



N° d'ordre : M...../GM/2021

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE MASTER ACADEMIQUE

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Thème

Modélisation dynamique d'un robot industriel

Présenté par :

- ❖ BENZOURA Omar Farouk
- ❖ BENHALIMA Farouk Abdelmounaim

Soutenu le 12/07/2021 devant le jury composé de :

Président	Dr. Mohamed BENDOUKHA	Université de Mostaganem UMAB
Examinateur	Dr. Mohamed SAHNOUNE	Université de Mostaganem UMAB
Encadreur	Dr. Abdelmadjid FLITTI	Université de Mostaganem UMAB

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2020 /2021

Résumé

Parmi les modèles mathématiques nécessaires au contrôle et à la simulation des robots industriels se trouve le modèle dynamique. Ce modèle a pour objet de donner les couples des actionneurs en fonction des positions, vitesses et accélérations articulaires. La complexité du calcul de ce modèle augmente au fur et à mesure avec l'augmentation du nombre de degrés de liberté du robot. L'objectif visé par ce travail est d'élaborer un script sous Matlab qui permet de générer le modèle dynamique d'un robot industriel quelconque. Pour tester la validité de ce programme, le robot planaire RR et le robot PUMA 560 seront pris comme modèle.

Mots-clés : modèle dynamique, robot industriel, Newton-Euler et couples.

Abstract

Among the mathematical models necessary for the control and simulation of industrial robots is the dynamic model. The purpose of this model is to give the torques of the actuators as a function of the positions, speeds and joint accelerations. The complexity of the calculation of this model increases as the number of degrees of freedom of the robot increases. The objective of this work is to develop a script under Matlab that allows to generate the dynamic model of any industrial robot. To test the validity of this program, the planar robot RR and the robot PUMA 560 will be taken as model.

Keywords: Dynamic model, Industrial robot, Newton-Euler and torques.

ملخص

من بين النماذج الرياضية الالزنة للتحكم ومحاكاة الروبوتات الصناعية ، النموذج الديناميكي. الغرض من هذا النموذج هو إعطاء عزم دوران المشغلات كدالة لمواقيف المفصل والسرعات والتسارع. يزداد تعقيد حساب هذا النموذج مع زيادة عدد درجات حرية الروبوت. الهدف من هذا العمل هو تطوير نص في Matlab يسمح بإنشاء نموذج ديناميكي لأي روبوت صناعي. لاختبار صلاحية هذا البرنامج ، سيتم أخذ الروبوت المستوى RR وروبوت PUMA 560 كنموذج .

الكلمات المفتاحية: نموذج ديناميكي ، روبوت صناعي ، نيوتن أويلر وعزم الدوران.

REMERCIEMENTS

Nous remercions en premier lieu ALLAH le tout puissant qui nous a accordé la santé, le courage, la volonté et la patience de réaliser ce travail.

Nous adressons nos profonds remerciements à notre encadreur, Monsieur **Abdelmadjid FLITTI**, enseignant chercheur au département de Génie Mécanique faculté Science et Technologie, Université ABDELHAMID IBN BADIS de Mostaganem, pour son aide précieuse, sa confiance, ses conseils et son œil critique qui nous ont été très précieux pour réaliser notre mémoire.

Tout notre respect et nos remerciements vont vers les membres du jury qui vont pleinement consacrer leur temps et leur attention afin d'évaluer notre travail. Nous tenons à remercier vivement Docteur **Mohamed BENDOUKHA** d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire. Nos remerciements vont, également, au Docteur **Mohamed SAHNOUNE** d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Nous désirons aussi remercier l'ensemble de l'équipe pédagogique du département du Génie Mécanique pour leur écoute et encadrement durant tous notre cursus.

Enfin, nos remerciements les plus sincères vont à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

A mes parents : aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime ,le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous, vos prières ont été pour moi un grand soutien moral tout au long de mes études. Que dieu vous protège, vous procure une longue vie, santé et bonheur afin que je puisse vous rendre un minimum de ce que je vous dois.

A la mémoire de mes chers grands parents, que dieu les accueille dans son vaste paradis.

A mes grands-parents et toute la famille BENZOURA et RAHOUI.

A mon petit frère Abd el Djalil, mon bras droit et mon ami pour sa présence, son encouragement et ses conseils.

A ma petite sœur Amira Bouchra , ma princesse qui illumine mes journées en toutes circonstances.

A mes amis et mes frères Kacem, Bilal, Amine, Madjid et Adel, pour leur soutien moral et leur encouragement.

A mon binôme Benhalima Farouk Abdelmounaim, pour sa présence tout au long de mon parcours, sa patience, sa compréhension, son aide et ses conseils pour réaliser ce modeste travail, et à qui je souhaite tout le bonheur du monde.

A mes chers collègues Bettahar Abdallah et Bengueneb Bendehiba qui m'ont accompagné durant mon chemin d'études supérieures, pour leur aide précieuse et leur encouragement.

A une personne très chère, qui m'apporte le bonheur et la joie pour son soutien si précieux, 16 mille mercis à toi.

A tous les étudiants de la promotion de construction mécanique 2021.

Dédicaces

Dédicaces Quand il y a la soif d'apprendre, tout vient à point à qui sait attendre.

A mes très chers parents Djilali et Khayra , qui m'ont toujours soutenu, pour avoir eu la patience de relire intégralement ce manuscrit, qui m'ont accompagné par leurs prières, leurs douceurs, puisse dieu leur prêter une longue vie et beaucoup de santé et de bonheur dans les deux vies ,père que votre bénédiction m'accompagne toujours

A mes très chers sœurs, mes jolies, pour votre soutien moral et vos encouragements.

A tous ceux qui ont contribué de loin ou de près à mon instruction, Veuillez trouver l'expression de mon respect le plus profond et ma considération la plus sincère.

A tous les étudiants de la promotion Construction Mécanique 2021.

A BENZOURA Omar Farouk qui a accepté sans aucune hésitation pour être mon binôme afin de mener à bien ce modeste travail.

BENHALIMA Farouk Abdelmonaim

SOMMAIRE

SOMMAIRE	I
LISTE DES FIGURES	III
LISTE DES TABLEAUX	IV
LISTE DES SYMBOLES	V
INTRODUCTION	1
Chapitre 1 : Généralités sur les robots manipulateurs.....	2
1.1 Définitions d'un robot.....	2
1.2 Classification des Robots	2
1.2.1. Robot sériel	3
1.2.2. Les robots parallèles.....	3
1.2.3. Robot humanoïde	4
1.2.4. Robots mobiles à roues	4
1.2.5. Robot hexapode.....	5
1.3. Les robots manipulateurs sériels	5
1.3.1. Constituants.....	5
1.3.2. Terminologies	6
1.4. Architectures cinématiques	7
1.5. Performance des robots.....	8
Chapitre 2: Modélisations des bras manipulateurs	9
2.1. Introduction.....	9
2.2. Modèles Géométriques	9
2.2.1. Modèle Géométrique direct	9
2.2.2. Modèle Géométrique inverse.....	11
2.3. Modèles Cinématiques	13
2.3.1. Modèle cinématique direct	13
2.3.2. Modèle cinématique inverse	14
Chapitre 3: Modélisation dynamique des Robots industriels.....	16
3.1. Introduction.....	16
3.2. Formalisme de Lagrange.....	17
3.2.1. Calcul des énergies cinétique et potentielle du robot	18
3.2.2. Exemple d'application : Robot planaire <i>RR</i>	19
3.3. Formalisme de Newton-Euler	21
3.4. Présentation du programme élaboré.....	23

SOMMAIRE

3.5. Exemples pour vérification du programme élaboré	25
3.5.1. Exemple1 : robot planaire <i>RR</i>	25
3.5.2. Exemple 2 : robot PUMA 560	26
Conclusion Générale	30
Bibliographie.....	31
Annexe A	33

LISTE DES FIGURES

Figure 1. 1 :Le Premier Robot Industriel « Unimate » [6].....	2
Figure 1. 2: Robot série [8].....	3
Figure 1. 3 : Robot parallèle Delta [7].	3
Figure 1. 4 : Robot humanoïde [11].....	4
Figure 1. 5:Robot mobile [13].	4
Figure 1. 6 :Robot hexapode [15].	5
Figure 1. 7: Constituants mécaniques des robots [17].	5
Figure 1. 8 : Représentation symbolique des articulations des robots [21].	6
Figure 1. 9: différents types de porteurs.	8
Figure 2. 1 : Placement des repères	10
Figure 2. 2:convention de Denavit-Hartenberg Modifiée (DHM) [25].	11
Figure 3. 1: Composition des vitesses [3].....	18
Figure 3. 2 : Robot planaire <i>RR</i>.	19
Figure 3. 3 : Bilan des efforts au corps <i>j</i> [3].	21
Figure 3. 4 : Organigramme du programme élaboré.....	24
Figure 3. 5 : Robot PUMA 560 à la posture où toutes les variables articulaires sont nulles [29]. ...	27
Figure 3. 6 : Evolution des vitesses articulaires des 6 articulations avec la loi Bang-Bang [30]. ...	28
Figure 3. 7 : Variation des couples des actionneurs pour le déplacement étudié.	29

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3. 1 : Description des quatre fonctions élaborées	23
Tableau 3. 2 : Paramètres de DHM du Robot PUMA 560 [29].	27
Tableau 3. 3 : Paramètres inertIELS du Robot PUMA 560 [29].....	27
Tableau 3. 4 : variables articulaires des positions initiale et finale.....	28

LISTE DES SYMBOLES

a_j	vecteur unitaire suivant l'axe Z_j .
F_j	résultante des forces extérieures sur le corps C_j
f_j	résultante du torseur dynamique exercé sur le corps C_j par le corps C_{j-1} .
f_{ej}	résultante du torseur dynamique exercé par le corps C_j sur l'environnement
F_{sj}	paramètre de frottement sec de l'articulation j .
F_{vj}	paramètre de frottement visqueux de l'articulation j .
g	accélération de la pesanteur.
G_j	centre de gravité du corps C_j
I_{Gj}	matrice d'inertie du corps C_j par rapport à un repère parallèle à R_j et d'origine G_j .
I_{aj}	moment d'inertie du rotor de l'actionneur j et de son réducteur ressenti par l'articulation .
jI_j	matrice d'inertie du corps C_j par rapport au repère R_j .
L_j	vecteur liant l'origine du repère R_{j-1} , antécédent du repère R_j , et l'origine du repère R_j .égal à $O_{j-1} O_j$.
M_j	masse du corps C_j .
MS_j	premier moment d'inertie du corps C_i autour de l'origine du repère R_i , égal à M_j
S_j .	Soit: $[MX_j \ MY_j \ MZ_j]^T$ les composantes de jMS_j .
\mathcal{M}_{Gj}	moment des efforts extérieurs exercés sur le corps C_j autour de G_j
\mathcal{M}_j	moment des efforts extérieurs exercés sur le corps C_j autour de O_j
m_j	moment du torseur dynamique autour de O_j exercé sur le corps C_j par le corps C_{j-1}
m_{ej}	moment du torseur dynamique exercé par le corps C_j sur l'environnement autour de O_j
S_j	vecteur ayant pour origine O_j et pour extrémité le centre de masse du corps C_j . Il est égal à $O_j G_j$.
V_j, \dot{V}_j	Vitesse et accélération du point O_j
V_{Gj}, \dot{V}_{Gj}	vitesse et accélération du centre de gravité du corps C_j
$\omega_j, \dot{\omega}_j$	Vitesse de rotation et accélération de rotation du corps C_j

INTRODUCTION

Les robots industriels occupent, de nos jours, une place prépondérante dans le secteur industriel. En effet, la Fédération internationale de robotique (IFR) a signalé, en 2020, qu'environ plus de 2,7 millions de robots industriels sont installés dans les usines à travers le monde [1]. La majorité des robots industriels sont des robots sériels ayant au minimum trois degrés de liberté.

La commande des robots nécessite l'établissement de plusieurs modèles mathématiques [2]. Parmi, ces modèles figure le modèle dynamique qui a pour fonction de donner les couples d'actionneurs en fonction des positions, des vitesses et des accélérations articulaires ainsi que les forces extérieures appliquées à la structure mécanique du robot. Ce modèle a aussi une importance primordiale lors de la phase de conception. Certes, il permet de choisir les actionneurs adéquats aux applications envisagées [2, 3]. De plus, il est utilisé pour l'identification de paramètres dynamique exacts du robot [2, 3].

C'est dans ce contexte que s'inscrit ce travail, qui vise à élaborer à un programme sous l'environnement Matlab qui permet de calculer le modèle dynamique, sous forme symbolique et/ou numérique, d'un robot industriel quelconque. L'algorithme implanté, dans ce programme, est celui proposé par Luh et al. qui est basé sur les équations de Newton-Euler [2, 3].

Ce mémoire est structuré en trois chapitres :

- Le premier chapitre donne un aperçu général sur les robots manipulateurs
- Le deuxième chapitre est réservé à la présentation de la modélisation géométrique et cinématique.
- Le troisième à la présentation des concepts de la modélisation dynamique, du programme élaboré et des résultats des tests de sa validité.

Chapitre 1 : Généralités sur les robots manipulateurs

1.1 Définitions d'un robot

En 1920, l'écrivain tchèque Karel Capek a monté sa fameuse pièce de théâtre « Rossum's Universal Robots » dans laquelle il a imaginé des machines humanoïdes qui obéissent aux ordres données par leurs maîtres humains [4]. Il a choisi pour ces machines le nom «Robots » qui est dérivé du mot tchèque, "roboť" qui signifie le travail forcé [4].

George Devol et Joseph Engelberger ont inventé le premier robot industriel «Unimate » en 1954 [5]. Ils ont créé ; par la suite en 1956 la société américaine « Unimation Inc. » [5]. En 1961, cette compagnie a commercialisé la première fois des bras manipulateurs [5]. Ces bras, installés sur les lignes d'assemblage de General Motors, étaient chargés de manipuler des pièces de fonderie pesant jusqu'à 150 kg [6].

L'Organisation Internationale de Normalisation définit le robot comme étant « un manipulateur à plusieurs degrés de liberté, à commande automatique, reprogrammable, multi applications, mobile ou non, destiné à être utilisé dans les applications d'automatisation industrielle » [6].



