



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
People's Democratic Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministry of Higher Education and Scientific Research

جامعة محمد الحميد ابن باديس - مستغانم

Abdelhamid Ibn Badis University of Mostaganem

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculty of Sciences and Technology

قسم الهندسة الميكانيكية

Department of Mechanical Engineering



N° d'ordre : M...../GM/2020

# MEMOIRE DE FIN D'ETUDE MASTER ACADEMIQUE

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

## *Thème*

**CRITERES DE FATIGUE MULTIAXIALE SOUS SOLLICITATIONS  
CYCLIQUES COMPLEXES**

Présenté par :

- ❖ Abderrahmane NECHNICHE
- ❖ Amina LAZOUGHLI

*Soutenu le 30/06 / 2020 devant le jury composé de :*

Président	Pr. R.ZENASNI	Université de Mostaganem UMAB
Examineur	Dr. S.BENKAABOUCHE	Université de Mostaganem UMAB
Encadreur	Pr. H.GUECHICHI	Université de Mostaganem UMAB

**Année Universitaire : 2019 / 2020**

# Remerciements

Nous commençons par remercier le dieu le tout puissant de nous avoir donnée le courage, la volonté l'amour du savoir et surtout la patience pour pouvoir produire ce modeste travail.

Ce travail n'aurait pu aboutir sans une réelle collaboration et un échange d'idées entre tous ceux qui y ont participé ; nous tenons ici à les remercier.

Nos vifs remerciements s'adressent, en premier lieu, à **Mr H.GUECHICHI** (*Université de Mostaganem*), **Mr M. BENKHETTAB** (*Université de Mostaganem*) qui ont bien voulu nous encadrer. Ils nous ont laissé libre de choisir les directions vers lesquelles notre travail s'est orienté et la manière de l'aborder ; ils ont toujours su nous témoigner une grande confiance et ils nous ont conseillé et encouragé aux moments décisifs.

Nous exprimons toute notre reconnaissance à **Mr R.ZENASNI** pour avoir bien voulu accepter de présider le jury de ce mémoire. Que **Mr S .BENKABOUCHE** trouve ici l'expression de nos vifs remerciements pour avoir bien voulu évaluer ce travail.

Nous ne pourrions terminer ces remerciements sans y associer nos collègues et nos amis.

A toutes et à tous nous leurs disons *merci*.

# Dédicaces

*Avant tout c'est grâce à Dieu que nous sommes arrivés là.*

*Nous dédions nôtre mémoire à :*

*Nos familles qui n'ont jamais cessé de nous soutenir et qui nous ont assuré le soutien moral et financier afin de suivre nos études en toute quiétude.*

*Que Dieu leur procure bonne santé et longue vie.*

*A nos frères et sœurs*

*Pour leur soutien moral et leurs conseils précieux, tous au long de notre parcours d'études.*

*A nos proches ami(e)s : ZAHIRA, C.CHAHRAZED, B.CHAHRAZED*

*A tous nos familles et tous nos amis,*

*Pour leurs aides et supports dans les moments difficiles.*

*A nos chers Pr. GUECHICHI et Dr. BENKHETTAB ;  
pour leur présence et soutien.*

*Un remerciement particulier et sincère pour tous les efforts consentis, vous avez toujours été présent à nos cotés.*

*Sans oublier tous les professeurs que ce soit du cycle primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignant supérieur.*

*Nous dédions ce modeste travail scientifique pour la promotion de génie mécanique.*

*Nous dédions ce travail à tous ceux qui nous aiment de près ou de loin, sans exception, avec tous nos vœux de bonheur, de santé et de réussite.*



## Résumé

Il est indispensable d'ordonner de moyens de prédiction du comportement des pièces mécaniques soumises aux conditions réelles de fonctionnement. Il est établi que la grande majorité des pièces mécaniques sont sollicitées par des chargements cycliques. Cette étude a un triple objectif: déterminer le trajet de chargement, prédire la durée de vie et étudier l'influence des paramètres de chargement sur la tenue en fatigue. Comme la littérature nous dispose des courbes d'endurance de l'acier SM 45C, nous sommes intéressés particulièrement au comportement de ce matériau. Nous avons choisi le critère de Papadopoulos pour lequel nous avons mis au point, sous le code Matlab, un programme de calcul prévisionnel de durée de vie. La méthodologie mise en œuvre permet de décrire le trajet de chargement pour un ensemble de plans physiques représentatifs afin d'en extraire le plan pour lequel la cission est maximale. Les trajets de chargements obtenus par la simulation distinguent les chargements proportionnels et non proportionnels. Nous avons tracé ces trajets en variant l'état de contraintes (biaxiales, multiaxiales), la nature des contraintes (alternées et moyennes), le déphasage entre les signaux des différentes composantes du tenseur de contraintes et la périodicité des cycles. La procédure mise au point permet aussi de déterminer la durée de vie ainsi que d'étudier l'influence de chacun des paramètres de chargement appliqué sur la tenue en fatigue du matériau étudié.

**Mots clés :** Fatigue, chargement cyclique, trajet de chargement, contrainte, simulation, endurance.

## Abstract

It's essential to schedule means for predicting the behavior of mechanical parts subject to real operating conditions. It has been established that the vast majority of mechanical parts are stressed by cyclicloading. This study has three objectives: to determine the loading path, to predict the lifetime and to study the influence of the loading parameters on the fatigue resistance. As the literature provides us with the endurance curves of SM 45C steel, we are particularly interested in the behavior of this material. We have chosen the Papadopoulos criterion for which we have developed, under the Matlab code, a program for the provisional calculation of service life. The methodology implemented makes it possible to describe the loading path for a set of representative physical planes in order to extract the plane for which the cission is maximum. The loading paths obtained by the simulation distinguish proportional loads from non-proportional loads. We traced these paths by varying the state of stresses (biaxial, multiaxial), the nature of the stresses (alternating and average), the phase shift between the signals of the various components of the stress tensor and the periodicity of the cycles. The developed procedure also makes it possible to determine the life time as well as to study the influence of each of the loading parameters applied on the fatigue strength of the material studied.

**Keywords :** Fatigue, cyclicloading, loading path, stress, simulation, endurance.

## تلخيص

من الضروري جدولت الوسائل للتنبؤ بسلوك الأجزاء الميكانيكية الخاضعة لظروف التشغيل الحقيقية . وقد ثبت أن الغالبية العظمة من الأجزاء الميكانيكية تتعرض للضغط عن طريق التحميل الدوري, تحتوي هذه الدراسة على ثلاثة أهداف: تحديد مسار التحميل, تنبؤ بالعمر و دراسة تأثير معلمات التحميل على مقاومة الإجهاد. كما تبين لنا الأدبيات منحنيات التحمل للفولاذ **SM 45C** نحن مهتمون بشكل خاص بسلوك هذه المواد. لقد اخترنا معيار **Papadopoulos** وضعنا من أجله في **MATLAB** برنامج لحساب عمر الخدمة تتيح المنهجية التي تم تنفيذها وصف مسار الخطط لمجموعة من الخطط من اجل استخراج الخطة التي يكون الحد الأقصى للإرسال. مسارات تحميل التي تم الحصول عليها عن طريق محاكاة الأحمال المتناسبة والغير المتناسبة. لقد رسمنا هذه المسارات من خلال تغيير حالت الضغوط ( ثنائية المحور ومتعددة المحاور) و طبيعة الضغوط ( بالتناوب و المتوسطة) وتحول الطور بين إشارات المكونات المختلفة موتر الإجهاد وتواتر الدورات. الإجراء الذي تم تطويره يجعل من الممكن تحديد العمر وكذلك دراسة تأثير كل من معلمات التحميل المطبقة على قوة الإجهاد للمادة التي تمت دراستها

**الكلمات المفتاحية :** التعب , التحميل الدوري, مسار التحميل, القيد, المحاكاة, التحمل.

# Sommaire

Introduction générale .....	01
-----------------------------	----

## Chapitre I: Présentation bibliographique.

I-1 Notions sur les chargements cycliques .....	03
I-2 Nature du chargement .....	05
I-3 Les différents états de contrainte.....	05
I.4 Courbes de Wöhler.....	07
I.5 Limite de fatigue.....	09
I.6 Formalisme et classification des critères de fatigue multiaxiaux .....	09
I.6.1 Les critères d'approche empirique .....	11
I.6.2 Les critères d'approche globale .....	12
I.6.3 Les critères d'approche de plan critique.....	14

## Chapitre II: Application d'un critère de fatigue

II.1 Introduction .....	17
II.2. Critère Papadopoulos .....	17
II.3.Présentation du matériau étudié .....	18
II.3.1Caractéristiques du matériau étudié .....	18
II.3.2 Courbes de fatigue de l'acier SM 45C .....	19
II.4. Méthodologie adoptée .....	20
II.5. Résultats et commentaires.....	22
II.5.1Présentation du trajet de chargement.....	22
II.5.2. Calcul de durée de vie .....	33
II.5.3 Etude de l'influence des paramètres de chargement sur la tenue en fatigue.....	36
Conclusion générale.....	41
Bibliographie	

## Liste des figures

<b>Figure I.1</b> : Notion de chargement cyclique.....	03
<b>Figure I.2</b> : Exemple de chargement multiaxial d'amplitude variable.....	04
<b>Figure I.3</b> : Chargement cyclique à amplitude constante ou à amplitudes variables.....	04
<b>Figure I.4</b> : Etat de contrainte uniaxial.....	05
<b>Figure I.5</b> : Etat de contrainte multiaxial.....	06
<b>Figure I.6 et I.7</b> : Chargement proportionnel et non proportionnel.....	06
<b>Figure I.8</b> : Courbe de Wöhler et les différents domaines de fatigue.....	07
<b>Figure I.9</b> : Ensemble des critères multiaxiaux de fatigue et leur classification.....	10
<b>Figure II.1</b> : Plan $\Delta$ et le repère direct (l, r, n) associé.....	17
<b>Figure II.2.et II.3</b> : Courbe de fatigue en torsion et en flexion purement ..... alternée de l'acier SM 45C	19
<b>Figure II.4</b> : Trajets de chargement dans le cas d'un état de contraintes biaxiales ..... de même période et sans déphasage.	23
<b>Figure II.5</b> :Trajets de chargement dans le cas d'un état de contraintes biaxiales..... de même période avec déphasage	25
<b>Figure II.6</b> : Trajets de chargement dans le cas d'un état de contraintes biaxiales..... dont une période est différente et avec un déphasage	27
<b>Figure II.7</b> :Trajets de chargement dans le cas d'un état de contraintes multiaxiales..... de même période avec déphasage.	29
<b>Figure II.8</b> : Trajet de chargement dans le cas d'un état de contraintes multiaxiales..... quelconque.	31
<b>Figure II.9</b> : Organigramme de calcul de la durée de vie.....	32
<b>Figure II.10 et II.11</b> : Variation de la contrainte équivalente en fonction de la ..... contrainte et la durée de vie en fonction de la contrainte monotone.	35
<b>Figure II.12 et II.13</b> : Evolution de la contrainte équivalente de la durée de vie en..... fonction de l'amplitude de la contrainte.	37

## Liste de tableaux

<b>Tableau II.1:</b> Composition chimique de l'acier SM45C.....	17
<b>Tableau II.2:</b> Caractéristiques mécaniques de l'acier SM45C.....	18
<b>Tableau II.3:</b> Les plans critiques dans le cas de la contrainte biaxial ..... de même période sans déphasage	22
<b>Tableau II.4:</b> Les plans critiques dans le cas de la contrainte biaxial ..... de même période avec déphasage.	24
<b>Tableau II.5:</b> Les plans critique dans le cas d'un état de contrainte biaxial..... de périodes différentes.	26
<b>Tableau II.6:</b> Les plans critique dans le cas de la contrainte multiaxiale de même période...28	
<b>Tableau II.7:</b> Les plans critique dans le cas de la contrainte multiaxiale ..... de différente période.	30
<b>Tableau II.8:</b> Résultats de la durée de vie.....	33
<b>Tableau II.9:</b> Résultats de l'influence de la contrainte monotone.....	35
<b>Tableau II.10:</b> Résultats de l'influence de la pulsation.....	36
<b>Tableau II.11:</b> Résultats de l'influence de l'amplitude.....	37



# NOTATION

E	La fonction de fatigue du critère
N	Durée de vie
$f_{-1}$	Limite d'endurance à la flexion alternée symétrique
$\sigma_{-1}$	Limite d'endurance à la traction alternée symétrique
$\tau_{-1}$	Limite d'endurance à la torsion alternée symétrique
$f_0$	Limite d'endurance à flexion alternée symétrique
$\sigma_{ij}(t)$	Tenseur de chargement multiaxial
$\sigma_0$	Limite d'endurance à traction répétée
$E_{HP}$	Fonction de fatigue de critère de Hohenemser & Prager
$\tau_a$	Amplitude de la contrainte de cisaillement
$\sigma_m$	Contrainte monotone
$R_m$	Résistance maximale à la traction monotone
$E_D$	Fonction de fatigue de critère de Davies
$f_a$	Amplitude de contrainte de flexion
$\tau_m$	Contrainte moyenne de cisaillement
$\tau_u$	Contrainte ultime de cisaillement
$E_C$	Fonction de fatigue de critère de Crossland
$\varepsilon_a$	Amplitude de la racine carrée du deuxième invariant de déviateur de contrainte
a,b	Paramètre de fatigue à N cycle
$P_{max}$	Pression hydrostatique maximale
$\sigma_{eq a}$	Contrainte alternée équivalente
$E_S$	Fonction de fatigue Critère de Sines
$\varepsilon_m$	Contrainte moyenne de $\sqrt{J_2}$
$E_{FL}$	Fonction de fatigue Critère de Froustey & Lasserre
$w_a$	Energie de déformation
$w_m$	Energie de déformation moyenne
$\alpha, \beta, \gamma$	des constantes
$w_{ij}^p$	l'énergie de déformation plastique
$\sigma, \varepsilon$	contrainte et déformation
$\varepsilon_{ij}^p$	déformation plastique.
$N_f^\beta$	nombre de cycles à rupture
$E_h$	indicateur de dommage par plan
$P_h$	Pression hydrostatique
$E_{DV1}$	Fonction de fatigue Critère de Dang Van I

$E_{DVII}$	Fonction de fatigue Critère de Dang Van II
$S_{Ia}, S_{IIa}, S_{IIIa}$	les valeurs principales du tenseur déviateur alterné
$E_{MDI}$	Fonction de fatigue Critère de Mc Diarmid I
$\sigma_{hha}$	amplitude de la contrainte normale
A, B	des constantes
$E_{MDII}$	Fonction de fatigue Critère de Mc Diarmid II
$\sigma_{hm}$	contrainte normale moyenne.
$R_m$	Résistance maximale à la traction.
S-N	Stress - Number of cycles
$N_R$	le nombre de cycles à la rupture
$\sigma_a$	l'amplitude de contrainte
$\sigma_D$	Limite d'endurance
Ta	l'amplitude de la cession généralisée
$\sigma_{H,m}$	Valeur moyenne de la pression hydrostatique macroscopique
$\sigma_{H,a}$	Amplitude de la pression hydrostatique macroscopique
$\sigma_{H,max}$	pression hydrostatique maximale
$\varphi$ et $\theta$	les coordonnées sphériques
$\alpha_\infty$ et $\gamma_\infty$	paramètres liés au matériau
N	la normal
l et r	les vecteurs du repère local
M	vecteur unitaire de la droite appartenant au plan
$\sigma_y$	Limite d'élasticité
$R_m$	Résistance à la rupture
E	Module d'élasticité longitudinal
G	Module d'élasticité Transversal
$\nu$	Coefficient de Poisson
A	Allongement

# Introduction générale

La fatigue des matériaux sous entend l'endommagement qui mène parfois à la rupture. Le phénomène se compose de trois domaines: « oligocyclique » pour un faible nombre de cycles, « endurance limitée » pour lequel la rupture survient après un nombre limité de cycles et « endurance illimitée » où la structure peut supporter un nombre de cycles théoriquement infini.

