figure II. 4. Effets des distributions de température sur la fréquence des nano plaques FG pour divers nombres d'ondes ($p = 1, \mu = 2 \text{ nm}^2, \eta = 1$).

Sur la figure II.4, on montre les variations de la fréquence d'onde ($f=\omega/2\pi$) de la nanoplaque FG en fonction de la température par rapport à plusieurs différences de température pour des paramètres $p=1$, $\mu = 2$, $\eta = 1$. IL est à signaler que, la fréquence de la nanoplaque diminue lorsque la valeur de ΔT augmente. Cette diminution n'est pas très significative. La fréquence des ondes n'est pas très sensible avec les différences de température lorsque les nombres d'ondes sont petits. Un effet significatif aura lieu pour les fréquences des ondes en fonction des nombres d'ondes plus élevés.



(b)



(c)

Figure II. 5. Les effets du paramètre d'échelle de longueur η sur la fréquence Ω des nano plaques FG pour différents paramètre non local et l'indice de gradient p avec $a/h = 10$, $a/b = 1$ et $a = 10$ nm: (a) Figure 3D, (b) pour un paramètre non local constant, μ (c) pour un indice de gradient constant, p .

De plus, l'effet du paramètre d'échelle de longueur sur la fréquence d'onde des nanoplaques FG est montré sur la Figure II.5 lorsque $\mu = 0.5 \text{ nm}^2$, $\Delta T = 500$. Il est clair que la fréquence décroît en fonction de l'accroissement du paramètre p et pour chaque valeur du paramètre d'échelle de longueur. Une nette stabilité est marquée pour $p > 2$ (Fig. II.5.b). Il existe aussi une relation directe entre la valeur de la fréquence d'onde et le paramètre d'échelle de longueur qui entraîne une augmentation de la valeur de la fréquence d'onde lorsque le paramètre d'échelle de longueur augmente pour des ΔT constant (Fig. II.5.c). La Figure II.5.a montre les variations de la fréquence en 3D.



Conclusion

Conclusion

La propagation d'une nano-plaque FG soumise à une charge thermique non linéaire est étudiée en utilisant une théorie des plaques raffinée. Les propriétés matérielles de la nano-plaque fonctionnellement classée sont supposées être classées selon la distribution de Mori-Tanaka. Les effets de petite taille sont pris en compte en utilisant la théorie non locale du gradient de déformation qui contient deux paramètres d'échelle. En appliquant le principe de Hamilton, les équations différentielles gouvernantes sont déterminées.

Enfin, l'effet de différents paramètres tels que la variation de température, l'indice de gradient, le paramètre non-local et le paramètre d'échelle de longueur sur les caractéristiques de l'onde de la nanoplaque FG en fonction de la température sont étudiés. On observe que la fréquence d'onde diminue avec l'augmentation de la température. L'effet du paramètre d'échelle de longueur possède une influence sur l'amplitude de la fréquence des ondes. En plus, lorsque le nombre d'onde est élevé la variation de température influe sur les fréquences.



Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

- [1] Eringen, A. C. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *International Journal of Engineering Science*, 10 (5), 425–435, 1972.
- [2] Eringen, A. C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of applied physics*, 54 (9), 4703–4710, 1983.
- [3] Yang, F. A. C. M., Chong, A. C. M., Lam, D. C. C., & Tong, P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 39 (10), 2731–2743, 2002.
- [4] Ebrahimi, F., & Barati, M. R. A nonlocal higher-order shear deformation beam theory for vibration analysis of size-dependent functionally graded nanobeams. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 41 (5), 1679–1690, 2016.
- [5] Fotouhi, M. M., Firouz-Abadi, R. D., & Haddadpour, H. Free vibration analysis of nanocones embedded in an elastic medium using a nonlocal continuum shell model. *International Journal of Engineering Science*, 64, 14–22, 2013.
- [6] Lei, Y., Adhikari, S., & Friswell, M. I. Vibration of nonlocal Kelvin–Voigt viscoelastic damped Timoshenko beams. *International Journal of Engineering Science*, 66, 1–13, 2013.
- [7] Naderi, A., & Saidi, A. R. Nonlocal postbuckling analysis of graphene sheets in a nonlinear polymer medium. *International Journal of Engineering Science*, 81, 49–65, 2014.
- [8] Nejad, M. Z., & Hadi, A. Eringen’s non-local elasticity theory for bending analysis of bi-directional functionally graded Euler–Bernoulli nano-beams. *International Journal of Engineering Science*, 106, 1–9, 2016.
- [9] Reddy, J. N. Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*, 45 (2), 288–307.
- [10] Reddy, J. N., & El-Borgi, S. Eringen’s nonlocal theories of beams accounting for moderate rotations. *International Journal of Engineering Science*, 82, 159–177, 2014.
- [11] Wang, Y. Z., Li, F. M., & Kishimoto, K. (2010a). Scale effects on flexural wave propagation in nanoplate embedded in elastic matrix with initial stress. *Applied Physics A*, 99 (4), 907–911.
- [12] Wang, Y. Z., Li, F. M., & Kishimoto, K. (2010b). Scale effects on the longitudinal wave propagation in nanoplates. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 42 (5), 1356–1360.
- [13] Zhang, L. L., Liu, J. X., Fang, X. Q., & Nie, G. Q. (2014a). Effects of surface piezoelectricity and nonlocal scale on wave propagation in piezoelectric nanoplates. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 46, 22–29.

- [14] Zhang, L. L., Liu, J. X., Fang, X. Q., & Nie, G. Q. (2014b). Surface effect on size-dependent wave propagation in nanoplates via nonlocal elasticity. *Philosophical Magazine*, 94 (18), 2009–2020.
- [15] Zang, J., Fang, B., Zhang, Y. W., Yang, T. Z., & Li, D. H. Longitudinal wave propagation in a piezoelectric nanoplate considering surface effects and nonlocal elasticity theory. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 63 , 147–150, 2014.
- [16] Fleck, N. A., & Hutchinson, J. W. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41 (12), 1825–1857, 1993.
- [17] Lam, D. C. C., Yang, F., Chong, A. C. M., Wang, J., & Tong, P. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51 (8), 1477–1508, 2003.
- [18] Stölken, J. S., & Evans, A. G. A microbend test method for measuring the plasticity length scale. *Acta Materialia*, 46 (14), 5109–5115, 1998.
- [19] Akgöz, B., & Civalek, Ö. Longitudinal vibration analysis of strain gradient bars made of functionally graded materials (FGM). *Composites Part B: Engineering*, 55, 263–268, 2013.
- [20] Arani, A. G, Abdollahian, M., & Kolahchi, R. Nonlinear vibration of a nanobeam elastically bonded with a piezoelectric nanobeam via strain gradient theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 100, 32–40, 2015.
- [21] Qi, L., Zhou, S., & Li, A. Size-dependent bending of an electro-elastic bilayer nanobeam due to flexoelectricity and strain gradient elastic effect. *Composite Structures*, 135, 167–175, 2016.
- [22] Lim, C. W., Zhang, G., & Reddy, J. N. A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 78, 298–313, 2015.
- [23] Farajpour, A., Yazdi, M. H., Rastgoo, A., & Mohammadi, M. A higher-order nonlocal strain gradient plate model for buckling of orthotropic nanoplates in thermal environment. *Acta Mechanica* , 1–19, 2016.
- [24] Li, L., Hu, Y., & Ling, L. Wave propagation in viscoelastic single-walled carbon nanotubes with surface effect under magnetic field based on nonlocal strain gradient theory. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 75, 118–124, 2016.
- [25] Nejad, M. Z., & Hadi, A. Eringen’s non-local elasticity theory for bending analysis of bi-directional functionally graded Euler–Bernoulli nano-beams. *International Journal of Engineering Science*, 106 , 1–9, 2016.
- [26] Kiani, K. Thermo-elasto-dynamic analysis of axially functionally graded non-uniform nanobeams with surface energy. *International Journal of Engineering Science*, 106, 57–76, 2016.