Figure 1. 1 :Le Premier Robot Industriel « Unimate » [6].

1.2 Classification des Robots

La littérature donne plusieurs méthodes de classifications des robots. Généralement, les critères de classification sont la morphologie de la structure mécanique ou/et la méthode de locomotion. Les principales familles de robots sont les suivantes :

1.2.1. Robot sériel

Les robots sériels, ont une structure mécanique composée d'une seule chaîne cinématique, la plupart des temps ouverte, ayant une extrémité fixe, appelée base, et l'autre extrémité est libre et mobile, appelé organe terminal [7].



Figure 1. 2: Robot sériel [8]

1.2.2. Les robots parallèles

Les robots parallèles caractérisés par le fait que plus d'une chaîne cinématique assure la liaison entre la base fixe et l'organe terminal mobile , on parle également de cinématique bouclée [9].



Figure 1. 3 : Robot parallèle Delta [7].

1.2.3. Robot humanoïde

Le robot humanoïde est un robot à l'image de l'homme. Ainsi, ces robots ont un torse avec une tête, deux bras et deux jambes [10]. Cependant, certains auteurs préfèrent utiliser l'appellation du robot bipède ou robot marcheur pour ces machines, étant donné que la structure mécanique peut se limiter à un torse et deux jambes.



Figure 1. 4 : Robot humanoïde [11].

1.2.4. Robots mobiles à roues

Les «robots mobiles» à roues sont des véhicules dotés de roues comme moyens de locomotion. L'objectif principal d'un robot mobile consiste à réaliser un mouvement à partir d'un point source vers un point destination et peut être doté de moyens de perception et de raisonnement [12].



Figure 1. 5: Robot mobile [13].

1.2.5. Robot hexapode

Les robots mobiles à roues présentent l'inconvénient de la nécessité d'un sol relativement plat. Pour pallier, à ce handicap, une locomotion fondée sur trois paires de pattes, inespérée de l'étude de la marche des insectes, présente une alternative à l'usage de roues. Les robots marcheurs utilisant cette technique de locomotion sont connus sous le nom « robots hexapodes [14].



Figure 1. 6 :Robot hexapode [15].

1.3. Les robots manipulateurs sériels

1.3.1. Constituants

Mécaniquement, un robot manipulateur sériel est constitué d'une chaîne cinématique de plusieurs corps rigides assemblés par des liaisons appelées articulations et d'un organe terminal. L'organe terminal est un dispositif fixé à l'extrémité libre et mobile de la chaîne cinématique. Ce dispositif est destiné à effectuer une tâche donnée. A titre d'exemple, il peut manipuler des objets (dispositifs de serrage, dispositifs magnétiques, à dépression, ...), ou à les transformer (outils, torche de soudage, pistolet de peinture, ...). La structure mécanique polyarticulée a pour rôle d'amener l'organe terminal dans une situation donnée en respectant des contraintes de vitesse et d'accélération [16].

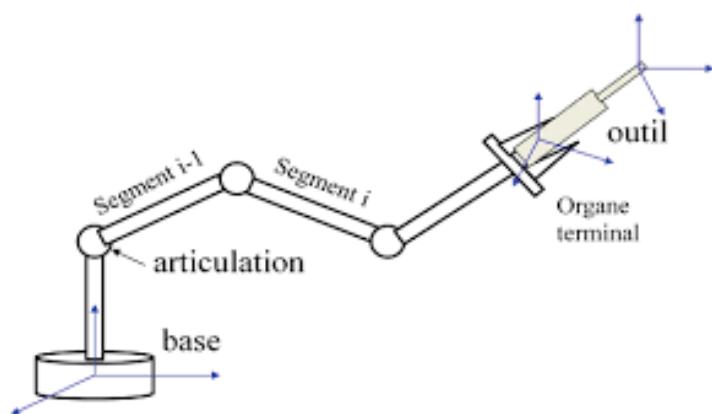


Figure 1. 7: Constituants mécaniques des robots [17].

Pour la norme ISO:8373 un robot industriel est « un robot programmable sur trois axes ou plus, qui peut être fixé sur place ou mobile, destiné à être utilisé dans des applications d'automatisation

industrielle » [18]. Les trois premiers degrés de liberté du robot définissent le porteur du robot tandis que les degrés restant définissent le poignet du robot [16]. Il est à signaler, que la plupart des robots industriels ont une chaîne cinématique ouverte.

1.3.2. Terminologies

1.3.2.1. Articulations

Une articulation dans un robot industriel sériel a les deux rôles suivants:

- Assure la liaison entre deux corps successifs ;
- Réduit le mouvement relatif du corps aval par rapport au corps qui est en amont à un.

Ainsi, on distingue deux types d'articulations :

- **Articulation rotatoire** (Symbole : R): articulation de type pivot réduisant le mouvement entre deux corps à une rotation autour d'un axe qui leur est commun. La situation relative entre les deux corps est donnée par l'angle autour de cet axe [19].
- **Articulation prismatique** (Symbole : P): articulation de type glissière réduisant le mouvement relatif entre les deux corps à une translation le long d'un axe. La situation relative entre les deux corps est mesurée par une distance [20].

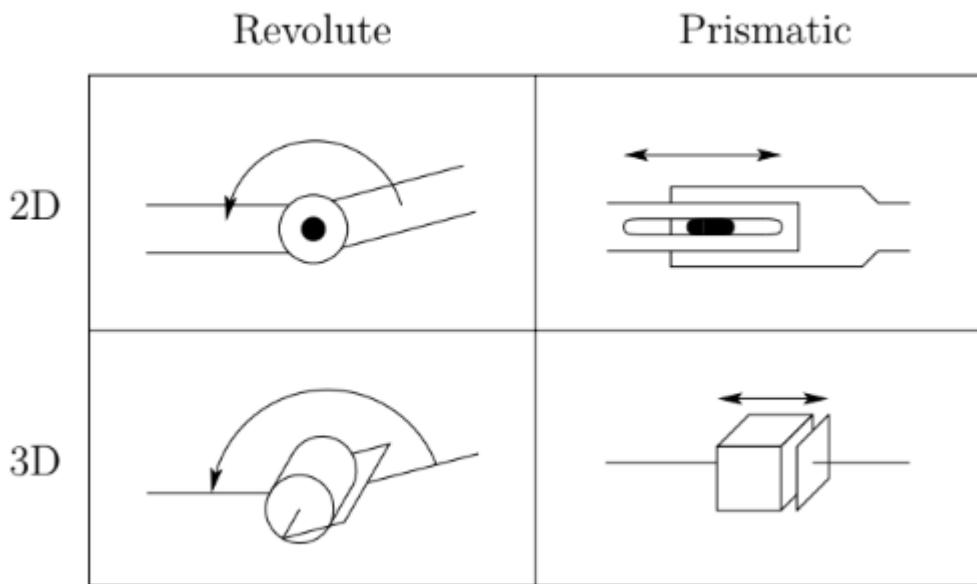


Figure 1.8 : Représentation symbolique des articulations des robots [21].

1.3.2.2. Degrés de liberté

Le nombre de degrés de liberté d'un robot manipulateur industriel est égal à la somme de ses articulations. Pour que le robot exécute une tâche donnée, il faut que le nombre de ses degrés de liberté soit égal ou supérieur à celui de cette tâche.

1.3.2.3.Espace opérationnel

L'espace opérationnel est celui dans lequel est représentée la position et l'orientation de l'organe terminal sont exprimées dans un repère fixe, généralement lié à la base. La dimension de l'espace opérationnel est égale à six, dont trois translations et trois rotations [22].

1.3.2.4.Espace articulaire

Une position et une orientation de l'organe terminal du robot peut être exprimée en fonction des différentes positions articulaires (appelées variables articulaires). Ainsi, on dit qu'elle est exprimée dans l'espace articulaire [22]. La dimension de cet espace, pour un robot industriel est égal au nombre de ses articulations.

1.4. Architectures cinématiques

La nature et la disposition des axes du porteur des robots sériels définissent leurs architectures cinématique. L'architecture d'un robot industriel figure parmi l'une des cinq familles suivantes [23]:

- ✓ **Cartésien (PPP)** :les articulations du porteur cartésien sont prismatiques d'axes perpendiculaires 2 à 2. Le volume de travail est un parallélépipède. Ce porteur présente les avantages suivants : une excellente précision, une bonne résolution, cinématique et facile à modéliser [24].
- ✓ **Sphérique (RRP)** :les deux premiers axes sont orthogonaux et concourants, la translation est perpendiculaire au second axe de rotation. Le volume de travail est sphérique. Il a les avantages suivants :plus léger et bon espace de travail. Par contre, il présente les inconvénients suivants : cinématique complexe et volume de travail limité pour éviter collisions [16].
- ✓ **Cylindrique (RPP)** :les deux premiers axes sont parallèles, le troisième est perpendiculaire aux deux premiers. Le volume de travail est cylindrique. La cinématique des robots cylindriques est simple et ils sont aussi presque indépendants de la gravité. En revanche leurs précision est médiocre.
- ✓ **Anthropomorphique (RRR)** :les trois articulations sont rotoïdes. les axes de la deuxième et de la troisième articulations sont parallèles, et ils sont perpendiculaires à l'axe de la première. La plupart des robots industriels ont un porteur de ce type [16].
- ✓ **SCARA (Selective Compliance Articulated Robot for Assembly -RRP)** :le porteur de ces robots est constitué de deux articulations rotoïdes et une troisième prismatique d'axes parallèles. Le volume de travail de ce robot est torique. Comme ce type de robot est à la fois précis et rapide, il est largement utilisé dans les opérations d'assemblage.

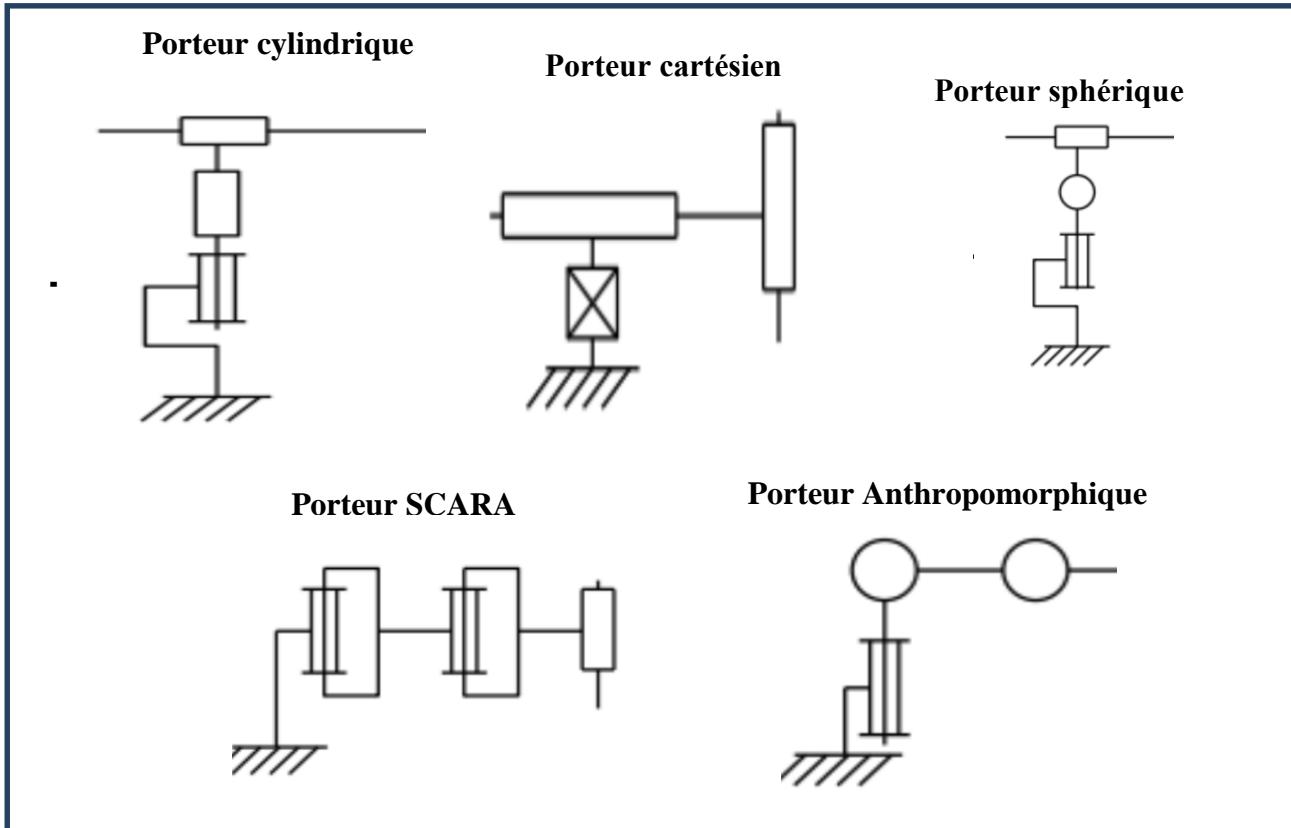


Figure 1. 9: différents types de porteurs.

1.5. Performance des robots

La Norme ISO 9946 fixe l'ensemble des performances que les fabricants de robots doivent signaler dans les manuels fournis. Les plus importants sont les suivantes :

- La charge utile transportable sans dégrader les performances du robot. elle est déterminée dans les conditions les plus défavorables. La charge utile des robots industriels varie de quelques kilos à quelques tonnes [16].
- Exactitude : écart entre situation commandée et moyenne des situations atteintes.
- La répétabilité, ce paramètre caractérise la capacité que le robot a à retourner vers un point (position, orientation) donné. La répétabilité correspond à l'erreur maximum de positionnement sur un point prédéfini dans le cas de trajectoires répétitives. En général, la répétabilité est de l'ordre de 0,1 mm [16].
- Les débattements, la vitesse maximale et l'accélération de chaque axe [16].
- La vitesse linéaire maximale de l'organe terminal.