Au cours de la conception d'une structure industrielle il est indispensable de vérifier sa capacité de résister aux sollicitations des chargements cyclique multiaxiaux complexes. On est souvent amené à rechercher les solutions techniques adéquates permettant d'améliorer leur tenue en fatigue et ainsi d'augmenter la durée de vie. A cet effet, les industriels recherchent un modèle de prédiction de durée de vie de leurs composants, qui est d'utilisation simple. Le modèle à adopter doit être d'une grande applicabilité pour tous les cas de chargement possibles sur les matériaux métalliques. Dans le domaine de fatigue à endurance limitée une multitude de critères sont proposés.

Le but de ce mémoire est de proposer une méthodologie de calcul prévisionnel des structures soumises à des chargements cycliques complexes. Une attention particulière a été accordée aux chargements cycliques proportionnels et non proportionnels. Dans ce sens, nous avons opté pour le critère de Papadopoulos. L'étude consiste à établir un programme de calcul, sous le code Matlab, permettant de tracer les trajets de chargement, de déterminer la durée de vie des structures et d'étudier l'influence de certains paramètres de chargement sur le comportement en fatigue.

Le mémoire est divisé en deux chapitres. Le premier chapitre est consacré une étude bibliographie sur des notions sur les chargements cycliques, nature du chargement, les différents états de contrainte, les différents critères de fatigue multiaxiale, la courbe de Wöhler avec ses domaines et la limite de fatigue. Le second chapitre est réservé au travail personnel lequel consiste à élaborer un programme de calcul, sous le code Matlab, mettant en œuvre la méthodologie proposée. Dans un premier temps, nous présentons le critère de Papadopoulos ainsi que les caractéristiques du matériau étudié, en l'occurrence l'acier SM45C. Ensuite, nous développons le modèle adopté lequel peut être scindé en trois parties :

La 1<sup>ère</sup> partie s'intéresse à la détermination des trajets de chargement.

La seconde partie se focalise sur la prévision de la durée de vie.

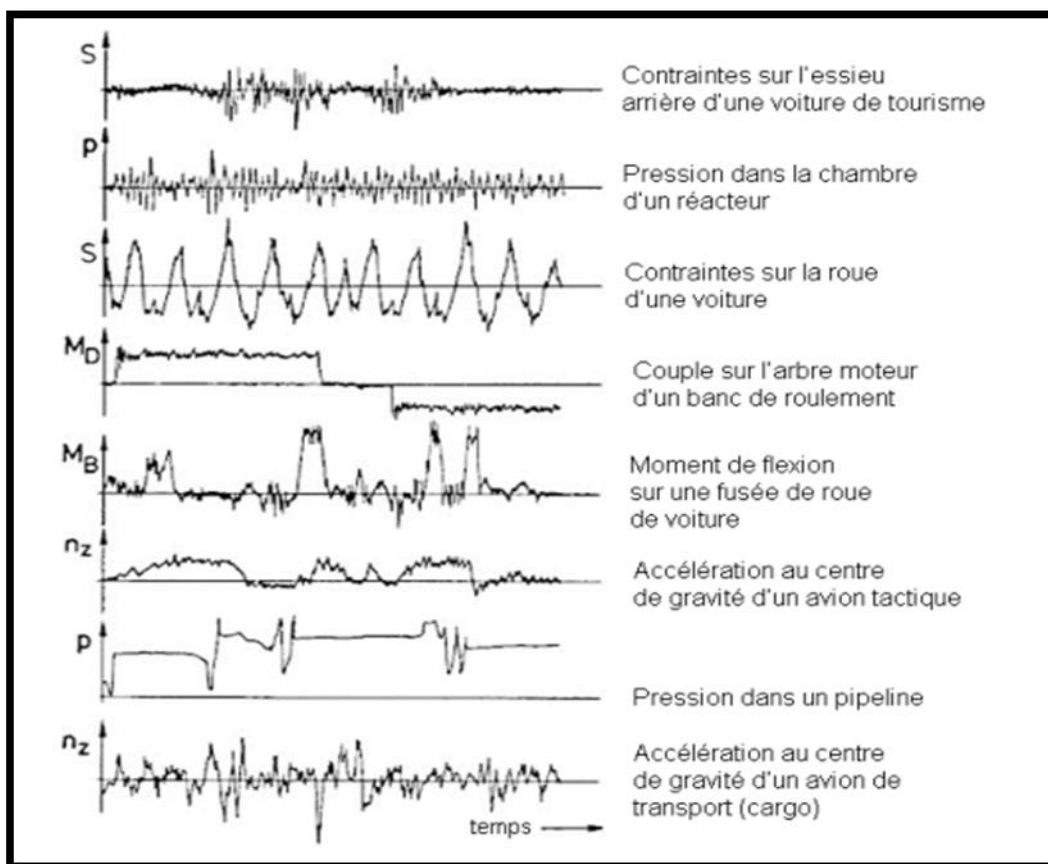
La 3<sup>ème</sup> partie étudie l'influence de plusieurs paramètres de chargement sur le comportement du matériau étudié.

Enfin, nous présentons une conclusion générale qui résume les résultats obtenus par la présente étude.

## I-1 Notions sur les chargements cycliques

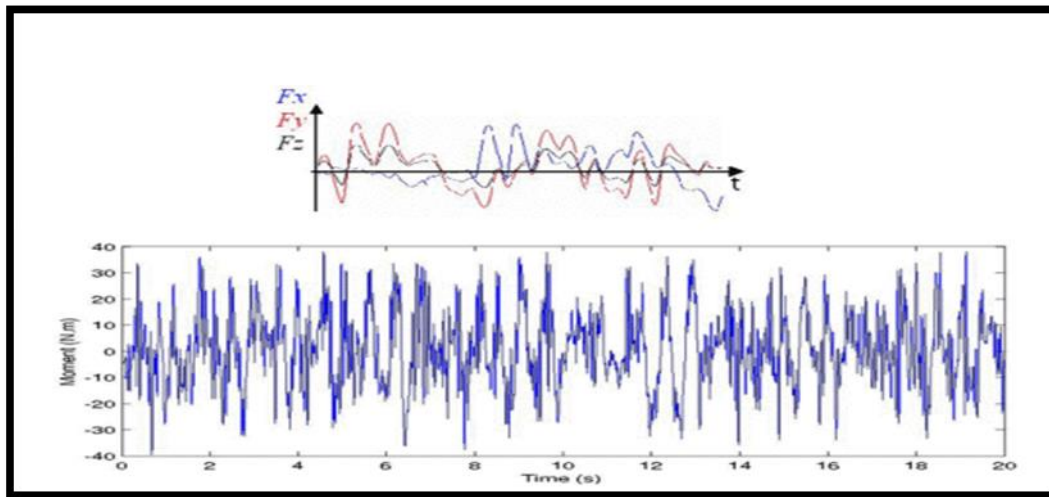
La très grande majorité des systèmes mécaniques et des structures est chargée par des efforts (forces ou résultantes, moments, déplacements) variables dans le temps. Ceux-ci créent dans les pièces des contraintes et des déformations elles-mêmes variables dans le temps de façon cyclique (et pas seulement strictement monotone comme lors d'un essai classique de traction ou compression quasi-statique). On parle alors de chargement de fatigue [1].

La figure I.1 montre quelques exemples de chargements typiques. On voit qu'ils peuvent présenter une grande variété.



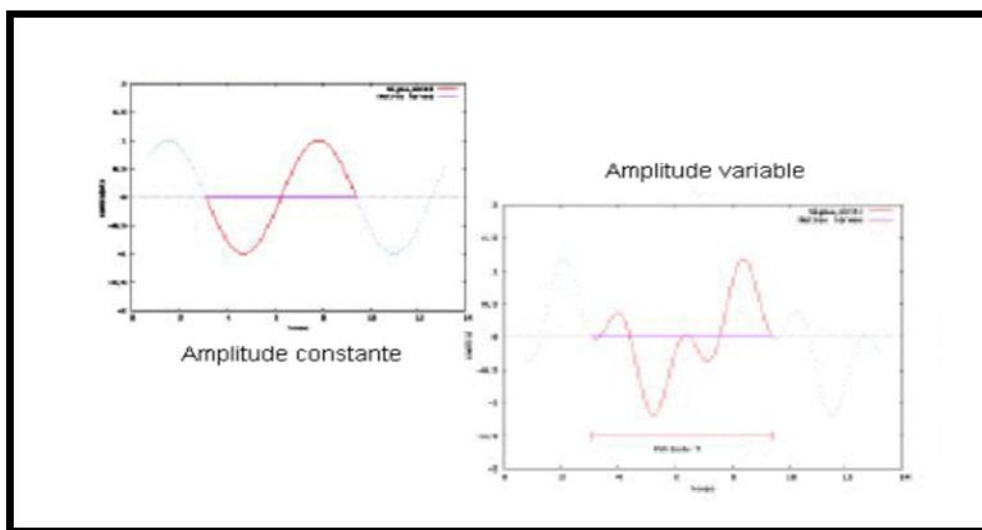
**Figure I.1** : Notion de chargement cyclique.

Si les efforts ou les moments appliqués aux pièces mécaniques le sont suivant différentes directions, on parle alors de fatigue multiaxiale. La figure I.2 montre un exemple de ce type de chargement où l'on distingue 3 composantes d'efforts et une composante de moment [1].



**Figure I.2 :** Exemple de chargement multiaxial d'amplitude variable.

Un chargement est dit d'amplitude constante quand il est simplement sinusoïdal (ou triangulaire lors d'un test en laboratoire) avec une valeur moyenne et une amplitude constantes dans le temps. Sinon, le chargement est qualifié d'amplitude variable. Le chargement de gauche de la figure I.3 montre illustre un chargement cyclique à amplitude constante; celui de droite est à d'amplitude variable [1].



**Figure I.3 :** Chargement cyclique à amplitude constante ou à amplitudes variables.

Dans le cadre de notre étude, nous nous limiterons aux chargements sinusoïdaux d'amplitude constante. Nous présentons quelques notions de base couramment utilisées en fatigue des matériaux et des structures. La connaissance des termes présentés permettra de suivre aisément la suite et une bonne compréhension de notre étude [1].

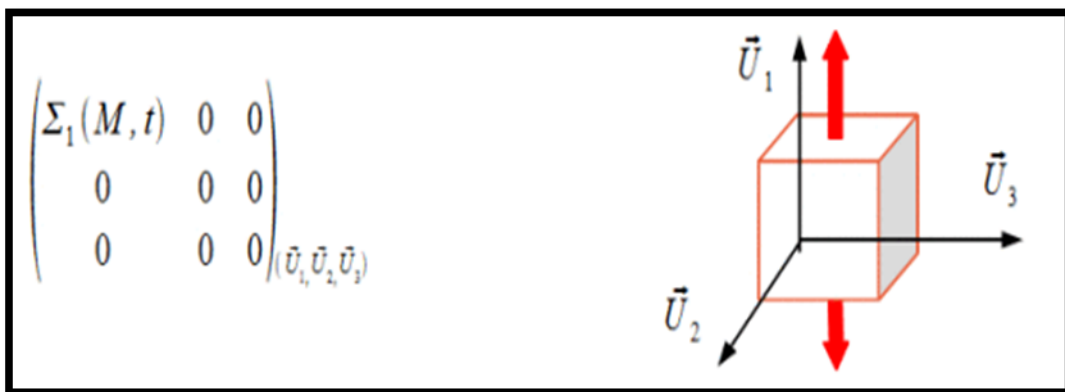
### I-2 Nature du chargement

Il ne faut pas confondre les chargements (efforts, moments, déplacement) et les contraintes. Le chargement appliqué à une structure (ou pièce) est dit multiaxial quand les forces (ou moments) appliqués sont de directions différentes (non parallèles). L'état de contraintes est dit multiaxial quand il y a au moins 2 contraintes principales non nulles. Il en résulte qu'à un chargement multiaxial, correspond forcément un état de contrainte multiaxial. Par contre, un chargement uniaxial n'entraîne pas systématiquement un état de contrainte uniaxial (rôle de la géométrie de la pièce et des concentrations de contrainte qui en résultent). En effet, l'état de contraintes est un concept global à l'échelle de toute la pièce ou de la structure étudiée [1].

### I-3 Les différents états de contrainte

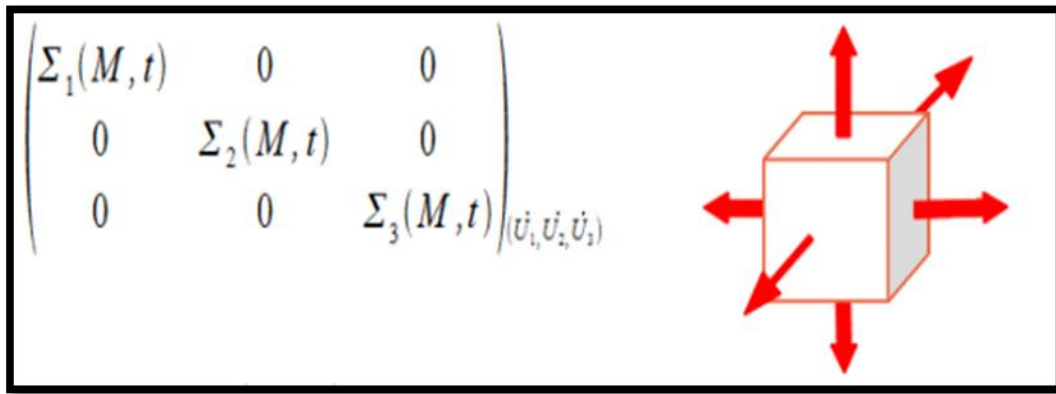
Nous supposons un élément de volume  $dv$  auquel nous rattachons une base fixe  $(\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3)$ .

Un état de contrainte est dit uniaxial si une seule contrainte principale est non nulle au cours de tout un cycle de chargement. La figure 4 illustre schématiquement un état de contrainte uniaxial appliqué sur un élément de volume  $dv$  représenté par un cube élémentaire [1].



**Figure I.4 :** Etat de contrainte uniaxial.

Un état de contrainte est dit multiaxial si le tenseur de contrainte présente au moins deux contraintes non nulles. La figure 5 illustre schématiquement un état de contrainte multiaxial appliqué sur un élément de volume  $dv$  représenté par un cube élémentaire [1].

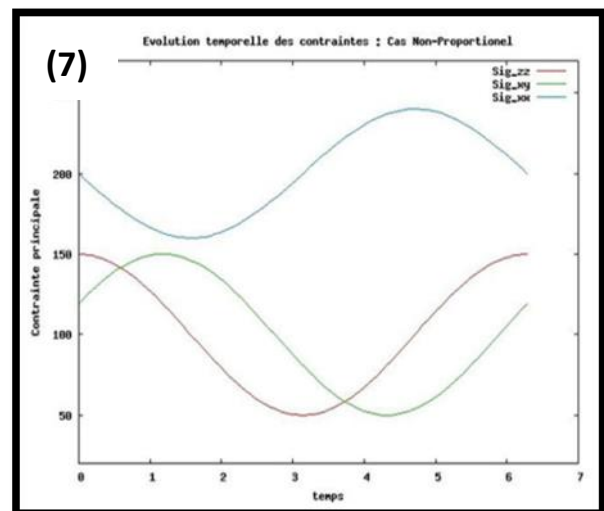
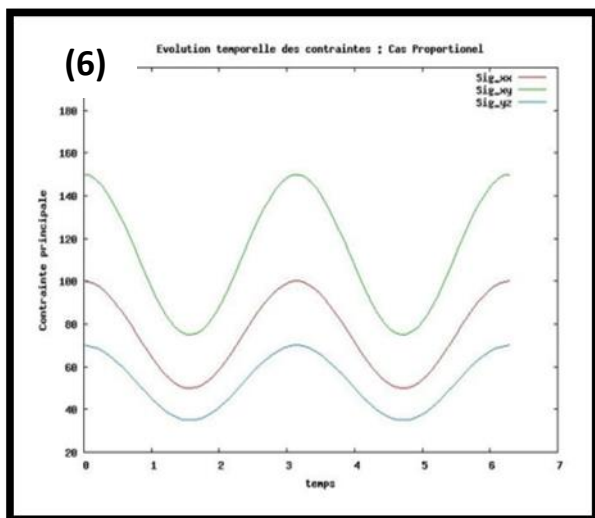


**Figure I.5 :** Etat de contrainte multiaxial.

Le trajet de chargement représente l'évolution de l'extrémité du vecteur de coordonnées  $S_1(t)$ ,  $S_2(t)$ ,  $S_3(t)$  dans le repère principal des contraintes (où  $S_i$  désigne les contraintes principales  $i=1$  à 3). Si le repère principal des contraintes est fixe par rapport à la pièce et que les contraintes principales sont proportionnelles deux à deux à chaque instant  $t$  tels que  $[S_1(t)=k S_2(t)=q S_3(t)]$  où  $k$  et  $q$  sont des constantes réelles sur la période de chargement, le trajet est dit proportionnel.