- [27] Ebrahimi, F., Salari, E. Thermal buckling and free vibration analysis of size dependent Timoshenko FG nanobeams in thermal environments. *Composite Structures*, 128, 363–380, 2015.
- [28] Ebrahimi, F., Salari, E., & Hosseini, S. A. H. Thermomechanical Vibration Behavior of FG Nanobeams Subjected to Linear and Non-Linear Temperature Distributions. *Journal of Thermal Stresses*, 38 (12), 1360–1386, 2015.
- [29] Ebrahimi, F., & Barati, M. R. (2016a). Vibration analysis of smart piezoelectrically actuated nanobeams subjected to magneto-electrical field in thermal environment. *Journal of Vibration and Control*. doi: 10.1177/1077546316646239.
- [30] Ebrahimi, F., Barati, M. R. (2016b). Buckling analysis of nonlocal third-order shear deformable functionally graded piezoelectric nanobeams embedded in elastic medium. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 1–16. doi: 10.1007/s40430-016-0551-5.
- [31] Zhang, Y. W., Chen, J., Zeng, W., Teng, Y. Y., Fang, B., & Zang, J. Surface and thermal effects of the flexural wave propagation of piezoelectric functionally graded nanobeam using nonlocal elasticity. *Computational Materials Science*, 97, 222–226, 2015.
- [32] Li, L., Hu, Y., & Ling, L. Flexural wave propagation in small-scaled functionally graded beams via a nonlocal strain gradient theory. *Composite Structures*, 133, 1079–1092, 2015.
- [33] S.Merdaci, A.tounsi, A.Bakora. A novel four variable refined plate theory for laminated composite plates, 22(4), 713-732, 2016.
- [34] I.NADJAT. Etude du comportement statique en structures en matériaux avancés FGMs en utilisant la théorie de déformation de cisaillement; thèse de doctorat; université Dr. MOULAY Tahar-Saida; 2017.
- [35] K. Kokini, Y. Takeuchi. "Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads". In Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM' 90, Sendai, Japan; 31-36, 1990.
- [36] P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain. Tape casting of Al₂₃₂ Ceram. Soc; 69 (8):191-192, O/ZrO laminated Composites, J. Am, 1986.
- [37] Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi. "Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions"; John Wiley & Sons; page 110, 4 août 2011.
- [38] H.-S. Shen, Matériaux classés fonctionnels Analyse non linéaire des plaques et des coques, CRC Press, Boca Raton, 2009.
- [39] B. Karami, M. Janghorban, T.Rabczuk. Static analysis of functionally graded anisotropic nanoplates using nonlocal strain gradient theory. *Composite Structures* 227 (2019) 111249.

- [40] Fatima Zohra Zaoui, Djamel Ouinas, Abdelouahed Tounsi, New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations. *Composites Part B* 159 (2019) 231–247.
- [41] Askes H, Aifantis EC. élasticité et dispersion des ondes flexurales dans les nanotubes de carbone. *Phys Rev B* 2009;80:195412.
- [42] Yang, J., Shen, H.S. (2002), “Vibration characteristics and transient response of shear deformable functionally graded plates in thermal environments”, *Journal of Sound and Vibration*, **255**, 579–602.
- [43] R. Aghababaei, J. Reddy, Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates *Journal of Sound and Vibration* 326 (2009) 277–289.
- [44] S. Natarajan, S. Chakraborty, M. Thangavel, S. Bordas, T. Rabczuk: Size-dependent free flexural vibration behavior of functionally graded nanoplates. *Computational Materials Science* 65 (2012) 74–80.
- [45] N.-T. Nguyen, D. Hui, J. Lee, H. Nguyen-Xuan. An efficient computational approach for size-dependent analysis of functionally graded nanoplates, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* S0045-7825(15)00239-X (2015).
- [46] Prakash T, Ganapathi M. Supersonic flutter characteristics of functionally graded flat panels including thermal effects. *Compos Struct* 2006; 72(1): 10-18.
- [47] Zhou, K., Huang, X., Tian, J., Hua, H. Vibration and Flutter Analysis of Supersonic Porous Functionally Graded Material Plates with Temperature Gradient and Resting on Elastic Foundation, *Composite Structures* S0263-8223(18)30980-2 (2018).