Chapitre 2: Modélisations des bras manipulateurs

2.1. Introduction

La commande d'un bras manipulateur nécessite l'établissement de certains modèles mathématiques, qui relient les variables articulaires aux variables opérationnelles, et des lois de commande qui génèrent les trajectoires de l'organe terminal [2]. Dans la littérature, les trois modèles suivants sont utilisés [25]:

- **Les modèles géométriques direct et inverse** : le modèle géométrique direct donne les variables opérationnelles de l'organe terminal en fonction des variables articulaires. Alors que le modèle géométrique inverse donne la relation inverse.
- **Les modèles cinématiques direct et inverse** : le modèle cinématique direct exprime les vitesses opérationnelles de l'organe terminal en fonction des vitesses et des variables articulaires. Par contre, la relation inverse s'appelle le modèle cinématique inverse.
- **Le modèle dynamique** : il donne l'expression des différents couples des actionneurs du robot en fonction des positions, vitesses et accélérations des articulations et des forces extérieures.

2.2. Modèles Géométriques

2.2.1. Modèle Géométrique direct

Le modèle Géométrique directe (MGD) donne la position et l'orientation de l'organe terminal par rapport à la base. Pour établir ce modèle, il est primordial d'associer à chaque corps de la chaîne cinématique C_j un repère orthonormé R_j .

Pour que le passage entre les différents repères se fasse à l'aide d'un produit matriciel, les roboticiens utilisent le concept « des coordonnées homogènes » [2]. Ainsi, le passage du repère R_j au repère R_i est décrit par une matrice iT_j de dimension 4*4 appelée matrice de transformations homogènes. Cette matrice a l'expression suivante :

$${}^iT_j = \begin{bmatrix} {}^iA_j & {}^iP_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^iS_j & {}^iN_j & {}^iA_j & {}^iP_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Où :

- iS_j , iN_j et iA_j désignent respectivement les vecteurs unitaires suivant les axes x_j , y_j et z_j du repère R_j exprimés dans le repère R_i .
- iA_j est la matrice d'orientation du repère R_j par rapport au repère R_i . Cette matrice est une matrice orthogonale.

- iP_j est le vecteur exprimant l'origine du repère R_j dans le repère R_i .

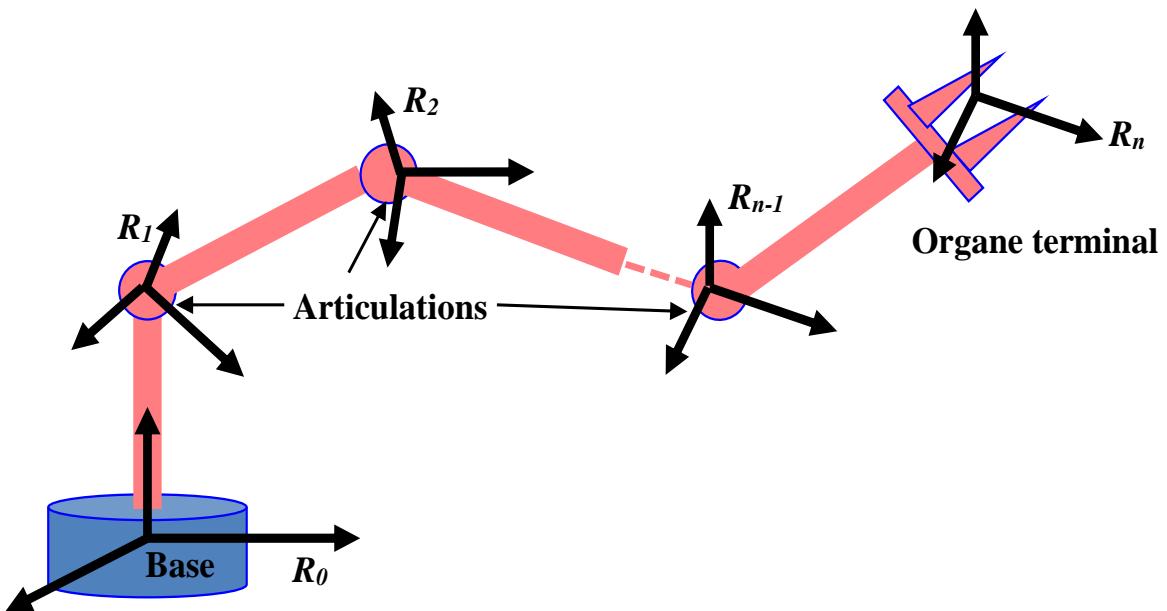


Figure 2. 1 : Placement des repères

Après avoir fixé des repères à chaque corps du robot, les matrices ${}^{j-1}T_j$ peuvent être calculées. Ainsi, le MGD d'un robot à n d.d.l. est donné par la relation suivante :

$${}^0T_n = {}^0T_1 * {}^1T_2 * \dots * {}^{n-2}T_{n-1} * {}^{n-1}T_n \quad (2.1)$$

Dans la littérature, le placement des différents repères R_j . deux conventions sont, largement, utilisées :

- **La convention de Denavit-Hartenberg (DH):**convient pour les robots ayant une chaîne cinématique ouverte simple.
- **La convention de Denavit-Hartenberg Modifiée (DHM):**convient pour la plupart des robots.

Dans ce travail, la modélisation géométrique est basée sur la notation de DHM. Cette notation est fondée sur les hypothèses suivantes :

- ✓ La structure mécanique est composée de $n+1$ corps rigides C_j ($j=0,\dots,n$). Où C_0 désigne la base du robot et C_n est l'organe terminal,
- ✓ Le robot a n articulations, qui sont supposées idéales.
- ✓ A chaque corps C_j , est attaché un repère R_j ,
- ✓ l'axe z_j est porté par l'axe de rotation de l'articulation.
- ✓ L'axe x_j est porté par la perpendiculaire commune entre z_j et z_{j+1} .

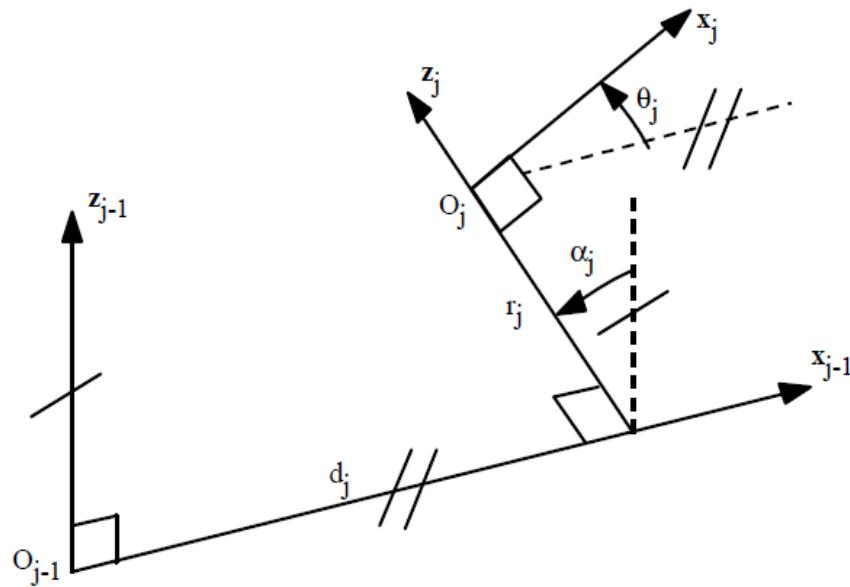


Figure 2. 2: convention de Denavit-Hartenberg Modifiée (DHM) [25].

Dans la convention de DHM, Le passage de R_{j-1} vers R_j se fait à l'aide des 4 paramètres θ_j, d_j, r_j et α_j , appelé paramètres de DH, qui sont définies comme suit [2] :

- α_j : angle entre z_{j-1} et z_j correspond à une rotation au tours de x_{j-1} ;
- d_j : distance entre z_{j-1} et z_j suivant x_{j-1} ;
- θ_j : angle entre x_{j-1} et x_j correspond à une rotation au tours de z_j ;
- r_j : distance entre x_{j-1} et x_j suivant z_j ;

Ainsi, la matrice ${}^{j-1}T_j$, permettant le passage du repère R_j au repère R_{j-1} , pour la convention DHM a l'expression suivante :

$${}^{j-1}T_j = \begin{bmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) & 0 & d_j \\ \cos(\alpha_j)\sin(\theta_j) & \cos(\alpha_j)\cos(\theta_j) & -\sin(\alpha_j) & -r_j\sin(\alpha_j) \\ \sin(\alpha_j)\sin(\theta_j) & \sin(\alpha_j)\cos(\theta_j) & \cos(\alpha_j) & r_j\cos(\alpha_j) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Pour cette notation, il est utile de souligner les points suivants :

- ✓ Le repère R_0 est choisi, la plupart des temps, confondu avec le repère R_1 quand la première variable articulaire.
- ✓ L'axe x_n , afin de simplifier le modèle, est choisi parallèle x_n quant q_n est nulle.

2.2.2. Modèle Géométrique inverse

Le modèle géométrique inverse (MGI) d'un robot permet d'exprimer les variables articulaires q_i en fonction des coordonnées opérationnelles (position et orientation : $s_x, s_y, s_z, \dots, p_x, p_y$ et p_z). Parmi

les méthodes utilisées pour trouver le MGI figure la méthode de Paul. L'avantage de cette méthode réside dans le fait qu'elle convient à la plupart des robots industriels [2]. Pour présenter cette méthode, supposons qu'une position désirée est définie par la matrice homogène ayant l'expression suivante :

$$\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_x & \mathbf{n}_x & \mathbf{a}_x & \mathbf{p}_x \\ \mathbf{s}_y & \mathbf{n}_y & \mathbf{a}_y & \mathbf{p}_y \\ \mathbf{s}_z & \mathbf{n}_z & \mathbf{a}_z & \mathbf{p}_z \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Les éléments de cette matrice sont supposés connus. Mathématiquement, pour le robot atteint cette position il faut que :

$$\mathbf{U}_0 = {}^0\mathbf{T}_n = {}^0\mathbf{T}_1(\mathbf{q}_1) * {}^1\mathbf{T}_2(\mathbf{q}_2) * \dots * {}^{n-2}\mathbf{T}_{n-1}(\mathbf{q}_{n-1}) * {}^{n-1}\mathbf{T}_n(\mathbf{q}_n) \quad (2.4)$$

Pour trouver les solutions de l'équation (2.4) Paul a proposé une méthode qui consiste à prémultiplier successivement les deux membres de l'équation par la matrice ${}^j\mathbf{T}_{j-1}$ avec ($j=1, \dots, n-1$) [2].

Par exemple, pour un robot à 4 d.d.l, la relation s'écrit :

$$\mathbf{U}_0 = {}^0\mathbf{T}_1(\mathbf{q}_1) * {}^1\mathbf{T}_2(\mathbf{q}_2) * {}^2\mathbf{T}_3(\mathbf{q}_3) * {}^3\mathbf{T}_4(\mathbf{q}_4) \quad (2.5)$$

Les démarches de la méthode sont les suivantes :

- ✓ Pour trouver \mathbf{q}_1 , pré multipliant (2.5) par ${}^1\mathbf{T}_0(\mathbf{q}_1)$, on obtient la relation suivante :

$${}^1\mathbf{T}_0(\mathbf{q}_1) \mathbf{U}_0 = {}^1\mathbf{T}_2(\mathbf{q}_2) * {}^2\mathbf{T}_3(\mathbf{q}_3) * {}^3\mathbf{T}_4(\mathbf{q}_4) \quad (2.6)$$

En identifiant terme à terme les deux membres de l'équation (2.6). On obtient un système d'une ou deux équations fonction de \mathbf{q}_1 seulement. Ainsi, on peut déduire l'expression de \mathbf{q}_1 .

- ✓ La succession d'équations permettant de calculer les trois autres \mathbf{q}_j est la suivante:

$${}^2\mathbf{T}_1(\mathbf{q}_2) {}^1\mathbf{T}_0(\mathbf{q}_1) \mathbf{U}_0 = {}^2\mathbf{T}_3(\mathbf{q}_3) * {}^3\mathbf{T}_4(\mathbf{q}_4) \quad (2.7)$$

$${}^3\mathbf{T}_2(\mathbf{q}_3) {}^2\mathbf{T}_1(\mathbf{q}_2) {}^1\mathbf{T}_0(\mathbf{q}_1) \mathbf{U}_0 = {}^3\mathbf{T}_4(\mathbf{q}_4) \quad (2.8)$$

Logiquement, le calcul du MGI conduit à un cas parmi les trois cas suivants [2]:

- ✓ Pas de solutions : la position se trouve hors le volume du travail du robot ;
- ✓ Un nombre fini de solutions ;
- ✓ Un nombre infini de solutions : le robot est redondant visé à vis la tâche.

2.3. Modèles Cinématiques

2.3.1. Modèle cinématique direct

Le modèle cinématique direct (MCD) exprime les vitesses opérationnelles de l'organe terminal dans un repère R_i en fonction des positions et des vitesses articulaires. Ce modèle est un modèle linéaire et il s'écrit comme suit [2, 3] :

$${}^i\dot{X} = {}^iJ_n \dot{Q} \quad (2.9)$$

Où :

- ✓ ${}^i\dot{X}$: est le vecteur des vitesses opérationnelles exprimé dans le repère R_i , il est de dimension $m \leq 6$;
- ✓ \dot{Q} : est le vecteur des vitesses articulaire, il est de dimension n (où n est le nombre de d.d.l. du robot);
- ✓ iJ_n : est la matrice jacobienne exprimée dans le repère R_i , elle est de dimension $m \times n$;

Le vecteur des vitesses opérationnelles peut être écrit sous la forme suivante :

$${}^i\dot{X} = \begin{bmatrix} {}^iV_n \\ {}^i\omega_n \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

iV_n Vecteur de translation de de l'organe terminal exprimé dans le repère R_i .
 ${}^i\omega_n$: Vecteur de rotation de de l'organe terminal exprimé dans le repère R_i .

En appliquant le théorème de composition des vitesses, les vitesses de translation et de rotation du repère terminal s'écrivent [2]:

$${}^iV_n = \sum_{k=1}^n [\sigma_k {}^iA_k {}^k a_k + \bar{\sigma}_k {}^iA_k ({}^k a_k \times {}^k L_{k,n})] \dot{q}_k \quad (2.11)$$

$${}^i\omega_n = \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_k {}^iA_k {}^k a_k \dot{q}_k \quad (2.12)$$

avec :

- ✓ σ_k : variable booléenne, elle vaut 1 c'est l'articulation est prismatique sinon (articulation rotatoire) elle est égal à 0.
- ✓ iA_k : la matrice d'orientation du repère R_k par rapport au repère R_i ;
- ✓ ${}^k a_k$: vecteur unitaire porté par l'axe z_k ;
- ✓ ${}^k L_{k,n}$: désignant le vecteur d'origine O_k et d'extrémité O_n exprimé dans le repère R_k .