Si au moins l'une des deux conditions précédente n'est pas remplie, le trajet de chargement est dit non proportionnel [1].

Les figures 6 et 7 donnent l'exemple d'un chargement proportionnel et d'un chargement non proportionnel.



**Figure I.6 et I.7 :** Chargement proportionnel et non proportionnel

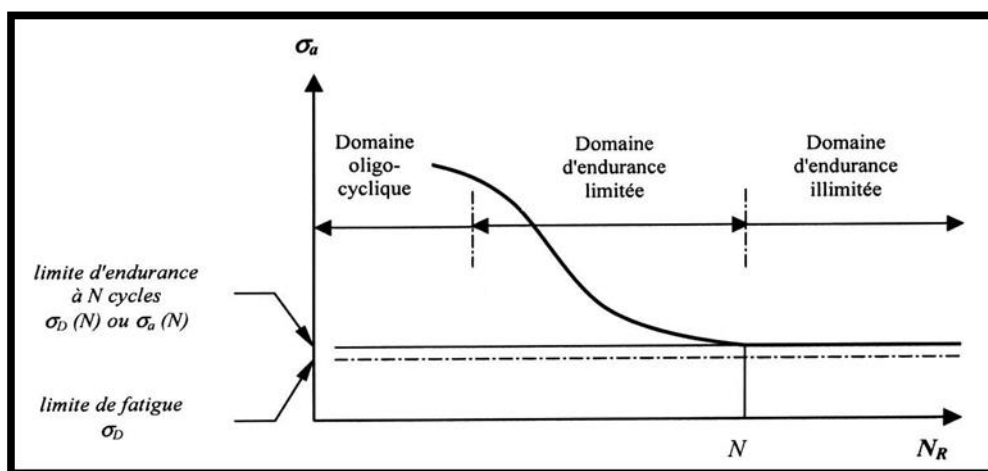


Notons que le chargement est dit proportionnel affine si le trajet décrit par l'extrémité du vecteur ayant pour coordonnées les 3 contraintes principales est un segment de droite ne passant pas par l'origine du repère principal. Si toutes les contraintes principales sont à valeur moyenne nulle alors le chargement est dit proportionnel radial. Dans le cas d'un chargement non proportionnel, la courbe décrite n'est plus une droite [1].

#### I.4 Courbes de Wöhler

La courbe de Wöhler est appelée courbe S-N (Stress - Number of cycles) dans les pays anglo-saxons. Universellement connue, la courbe de Wöhler est la plus ancienne et la seule qui permet de visualiser la tenue de la pièce ou des matériaux dans le domaine de fatigue. Elle définit une relation entre la contrainte appliquée  $\sigma$  (parfois notée S) et le nombre de cycles à la rupture  $N_R$  (en fait nombre de cycles pour lequel on observe P% de rupture). En pratique, la courbe de Wöhler est généralement donnée pour une probabilité de rupture  $p = 0.5$ .

Pour la tracer, on réalise généralement des essais simples qui consistent à soumettre chaque éprouvette à des cycles d'efforts périodiques, d'amplitude de chargement constante fluctuant autour d'une valeur moyenne fixée, et à noter le nombre de cycles au bout duquel l'amorçage d'une fissure est observée, appelé ici nombre de cycles à rupture  $N_R$ . Pour plus de commodité, ce nombre  $N_R$  est reporté en abscisse sur une échelle logarithmique, et l'amplitude de contrainte  $\sigma_a$  est reportée en ordonnée sur une échelle linéaire. Ainsi, à chaque pièce essayée, correspond donc un point du plan  $(N_R, \sigma_a)$  et à partir d'un certain nombre d'essais à contrainte généralement décroissante, on peut établir la courbe de Wöhler (Fig. I.8) [2] qui a l'allure suivante:



**Figure I.8 :** Courbe de Wöhler et les différents domaines de fatigue

Sur cette courbe, connue sous les noms de courbe de Wöhler et courbe S-N (Stress-Number of cycles), on peut distinguer trois domaines :

- **Domaine de fatigue plastique oligocyclique** : pour un faible nombre de cycles (soit par exemple, des durées de vie inférieures à  $10^5$  cycles pour un matériau donné). Il correspond à des contraintes élevées pour lesquelles se produit une déformation plastique macroscopique du matériau. On peut situer ce domaine depuis la contrainte correspondant à la limite d'adaptation macroscopique jusqu'à celle correspondant à la charge de rupture statique  $R_m$  du métal considéré, sollicité dans les mêmes conditions.
- **Domaine de fatigue ou d'endurance limitée** : où la rupture survient après un nombre limité de cycles ( $10^5$  à  $10^7$ ) sans être accompagnée d'une déformation plastique d'ensemble mesurable. La réponse de l'éprouvette peut être purement élastique (comportement élastique dès les premiers cycles) ou bien adapté (comportement devenu élastique après stabilisation cyclique). Dans ce régime, le nombre de cycles  $N_R$  croît quand l'amplitude de la contrainte périodique  $\sigma_a$  décroît. De nombreuses formules mathématiques ont été proposées pour relier  $N_R$  à  $\sigma_a$ . On peut citer à titre d'exemple celle donnée par Basquin (1910) :

$$N_R = \sigma_a^\beta = C \quad (\text{I.1})$$

- **Domaine d'endurance illimitée ou zone de sécurité** : qui correspond aux contraintes les plus petites, inférieures à une contrainte seuil, dite limite de fatigue. En deçà de cette valeur limite de  $\sigma$ , notée  $\sigma_D$ , il n'y a jamais de rupture par fatigue quel que soit le nombre de cycles appliqué. Cette limite peut ne pas exister ou être mal définie pour certains matériaux (aciers à haute résistance, métaux non ferreux). Dans ce cas, on introduit la notion de limite de fatigue conventionnelle ou limite d'endurance. Il s'agit, pour une contrainte moyenne  $\sigma_m$  donnée, de l'amplitude de contrainte pour laquelle il est constaté 50% de rupture après un nombre fini  $N$  (appelé censure) de cycles. On la note  $\sigma_D(N)$ , et selon le matériau la censure  $N$  varie entre  $10^6$  à  $10^8$  cycles. Pour les aciers  $N$  est habituellement pris à  $10^7$  cycles [2].

### I.5 Limite de fatigue

Pour une contrainte moyenne  $\sigma_m$  donnée, la limite de fatigue est la plus grande amplitude de contrainte pour laquelle il n'est pas observé de rupture après un nombre infini de cycle. Dans le cas particulier des aciers, il est expérimentalement constaté que ce nombre infini peut être ramené à  $10^7$  cycles. En revanche, pour les aciers en présence de corrosion et pour certains alliages d'aluminium, de cuivre ou de titane, cette limite de fatigue reste théorique et

sans intérêt puisque tous les mécanismes ont une durée de vie limitée par suite de l'usure, la corrosion ou d'autres causes inhérentes à leur service même; on est donc conduit à utiliser une autre grandeur appelée limite d'endurance [3].

### I.6 Formalisme et classification des critères de fatigue multiaxiaux

En fatigue à grand nombre de cycles, les critères multiaxiaux sont les outils permettant de rendre compte du caractère multiaxial des sollicitations. Au même titre qu'un critère de résistance (tel que celui de Rankine, de Tresca ou de Von Mises) permet de statuer sur le dépassement de la limite d'élasticité d'un matériau soumis à un état de contrainte multiaxial, un critère de fatigue multiaxial permet de savoir si la limite d'endurance ou plus généralement la limite de fatigue à N cycles du matériau est atteinte pour une succession d'états de contraintes définissant un cycle multiaxial. Un critère de fatigue est cependant plus complexe qu'un critère de résistance du fait du caractère variable des contraintes au cours du cycle, particularité à l'origine du phénomène de fatigue.

Le chargement le plus complexe auquel la matière peut être soumise correspond à un chargement multiaxial d'amplitude variable que l'on qualifie communément de multiaxial aléatoire, sans pour autant lui associer forcément un caractère statistique. En fatigue à grand nombre de cycles, les critères multiaxiaux sont les outils permettant de rendre compte du caractère multiaxial des sollicitations. La bibliographie recense plus de 40 critères de fatigue multiaxiale. Au début des années 50, un nombre important de ces critères développés sont basés sur une fonction scalaire.

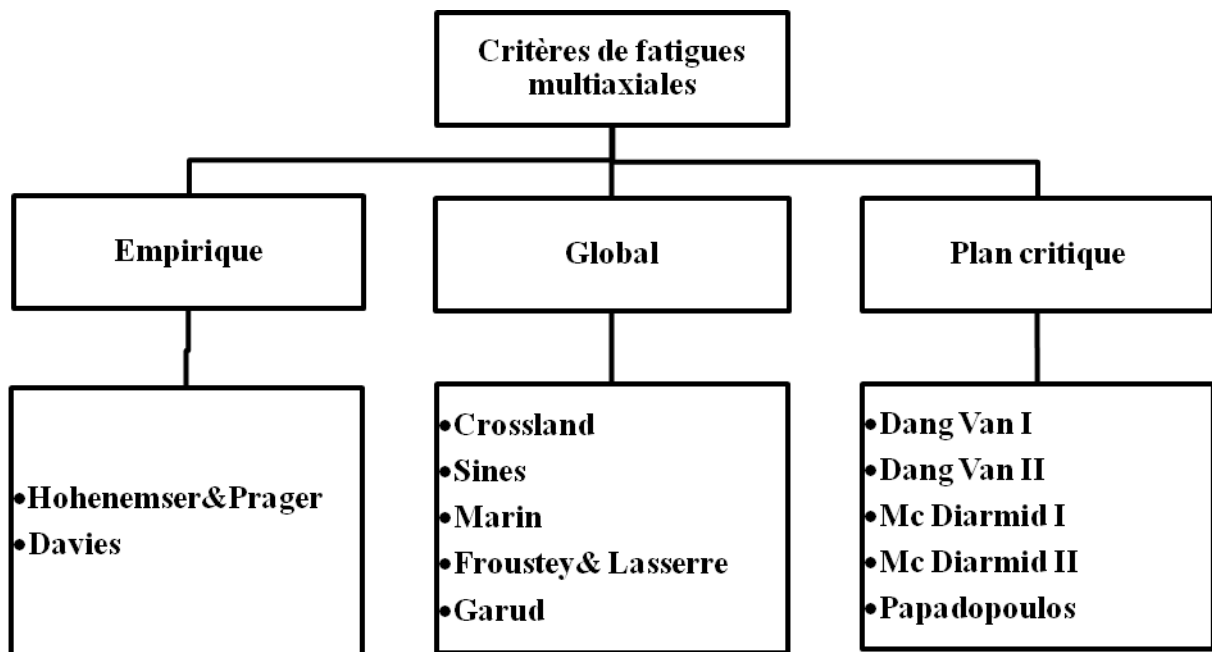
Généralement noté par **E**, cette fonction met en relation des grandeurs issues du cycle multiaxial de contraintes  $[\sigma_{ij}(t)]$  définies sur la période T (amplitudes, valeurs moyennes, valeurs maximales, parties alternées) et des limites d'endurance (ou des limites de fatigue à N cycles) suivant plusieurs modes de sollicitations simples (traction alternée symétrique  $\sigma_{-1}$ , flexion alternée symétrique  $f_{-1}$ , traction répétée  $\sigma_0$ , flexion répétée  $f_0$ , torsion alternée symétrique). La durée de vie **N** pour un état de contrainte multiaxiale est estimée lorsque la fonction de fatigue du critère **E** égale à l'unité (**E=1**) [4].

Il existe trois cas que peut prendre la fonction :

- $E < 1$  : le critère de fatigue prévoit l'amorçage d'une fissure au-delà du nombre N cycles définissant l'endurance du matériau.
- $E > 1$  : le critère prévoit au contraire l'apparition d'une fissure avant l'application de N cycles au seuil d'endurance.

- $E = 1$  : la durée de vie de matériau soumis au cycle multiaxial considère coïncide avec la durée de vie du matériau correspondant aux limites d'endurance utilisées pour calculer  $E$  [5].

Nous allons référencer le plus grand nombre de critères de fatigue multiaxiaux afin dans un premier temps d'en créer une banque de données, Les critères de fatigue peuvent se classer en trois catégorie: empirique, globaux et plan critique. La figure I.9 donne un aperçu sur l'ensemble des critères multiaxiaux de fatigue et leur classification.



**Figure I.9 :** Ensemble des critères multiaxiaux de fatigue et leur classification.

### I.6.1 Les critères d'approche empirique

Cette approche issue de résultats expérimentaux obtenus généralement par l'application des sollicitations multiaxiales (traction, torsion, flexion) pour un matériau donné, parmi ces critères on cite :

#### I.6.1.1 Le critère de Hohenemser&Prager

Le critère de Hohenemser et Prager est le premier critère recensé. Etabli en 1933, il a été obtenu à partir d'essais de traction-torsion où le cisaillement est variable et la contrainte normale de traction  $\sigma_m$  statique [6] .

$$E_{HP} = \left( \frac{\tau_a}{\tau_{-1}} \right)^2 + \frac{\sigma_m}{R_m} \quad (I.2)$$

### I.6.1.2 Le critère de Davies

L'auteur de ce critère adopte une formulation semblable à celle de Hohenemse et Prager. Il ne modélise plus l'évolution de l'amplitude du cisaillement admissible en fonction d'une contrainte normale statique  $\sigma_n$  mais l'inverse; il observe l'amplitude de la contrainte de cisaillement statique  $\tau_m$ . Il construit à partir de ses observations le modèle suivant [3] :

$$E_D = \left( \frac{f_a}{f_{-1}} \right)^2 + \frac{\tau_m}{\tau_u} \leq 1 \quad (\text{I.3})$$

### I.6.2 Les critères d'approche globale :

Cette approche réunit entre autre les critères où interviennent des invariants du tenseur des contraintes ou de son déviateur. Cette quantité représentante l'ensemble des contraintes sous un scalaire aux critères qui les mettent en œuvre un caractère global.

#### I.6.2.1 critère de Crossland:

Le critère de Crossland est défini par la limitation de la contrainte équivalente de Von Misés, exprimée par une relation linéaire entre l'amplitude de la racine carrée du second invariant de déviateur de contraintes et la pression hydrostatique maximale. Le critère s'écrit d'après l'équation suivante [5] :

$$E_C = \xi_a + aP_{\max} \leq b \quad (\text{I.4})$$

Avec

$$\xi_a = \sqrt{J_{2a}} = \sigma_{eqa} / \sqrt{3} \quad (\text{I.5})$$

$$P_{\max} = 1/3 [tr(\sigma_m) + tr(\sigma_a)] \quad (\text{I.6})$$

Et

$$b = \tau_{-1} \quad (\text{I.7})$$

$$a = \frac{\tau_{-1} - \frac{f_{-1}}{\sqrt{3}}}{\frac{f_{-1}}{3}} \quad (\text{I.8})$$

$\xi_a$  et  $P_{\max}$  Sont respectivement le second invariant de déviateur de contrainte et la pression hydrostatique maximale respectivement.