Sur la base des relations (2.9), (2.11) et (2.12) on constate que la $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice iJ_n , notée par ${}^iJ_{k,n}$, s'écrit comme suit [2]:

$${}^iJ_{k,n} = \begin{bmatrix} {}^{\sigma_k}{}^iA_k {}^k\boldsymbol{a}_k + \overline{{}^{\sigma_k}{}^iA_k}({}^k\boldsymbol{a}_k \times {}^kL_{k,n}) \\ \overline{{}^{\sigma_k}{}^iA_k} {}^k\boldsymbol{a}_k \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

2.3.2. Modèle cinématique inverse

Le modèle cinématique inverse (MCI) a pour objet de donner les vitesses articulaires $\dot{\boldsymbol{q}}$ qui assurent au repère terminal une vitesse optimale $\dot{\boldsymbol{X}}$ imposée [2]. Si la matrice jacobienne est carrée ($m*n$) et régulière, le MCI s'écrit à l'aide de la relation suivante :

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = {}^iJ_n^{-1} {}^i\dot{\boldsymbol{X}} \quad (2.14)$$

Malheureusement, si la jacobienne est rectangulaire ou singulière le calcul de son inverse n'est pas possible. Dans ces situations, la matrice inverse est remplacée par le pseudo-inverse ${}^iJ_n^{+1}$ et la relation (2.14) devient :

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = {}^iJ_n^{+1} {}^i\dot{\boldsymbol{X}} \quad (2.15)$$

La littérature propose plusieurs méthodes pour calculer le pseudo-inverse. Mais dans ce travail on se limite à la présentation de la méthode basée sur le calcul explicite du rang de la matrice \boldsymbol{J} . les démarches de cette méthode sont comme suit [2]:

➤ On divise la matrice J , de dimension ($m*n$), de la façon suivante [2]:

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

La matrice J_{11} étant régulière et de dimension ($r*r$), r étant le rang de la matrice J , tel que :

➤ On pose :

$$J_1 = \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{21} \end{bmatrix} \quad J_2 = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

➤ La pseudo-inverse J^+ de J est donnée par la relation suivante [2]:

$$J^+ = J_2^t \left(J_1^t \ J \ J_2^t \right)^{-1} J_1^t \quad (2.18)$$

Lorsque J est de rang maximal, cette relation se simplifie de la façon suivante [2]:

- Si $m > n$ la pseudo-inverse J^+ est à gauche J : $J = J_1 \Rightarrow J^+ = \left(J_1^t \ J \right)^{-1} J^t$;

- Si $m < n$ la pseudo-inverse J^+ est à droite J : $J = J_2 \Rightarrow J^+ = J^t (J J^t)^{-1}$;
- Si $m = n$ la pseudo-inverse J^+ est la matrice inverse de J : $J = J_1 = J_2 \Rightarrow J^+ = J^{-1}$.

Chapitre 3: Modélisation dynamique des Robots industriels

3.1. Introduction

Le modèle dynamique inverse, largement connu sous seulement le modèle dynamique, exprime les couples et/ou les forces articulaires en fonction des positions, vitesses et accélérations articulaires ainsi que les efforts extérieurs exercés (forces et moments) par le robot sur son environnement [2, 3]. Il peut être décrit par la relation générale suivante [2, 3]:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (3.1)$$

- $\{\boldsymbol{\tau}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 \\ \boldsymbol{\tau}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\tau}_n \end{Bmatrix}$: Vecteur des couples et /ou forces des actionneurs. Il est évident que si l'articulation j est prismatique $\boldsymbol{\tau}_j$ est une force sinon $\boldsymbol{\tau}_j$ est un couple.
- \mathbf{q} : Vecteur des positions articulaires.
- $\dot{\mathbf{q}}$: Vecteur des vitesses articulaires.
- $\ddot{\mathbf{q}}$: Vecteur des accélérations articulaires.
- \mathbf{f}_e : Vecteur des efforts extérieurs

Dans la littérature plusieurs formalismes sont utilisés pour calculer le modèle dynamique. Mais tous ces formalismes sont généralement classés dans les deux familles suivantes :

- **Formalisme de Lagrange** : ce formalisme est basé sur les notions de coordonnées généralisées, les énergies et les forces généralisées [26]. Si on désigne par \mathbf{E} et \mathbf{U} , respectivement les énergies cinétique et potentielle du robot, lagrangien \mathbf{L} du robot s'écrit alors :

$$\mathbf{L} = \mathbf{E} - \mathbf{U} \quad (3.2)$$

En cas d'absence d'effort extérieur, l'équation générale du mouvement du robot peut être formulée à l'aide du lagrangien comme suit :

$$\boldsymbol{\tau}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i} \quad , i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

- **Formalisme de Newton-Euler** : ces formalismes sont fondés sur une double récurrence. Une récurrence avant allant de la base à l'organe terminal dans laquelle les vitesses, les accélérations et les torseurs dynamiques sont calculés. La récurrence arrière suit le chemin de retour, et permet non seulement de calculer les couples moteurs mais aussi les efforts appliqués à chaque corps du robot.

Le formalisme de Lagrange est très coûteux en temps de calcul par rapport au formalisme de Newton-Euler. En effet, à titre d'exemple, pour un robot à 6 d.d.l. Hollerbach [27] a trouvé que le formalisme de Lagrange nécessite de faire 66 271 multiplications et 51 548 additions alors que le formalisme de Newton-Euler, pour le même cas, fait seulement 852 multiplications et 738 additions. De plus, le formalisme de Lagrange est inapproprié lors de la phase de la conception des robots. Certes, cette phase exige de connaître les efforts appliqués alors que ce dernier fournit que les expressions des couples des actionneurs.

L'objectif visé par cette étude, est d'élaborer un programme sous l'environnement Matlab qui permet de générer le modèle dynamique d'un robot industriel quelconque afin d'être utilisé dans des prochaines études. La modélisation dynamique implantée, dans ce programme, est basée sur le formalisme de Newton-Euler. Ce choix est motivé non seulement par les arguments cités précédemment, mais, aussi, étant donné que le calcul avec ce formalisme peut être symbolique et/ou numérique.

3.2. Formalisme de Lagrange

En négligeant les frottements, les élasticités et les efforts extérieurs, le formalisme de Lagrange (équations III.2 et III.3), conduit à un modèle dynamique ayant la formulation générale suivante [2, 3]:

$$\{\boldsymbol{\tau}\} = [\mathbf{B}]\{\ddot{\boldsymbol{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\boldsymbol{q}}\} + \{\mathbf{Q}\} \quad (3.4)$$

Où:

- \mathbf{B} : est une matrice carrée de dimension n appelée matrice d'inertie du robot. Elle est symétrique et définie positive. Cette matrice est déduite en écrivant l'énergie cinétique du robot sous forme quadratique, comme suit [2, 3]:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\{\dot{\boldsymbol{q}}\}^T [\mathbf{B}] \{\dot{\boldsymbol{q}}\} \quad (3.5)$$

- $[\mathbf{C}]\{\dot{\boldsymbol{q}}\}$: est un vecteur colonne de dimension n représentant les couples/forces de Coriolis et des forces centrifuges. Les éléments de la matrice $[\mathbf{C}]$ peuvent être calculés à partir du symbole de Christoffel C_{ijk} de la manière suivante [2, 3]:

$$\begin{cases} C_{ij} = \sum_{k=1}^n C_{ijk} \dot{q}_k \\ C_{ijk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \right] \end{cases} \quad (3.6)$$

- $\{\mathbf{Q}\} = [\mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_n]^T$: est un vecteur, colonne de dimension n , des couples/forces de gravité. Les éléments de ce vecteur se calculent sur la base de l'énergie potentielle à l'aide de la relation suivante [2, 3]:

$$\mathbf{Q}_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (3.7)$$

3.2.1. Calcul des énergies cinétique et potentielle du robot

L'énergie cinétique du robot est la somme des énergies cinétiques de tous les corps :

$$E = \sum_{j=1}^n E_j \quad (3.8)$$

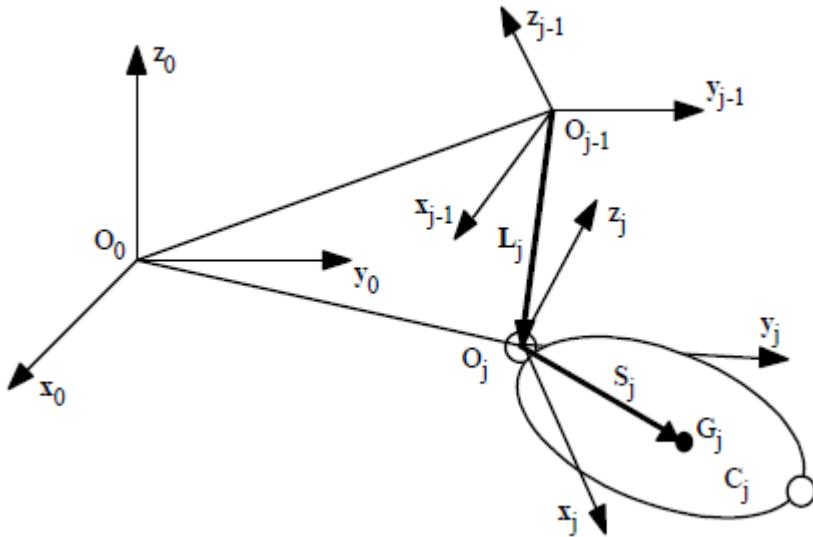


Figure 3. 1: Composition des vitesses [3].

E_j dans la relation (3.8) désigne l'énergie cinétique du corps C_j qui est calculée sur la base des équations de composition des vitesses. Ainsi, les énergies E_j , les vitesses ${}^j\omega_j$ et jV_j se calculent à l'aide de trois relations suivantes [2, 3]:

$$E_j = \frac{1}{2} [{}^j\omega_j^T {}^jJ_j {}^j\omega_j + M_j {}^jV_j^T {}^jV_j + 2 {}^jMS_j^T ({}^jV_j \times {}^j\omega_j)] \quad (3.9)$$

$${}^j\omega_j = {}^jA_{j-1} {}^{j-1}\omega_{j-1} + \overline{\sigma}_j \dot{q}_j {}^j\alpha_j \quad (3.10)$$

$${}^jV_j = {}^jA_{j-1} ({}^{j-1}V_{j-1} + {}^{j-1}\alpha_{j-1} \times {}^{j-1}P_j) + \sigma_j \dot{q}_j {}^j\alpha_j \quad (3.11)$$

Il est à signaler pour ces trois relations les deux points suivants :

- tous les vecteurs dans ces trois relations sont exprimés dans le repère R_j .
- si la base du robot est fixe, les vitesses initiales sont nulles (${}^0\omega_0 = [0, 0, 0]^T$ et ${}^0V_0 = [0, 0, 0]^T$).

De même, l'énergie potentielle du robot est la somme des énergies potentielles de tous les corps de la structure mécanique polyarticulée :

$$U = \sum_{j=1}^n U_j \quad (3.12)$$

L'énergie potentielle du corps \mathbf{U}_j se calcule à l'aide de l'expression suivante [2, 3] :

$$\mathbf{U}_j = -[\mathbf{g}^T \quad \mathbf{0}] \mathbf{T}_j \begin{bmatrix} \mathbf{jMS}_j \\ \mathbf{M}_j \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

3.2.2. Exemple d'application : Robot planaire RR

Afin de mettre en évidence les démarches à suivre par le formalisme de Lagrange prenant l'exemple du robot planaire RR de la figure III.2. Chaque corps $\mathcal{C}_j (j=1,2)$ est supposé une barre de longueur l_j et de masse M_j . La base est supposée fixe.

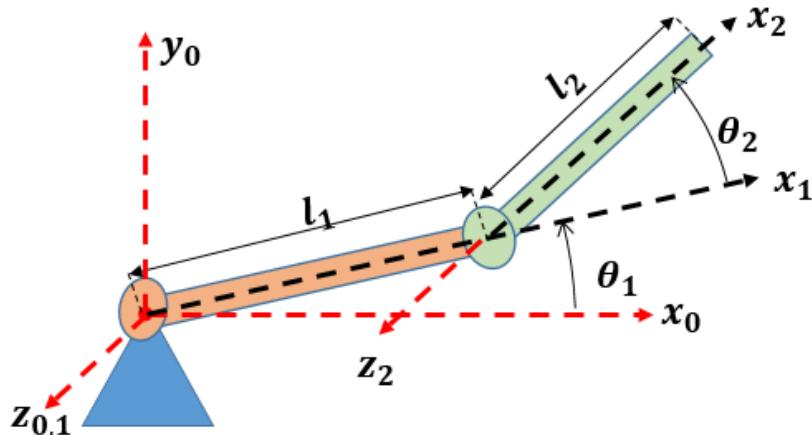


Figure 3. 2 : Robot planaire **RR**.

L'application de la convention de DHM à ce robot conduit aux matrices de Transformation homogènes suivantes :

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Les hypothèses faites conduisent aux paramètres inertIELS suivants :

$${}^1J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{avec } \alpha = \frac{M_1 l_1^2}{3} \quad (3.16)$$

$${}^2J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \text{ avec } \beta = \frac{M_2 l_2^2}{3} \quad (3.17)$$

$${}^jMS_j = \begin{pmatrix} \frac{M_j l_j}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Sur la base de ces données et des relations (3.11), (3.10) et (3.9) on trouve que l'énergie cinétique a l'expression suivante :

$$E = \frac{1}{2} [(\alpha + \beta + M_2 l_1^2) \dot{\theta}_1^2 + \beta \dot{\theta}_2^2 + (2\beta + M_2 l_1 l_2 c_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2] \quad (3.19)$$

Des relations (3.5), (3.6) et (3.19) on déduit que :

$$[B] = \begin{bmatrix} \alpha + \beta + M_2 l_1^2 + M_2 l_1 l_2 c_2 & \beta + \frac{M_2 l_1 l_2}{2} c_2 \\ \beta + \frac{M_2 l_1 l_2}{2} c_2 & \beta \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} M_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2 & -\frac{1}{2} M_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s_2 \\ \frac{1}{2} M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 s_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

L'accélération de la pesanteur exprimée dans le repère fixe R_0 est donnée par la relation suivante :

$${}^0g = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -g \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Sur la lumière de la relation (3.15) on aboutit à l'expression énergie potentielle du robot :

$$U = \frac{M_1 l_1}{2} g s_1 + M_2 \left(\frac{l_2}{2} s_{12} + l_1 s_1 \right) g \quad (3.23)$$

Les dérivées partielles de l'énergie potentielle par rapport aux deux variables articulaires conduits à la relation suivante ;

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{M_1 l_1}{2} g c_1 + M_2 \left(\frac{l_2}{2} c_{12} + l_1 c_1 \right) g \\ \frac{M_2 l_2}{2} c_{12} g \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Finalement, le modèle dynamique du robot planaire **RR** a l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \{\tau\} = \{\tau_1\} &= \begin{bmatrix} \alpha + \beta + M_2 l_1^2 + M_2 l_1 l_2 c_2 & \beta + \frac{M_2 l_1 l_2}{2} c_2 \\ \beta + \frac{M_2 l_1 l_2}{2} c_2 & \beta \end{bmatrix} \{\ddot{\theta}_1\} + \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} M_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2 & -\frac{1}{2} M_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s_2 \\ \frac{1}{2} M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 s_2 & 0 \end{bmatrix} \{\dot{\theta}_1\} &+ \begin{bmatrix} \frac{M_1 l_1}{2} g c_1 + M_2 \left(\frac{l_2}{2} c_{12} + l_1 c_1 \right) g \\ \frac{M_2 l_2}{2} c_{12} g \end{bmatrix} \quad (3.25) \end{aligned}$$

3.3. Formalisme de Newton-Euler

L'algorithme de Newton-Euler utilisé dans ce travail est celui proposé par Luh et al., [28]. Cet algorithme est basé sur une double récurrence [2]. Une récurrence avant du corps C_0 vers le corps C_n , dans laquelle sont calculées, successivement les vitesses et accélérations des corps, puis leur torseur dynamique [2]. Une fois que cette récurrence se termine, elle est suivie d'une récurrence arrière (dans le sens inverse) pour déterminer les couples des actionneurs ainsi que le bilan des efforts de chaque corps [2].

Le torseur dynamique en G_j des efforts extérieurs sur un corps j est exprimé par les équations de Newton-Euler expriment comme suit :

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{M}_j \dot{\mathbf{V}}_{Gj} \quad (3.26)$$

$$\mathcal{M}_{Gj} = I_{Gj} \dot{\omega}_j + \omega_j \times (I_{Gj} \omega_j) \quad (3.27)$$

Ce torseur s'exprime dans l'origine O_j à l'aide des relations suivantes :

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{M}_j \mathbf{V}_j + \dot{\omega}_j \times \mathbf{M}\mathbf{S}_j + \dot{\omega}_j \times (\omega_j \times \mathbf{M}\mathbf{S}_j) \quad (3.28)$$

$$\mathcal{M}_j = J_j \dot{\omega}_j + \omega_j \times (J_j \omega_j) + \mathbf{M}\mathbf{S}_j \times \dot{\mathbf{V}}_j \quad (3.29)$$

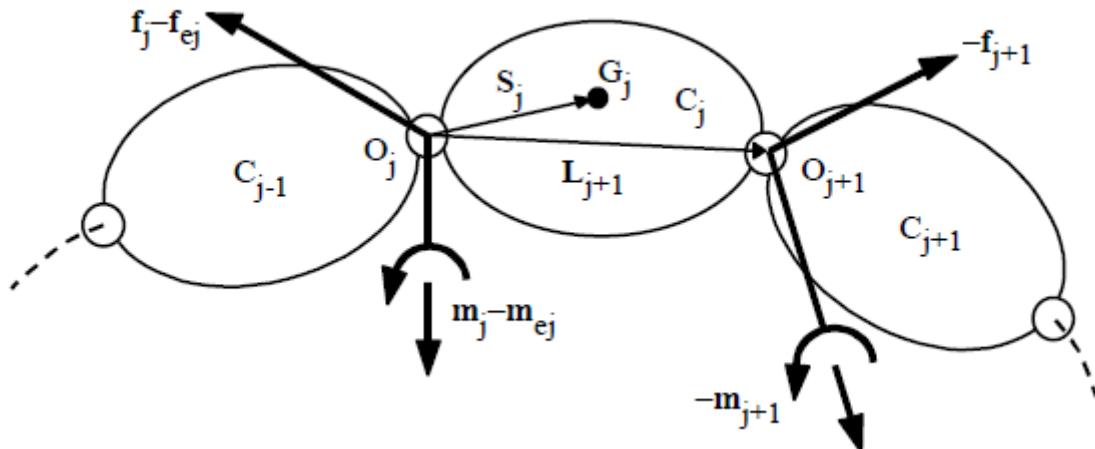


Figure 3. 3 : Bilan des efforts au corps j [3].

Lors de la récurrence arrière un bilan des efforts, écrit à l'origine \mathbf{O}_j , sur chaque corps doit être établi afin d'obtenir les grandeurs recherchées. Sur la base de la figure 3.3 on peut écrire [2]:

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{f}_j - \mathbf{f}_{j+1} + \mathbf{M}_j \mathbf{g} - \mathbf{f}_{ej} \quad (3.30)$$

$$\mathcal{M}_j = \mathbf{m}_j - \mathbf{m}_{j+1} - \mathbf{L}_{j+1} \times \mathbf{f}_{j+1} + \mathbf{S}_j \times \mathbf{M}_j \mathbf{g} - \mathbf{m}_{ej} \quad (3.31)$$

La supposition suivante :

$$\dot{\mathbf{V}}_0 = -\mathbf{g} \quad (3.32)$$

Permet d'intervenir l'effet de la gravité sans qu'elle apparaisse dans les équations du bilan des efforts. Ainsi, le torseur dynamique exercé sur le corps \mathbf{C}_j par le corps \mathbf{C}_{j-1} au point \mathbf{O}_j est donné par les deux relations suivantes [2]:

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{F}_j + \mathbf{f}_{j+1} + \mathbf{f}_{ej} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{m}_j = \mathcal{M}_j + \mathbf{m}_{j+1} + \mathbf{L}_{j+1} \times \mathbf{f}_{j+1} + \mathbf{m}_{ej} \quad (3.34)$$

De ces deux relations, le couple $\boldsymbol{\tau}_j$ se déduit à l'aide de l'expression suivante [2]:

$$\boldsymbol{\tau}_j = (\sigma_j \mathbf{f}_j + \bar{\sigma}_j \mathbf{m}_j)^T \mathbf{a}_j + \mathbf{F}_{sj} \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}_j) + \mathbf{F}_{vj} \dot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{I} \mathbf{a}_j \ddot{\mathbf{q}}_j \quad (3.35)$$

Où \mathbf{F}_{sj} , \mathbf{F}_{vj} et $\mathbf{I} \mathbf{a}_j$ sont des termes correctifs qui représentent, respectivement, l'effet des frottements secs, des frottements visqueux et des inerties des actionneurs [2].

Pour une implantation facile de l'algorithme Luh et al., [28] il est judicieux de le mettre sous la forme pratique suivante [2]:

a) récurrence avant :

initialisation : $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{V}}_0 = -\mathbf{g}$.

pour $j = 1, \dots, n$:

$${}^j \boldsymbol{\omega}_{j-1} = {}^j \mathbf{A}_{j-1} {}^{j-1} \boldsymbol{\omega}_{j-1} \quad (3.36)$$

$${}^j \boldsymbol{\omega}_j = {}^j \boldsymbol{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{\mathbf{q}}_j {}^j \mathbf{a}_j \quad (3.37)$$

$${}^j \dot{\boldsymbol{\omega}}_j = {}^j \mathbf{A}_{j-1} {}^{j-1} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1} + \bar{\sigma}_j (\ddot{\mathbf{q}}_j {}^j \mathbf{a}_j + {}^j \boldsymbol{\omega}_{j-1} \times \dot{\mathbf{q}}_j {}^j \mathbf{a}_j) \quad (3.39)$$

$${}^j \mathbf{U}_j = {}^j \hat{\boldsymbol{\omega}}_j + {}^j \hat{\boldsymbol{\omega}}_j {}^j \hat{\boldsymbol{\omega}}_j \quad (3.40)$$

$${}^j\dot{V}_j = {}^jA_{j-1}({}^{j-1}\dot{V}_{j-1} + {}^{j-1}U_{j-1}{}^{j-1}P_j) + \sigma_j(\ddot{q}_j {}^j\dot{a}_j + 2{}^j\omega_{j-1} \times \dot{q}_j {}^j\dot{a}_j) \quad (3.41)$$

$${}^jF_j = M_j {}^j\dot{V}_j + {}^jU_j {}^jMS_j \quad (3.42)$$

$${}^jM_j = {}^jJ_j {}^j\dot{\omega}_j + {}^j\omega_j \times ({}^jJ_j {}^j\omega_j) + {}^jMS_j \times {}^j\dot{V}_j \quad (3.42)$$

b) Référence arrière :

pour $j = n, \dots, 1$:

$${}^jF_j = {}^jF_j + {}^jF_{j+1} + {}^jF_{ej} \quad (3.43)$$

$${}^{j-1}f_j = {}^{j-1}A_j {}^jF_j \quad (3.44)$$

$${}^jM_j = {}^jM_j + {}^jA_{j+1}{}^{j+1}m_{j+1} + {}^jP_{j+1} \times {}^jF_{j+1} + {}^jM_{ej} \quad (3.45)$$

$$\tau_j = (\sigma_j {}^jF_j + \bar{\sigma}_j {}^jM_j)^T {}^j\dot{a}_j + F_{sj} sign(\dot{q}_j) + F_{vj} \dot{q}_j + Ia_j \ddot{q}_j \quad (3.46)$$

3.4. Présentation du programme élaboré

La figure 3.4 présente l'organigramme du programme élaboré. Le programme fait appelle à quatre fonctions qu'on a aussi élaborées afin de réduire la taille du programme, Ces quatre fonctions sont énumérées dans le tableau 3.1:

Tableau 3. 1 : Description des quatre fonctions élaborées.

fonction	arguments d'entrée	arguments de sortie	Rôle
“anti”	un vecteur	Matrice	Matrice antisymétrique associée à ce vecteur
“dh”	Paramètre de DHM	{}^{j-1}A_j , {}^jA_{j-1} et {}^{j-1}T_j	Calcul du modèle géométrique
“RA”	{}^{j-1}\omega_{j-1}, \sigma_j, {}^{j-1}\dot{V}_{j-1}, {}^jJ_j, {}^jA_{j-1}, {}^{j-1}P_j, \dot{q}_j, \ddot{q}_j, {}^{j-1}\dot{V}_{j-1}, M_j, {}^jMS_j	{}^j\omega_j, {}^j\dot{\omega}_j, {}^j\dot{V}_j, {}^jF_j, {}^jM_j	Calcul de la récurrence avant pour j
“RAR”	{}^jF_j, {}^jM_j, {}^{j-1}A_j, {}^jA_{j+1}, {}^jP_{j+1}, \sigma_j, {}^jF_{j+1}, {}^jF_{ej}, {}^{j+1}m_{j+1}, {}^jM_{ej}	$\tau_j, {}^{j-1}F_j, {}^jM_j$	Calcul de la récurrence arrière pour j

Il est à signaler que le l'organigramme présenté par la figure 3.4 fait le calcul symbolique automatique du modèle dynamique, en notant les paramètres inertIELS comme suit :

$${}^j\mathbf{MS}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{MX}_j \\ \mathbf{MY}_j \\ \mathbf{MZ}_j \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$${}^j\mathbf{J}_j = \begin{bmatrix} XX_j & XY_j & XZ_j \\ XY_j & YY_j & YZ_j \\ XZ_j & YZ_j & ZZ_j \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

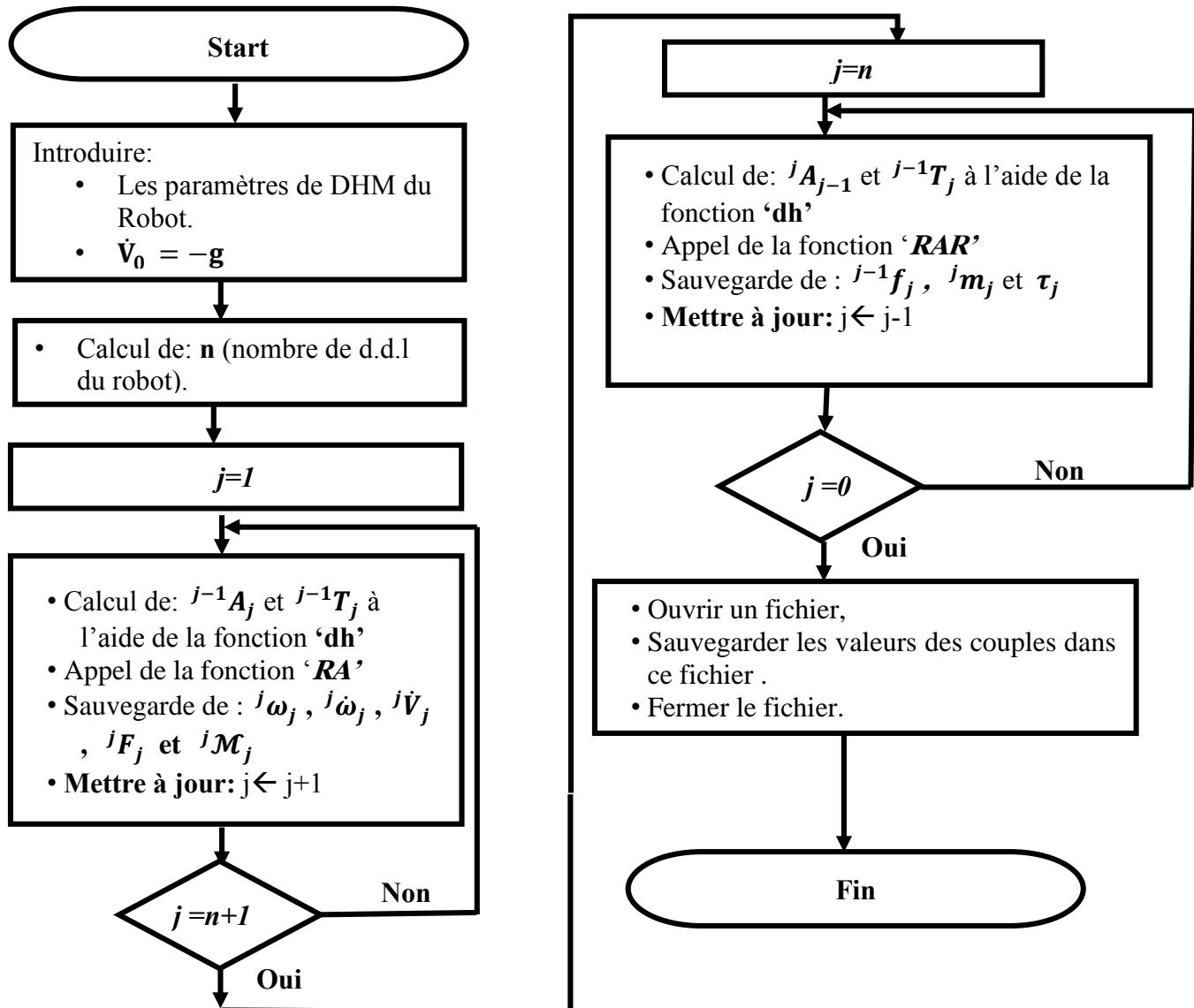


Figure 3. 4 : Organigramme du programme élaboré.