### I.6.2.2 critère de Sines

Sines a établi un critère basé sur une combinaison linéaire entre la pression hydrostatique moyenne et la racine carrée de deuxième invariant du déviateur de contrainte alternée. Sa formulation est la suivante [7] :

$$E_S = \tau_a + aP_{moy} \leq b \quad (I.9)$$

Les constantes a, b sont identifiables par des essais en torsion alternée et en flexion répétée :

Avec

$$b = \tau_{-1} \quad (I.10)$$

Et

$$a = \frac{\tau_{-1} - \frac{f_0}{\sqrt{3}}}{\frac{f_0}{3}} \quad (I.11)$$

### I.6.2.3 critère de Marin

C'est une généralisation de l'ellipse de Marin qui est une relation uniaxiale traduisant l'influence de la contrainte moyenne de traction sur la limite d'endurance en traction-compression asymétrique pour un état de contraintes multiaxiales. Marin reprend la même relation en remplaçant la contrainte de traction par la racine carrée du second invariant  $J_2$  du déviateur des contraintes à un facteur multiplicateur près, on obtient la formulation suivante [3]:

$$\left| \frac{\sqrt{3}}{f} \xi_a \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{3}}{R_m} \xi_m \right|^2 \leq 1 \quad (I.12)$$

$\xi_a$  et  $\xi_m$  sont respectivement l'amplitude et la contrainte moyenne de  $\sqrt{J_2}$ .

### I.6.2.4 Critère de Froustey & Lasserre

Le critère développé par Froustey et Lasserre est une approche énergétique ponctuelle permettant de prendre en compte le peu d'influence du déphasage en flexion et torsion combinées sur la résistance à la fatigue à grande durée de vie. Deux paramètres ont été proposés :

- la valeur moyenne sur un cycle de l'énergie potentielle de déformation élastique due au chargement alternée  $W_a$ .
- l'énergie potentielle de déformation élastique due au chargement moyen  $W_m$ .

De plus ce critère tient compte de la sensibilité du matériau au degré de triaxialité de l'état de contrainte. Le critère s'écrit [4] :

$$E_{FL} = \sqrt{\frac{C_{1a}}{\alpha} + \frac{C_{2a}}{\beta}} \leq 1 \quad (\text{I.13})$$

Avec :

$$C_{1a} = \frac{W_m}{\left(\frac{\gamma}{1-e^{-\gamma}}\right) \left[1 - \frac{1}{\gamma} \ln(1 + dT_m(e^\gamma - 1))\right]} \quad (\text{I.14})$$

$$C_{2a} = \frac{W_m}{\left(\frac{\gamma}{1-dT_a}\right) \left[1 - \frac{1}{\gamma} \ln(1 + dT_a(e^\gamma - 1))\right]} \quad (\text{I.15})$$

Les trois constantes à déterminer sont  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Elles sont obtenues à l'aide des trois limites de fatigue  $\sigma_{-1}$ ,  $\sigma_0$ ,  $\tau_{-1}$ .

### I.6.2.5 Critère de Garud

Garud propose un critère de fatigue multiaxiale dans le domaine oligocyclique. L'auteur suppose que l'énergie de déformation plastique est le paramètre d'endommagement le plus important sur l'initiation et la propagation de fissuration par chargement de fatigue. Le critère de Garud s'écrit suivant la relation (I.16) [4]

$$\Delta W_{ij}^p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \alpha N_f^\beta \quad (\text{I.16})$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes de matériau.

### I.6.3 Les critères d'approche de plan critique

Les auteurs de ces critères considèrent que l'endommagement est localisé sur un plan dit plan critique qui dépend du cycle multiaxial considéré. Le comportement en fatigue d'un matériau en un point donné de la structure est imposé par le plan matériel le plus sollicité passant par ce point [8].

#### I.6.3.1 Critère de Dang Van I

Ce critère utilise la partie alternée du cisaillement et la pression hydrostatique. La fonction de fatigue est une maximisation d'un indicateur de dommage par plan  $E_h$ , défini par :

$$E_h = \text{Max}_t \left\{ \frac{\tau_{ha}(t) + \alpha P_h(t)}{\beta} \right\} \quad (\text{I.17})$$

Avec :

$$P_h = \frac{\sigma_{11}(t) + \sigma_{22}(t) + \sigma_{33}(t)}{3} \quad (\text{I.18})$$

La fonction de fatigue du critère s'écrit alors :

$$E_{DV1} = \underset{h}{\text{Max}}(E_h) \quad (\text{I.19})$$

A la limite de fatigue du matériau, on a  $E_{DV1} = 1$ , et plus particulièrement pour les limites de fatigue en traction et en torsion alternées symétriques, servant du calage du critère, avec :

$$\alpha = 3 \left( \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{I.20})$$

Et

$$\beta = \tau_{-1} \quad (\text{I.21})$$

La condition de validité du critère est réalisée lorsque :  $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{2}$  [8].

### I.6.3.2 Critère de Dang Van II

L'objectif de cette version est d'accélérer les calculs en évitant de balayer l'ensemble des plans pour la détermination du plan critique, la fonction de fatigue devient [8] :

$$E_{DVII} = \underset{t}{\text{Max}} \left( \frac{\tau_{Pr}(t) + \alpha P_H(t)}{\beta} \right) \quad (\text{I.22})$$

Avec :

$$\tau_{Pr}(t) = \frac{1}{2} \text{Max}(|S_{Ia} - S_{IIa}|, |S_{IIa} - S_{IIIa}|, |S_{IIIa} - S_{Ia}|) \quad (\text{I.23})$$

Où  $S_{Ia}$ ,  $S_{IIa}$ ,  $S_{IIIa}$  sont les valeurs principales du tenseur déviateur alterné.

### I.6.3.3 Critère de Mc Diarmid I

Le plan critique est défini comme celui où l'amplitude de cisaillement est maximale, c'est à dire «  $\underset{h}{\text{Max}}(\tau_{ha})$  ». La fonction de fatigue du critère est donnée par :

$$E_{MDI} = \frac{\tau_{ha} + B(\sigma_{hha})^{3/2}}{A} \quad (\text{I.24})$$

A et B sont déterminées en vérifiant le critère ( $E_{MDI} = 1$ ) pour deux limites de fatigue du matériau en traction et en torsion ( $\sigma_{-1}$  et  $\tau_{-1}$ ). On obtient :

$$A = \tau_{-1} \quad (\text{I.25})$$

Et

$$B = \frac{\tau_{-1} - \frac{\sigma_{-1}}{2}}{\left( \frac{\sigma_{-1}}{2} \right)^{3/2}} \quad (\text{I.26})$$

Le critère est valide sous respect de la condition :  $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{2}$



On note que ce critère ne tient pas compte de l'influence de la contrainte moyenne [8]:

### I.6.3.4 Critère de Mc Diarmid II

L'auteur a ajouté l'influence de la valeur moyenne de la contrainte normale. La nouvelle formule s'écrit [8]:

$$E_{MDII} = \frac{\left(1 - \frac{2\sigma_{hm}}{R_m}\right) \tau_{ha} + B(\sigma_{hha})^{3/2}}{A} \quad (\text{I.27})$$

La validité du critère impose deux conditions à respecter :  $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{2}$  et  $\frac{\sigma_{hhm}}{R_m} > \frac{1}{2}$ .

### I.6.3.5 Critère de Papadopoulos de 2001

Ce critère sera détaillé au chapitre suivant.

## II.1. Introduction

La détermination du comportement des matériaux, principalement l'évaluation de la durée de vie, soumis à des sollicitations cycliques complexes nécessitent l'utilisation des critères de fatigue qui tiennent compte des trajets de chargement. Dans le cas où le chargement est complexe, il est indispensable d'employer des critères de fatigue du type plan critique. L'objectif principal de notre étude est de proposer une méthodologie de calcul consacrée aux critères de fatigue dits 'plan critique' lesquels sont nombreux. Pour ce faire, nous avons opté pour le critère de Papadopoulos lequel a été validé par les essais expérimentaux. Néanmoins, la méthodologie proposée peut être généralisée à d'autres critères de fatigue. Nous avons étudié le comportement de l'acier SM45 pour la simple raison de la disponibilité de ses des courbes de fatigue. Nous nous sommes intéressés à l'influence de différents paramètres de chargement sur la tenue en fatigue. Plus précisément nous avons quantifié l'influence du déphasage et de durée de la période.

## II.2. Critère Papadopoulos

Papadopoulos avait consacré une grande partie de ses travaux à l'étude de la fatigue polycyclique en endurance illimitée. Récemment, il a commencé à étudier le domaine de l'endurance limitée. En 2001, l'auteur proposa un critère d'endurance et établit une méthode de prévision de durée de vie qui traite les chargements multiaxiaux proportionnels et non-proportionnels d'amplitude constante.

En effet, il étend le critère d'endurance aux durées de vie finies en s'appuyant sur quelques hypothèses afin de définir par la suite une courbe de Wöhler multiaxiale exprimant la durée de vie en fonction de l'amplitude de la cession généralisée  $Ta$ , de la valeur moyenne  $\sigma_{H,m}$  et de l'amplitude  $\sigma_{H,a}$  de la pression hydrostatique.

Le critère d'endurance défini par l'auteur repose sur le concept du plan critique et peut être exprimé comme une relation d'inégalité séparant le domaine sécurisé de celui non sécurisé (Eq. II.1). Il fait intervenir deux grandeurs :  $\sigma_{H,max}$  pression hydrostatique maximale, et  $Ta$ , l'amplitude de la cession généralisée associée à un plan physique (noté  $\Delta$ ). Ce plan est défini dans le trièdre (Oxyz) par les coordonnées sphériques  $\varphi$  et  $\theta$  de son vecteur normal  $\vec{n}$  (Fig. II.1). Il en résulte que  $Ta$  est fonction de  $\varphi$  et  $\theta$ . Le plan critique est défini par l'auteur comme étant celui sur lequel  $Ta(\varphi, \theta)$  atteint sa valeur maximale, c'est-à-dire:  $\max Ta = \max_{(\varphi, \theta)} Ta(\varphi, \theta)$ . La condition d'endurance est alors donnée par l'expression suivante:

$$\max Ta + \alpha_{\infty} \sigma_{H,max} \leq \gamma_{\infty} \quad (\text{II.1})$$

Où  $\alpha_\infty$  et  $\gamma_\infty$  sont deux paramètres liés au matériau. L'indice  $\infty$  a été utilisé par Papadopoulos pour rappeler que le critère de fatigue (Eq. II.1) délimite (au moins théoriquement) le domaine de fatigue de durée de vie illimitée. Pour calculer la valeur de la l'amplitude de la cission  $T_a$ , nous devons déterminer le trajet de chargement pour chacun des plans physiques  $\Delta$ , pour en extraire la valeur maximale [2] .

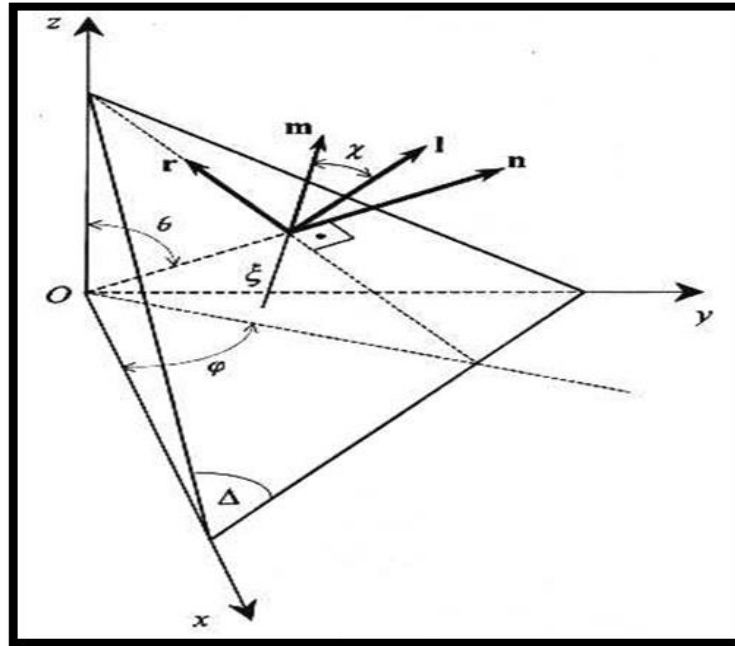


Figure II.1 : Plan  $\Delta$  et le repère direct (l, r, n) associé.

### II.3.Présentation du matériau étudié

#### II.3.1Caractéristiques du matériau étudié :

Notre étude se fait pour l'acier SM 45C qui est de type d'acier au carbone moyen avec une teneur en carbone variant de 0.42% à 0.50%. Ce matériau est l'un des aciers les plus utilisés [8]. Sa composition chimique et ses caractéristiques mécaniques sont respectivement récapitulés dans les tableaux II.1 et II.2 [7].

TableauII.1 : Composition chimique de l'acier SM45C

C	Mn	P	S	Si	Ni	Cr	Cu
0.42	0.73	0.02	0.012	0.28	0.14	0.18	0.13

**Tableau II.2** : Caractéristiques mécaniques de l'acier SM45C.

Limite d'élasticité $\sigma_y$ (MPa)	638
Résistance à la rupture $R_m$ (MPa)	824
Module d'élasticité longitudinal (Young) $E$ (MPa)	213
Module d'élasticité Transversal $G$ (MPa)	82.5
Coefficient de Poisson $\nu$	0.29
Allongement $A$ (%)	22

### II.3.2 Courbes de fatigue de l'acier SM 45C

Les propriétés en fatigue du matériau étudié ont été obtenues par Lee. L'auteur a réalisé des essais de fatigue en torsion et en flexion purement alternées. Les limites d'endurance en torsion et flexion purement alternées sont respectivement comme suit:  $t_{-1} = 311 \text{ MPa}$ ,  $f_{-1} = 442 \text{ MPa}$ .

Dans la zone à endurance limitée à grand nombre de cycles :  $N_l \leq N_i \leq N_k$ , les courbes S-N ont été modélisées par Papadopoulos, comme suit :

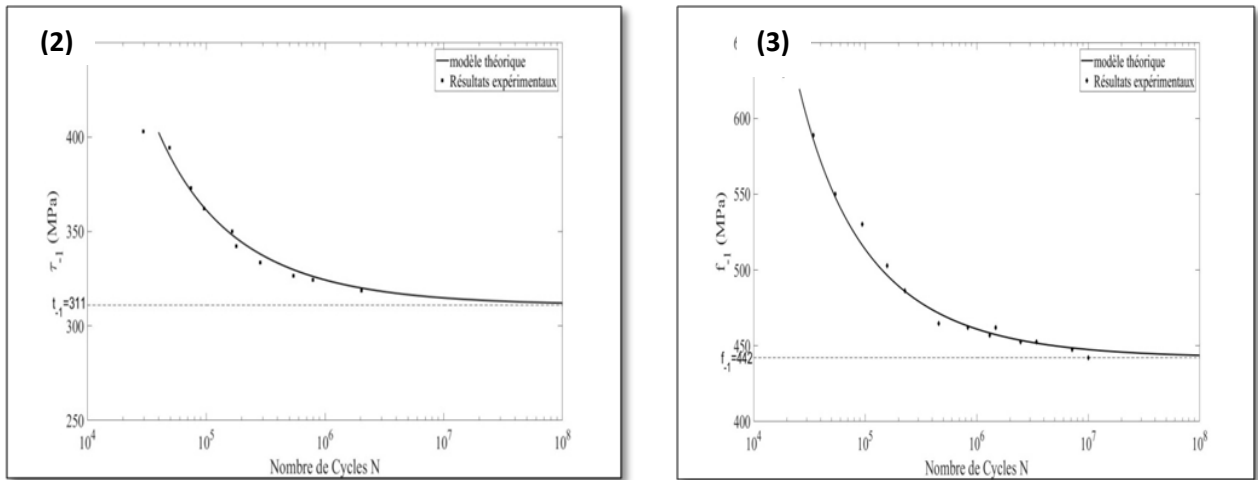
- Courbe de torsion purement alternée :

$$\tau_{-1}(N_i) = \frac{311}{1 - 62.3N_i^{-0.53}} \quad (\text{II.2})$$

- Courbe de flexion purement alternée :

$$f_{-1}(N_i) = \frac{442}{1 - 62.3N_i^{-0.53}} \quad (\text{II.3})$$

Les courbes S-N en torsion et flexion purement alternées sont montrées dans les figures II.2 et II-3. On peut remarquer que le nombre de cycles  $N_k = 10^8$  sépare les deux domaines à endurance limitée et illimitée [5].