Cependant, dans le cas où les valeurs numériques des paramètres inertIELS sont connues et introduites, le modèle dynamique donné par le programme sera, seulement, fonction des positions, des vitesses et des accélérations articulaires.

Le programme ne tient pas compte des frottements et des inerties des actionneurs. Néanmoins, la fonction '**RAR**' peut être modifiée facilement pour tenir compte de ces paramètres.

3.5. Exemples pour vérification du programme élaboré

Afin de tester la validité du programme élaboré, on a pris deux robots comme modèles. Le premier est le robot à 2 d.d.l de la figure 3.2, dont on a, déjà, calculé le modèle dynamique par le formalisme de Lagrange. Le deuxième robot est le robot PUMA 560. Pour les deux cas étudiés les efforts extérieurs sont négligés.

3.5.1. Exemple1 : robot planaire **RR**

Reprenons l'exemple du robot **RR** de la section 3.2.2 avec les mêmes hypothèses. De la figure 3.2 on constate que pour ce robot :

$${}^0\dot{V}_0 = -\vec{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Afin de pouvoir comparer avec les résultats trouvés dans la section 3.2.2, on a rectifié les paramètres inertIELS dans le programme comme suit :

$${}^jJ_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & YY_j & 0 \\ 0 & 0 & YY_j \end{bmatrix}, \quad \text{avec } j = 1, 2 \quad (3.50)$$

$${}^jMS_j = \begin{pmatrix} \frac{M_j l_j}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } j = 1, 2 \quad (3.51)$$

Il reste à signaler que le programme affiche θ_i , $\dot{\theta}_i$ et $\ddot{\theta}_i$, respectivement comme *thetai*, *dthetai* et *d2thetai*.

Dans les relations suivantes (de 3.52 à 3.57) chaque grandeur calculée par le programme sera comparée à celle obtenue à l'aide du calcul manuel.

a) récurrence avant :

j=1

$${}^1\mathbf{F}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} g * m1 * \sin(theta1) - \frac{dtheta1^2 * l1 * m1}{2} \\ g * m1 * \cos(theta1) + \frac{(d2theta1 * l1 * m1)}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{calculée par le programme}} = \underbrace{\begin{pmatrix} g M_1 s_1 - \frac{M_1 l_1}{2} \dot{\theta}_1^2 \\ g M_1 c_1 + \frac{M_1 l_1}{2} \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{calculée manuellement}} \quad (3.52)$$

$${}^1\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ YY1 * d2theta1 + \frac{g * l1 * m1 * \cos(theta1)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \ddot{\theta}_1 + \frac{M_1 l_1}{2} g c_1 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

j=2

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{F}_2 &= \begin{pmatrix} m_2 * (-l_1 * \cos(\theta_2) * d\theta_1^2 + g * \sin(\theta_1 + \theta_2) + d\theta_1 * l_1 * \sin(\theta_2)) - \frac{l_2 * m_2 * (d\theta_1 + d\theta_2)^2}{2} \\ m_2 * (l_1 * \sin(\theta_2) * d\theta_1^2 + g * \cos(\theta_1 + \theta_2) + d\theta_1 * l_1 * \cos(\theta_2)) + \frac{(l_2 * m_2 * (d\theta_1 + d\theta_2))^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_2 g s_{12} - M_2 c_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 + M_2 s_2 l_1 \ddot{\theta}_1 - \frac{M_2 l_2}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ M_2 g c_{12} + M_2 s_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 + M_2 c_2 l_1 \ddot{\theta}_1 + \frac{M_2 l_2}{2} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^2\mathcal{M}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{YY2 * (d\theta_1 + d\theta_2) + (l_2 * m_2 * (l_1 * \sin(\theta_2) * d\theta_1^2 + g * \cos(\theta_1 + \theta_2) + d\theta_1 * l_1 * \cos(\theta_2)))}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \frac{M_2 l_2}{2} (g c_{12} + s_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 + c_2 l_1 \ddot{\theta}_1) \end{pmatrix} \quad (3.55) \end{aligned}$$

La récurrence arrière :Pour **j=2** :

$$\begin{aligned} \tau_2 &= YY2 * (d\theta_1 + d\theta_2) \\ &\quad + \frac{l_2 * m_2 * (l_1 * \sin(\theta_2) * d\theta_1^2 + g * \cos(\theta_1 + \theta_2) + d\theta_1 * l_1 * \cos(\theta_2))}{2} \\ &= \beta(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \frac{M_2 l_2}{2} (g c_{12} + s_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 + c_2 l_1 \ddot{\theta}_1) \quad (3.56) \end{aligned}$$

Pour **j=1** :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= YY1 * d\theta_1 + YY2 * d\theta_2 + d\theta_1 * l_1^2 * m_2 + \frac{g * l_2 * m_2 * \cos(\theta_1 + \theta_2)}{2} + \\ &\quad \frac{g * l_1 * m_1 * \cos(\theta_1)}{2} + g * l_1 * m_2 * \cos(\theta_1) - \frac{d\theta_2^2 * l_1 * l_2 * m_2 * \sin(\theta_2)}{2} + d\theta_1 * l_1 * l_2 * m_2 * \cos(\theta_2) + \frac{d\theta_2 * l_1 * l_2 * m_2 * \cos(\theta_2)}{2} - d\theta_1 * d\theta_2 * l_1 * l_2 * m_2 * \sin(\theta_2) = \\ &= (\alpha + \beta + M_2 l_1^2 + M_2 l_1 l_2 c_2) \ddot{\theta}_1 + \left(\beta + \frac{M_2 l_1 l_2}{2} c_2 \right) \ddot{\theta}_2 - M_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} M_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{M_1 l_1}{2} g c_1 + M_2 \left(\frac{l_2}{2} c_{12} + l_1 c_1 \right) g \quad (3.57) \end{aligned}$$

Des relations (3.52-3.57) on constate que le programme a donné des résultats identiques à ceux obtenus manuellement. De plus, les expressions des deux couples trouvés par le programme sont les mêmes que celles trouvées par le formalisme de Lagrange données par la relation (3.25).

3.5.2. Exemple 2 : robot PUMA 560

Le robot PUMA 560 est un robot à 6 d.d.l ayant un porteur du type anthropomorphique. Les tableaux 3.2 et 3.3 donnent, respectivement les paramètres de DHM et les paramètres inertIELS de ce robot.

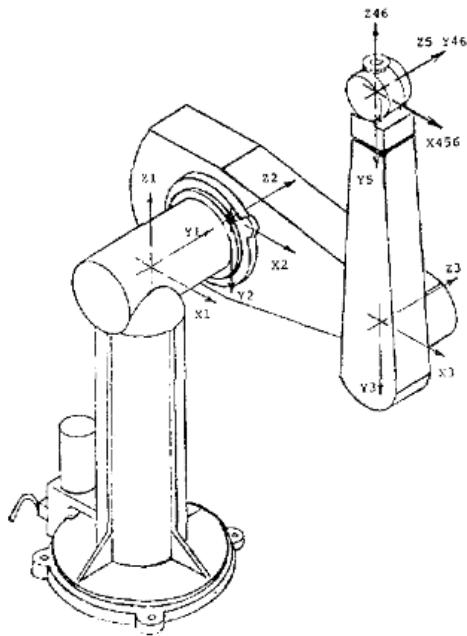


Figure 3. 5 : Robot PUMA 560 à la posture où toutes les variables articulaires sont nulles [29].

Tableau 3. 2 : Paramètres de DHM du Robot PUMA 560 [29].

j	α_j (degrés)	d_j (m)	θ_j	r_j (m)
1	0	0	θ_1	0
2	-90	0	θ_2	0.2435
3	0	0.4318	θ_3	-0.0934
4	90	-0.0203	θ_4	0.4331
5	-90	0	θ_5	0
6	90	0	θ_6	0

Tableau 3. 3 : Paramètres inertIELS du Robot PUMA 560 [29].

j	1	2	3	4	5	6
<i>Corps j</i>	Corps 1	Corps 2	Corps 3	Corps 4	Corps 5	Corps 6
<i>Masse (kg)</i>	-	17.40	4.80	0.82	0.34	0.09
J_{Sj} (m)	-	$\begin{bmatrix} 0.068 \\ 0.006 \\ -0.016 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.070 \\ 0.014 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.019 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.032 \end{bmatrix}$
J_{XXj} ($kg\ m^2$)	-	0.130	0.066	1.80×10^{-3}	1.80×10^{-3}	1.30×10^{-3}
J_{YYj} ($kg\ m^2$)	-	0.524	0.0125	0.30×10^{-3}	0.30×10^{-3}	0.40×10^{-3}
J_{ZZj} ($kg\ m^2$)	0.35	0.539	0.086	0.15×10^{-3}	0.15×10^{-3}	0.04×10^{-3}

En introduisant toutes ces données dans le programme élaboré, on trouve le modèle dynamique du robot PUMA 560 qui donné dans l'annexe A. Ici, malgré que le travail d'Armstrong et al. [29] donne le modèle dynamique de ce robot, il est très fastidieux de vérifier les expressions du modèle obtenu. En effet, les expressions des couples s'étalement sur plusieurs dizaines de pages.

La seule solution pour vérifier le modèle obtenu, c'est de tracer les couples des différents actionneurs. Pour cela, on suppose que le robot PUMA 560 se déplace entre deux positions, définies dans l'espace articulaire, suivant une loi Bang-Bang.

Tableau 3. 4 : variables articulaires des positions initiale et finale.

j	Unité	1	2	3	4	5	6
$\theta_{j_initiale}$	(°)	-20	60	-100	15	-30	25
θ_{j_final}	(°)	20	-60	100	-15	30	-25

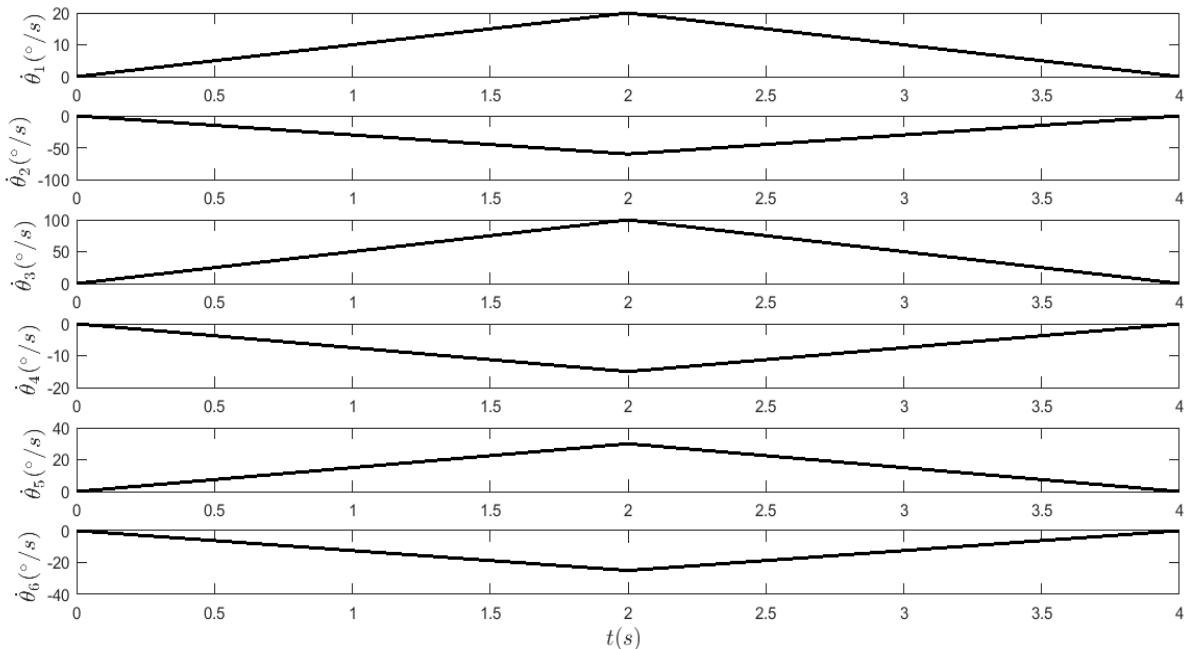


Figure 3. 6 : Evolution des vitesses articulaires des 6 articulations avec la loi Bang-Bang [30].

Pour générer les positions, les vitesses et les accélérations articulaires pour le mouvement étudié le programme de génération de trajectoire, selon cette loi de commande, élaboré par Bettahar et Bengueneb [30] est utilisé. Cette génération de trajectoire ; nous a permis de tracer les variations des couples des actionneurs en fonction du temps.

Sur les figures 3.6 les variations des couples des actionneurs en fonction du temps. Tout d'abord on constate une discontinuité de presque tous les couples à l'instant $t = 2s$. Ce résultat est attendu, du fait que les accélérations présentent une discontinuité à cet instant qui marqué par le changement de la phase du mouvement. Cette discontinuité peut engendrée des vibrations. Afin d'atténuer ces vibrations, les mouvements des différents axes doivent être synchronisés et adopter des lois de commande continues en accélération.

Les couples des articulations du poignet sont faibles par rapport aux couples des articulations du porteur, Chose qui est complètement logique pour une structure mécanique polyarticulée.

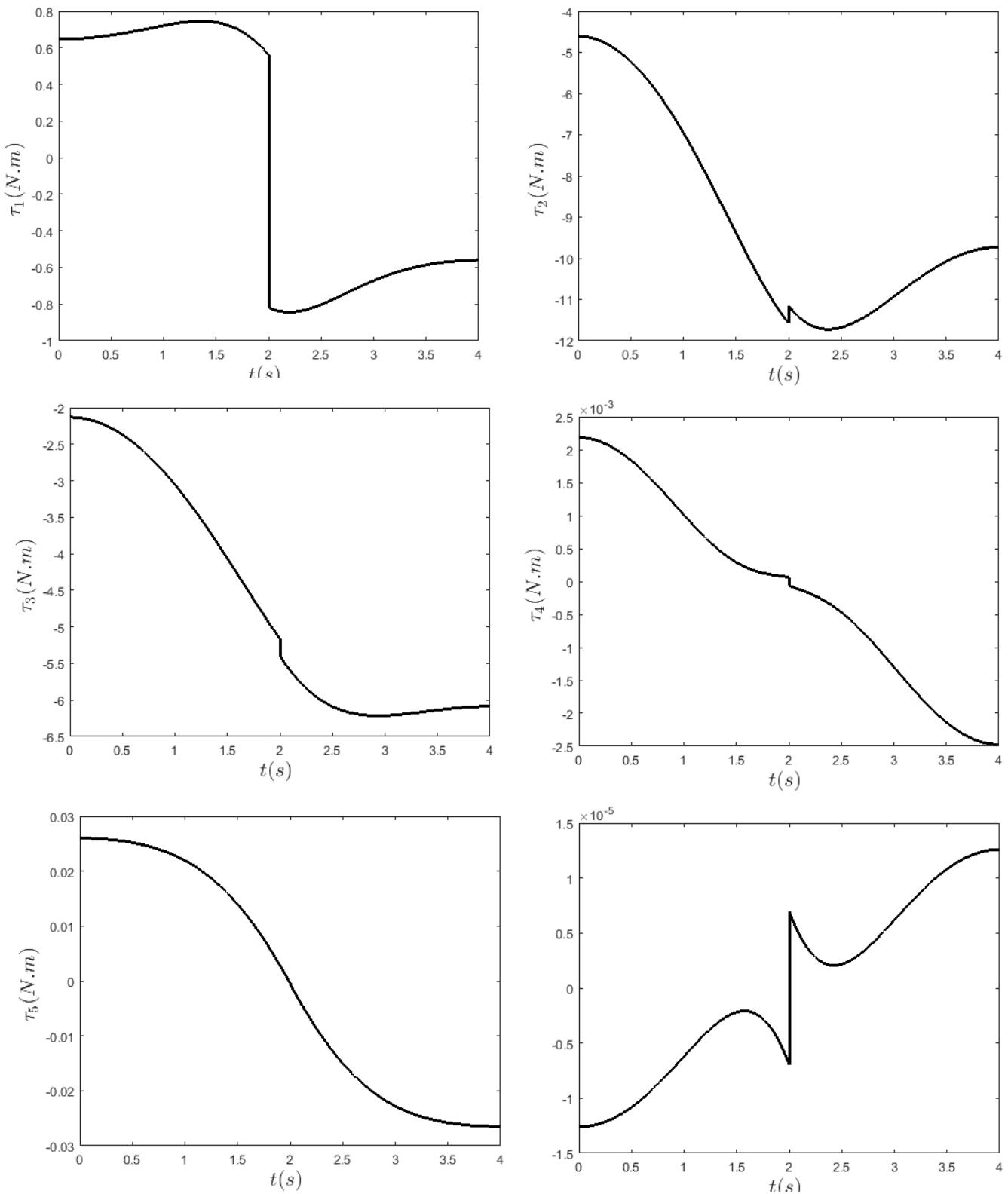


Figure 3.7 : Variation des couples des actionneurs pour le déplacement étudié.

Conclusion Générale

La modélisation dynamique basée sur les équations du Newton Euler permet non seulement de déterminer les couples et/ou les forces des actionneurs à assurer pour générer une trajectoire donnée. Mais elle permet, également, d'établir les bilans des efforts sur chaque corps. Comme elle peut servir de base pour l'identification des paramètres inertIELS du robot.

Le formalise de Newton-Euler fondé sur la méthode de Luh et al. [28] Présente par rapport au formalisme de Lagrange les deux principaux avantages suivants :

- temps de calcul réduit : en effet, le formalisme de Lagrange est déconseillé si le nombre d'axe du robot dépasse 4.
- Peut-être implanté directement dans le contrôleur du robot : le formalisme de Newton-Euler peut faire le calcul numériquement.

Au cours de ce travail, on a implanté l'algorithme de Luh et al. [28] Sous l'environnement Matlab. Pour tester la validité du programme les deux modèles suivants étaient envisagés :

- Le robot planaire RR : les calculs issus du programme étaient comparés à ceux obtenus manuellement. La vérification a montré que les résultats donnés par les deux voies sont identiques.
- Le robot PUMA 560 : comme ce modèle est volumineux le recours à la vérification graphique était la seule solution. Cette vérification graphique a montré une concordance des graphiques des couples avec la loi de commande.

Cependant, certains points restent à améliorer dans ce programme, dans les principaux sont :

- L'utilisation d'une interface graphique, pour faciliter la manipulation,
- La méthode de présentation des résultats.

Les perspectives ouvertes par cette étude sont les suivantes :

- L'étude de l'effet de la loi de commande sur les valeurs du couple
- L'identification des paramètres dynamique.

Bibliographie

- [1] «Automation & digitisat,» Web magazine of industr. com, [En ligne]. Available: <https://www.industr.com/en/ifr-presents-world-robotics-report-2538259>. [Accès le 05 05 2021].
- [2] W. KHALIL et E. DOMBRE, Bases de la modélisation et de la commande des robots-manipulateurs de type série, 2012.
- [3] W. Khalil et E. Dombre, Modeling, Performance Analysis and Control of Robot Manipulators, Designs and Patents Act, 2007.
- [4] F. Z. BOUZIANE, Rétro-conception du bras horizontal de robot, Tlemcen, Ingénierie des systèmes mécaniques: UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID-TLEMCEN, 2013.
- [5] Wassinia Zirar, «"Bios de robots : Unimate, le premier ouvrier mécanique",» 30 07 2014. [En ligne]. Available: <https://www.usinenouvelle.com/article/bios-de-robots-unimate-le-premier-ouvrier-mecanique.N276769>. [Accès le 29 05 2021].
- [6] M. PRIEL, les robots industriels: caractéristiques, performances et choix, Edition AFNOR, 1990.
- [7] D. CORBEL, Contribution à l'amélioration de la précision des robots parallèles., Montpellier: Sciences et Techniques du Languedoc, 2008.
- [8] directindustry, [En ligne]. Available: <https://www.directindustry.fr/prod/kuka-ag/product-17587-2062325.html>. [Accès le 29 05 2021].
- [9] B. Mohamed et C. Reymond, «Généralités :Robots sériels et parallèles,» EPLF, 2017.
- [10] Bedard, Modeling and simulation of dynamic biped Plan 9, University Laval Quebec, 2006.
- [11] S. H. H. K. Y. K. & S. S. Kajita, la modélisation à la génération du mouvement, Paris, 2009.
- [12] C. Ait Ali, Commande d'un robot mobile par vision, Tizi-Ouzou: Recherche Oerationnelle - M'ethodes et mod'eles de d'ecision, 2016.
- [13] P. REIGNIER, Pilotage réactif d'un robot mobile: étude du lien entre la perception et l'action., Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG), 1994.
- [14] M. GOULET, Hexapode: développement mécatronique d'un robot marcheur, 2006.

Annexe

- [15] S. VIOLET, J. Dupeyroux et J. Serres, Le robot fourmi AntBot. Conception et réalisation d'un robot bio-inspiré. Techniques & Culture, Revue semestrielle d'anthropologie des techniques, 2020.
- [16] J. Boimond, «Robotique,» [En ligne]. Available: https://www.ensta-bretagne.fr/jaulin/mastersds_cours_robot_boimond.pdf. [Accès le 28 05 2021].
- [17] D. Fadhila, ETUDE ET CONCEPTION D'UN ROBOT MANIPULATEUR, Batna, 2012.
- [18] «ISO 8373:2012(fr) Robots et composants robotiques — Vocabulaire,» ISO, [En ligne]. Available: <https://www.iso.org/obp/ui/fr/#iso:std:iso:8373:ed-2:v1:fr>. [Accès le 10 10 2020].
- [19] F. NASSI, Contrôle de la dynamique d'un manipulateur à deux bras flexibles., Biskra, 2019.
- [20] B. NASSIM et C. ZHOR, Etude De Deux Commandes Robustes À Modes Glissants Et À Retard (Tdc): Application À La Commande D'Un Bras Manipulateur, 2014.
- [21] M. W. Spong, S. Hutchinson et M. Vidyasagar, Robot Modeling and, New York : wiley, 2006.
- [22] A. Bahloul., « Sur la commande des robots manipulateurs industriels en co-manipulation robotique. Automatique / Robotique.,» Université Paris-Saclay, 2018. , 2018.
- [23] C. GERMAIN, Conception d'un robot parallèle à deux degrés de liberté pour des opérations de prise et de dépose, 2013.
- [24] S. H. OUALI, Etude et réalisation d'un Bras Manipulateur, msila, 2016.
- [25] W. KHALIL et E. DOMBRE, Bases de la modélisation et de la commande des, 2012.
- [26] R. J. Schilling , Fundamentals of robotics analysis control by Robert, Asoke K.Ghosh, Prentice-Hall of India, 2003.
- [27] J. Hollerbach, «A recursive Lagrangian formulation of manipulator dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity,» *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, Vols. %1 sur %2SMC-10, p. 730–736, Nov. 1980..
- [28] L. J.Y.S., W. M.W. et P. R.C.P., «On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators,» *Trans. ofASME , J. of Dynamic Systems*, vol. 102, pp. 69-76, 1980.
- [29] B. Armstrong, O. Khatib et . J. Burdick, «The Explicit Dynamic Model and Inertial Parameters of the PUMA 566 Arm,» chez In: *IEEE Int. Conf. on Rob. & Aut.*, , San Francisco, 1986.
- [30] A. Bettahar et b. Bengueneb, «Génération de trajectoire d'un robot industriel entre deux points sous contraintes cinématiques,» mémoire de fin d'étude master académique en construction - université de Mostaganem, Mostaganem, 2021.