**Figure II.2.et II.3.** Courbe de fatigue en torsion et en flexion purement alternée de l'acier SM 45C.

**II.4. Méthodologie adoptée**

Dans le but d'élaborer un programme de calcul de durée de vie, sous le code Matlab, notre travail a été composé de trois parties :

- la 1<sup>ère</sup> partie est réservée à la détermination des trajets de chargement,
- la 2<sup>ème</sup> partie est consacrée au calcul de la durée de vie du matériau,
- la 3<sup>ème</sup> partie étudie l'influence de plusieurs paramètres.

Chaque partie peut être scindée en plusieurs étapes. Notons que le temps de calcul de chaque partie est considérable et peut, parfois, atteindre jusqu'à 18 heures.

Nous allons examiner, avec détails, les différentes étapes pour chacune des parties.

**• Pour la 1<sup>ère</sup> partie :**

➤ **1<sup>ier</sup> étape :**

Consiste à connaître les limites de fatigue en torsion et flexion purement alternée symétrique ( $\tau_{-1}, f_{-1}$ ), la période et le tenseur de contrainte appliqué. A partir des données, on identifie des constantes  $\alpha_\infty$  et  $\gamma_\infty$  lesquelles sont déterminées par les équations suivantes :

$$\gamma_\infty = \tau_{-1} \tag{II.2}$$

$$\alpha_\infty = 3 \left( \frac{\tau_{-1}}{f_{-1}} - \frac{1}{2} \right) \tag{II.3}$$

➤ **2<sup>ème</sup> étape :**

Le but de cette étape est la détermination des trajets de chargement. Chaque plan  $\Delta$  est caractérisé par le vecteur normale  $\vec{n}$ . Les deux angles  $\theta$  et  $\varphi$  définissent le vecteur  $\vec{n}$  dont les composantes se calculent comme suit:

$$n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

Dans le plan  $\Delta$  on définit deux vecteurs unitaires orthogonaux  $\vec{l}$  et  $\vec{r}$  tels que:

$$l = \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta \cos \varphi \\ -\cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

On calcule, à chaque instant  $t$ , des deux composantes tangentielles  $\tau_l(t)$  et  $\tau_r(t)$  du vecteur contrainte tangentielle agissant sur le plan  $\Delta$ . Ces deux composantes sont calculées comme suit :

$$\tau_l(t) = \vec{l} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (\text{II.7})$$

$$\tau_r(t) = \vec{r} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (\text{II.8})$$

En effet  $\tau_l(t)$  et  $\tau_r(t)$  représentent respectivement les projections du vecteur contrainte tangentielle sur les vecteurs unitaires orthogonaux  $\vec{l}$  et  $\vec{r}$ .

Enfin, Le trajet de chargement consiste à déterminer et tracer, en fonction du temps, de la courbe de variation  $\bar{\tau}_l(t) = f[\bar{\tau}_r(t)]$ .

• **Pour la 2<sup>ème</sup> partie:**

➤ **1<sup>ère</sup> étape :** est identique à la première étape de la première partie.

➤ **2<sup>ème</sup> étape :**

C'est l'étape la plus longue. Elle consiste en la détermination de la durée de vie exprimée en nombre de cycles. Dans le trièdre orthonormé  $(l, r, n)$  on définit un plan  $\Delta$  (fig. II.1), il est nécessaire de calculer  $\max Ta, \sigma_{H, \max}$  et  $\sigma_{eq}$  par :

Afin d'extraire, pour chacun des plan  $(\Delta)$ , l'amplitude maximale de la cission, nous définissons dans le plan  $\Delta$  une droite de vecteur unitaire  $\vec{m}$  dont les composantes sont telles que:

$$m = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \chi - \cos \theta \cos \varphi \sin \chi \\ \cos \varphi \cos \chi - \cos \theta \sin \varphi \sin \chi \\ \sin \theta \sin \chi \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

L'angle  $\chi$  est défini comme étant l'angle entre la droite de direction  $\vec{m}$  et l'axe de direction  $\vec{l}$ . La figure II.1 montre cet angle.

Calcul de la cission  $\tau$  en fonction de  $\varphi$ ,  $\theta$  et  $\chi$  :

$$\tau = \bar{n} \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{m} \quad (\text{II.10})$$

Calcul de l'amplitude de la cission résolue : elle représente la moitié de la différence, pour un plan physique  $\Delta$  donné et pendant un cycle, entre les valeurs maximale et minimale de la cission  $\tau$ , soit :

$$\tau_a(\varphi, \theta, \chi) = \frac{1}{2} \left[ \max_{t \in p} \tau(\varphi, \theta, \chi, t) - \min_{t \in p} \tau(\varphi, \theta, \chi, t) \right] \quad (\text{II.11})$$

Calcul de  $Ta$  par l'équation suivante : elle représente une valeur moyenne de toutes les cissions résolues calculée sur l'ensemble des plans physique  $\Delta$ . La relation suivante donne cette valeur :

$$Ta(\varphi, \theta) = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{x=0}^{2\pi} \tau_a^2(\varphi, \theta, \chi) d\chi} \quad (\text{II.12})$$

Puis on calcule  $\sigma_{H, \max}$  avec :

$$\sigma_{H, \max} = \frac{\text{trace}(\bar{\sigma}_a)}{3} + \frac{\text{trace}(\bar{\sigma}_m)}{3} \quad (\text{II.13})$$

Ensuite on calcule la contrainte équivalente  $\sigma_{eq}$  par la relation suivante :

$$\sigma_{eq} = \max Ta + \alpha_{\infty} \sigma_{H, \max} \quad (\text{II.14})$$

Finalement on calcule le nombre de cycles à la rupture  $N$  par l'expression suivante :

$$N(\sigma_{eq}) = \left( \frac{\sigma_{eq} - 311}{62.3t} \right)^{-\frac{1}{0.53}} \quad (\text{II.15})$$

### • Pour la 3<sup>ème</sup> partie:

Cette partie se compose des mêmes étapes que la 2<sup>ème</sup> partie sauf que dans cette partie on fixe tous les paramètres et en varie un seul paramètre afin d'étudier son effet.

## II.5. Résultats et commentaires

### II.5.1 Présentation du trajet de chargement :

#### II.5.1.1. Chargement biaxial de même période :

➤ **1<sup>er</sup> cas** : on considère un tenseur de contrainte défini comme suit :

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{axx} \sin(\omega_{xx} t - \delta_{xx}) + \sigma_{mxx} & \tau_{axy} \sin(\omega_{xy} t - \delta_{xy}) + \tau_{mxy} & 0 \\ \tau_{axy} \sin(\omega_{xy} t - \delta_{xy}) + \tau_{mxy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

Avec :

$$\sigma_{axx} = 100 \text{ MPa}, \quad \tau_{axy} = 30 \text{ MPa}, \quad \sigma_{ayy} = \sigma_{azz} = \tau_{ayz} = \tau_{axz} = 0$$

$$\sigma_{mxx} = \sigma_{myy} = \sigma_{mzz} = \tau_{mxy} = \tau_{myz} = \tau_{mxz} = 0$$

$$\delta_{xx} = \delta_{yy} = \delta_{zz} = \delta_{xy} = \delta_{yz} = \delta_{xz} = 0$$

$$\omega_{xx} = \omega_{yy} = \omega_{zz} = \omega_{xy} = \omega_{yz} = \omega_{xz} = \frac{2\pi}{p}$$

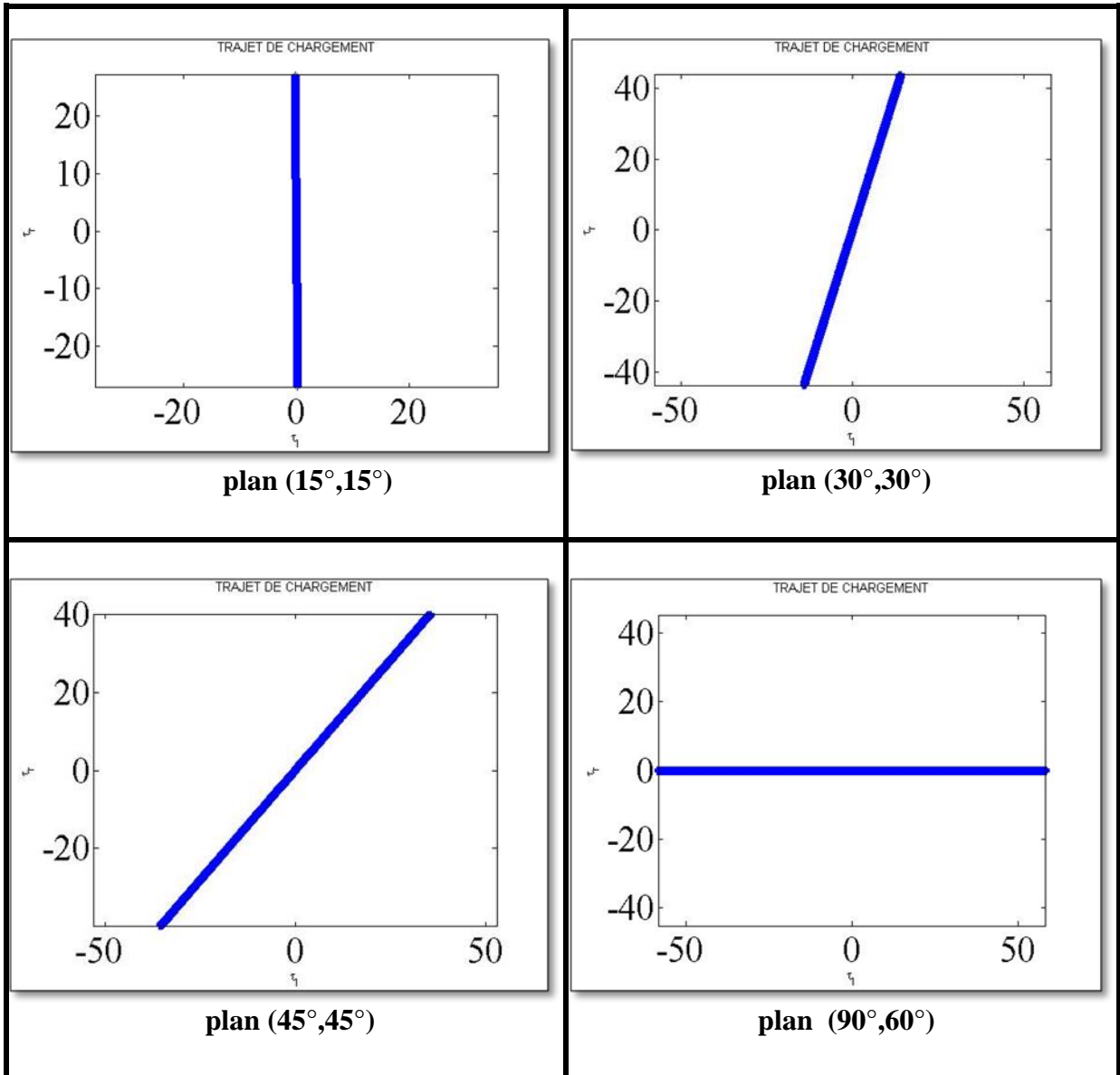
Il est évident que cet état de contrainte est biaxial, il correspond à une traction de signal sinusoïdal superposée à une torsion de même signal. Les deux contraintes sont en phase et de phases égales. Il est évident que cet état correspond à un chargement proportionnel. Nous avons déterminé le trajet de chargement pour 5184 plans physiques pour en extraire le plan pour lequel la cission est maximale. Les plans pour lesquels la cission est maximale sont au nombre de huit; ils sont représentés par huit couples d'angle  $(\theta, \varphi)$ ; le tableau II.3 indique ces plans. Nous avons également déterminé les trajets de chargement pour plusieurs plans physiques; d'après les résultats obtenus donnés par la figure II.4, on remarque que les trajets de chargement gardent la même forme et sont représentés par des segments de droite quelque soit le plan choisi.

La simulation proposée confirme que tous les trajets de chargement obtenus sont représentés par des segments de droite, ce qui confirme qu'il s'agit bien d'un chargement proportionnel. Dans ces cas, pour chacun des plans considérés, l'amplitude de la cission résolue est égale à la moitié du segment de droite relatif au trajet de chargement. Les courbes obtenues montrent que l'amplitude de la cission résolue dépend du plan physique. De ce fait, le calcul de l'amplitude de la cission est simplifié. Dans ce cas, pour une question de simplicité de calcul il serait plus utile d'opter pour un critère de fatigue du type global.

**Tableau II.3 :** Plans critiques dans le cas d'un état de contraintes biaxiales de même période et sans déphasage.

$\theta_{\max}$ (degré)	90	90	90	90	270	270	270	270
$\varphi_{\max}$ (degré)	60	150	240	330	60	150	240	330





**Figure II.4 :** Trajets de chargement dans le cas d'un état de contraintes biaxiales de même période et sans déphasage

➤ **2<sup>ème</sup> cas :** on considère un tenseur de contrainte défini comme suit :

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{axx} \sin(\omega_{xx} t - \delta_{xx}) + \sigma_{mxx} & \tau_{axy} \sin(\omega_{xy} t - \delta_{xy}) + \tau_{mxy} & 0 \\ \tau_{axy} \sin(\omega_{xy} t - \delta_{xy}) + \tau_{mxy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

Avec :

$$\sigma_{axx} = 100 \text{ MPa}, \tau_{axy} = 30 \text{ MPa}, \sigma_{ayy} = \sigma_{azz} = \tau_{ayz} = \tau_{axz} = 0$$

$$\sigma_{mxx} =, \sigma_{myy} = \sigma_{mzz} = \tau_{mxy} = \tau_{myz} = \tau_{mxz} = 0$$

$$\delta_{xx} = 34^\circ, \delta_{yy} = \delta_{zz} = \delta_{xy} = \delta_{yz} = \delta_{xz} = 0$$

$$\omega_{xx} = \omega_{yy} = \omega_{zz} = \omega_{xy} = \omega_{yz} = \omega_{xz} = \frac{2\pi}{p}$$

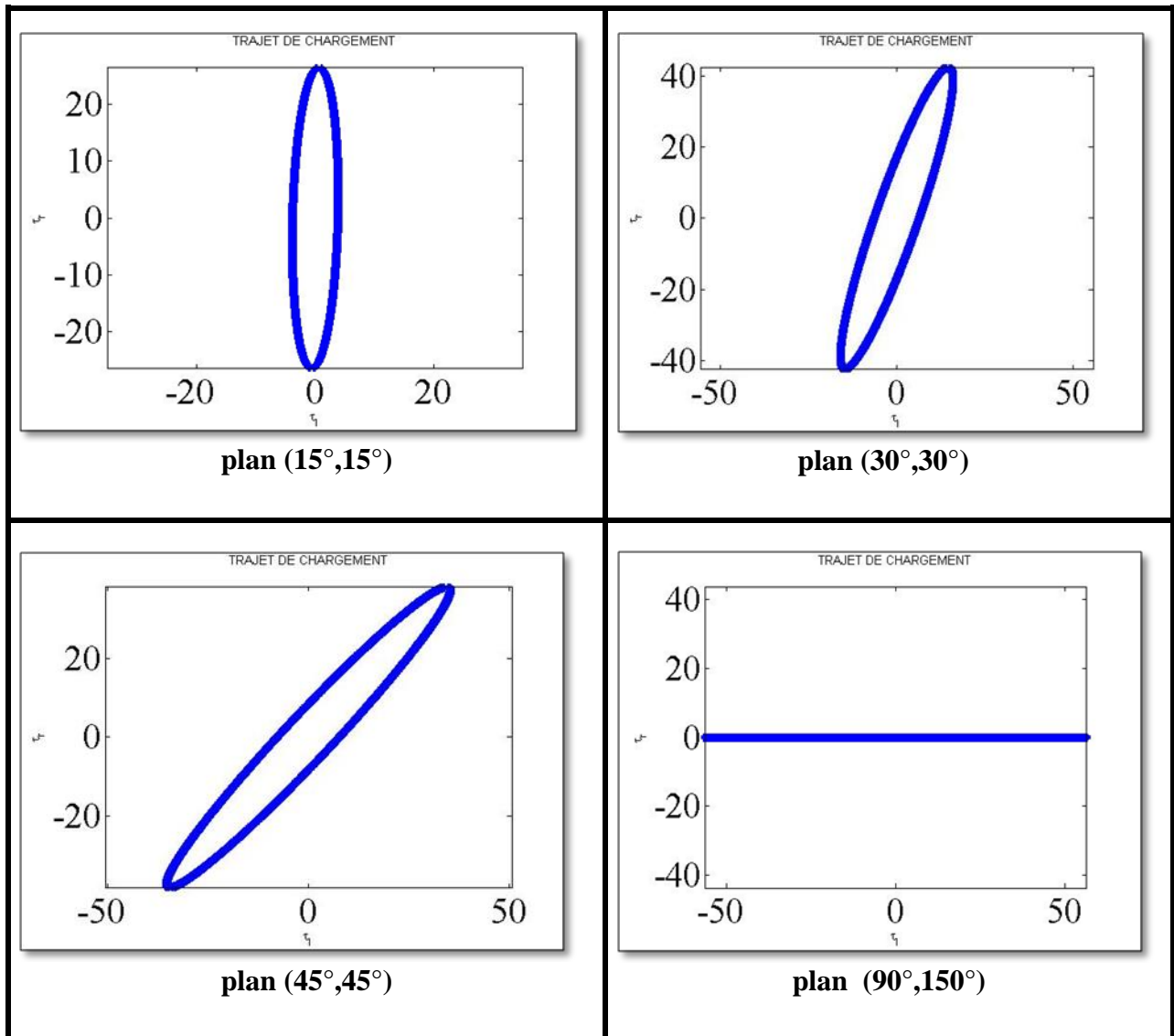
Il est clair que cet état de contraintes est biaxial, il correspond à une traction de signal sinusoïdal superposée à une torsion de même signal. Les deux contraintes sont déphasées d'un angle égal à  $34^\circ$  et de phases égales. Il est évident que cet état correspond à un chargement non proportionnel. Comme précédemment, nous avons déterminé le trajet de chargement les plans physiques pour en extraire le plan pour lequel la cission est maximale. Nous avons déterminé le trajet de chargement pour plusieurs plans physiques. Les plans pour lesquels la cission est maximale sont au nombre de huit ; ils sont représentés par huit couples d'angle  $(\theta, \varphi)$ ; le tableau II.4 indique ces plans.

Nous avons également déterminé les trajets de chargement pour plusieurs plans physiques; d'après les résultats obtenus donnés par les figures II.5. La simulation proposée confirme que tous les trajets de chargement obtenus sont représentés par des ellipses, ce qui confirme qu'il s'agit bien d'un chargement non proportionnel. Le trajet de chargement de la figure II.11 peut s'apparenter à un segment de droite, mais en réalité il s'agit d'une ellipse aplatie dont le petit-axe est très petit. On remarque aussi que les trajets de chargement gardent la même forme et sont représentés par des ellipses quelque soit le plan choisi.

Dans ces cas, pour chacun des plans considérés, l'amplitude de la cission résolue est égale à la moitié du grand axe de l'ellipse relatif au trajet de chargement. Les courbes obtenues montrent que l'amplitude de la cission résolue dépend du plan physique. De ce fait, le calcul de l'amplitude de la cission peut être donné par rayon de la plus grande circonférence circonscrite au trajet de chargement, autrement dit elle est égale au demi-grand axe de l'ellipse.

**Tableau II.4 :** Plans critiques dans le cas d'un état de contraintes biaxiales de même période avec déphasage.

$\theta_{\max}$ (degré)	90	90	90	90	270	270	270	270
$\varphi_{\max}$ (degré)	60	150	240	330	60	150	240	330



**Figure II.5:** Trajets de chargement dans le cas d'un état de contraintes biaxiales de même période avec déphasage.

### II.5.1.2. Etat de contraintes biaxiales dont une période est différentes et avec un déphasage

Nous considérons un état de contraintes biaxiales composées d'une traction et d'une torsion dont les signaux sont sinusoïdaux. La composante tangentielle  $\tau_{axy}$  est de période différente par rapport aux autres composantes. L'amplitude de la contrainte suivant la direction x est déphasée d'un angle égal à  $34^\circ$ . Compte tenu que les contraintes sont de périodes différentes implique un chargement non proportionnel. Le tenseur de contrainte se présente sous la forme suivante :

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{axx} \sin(\omega_{xx}t - \delta_{xx}) + \sigma_{mxx} & \tau_{axy} \sin(\omega_{xy}t - \delta_{xy}) + \tau_{mxy} & 0 \\ \tau_{axy} \sin(\omega_{xy}t - \delta_{xy}) + \tau_{mxy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

Avec :

$$\sigma_{axx} = 500 \text{ MPa}, \quad \tau_{axy} = 450 \text{ MPa}, \quad \sigma_{ayy} = \sigma_{azz} = \tau_{ayz} = \tau_{axz} = 0$$

$$\sigma_{mxx} = \sigma_{myy} = \sigma_{mzz} = \tau_{mxy} = \tau_{myz} = \tau_{mxz} = 0$$

$$\delta_{xx} = 34^\circ, \quad \delta_{yy} = \delta_{zz} = \delta_{xy} = \delta_{yz} = \delta_{xz} = 0$$

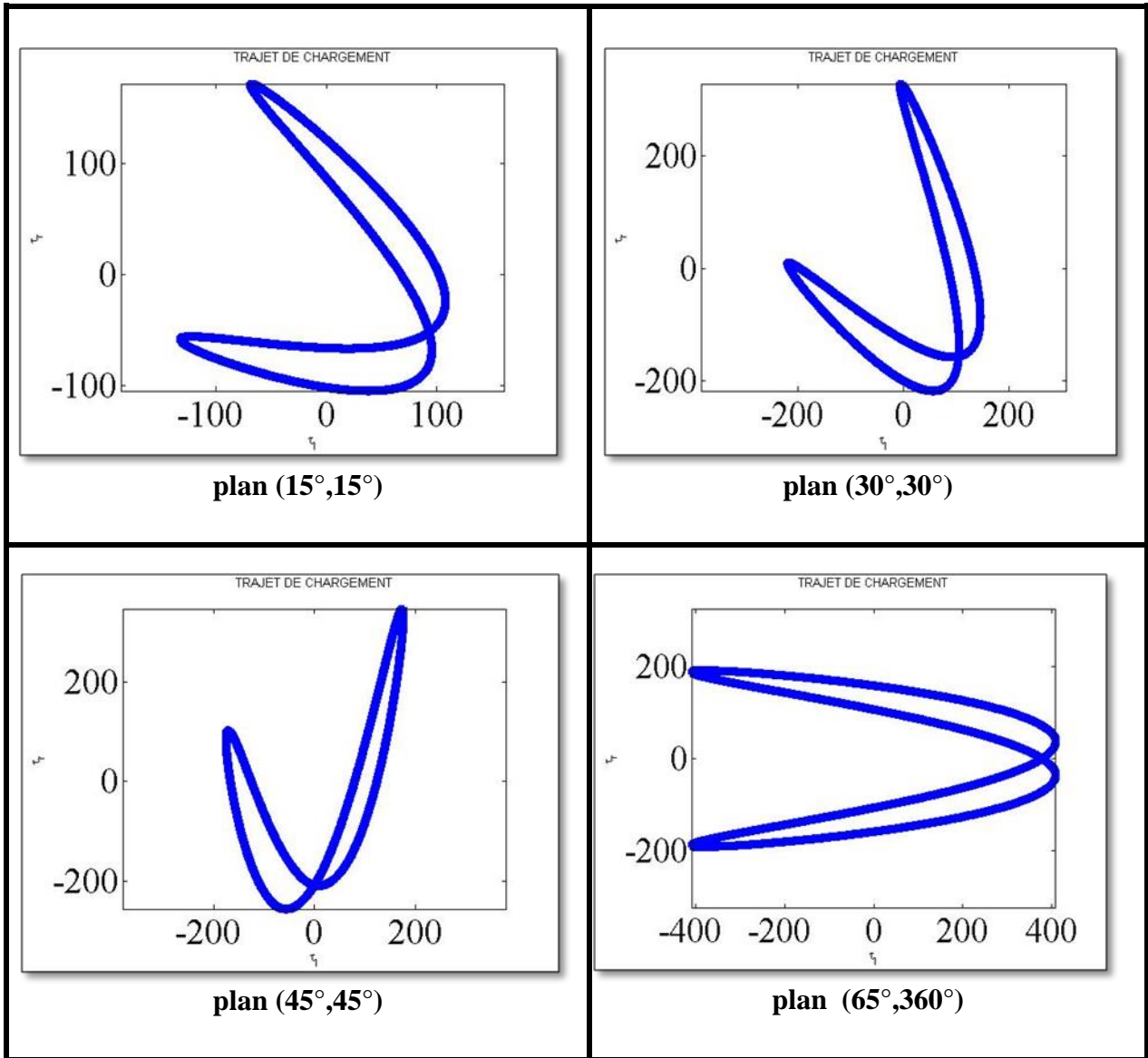
$$\omega_{xx} = \omega_{yy} = \omega_{zz} = \omega_{xz} = \omega_{yz} = \frac{2\pi}{p}, \quad \omega_{xy} = 2\omega_{xx}$$

Nous avons déterminées le trajet de chargement pour plusieurs plans physiques. Les plans pour lesquels la cission est maximale sont au nombre de douze ; ils sont représentés par douze couples d'angle  $(\theta, \varphi)$ ; le tableau II.5 mentionne ces plans.

**Tableau II.5 :** Plans critiques dans le cas d'un état de contraintes biaxiales de périodes différentes et avec un déphasage.

$\theta_{\max}$ (degré)	65	65	65	115	115	115	245	245	245	295	295	295
$\varphi_{\max}$ (degré)	0	180	360	0	180	360	0	180	360	0	180	360

D'après les résultats obtenus donnés par la figure II.6, on remarque que les trajets de chargement gardent la même forme quel que soit le plan choisi. Les courbes obtenues par la simulation confirment que la nature du chargement est du type non proportionnel. Dans ce type de cas, pour chacun des plans considérés, l'amplitude de la cission résolue nécessite la projection sur la droite de direction  $\vec{m}$ . Les courbes obtenues montrent que l'amplitude de la cission résolue dépend du plan physique. L'amplitude de la cission peut être donnée par rayon de la plus grande circonférence circonscrite au trajet de chargement.



**Figure II.6 :** Trajets de chargement dans le cas d'un état de contraintes biaxiales dont une période est différente et avec un déphasage.

**II.5.1.3 Etat de contraintes multiaxiales de même période avec déphasage**

Nous considérons un état de contrainte multiaxial dont les signaux sont sinusoïdaux. Les contraintes sont de même période. L'amplitude des contraintes présente un angle de déphasage les unes par rapport aux autres. Compte tenu que les contraintes sont déphasées, ceci n'implique que le chargement est non proportionnel. Le tenseur de contrainte se présente sous la forme suivante :

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{axx} \sin(\omega_{xx}t - \delta_{xx}) + \sigma_{mxx} & \tau_{axy} \sin(\omega_{xy}t - \delta_{xy}) + \tau_{mxy} & \tau_{axz} \sin(\omega_{xz}t - \delta_{xz}) + \tau_{mxz} \\ \tau_{axy} \sin(\omega_{xy}t - \delta_{xy}) + \tau_{mxy} & \sigma_{ayy} \sin(\omega_{yy}t - \delta_{yy}) + \sigma_{myy} & \tau_{ayz} \sin(\omega_{yz}t - \delta_{yz}) + \tau_{myz} \\ \tau_{axz} \sin(\omega_{xz}t - \delta_{xz}) + \tau_{mxz} & \tau_{ayz} \sin(\omega_{yz}t - \delta_{yz}) + \tau_{myz} & \sigma_{azz} \sin(\omega_{zz}t - \delta_{zz}) + \sigma_{mzz} \end{bmatrix} \quad (II.19)$$

Avec :

$$\sigma_{axx} = 130 \text{ MPa}, \tau_{axy} = 110 \text{ MPa}, \sigma_{ayy} = 90 \text{ MPa}, \sigma_{azz} = 122 \text{ MPa}, \tau_{ayz} = 80 \text{ MPa}, \tau_{axz} = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{mxx} = \sigma_{myy} = \sigma_{mzz} = \tau_{mxy} = \tau_{myz} = \tau_{mxz} = 0$$

$$\delta_{xx} = 34^\circ, \delta_{yy} = 30^\circ, \delta_{zz} = 45^\circ, \delta_{xy} = 15^\circ, \delta_{yz} = 30^\circ, \delta_{xz} = 20^\circ$$

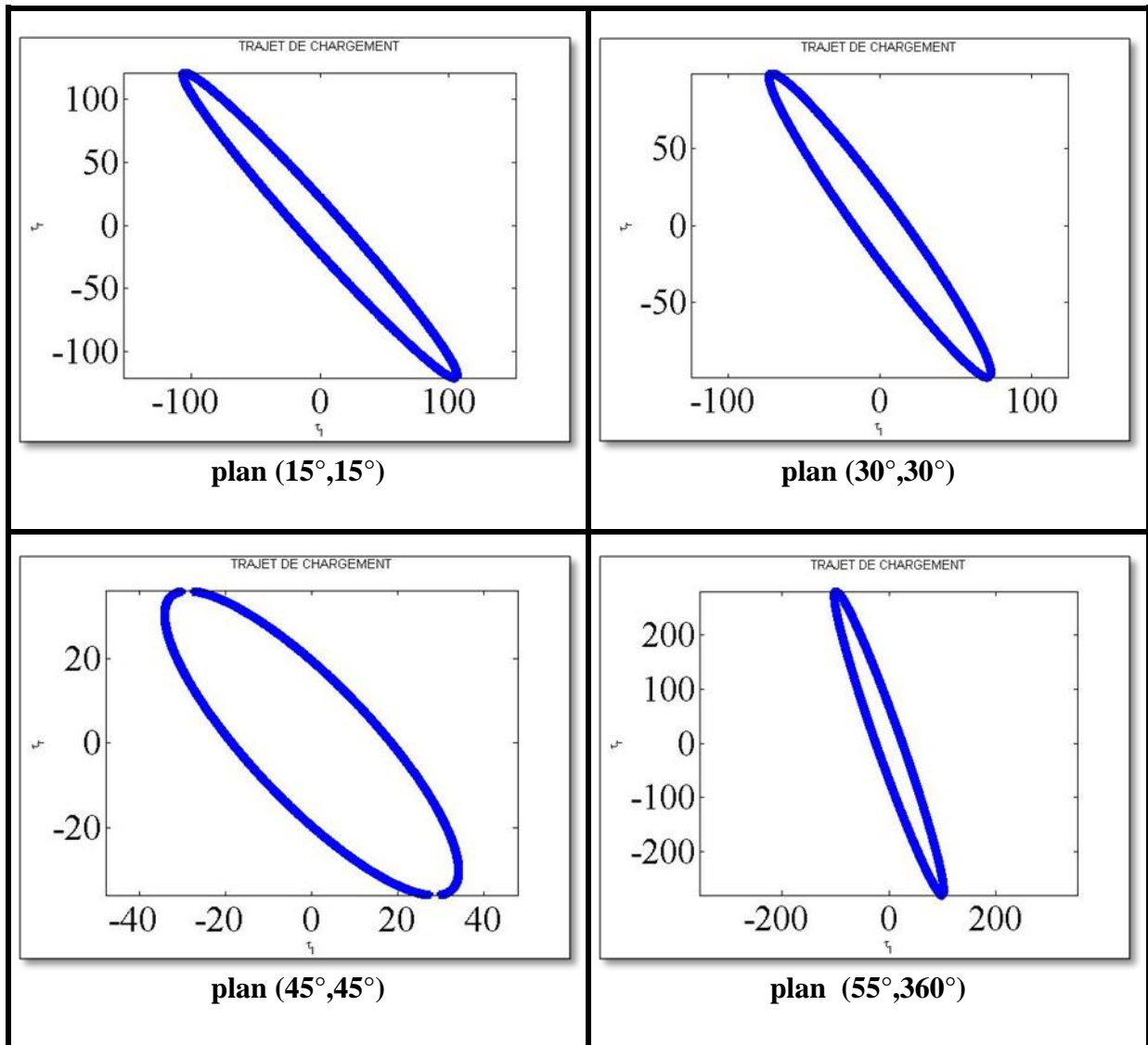
$$\omega_{xx} = \omega_{yy} = \omega_{zz} = \omega_{xy} = \omega_{xz} = \omega_{yz} = \frac{2\pi}{P}$$

Nous avons déterminé le trajet de chargement pour plusieurs plans physiques. Les plans pour lesquels la cission est maximale sont au nombre de trois ; ils sont représentés par trois couples d'angle  $(\theta, \varphi)$ ; le tableau II.6 résume ces plans.

**Tableau II.6:** Plans critiques dans le cas d'un état de contraintes multiaxiales de même période avec déphasage.

$\theta_{\max}$ (degré)	55	55	305
$\varphi_{\max}$ (degré)	0	360	180

D'après les résultats obtenus donnés par les figures II.7. Les courbes obtenues par la simulation confirment que la nature du chargement est du type non proportionnel. Comme dans le cas d'un état de contrainte biaxial avec déphasage, on remarque que les trajets de chargement gardent une forme elliptique quel que soit le plan choisi. De ce fait, nous pouvons tirer les mêmes conclusions précédemment signalées dans le cas d'un état de contraintes biaxiales avec déphasage.



**Figure II.7:** Trajets de chargement dans le cas d'un état de contraintes multiaxiales de même période avec déphasage.

**II.5.1.4: Etat de contraintes multiaxiales quelconque**

Nous considérons un état de contraintes multiaxiales quelconque dont les signaux sont sinusoïdaux. Les contraintes sont de périodes différentes. L'amplitude des contraintes présente un angle de déphasage les unes par rapport aux autres. Compte tenu que les contraintes sont déphasées et de périodes différentes, ceci implique que le chargement est non proportionnel. Le tenseur de contrainte se présente sous la forme suivant

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{axx} \sin(\omega_{xx}t - \delta_{xx}) + \sigma_{mxx} & \tau_{axy} \sin(\omega_{xy}t - \delta_{xy}) + \tau_{mxy} & \tau_{axz} \sin(\omega_{xz}t - \delta_{xz}) + \tau_{mxz} \\ \tau_{axy} \sin(\omega_{xy}t - \delta_{xy}) + \tau_{mxy} & \sigma_{ayy} \sin(\omega_{yy}t - \delta_{yy}) + \sigma_{myy} & \tau_{ayz} \sin(\omega_{yz}t - \delta_{yz}) + \tau_{myz} \\ \tau_{axz} \sin(\omega_{xz}t - \delta_{xz}) + \tau_{mxz} & \tau_{ayz} \sin(\omega_{yz}t - \delta_{yz}) + \tau_{myz} & \sigma_{azz} \sin(\omega_{zz}t - \delta_{zz}) + \sigma_{mzz} \end{bmatrix} \quad (II.20)$$

Avec

$$\sigma_{axx} = 300 \text{ MPa}, \tau_{axy} = 330 \text{ MPa}, \sigma_{ayy} = 450 \text{ MPa}, \sigma_{azz} = 500 \text{ MPa}, \tau_{ayz} = 430 \text{ MPa}, \tau_{axz} = 600 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{mxx} = \sigma_{myy} = \sigma_{mzz} = \tau_{mxy} = \tau_{myz} = \tau_{mxz} = 0$$

$$\delta_{xx} = 34^\circ, \delta_{yy} = 30^\circ, \delta_{zz} = 45^\circ, \delta_{xy} = 15^\circ, \delta_{yz} = 30^\circ, \delta_{xz} = 20^\circ$$

$$\omega_{xx} = \frac{2\pi}{P}, \omega_{yy} = 3\omega_{xx}, \omega_{zz} = 5\omega_{xx}, \omega_{xz} = 3\omega_{xx}, \omega_{yz} = 4\omega_{xx}, \omega_{xy} = 2\omega_{xx}$$

Nous avons déterminé le trajet de chargement pour plusieurs plans physiques. Les plans pour lesquels la cission est maximale sont au nombre de quatre ; ils sont représentés par quatre couples d'angle  $(\theta, \varphi)$ ; le tableau II.7 relève ces plans.

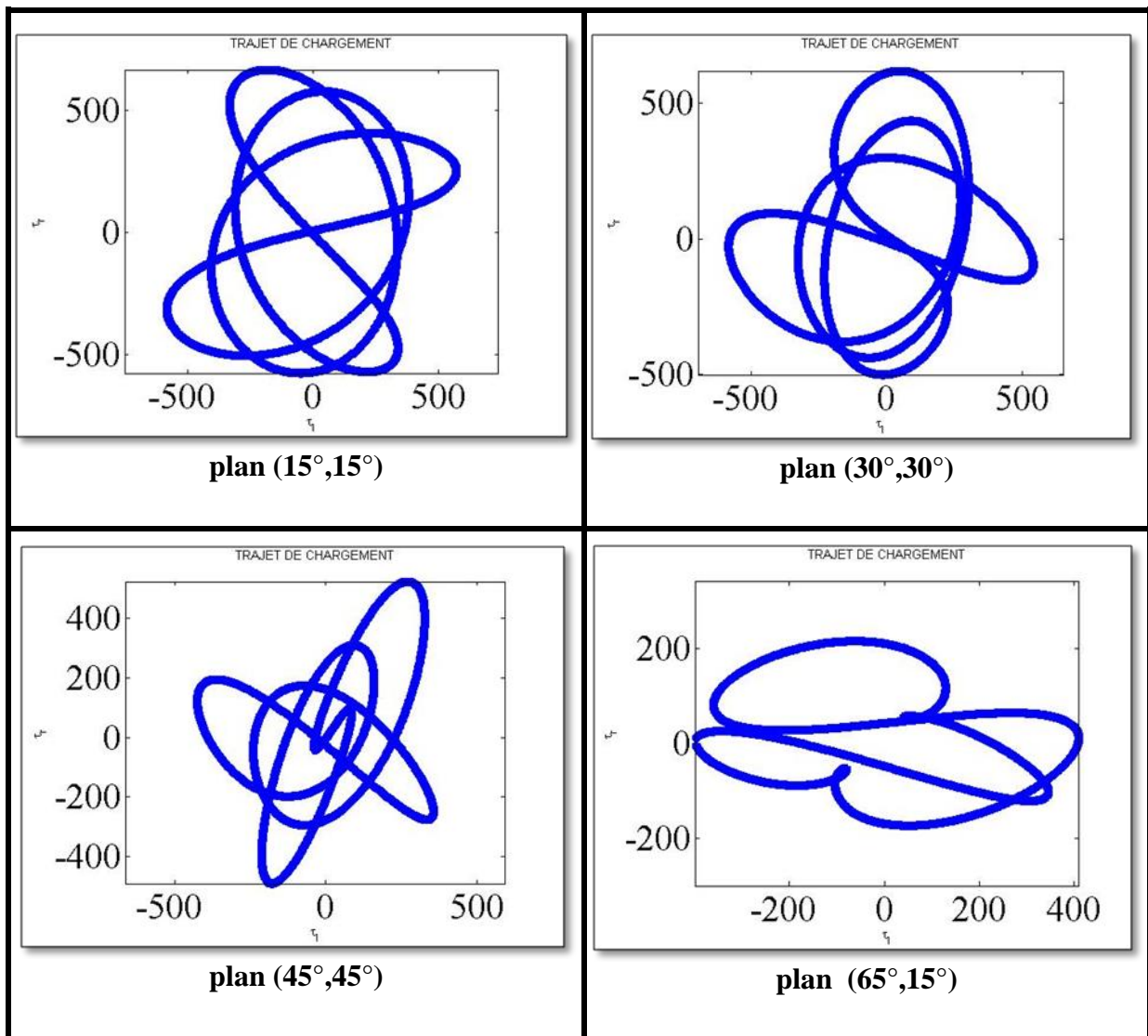
**Tableau II.7:** Plans critiques dans le cas d'un état de contraintes multiaxiales quelconque.

$\theta_{\max}$ (degré)	65	115	245	295
$\varphi_{\max}$ (degré)	15	165	345	195

Les résultats obtenus par la simulation sont illustrés par les figures II.8. Les courbes obtenues par la simulation confirment que la nature du chargement est du type non proportionnel. On note que les trajets de chargement sont de formes complexes constituées par plusieurs boucles imbriquées les unes aux autres. Pour chacun des plans considérés, l'amplitude de la cission résolue nécessite la projection sur la droite de direction  $\vec{m}$ .

Les courbes obtenues montrent que l'amplitude de la cission résolue dépend du plan physique. De ce fait, l'amplitude de la cission peut être donnée par rayon de la plus grande circonférence circonscrite au trajet de chargement.





**Figure II.8:** Trajet de chargement dans le cas d'un état de contraintes multiaxiales quelconque.

### II.5.2. Calcul de durée de vie :

En employant le critère de Papadopoulos, nous avons mis au point un programme de calcul, sous le code Matlab, permettant de prédire la durée de vie de structures sollicitées à des chargements cycliques complexes. L'organigramme de la méthodologie adoptée est donné à la figure II.9.

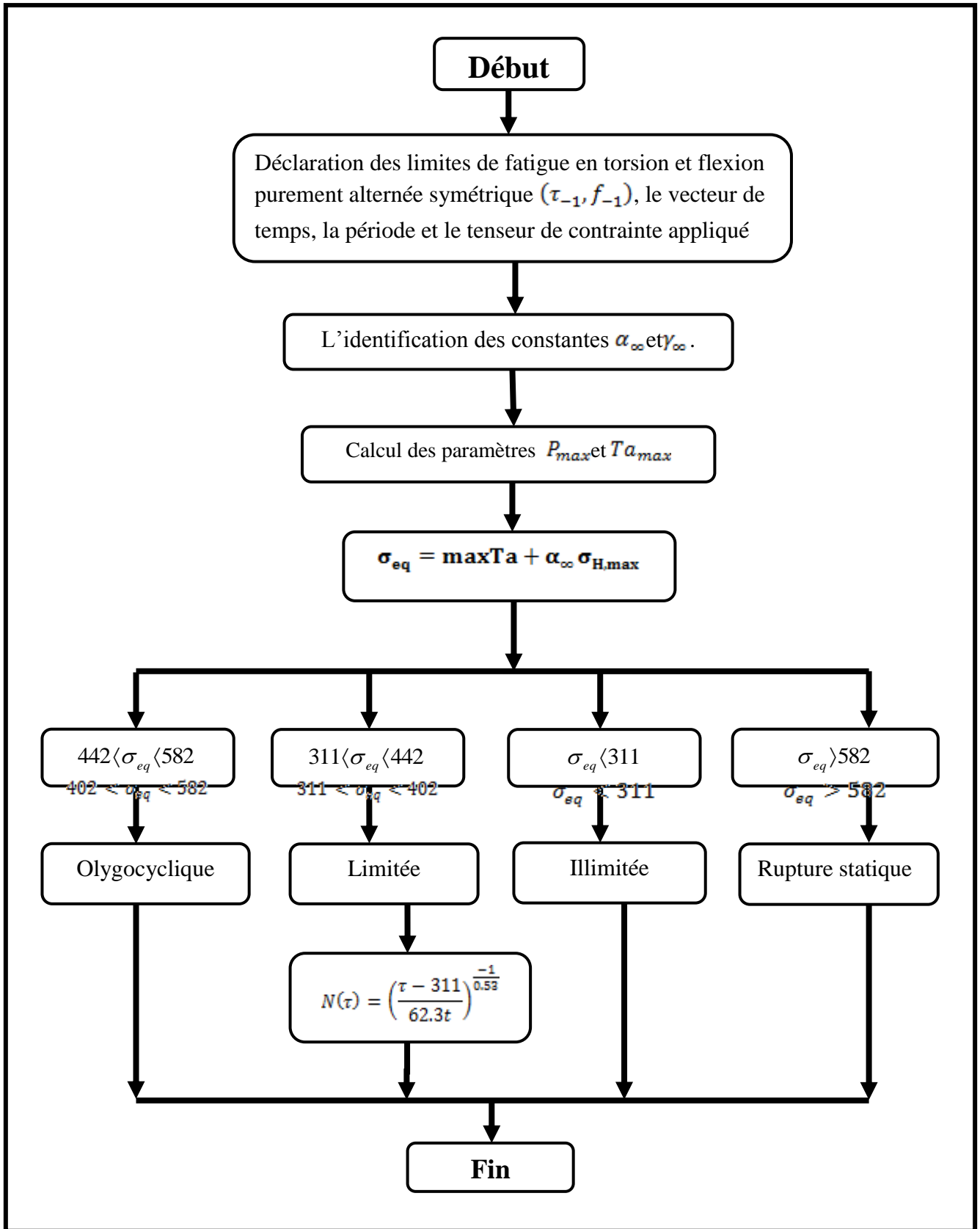


Figure II.9 : Organigramme de calcul de la durée de vie.

- **Résultat**

Pour le matériau étudié, en l'occurrence l'acier SM 45C, nous avons déterminé la durée de vie pour tous les états de contraintes examinés précédemment. Le calcul n'est valide que dans le domaine de fatigue limité. Dans ce sens et en application du critère de fatigue, la durée de vie est comprise entre 39810 et  $10^8$  cycles. Par conséquent la contrainte équivalente doit varier entre 311 et 442 MPa. Si cette contrainte équivalente est comprise entre 442 et 582 MPa, le critère n'est plus valable pour prédire la durée de vie car il relève du domaine de fatigue Olygocyclique. Cependant, si la contrainte équivalente est inférieure à 311 MPa, la durée de vie est illimitée. Lorsque la contrainte équivalente est supérieure à la résistance à la rupture en torsion (582 MPa), il y a rupture statique. Les résultats sont résumés dans le tableau II.8.

**Tableau II.8 :** Résultats de calcul de la durée de vie.

Etat de contrainte	$Ta_{\max}$ (MPa)	$P_{\max}$ (MPa)	$\sigma_{eq}$ (MPa)	N (cycles)
Biaxiales de même période sans déphasage	58.30	33.33	78.66	Durée de vie illimitée
Biaxiales de même période avec déphasage	56,36	33.33	76.73	Durée de vie illimitée
Biaxiales de même période	426.493	150	518.12	Domaine de fatigue olygocyclique
Biaxiales de même période	213.246	233.33	355.78	Domaine de fatigue Limitée
Biaxiales de périodes différentes	496,27	166,67	598.08	Rupture statique
Multiaxiales de même période	273,105	109.818	340.19	Domaine de fatigue Limitée
Multiaxiales de périodes différentes	1111.22	370.08	1172.01	Rupture statique

L'analyse des résultats obtenus nous permettent de dégager les observations suivantes :

1. Dans les deux premiers cas du tableau concernant un état de contraintes biaxiales (de même période sans et avec déphasage) la contrainte équivalente est inférieure à 311 MPa, la durée de vie est illimitée.
2. L'état de contraintes biaxiales de même période pour lequel la contrainte équivalente est égale 512.12 MPa, relève du domaine de fatigue olygocyclique.
3. L'état de contraintes biaxiales de même période pour lequel la contrainte équivalente est égale 355.78 MPa, relève du domaine de fatigue limitée et la durée de vie est égale à  $1.2137 \cdot 10^5$  cycles.
4. Dans les deux cas d'état de contraintes biaxiales et multiaxiales de périodes différentes, une rupture statique aura lieu dès le premier cycle de chargement.
5. L'état de contraintes multiaxiales de même période pour lequel la contrainte équivalente est égale 340.19 MPa, relève du domaine de fatigue limitée et la durée de vie est égale à 2 cycles  $2.5009 \cdot 10^5$ .

### II.5.3 Etude de l'influence des paramètres de chargement sur la tenue en fatigue

On a étudié l'influence des paramètres de chargement sur la tenue en fatigue dans le cas d'un état de contraintes biaxiales, le tenseur de contrainte considéré est sous la forme suivante :

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{axx} \sin(\omega_{xx}t - \delta_{xx}) + \sigma_{mxx} & \tau_{axy} \sin(\omega_{xy}t - \delta_{xy}) + \tau_{mxy} & 0 \\ \tau_{axy} \sin(\omega_{xy}t - \delta_{xy}) + \tau_{mxy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

#### II.5.3.1. L'influence de la contrainte monotone

On fixe les paramètres suivants :

$$\sigma_{axx} = 150 \text{ MPa}, \tau_{axy} = 200 \text{ MPa}, \sigma_{ayy} = \sigma_{azz} = \tau_{ayz} = \tau_{axz} = 0$$

$$\sigma_{myy} = \sigma_{mzz} = \tau_{mxy} = \tau_{myz} = \tau_{mxz} = 0$$

$$\delta_{xx} = 40^\circ, \delta_{xy} = 30^\circ, \delta_{yy} = \delta_{zz} = \delta_{yz} = \delta_{xz} = 0$$

$$\omega_{xx} = \omega_{yy} = \omega_{zz} = \omega_{xy} = \omega_{yz} = \omega_{xz} = \frac{2\pi}{p}$$

Nous faisons varier la valeur de la contrainte moyenne  $\sigma_{mxx}$  afin d'étudier son affect sur la durée de vie. Pour ce faire, nous prenons les trois valeurs comme suit:

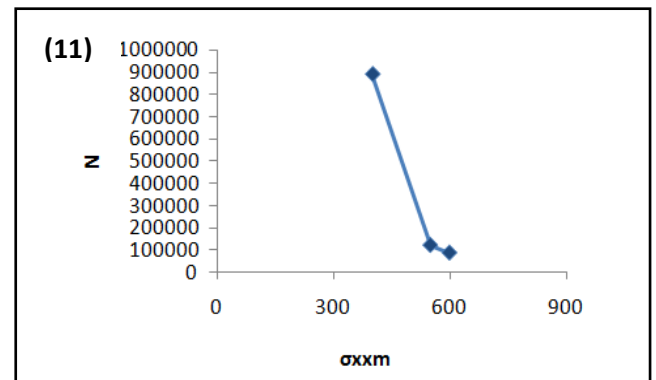
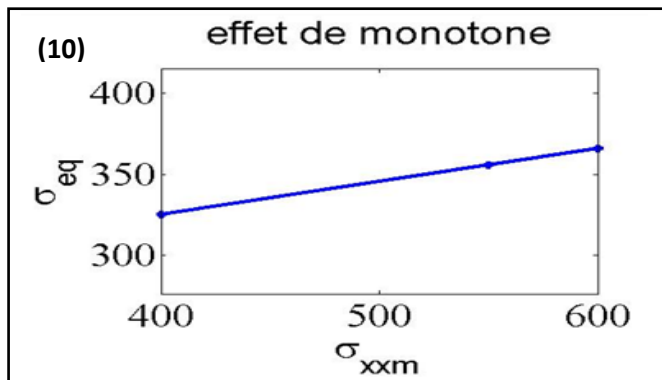
$$\sigma_{mxx} = [400, 550, 600] \quad (\text{MPa})$$

Le tableau II.9 récapitule des résultats obtenus.

**Tableau II.9 :** Influence de la contrainte monotone sur la durée de vie.

$\sigma_{max}$ (MPa)	$Ta_{max}$ (MPa)	$\sigma_{eq}$ (MPa)	N (cycle)
400	213.246	325.237	$8.9028 \cdot 10^5$
550	213.246	355.780	$1.2137 \cdot 10^5$
600	213.246	365.961	$8.6969 \cdot 10^4$

La courbe de la figure II.10 et II.11 montre la variation de la contrainte équivalente et la durée de vie en fonction de la contrainte monotone.



**Figure II.10 et II.11 :** Variation de la contrainte équivalente en fonction de la contrainte et la durée de vie en fonction de la contrainte monotone.

On remarque qu'une augmentation de la contrainte monotone entraîne une augmentation de la contrainte équivalente augmente. Par conséquent, une augmentation de la contrainte monotone diminue la durée de vie.

### II.5.3.2. L'influence de la pulsation

Nous gardons constants les paramètres suivants :

$$\sigma_{axx} = 400 \text{ MPa}, \quad \tau_{axy} = 200 \text{ MPa}, \quad \sigma_{ayy} = \sigma_{azz} = \tau_{ayz} = \tau_{axz} = 0$$

$$\sigma_{myy} = \sigma_{mzz} = \tau_{mxy} = \tau_{myz} = \tau_{mxz} = 0$$

$$\delta_{xx} = 40^\circ, \quad \delta_{xy} = 30^\circ, \quad \delta_{yy} = \delta_{zz} = \delta_{yz} = \delta_{xz} = 0$$

$$\omega_{xx} = \omega_{zz} = \omega_{xy} = \omega_{yz} = \omega_{xz} = \frac{2\pi}{p}$$

Nous faisons varier la pulsation  $\omega_{yy}$  selon trois valeurs telles que :

$$\omega_{yy} = [62.8, 125.6, 188.4] \text{ (rd.s}^{-1}\text{)}$$

Le tableau II.10 récapitule des résultats obtenus par la simulation.

**Tableau II.10** : Influence de la pulsation sur la tenue en fatigue.

$\omega_{yy}$ (rd.s <sup>-1</sup> )	$Ta_{\max}$ (MPa)	$\sigma_{eq}$ (MPa)	N (cycles)
62.8	280,7	362,15	97650,80
125.6	280,7	362,15	97650,80
188.4	280,7	362,15	97650,80
251.2	280,7	362,15	97650,80
314	280,702	362,150	97650,807

Nous pouvons constater que la pulsation n'a aucun effet sur la contrainte équivalente et par conséquent sur la durée de vie.

### II.5.3.3 L'influence de l'amplitude

Nous maintenons constants les paramètres suivants :

$$\tau_{axy} = 200 \text{ MPa}, \quad \sigma_{a yy} = \sigma_{a zz} = \tau_{a yz} = \tau_{a xz} = 0$$

$$\sigma_{m xx} = 550 \text{ MPa}, \quad \sigma_{m yy} = \sigma_{m zz} = \tau_{m xy} = \tau_{m yz} = \tau_{m xz} = 0$$

$$\delta_{xx} = 40^\circ, \quad \delta_{xy} = 30^\circ, \quad \delta_{yy} = \delta_{zz} = \delta_{yz} = \delta_{xz} = 0$$

$$\omega_{xx} = \omega_{yy} = \omega_{zz} = \omega_{xy} = \omega_{yz} = \omega_{xz} = \frac{2\pi}{p}$$

Nous faisons varier l'amplitude de la contrainte  $\sigma_{axx}$  selon quatre valeurs:

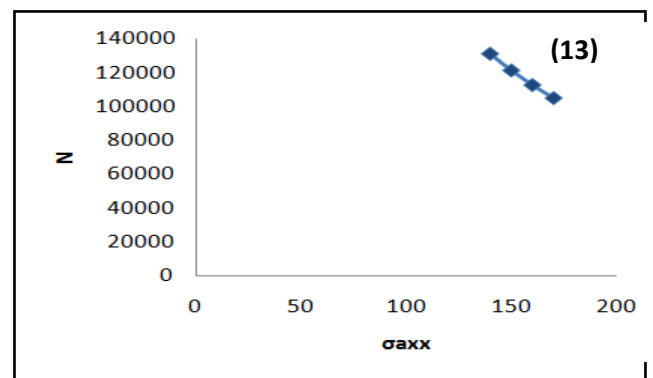
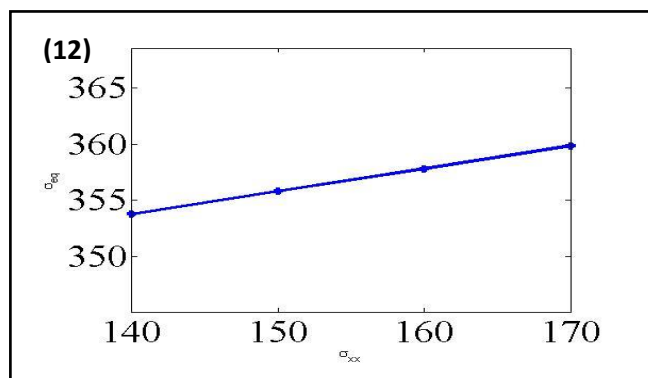
$$\sigma_{axx} = [140, 150, 160, 170] \text{ (MPa)}$$

Le tableau II.11 récapitule des résultats obtenus par la simulation.

**Tableau II.11** : Résultats de l'influence de l'amplitude de la contrainte.

$\sigma_{axx}$ (MPa)	$Ta_{max}$ (MPa)	$\sigma_{eq}$ (MPa)	N (cycles)
140	213.45	353.74	131080
150	213.45	355.78	121370
160	213.45	357.82	112810
170	213.46	359.85	105220

La courbe de la figure II.12 et II.13 montre la variation la contrainte équivalente et la durée de vie en fonction de l'amplitude de la contrainte.



**Figure II.12 et II.13.** Evolution de la contrainte équivalente de la durée de vie en fonction de l'amplitude de la contrainte.

Ces deux dernières courbes nous montrent qu'une augmentation de l'amplitude de la contrainte engendre une augmentation de la contrainte équivalente. Ainsi, une augmentation de l'amplitude de la contrainte cause une diminution de la durée de vie.

## Conclusion générale

Il est fondamental de disposer de moyens de prédiction du comportement des pièces mécanique dans les conditions réelles de fonctionnement. En effet, la résistance en fatigue d'une structure permet de connaître ses performances lorsqu'elle est soumise à des sollicitations cycliques. Notre étude se limite au phénomène de fatigue à endurance limitée. Généralement, l'état de chargement réel correspond à celui des contraintes cycliques multiaxiales. Les critères de fatigue servent à évaluer la tenue en fatigue des structures. Pour ce faire, l'état de contraintes multiaxiales est transformé en une simple équation scalaire. Dans le cas d'un chargement non proportionnel, il est nécessaire d'appliquer un critère du type plan critique lequel permet de déterminer le trajet de chargement. Cette étude a un triple objectif: déterminer le trajet de chargement, prédire la durée de vie et étudier l'influence des paramètres de chargement sur la tenue en fatigue.

Compte tenu que nous disposons des courbes d'endurance de l'acier SM 45C, nous sommes intéressés au comportement de ce matériau. Nous avons opté pour le critère de Papadopoulos et nous avons mis au point un programme de calcul de durée de vie, sous le code Matlab. Nous avons déterminé le trajet de chargement pour 5184 plans physiques afin d'en extraire le plan pour lequel la cission est maximale. Le temps de calcul est considérable et peut, parfois, atteindre jusqu'à 18 heures. Les trajets de chargements obtenus permettent de distinguer les chargements proportionnels et des chargements non proportionnels. Nous avons tracé ces trajets en variant l'état de contraintes (biaxiales, multiaxiales), la nature des contraintes (alternées et moyennes), le déphasage entre les signaux des différentes composantes du tenseur de contraintes et la périodicité des cycles. Notre étude nous a conduits aux résultats suivants :

- le modèle montre clairement qu'un chargement proportionnel est caractérisé par un trajet linéaire.
- les deux cas d'état de contraintes biaxiales et multiaxiales de même période avec un déphasage induisent un trajet de chargement de forme elliptique,
- dans le cas d'un état de contraintes biaxiales dont une période est différente par rapport aux autres mais avec un déphasage, l'amplitude de la cission peut être déterminée par la recherche du rayon de la plus grande circonférence circonscrite au trajet de chargement.



- pour un état de contraintes multiaxiales quelconque, les trajets de chargements sont de formes complexes et sont constituées par plusieurs boucles imbriquées les unes aux autres.

Pour le matériau étudié, nous avons également déterminé la durée de vie pour tous les états de contraintes examinés. Le calcul n'est valide que dans le domaine de fatigue limité. Dans ce sens, la durée de vie est comprise entre 39810 et  $10^8$  cycles. Par conséquent la contrainte équivalente varie entre 311 et 442 MPa.

Nous avons étudié l'influence des paramètres de chargement sur la tenue en fatigue dans le cas d'un état de contraintes biaxiales. Nous avons montré qu'une augmentation de la contrainte monotone ou de l'amplitude de la contrainte entraîne une augmentation de la contrainte équivalente et une diminution de la durée de vie. Cependant, la pulsation n'a aucun effet sur la contrainte équivalente et la durée de vie.

En perspectives, afin de compléter cette étude nous recommandons ce qui suit:

- Validation du modèle par les résultats expérimentaux,
- comparer les résultats donnés par le critère considéré avec ceux donnés par d'autres types de critères,
- étendre l'étude à l'endommagement en considérant des chargements avec des blocs à amplitudes variables.

## Référence bibliographie :

- [1] BATHIAS.C et PINCEAU.A « Fatigue des matériaux et des structures » Tome2,Mécanique et ingénierie des mécanique(2010).
- [2] Mohamed J « Fatigue polycyclique des structures métalliques : durée de vie sous chargements variables » Thèse de doctorat en Génie Mécanique et Matériaux.Ecole polytechnique 2006.
- [3] ABDELSADOUK S et GHALEM M. « Calcule en Fatigue des structures sollicitées sous chargements multiaxiaux d'amplitude constante » Mémoire de fin d'étude de master Académique en génie Mécanique. Université Abdelhamid Ben Badais de Mostaganem 2019.
- [4] BENDOUBA M « Etude de la fatigue des structures sous l'effet d'un état de contraintes multiaxiales » Thèse de Doctorat en Génie Mécanique. Université Djilali Liabes de SIDI-BEL-ABBES 2012 /2013.
- [5] BENKABOUCHE S « Endommagement en fatigue multiaxiale des pièces traitées superficiellement » Thèse de doctorat en Génie Mécanique. Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem 2016.
- [6] BASTIEN W. « Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque » Thèse de doctorat en Génie Mécanique. Institut National des Sciences Appliquées de Lyon 1999.
- [7] BENKHETTAB M. « Prise en compte des contraintes résiduelles et des déformations plastiques dans un critère de fatigue » Mémoire de fin d'étude de master Académique en génie Mécanique. Université Abdelhamid Ben Badais de Mostaganem 2011.
- [8] AID A « Cumul d'endommagement en fatigue multiaxiale sous sollicitations variables » Thèse de doctorat en Génie Mécanique. Université Djilali Liabes de SIDI-BEL-ABBES 2006.
- [9] <https://french.alibaba.com/product-detail/s45c-sm45c-medium-carbon-steel-bar-2005607539.html>