Annexe

Annexe A

Modèle dynamique du robot PUMA 560

Annexe

$$\begin{aligned}
& 2 + \Theta 3) + s(\Theta 4)*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2)))^2 - c(\Theta 4)*(0.4318*(\Theta 1*c(\Theta 2)*c(\Theta 3) - 1.0*\Theta 1*s(\Theta 2)*s(\Theta 3))^2 - 0.2435*\Theta 1 - 0.0934*\Theta 2*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) \\
& + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2)) + 0.4313*\Theta 3*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2)) + 0.0203*c(\Theta 3)*(\Theta 1*s(\Theta 2) + \Theta 1*\Theta 2*c(\Theta 2)) + 0.4331*s(\Theta 3)*(\Theta 1*s(\Theta 2) + \Theta 1*\Theta 2*c(\Theta 2)) \\
& + 0.0203*\Theta 3*(\Theta 1*c(\Theta 2)*c(\Theta 3) - 1.0*\Theta 1*s(\Theta 2)*s(\Theta 3)) - 0.0203*c(\Theta 4)*(\Theta 2 + \Theta 3) + s(\Theta 4)*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2))) * (\Theta 1*c(\Theta 2)*c(\Theta 3) - 1.0*\Theta 1*s(\Theta 2)*s(\Theta 3)) \\
& - 0.4331*c(\Theta 3)*(\Theta 1*c(\Theta 2) - 1.0*\Theta 1*\Theta 2*s(\Theta 2)) + 0.0203*s(\Theta 3)*(\Theta 1*c(\Theta 2) - 1.0*\Theta 1*\Theta 2*s(\Theta 2)) + 0.0934*\Theta 1*(\Theta 1*c(\Theta 2)*c(\Theta 3) - 0.4331*(\Theta 1*c(\Theta 2)*c(\Theta 3) \\
& - 1.0*\Theta 1*s(\Theta 2)*s(\Theta 3)*s(\Theta 4)*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2))) + 0.4318*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2))^2 - 0.0934*\Theta 1*\Theta 2*s(\Theta 2) - 0.2435*\Theta 1*\Theta 2*c(\Theta 2)*s(\Theta 2))) \\
& - 0.00015*s(\Theta 6)*(\Theta 5 + c(\Theta 4)*(\Theta 2 + \Theta 3) - 1.0*\Theta 4*(s(\Theta 4)*(\Theta 2 + \Theta 3) - 1.0*c(\Theta 4)*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2))) + s(\Theta 4)*c(\Theta 3)*(\Theta 1*s(\Theta 2) + \Theta 1*\Theta 2*c(\Theta 2)) + \Theta 3*(\Theta 1*c(\Theta 2)*c(\Theta 3) - 1.0*\Theta 1*s(\Theta 2)*s(\Theta 3)) + s(\Theta 3)*(\Theta 1*c(\Theta 2) - 1.0*\Theta 1*\Theta 2*s(\Theta 2)))) + c(\Theta 5)*(0.00004*\Theta 06 + \\
& 1.0*(0.000015*c(\Theta 6)*(s(\Theta 5)*(\Theta 4 + \Theta 1*c(\Theta 2)*c(\Theta 3) - 1.0*\Theta 1*s(\Theta 2)*s(\Theta 3)) - 1.0*c(\Theta 5)*s(\Theta 4)*(\Theta 2 + \Theta 3) - 1.0*c(\Theta 4)*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2))) \\
& - 0.000015*s(\Theta 6)*(\Theta 5 + c(\Theta 4)*(\Theta 2 + \Theta 3) + s(\Theta 4)*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2))) + c(\Theta 6)*(\Theta 5 + c(\Theta 4)*(\Theta 2 + \Theta 3) + s(\Theta 4)*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2))) + s(\Theta 6)*(\Theta 5 + c(\Theta 4)*(\Theta 2 + \Theta 3) + s(\Theta 4)*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2))) \\
& - 0.000015*c(\Theta 6)*(\Theta 5 + c(\Theta 4)*(\Theta 2 + \Theta 3) + s(\Theta 4)*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2))) + 0.000015*s(\Theta 6)*(s(\Theta 5)*(\Theta 4 + \Theta 1*c(\Theta 2)*c(\Theta 3) - 1.0*\Theta 1*s(\Theta 2)*s(\Theta 3)) \\
& - 1.0*c(\Theta 5)*(s(\Theta 4)*(\Theta 2 + \Theta 3) - 1.0*c(\Theta 4)*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2)))) * (1.0*c(\Theta 6)*(s(\Theta 5)*(\Theta 4 + \Theta 1*c(\Theta 2)*c(\Theta 3) - 1.0*\Theta 1*s(\Theta 2)*s(\Theta 3)) \\
& - 1.0*c(\Theta 5)*(s(\Theta 4)*(\Theta 2 + \Theta 3) - 1.0*c(\Theta 4)*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2))) - s(\Theta 6)*(\Theta 5 + c(\Theta 4)*(\Theta 2 + \Theta 3) + s(\Theta 4)*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2))) + 0.000034*s(\Theta 5)*(\Theta 4*(c(\Theta 4)*(\Theta 2 + \Theta 3) + s(\Theta 4)*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2))) + s(\Theta 4)*(\Theta 2 + \Theta 3) - 1.0*c(\Theta 4)*(c(\Theta 3)*(\Theta 1*s(\Theta 2) + \Theta 1*\Theta 2*c(\Theta 2)) + \Theta 3*(\Theta 1*c(\Theta 2)*c(\Theta 3) - 1.0*\Theta 1*s(\Theta 2)*s(\Theta 3)) + s(\Theta 3)*(\Theta 1*c(\Theta 2) - 1.0*\Theta 1*\Theta 2*s(\Theta 2)))) + (0.00003*s(\Theta 5)*(\Theta 4 + \Theta 1*c(\Theta 2)*c(\Theta 3) - 1.0*\Theta 1*s(\Theta 2)*s(\Theta 3)) - 0.00003*c(\Theta 5)*(s(\Theta 4)*(\Theta 2 + \Theta 3) - 1.0*c(\Theta 4)*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2)))) * (\Theta 5 + c(\Theta 4)*(\Theta 2 + \Theta 3) + s(\Theta 4)*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2))) + 0.000034*c(\Theta 5)*(\Theta 4 - 1.0*\Theta 3*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2)) - 1.0*s(\Theta 3)*(\Theta 1*s(\Theta 2) + \Theta 1*\Theta 2*c(\Theta 2)) + c(\Theta 3)*(\Theta 1*c(\Theta 2) - 1.0*\Theta 1*\Theta 2*s(\Theta 2))) - 0.000034*c(\Theta 5)*(s(\Theta 5)*(\Theta 4 + \Theta 1*c(\Theta 2)*c(\Theta 3) - 1.0*\Theta 1*s(\Theta 2)*s(\Theta 3)) - 1.0*c(\Theta 5)*(s(\Theta 4)*(\Theta 2 + \Theta 3) - 1.0*c(\Theta 4)*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2))) - 1.0*(s(\Theta 5)*(\Theta 4 + \Theta 1*c(\Theta 2)*c(\Theta 3) - 1.0*\Theta 1*s(\Theta 2)*s(\Theta 3)) - 1.0*c(\Theta 5)*(s(\Theta 4)*(\Theta 2 + \Theta 3) - 1.0*c(\Theta 4)*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2)))) * (0.0004*\Theta 5 + 0.0004*c(\Theta 4)*(\Theta 2 + \Theta 3) + 0.0004*s(\Theta 4)*(\Theta 1*c(\Theta 2)*s(\Theta 3) + \Theta 1*c(\Theta 3)*s(\Theta 2)))) - 0.974873088*\Theta 1*\Theta 2*s(\Theta) + 0.17894328*\Theta 1*\Theta 2*c(\Theta)*s(\Theta) - 0.0508428*\Theta 1*\Theta 2*c(\Theta) - 0.46705248*\Theta 1*\Theta 2*s(\Theta) + 1.31628795*\Theta 1*\Theta 2*c(\Theta)*s(\Theta)
\end{aligned}$$

Annexe

$$\begin{aligned}
 & 1*\epsilon(3)*s(\Theta(2)))^{\wedge 2} - c(\Theta)*(\Theta.4318*\Theta.1*c(\Theta2)*c(\Theta3) - 1.0*\Theta.1*s(\Theta2)*s(\Theta3))^{\wedge 2} - 0.2435*\Theta.01 - 0.0934*\Theta.2*(\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2)) + 0.4331*\Theta.3*(\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2)) + 0.0203*\Theta.c(\Theta3)*(\hat{\Theta}.1*s(\Theta2) + \Theta.1*\Theta.2*c(\Theta2)) + 0.4331*s(\Theta3)*(\hat{\Theta}.1*s(\Theta2) + \Theta.1*\Theta.2*c(\Theta2)) + 0.0203*\Theta.3*(\Theta.1*c(\Theta2)*c(\Theta3) - 1.0*\Theta.1*s(\Theta2)*s(\Theta3)) - 0.0203*(c(\Theta4)*(\Theta.2 + \Theta.3) + s(\Theta4)*(\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2))) * (\Theta.1*c(\Theta2)*c(\Theta3) - 1.0*\Theta.1*s(\Theta2)*s(\Theta3)) - 1.0*\Theta.1*\Theta.2*s(\Theta2)) + 0.0203*\Theta.c(\Theta3)*(\hat{\Theta}.1*s(\Theta2) - 1.0*\Theta.1*\Theta.2*s(\Theta2)) + 0.0349*\Theta.01*c(\Theta2) - 0.4331*(\Theta.1*c(\Theta2)*c(\Theta3) - 1.0*\Theta.1*s(\Theta2)*s(\Theta3))*(s(\Theta4)*(Theta.2 + \Theta.3) - 1.0*c(\Theta4)*(Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2))) + 0.4318*(\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2))^{\wedge 2} - 0.0934*\Theta.1*\Theta.2*s(\Theta2) - 0.2435*\Theta.1*\Theta.2*c(\Theta2)*s(\Theta2))) - 0.00015*s(\Theta6)*(\hat{\Theta}.5 + c(\Theta4)*(\hat{\Theta}.2 + \Theta.3) - 1.0*\Theta.4*(s(\Theta4)*(Theta.2 + \Theta.3) - 1.0*c(\Theta4)*(Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2)))) + s(\Theta4)*(\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2)) + \Theta.3*(\Theta.1*c(\Theta2)*c(\Theta3) - 1.0*\Theta.1*s(\Theta2)*s(\Theta3)) + s(\Theta3)*(\hat{\Theta}.1*c(\Theta2) - 1.0*\Theta.1*\Theta.2*s(\Theta2)))) + 0.01558*s(\Theta4)*(0.0203*\Theta.2 + 0.0203*\Theta.3 + 0.4331*(\Theta.1*c(\Theta2)*c(\Theta3) - 1.0*\Theta.1*s(\Theta2)*s(\Theta3))^{\wedge 2} + s(\Theta3)*(0.0934*\Theta.2 + 9.81*c(\Theta2) + 0.4318*\Theta.2*(\Theta.1*c(\Theta2)*c(\Theta3) - 1.0*\Theta.1*s(\Theta2)*s(\Theta3)) - 0.4318*\Theta.1*s(\Theta2) - 0.4318*\Theta.1*\Theta.2*c(\Theta2) - 0.2435*\Theta.1*\Theta.2*c(\Theta2)^{\wedge 2}*s(\Theta2)) + c(\Theta3)*(9.81*s(\Theta2) - 0.0934*(\Theta.1*c(\Theta2)*c(\Theta3) - 1.0*\Theta.1*s(\Theta2)*s(\Theta3))^{\wedge 2} + 0.4318*\Theta.2*(\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2)) + 0.2435*\Theta.1*\Theta.2*c(\Theta2)^{\wedge 3} + 0.4318*\Theta.1*c(\Theta2) - 0.0934*\Theta.2*\Theta.2 - 0.4318*\Theta.1*\Theta.2*s(\Theta2)) - 0.0203*(c(\Theta4)*(Theta.2 + \Theta.3) + s(\Theta4)*(\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2))) * (s(\Theta4)*(Theta.2 + \Theta.3) + 1.0*\Theta.4*(\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2))) + 0.4331*(c(\Theta4)*(Theta.2 + \Theta.3) + s(\Theta4)*(\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2)))^{\wedge 2} - 1.0*(0.0018*s(\Theta4)*(\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2))) * (\Theta.4 + \Theta.1*c(\Theta2)*c(\Theta3) - 1.0*\Theta.1*s(\Theta2)*s(\Theta3)) - 0.0018*s(\Theta4)*(c(\Theta3)*(\hat{\Theta}.1*s(\Theta2) + \Theta.1*\Theta.2*c(\Theta2)) + \Theta.3*(\Theta.1*c(\Theta2)*c(\Theta3) - 1.0*\Theta.1*s(\Theta2)*s(\Theta3)) + s(\Theta3)*(\hat{\Theta}.1*(\Theta.2 - 1.0*\Theta.1*\Theta.2*s(\Theta2))) + (c(\Theta4)*(Theta.2 + \Theta.3) + s(\Theta4)*(\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2))) * (0.0013*\Theta.4 + 0.0013*\Theta.1*c(\Theta2)*c(\Theta3) - 0.0013*\Theta.1*s(\Theta2)*s(\Theta3)) - 0.01558*s(\Theta4)*(0.4318*(\Theta.1*c(\Theta2)*c(\Theta3) - 1.0*\Theta.1*s(\Theta2)*s(\Theta3))^{\wedge 2} - 0.2435*\Theta.01 - 0.0934*\Theta.2*(\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2)) + 0.4331*(\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2)) + 0.4331*\Theta.3*(\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2)) + 0.0203*c(\Theta3)*(\hat{\Theta}.1*s(\Theta2) + \Theta.1*\Theta.2*c(\Theta2)) + 0.4331*(\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2)) + 0.0203*\Theta.3*(\Theta.1*c(\Theta2)*c(\Theta3) - 1.0*\Theta.1*s(\Theta2)*s(\Theta3)) - 0.0203*(c(\Theta4)*(Theta.2 + \Theta.3) + s(\Theta4)*(\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2))) * (\Theta.1*c(\Theta2)*c(\Theta3) - 1.0*\Theta.1*s(\Theta2)*s(\Theta3)) - 0.4331*c(\Theta3)*(\hat{\Theta}.1*c(\Theta2) - 1.0*\Theta.1*\Theta.2*s(\Theta2)) + 0.0203*s(\Theta3)*(\hat{\Theta}.1*c(\Theta2) - 1.0*\Theta.1*\Theta.2*s(\Theta2)) + 0.0934*\Theta.01*c(\Theta2) - 0.4331*(\Theta.1*c(\Theta2)*c(\Theta3) - 1.0*\Theta.1*s(\Theta2)*s(\Theta3)) * (\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2))^{\wedge 2} - 0.0934*\Theta.1*\Theta.2*s(\Theta2) - 0.2435*\Theta.1*\Theta.2*c(\Theta2)*s(\Theta2))) - 0.006747698*(c(\Theta4)*(Theta.2 + \Theta.3) + s(\Theta4)*(\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2)))^{\wedge 2} - 1.0*\Theta.1*c(\Theta2)*c(\Theta3) - 1.0*\Theta.1*s(\Theta2)*s(\Theta3)) * (0.066*\Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta3) + (0.0125*\Theta.1*c(\Theta2)*c(\Theta3) - 0.0125*\Theta.1*s(\Theta2)*s(\Theta3)) * (\Theta.1*c(\Theta2)*s(\Theta3) + \Theta.1*c(\Theta3)*s(\Theta2)))
 \end{aligned}$$

`couple(4)= 0.0013*Ø4 - 1.0*(0.0`

$$\text{couple}(4) = 0.0013 * \Theta_4 - 1.0 * (0.0018 * s(\Theta_1 * s(\Theta_2 * s(\Theta_3 * s(\Theta_4)))) - 0.0013 * \Theta_3 * (\Theta_1 * s(\Theta_2 * s(\Theta_3)))$$

Annexe

Annexe

```
*****couple 6
couple(6)=0.00004* $\bar{O}_6$  + 1.0*(0.00015*c(θ6)*(s(θ5)*( $\bar{\theta}$  4 + θ 1*c(θ2)*c(θ3) - 1.0*θ 1*s(θ2)*s(θ3)) - 1.0*c(θ5)*(s(θ4)*( $\bar{\theta}$  2 + θ 3) - 1.0*c(θ4)*(θ 1*c(θ2)*s(θ3) + θ 1*c(θ3)*s(θ2))) - 0.00015*s(θ6)*( $\bar{\theta}$  5 + c(θ4)*( $\bar{\theta}$  2 + θ 3) + s(θ4)*( $\bar{\theta}$  1*c(θ2)*s(θ3) + θ 1*c(θ3)*s(θ2))))*c(θ6)*(θ 5 + c(θ4)*(θ 2 + θ 3) + s(θ4)*( $\bar{\theta}$  1*c(θ2)*s(θ3) + θ 1*c(θ3)*s(θ2))) + s(θ6)*(s(θ5)*( $\bar{\theta}$  4 + θ 1*c(θ2)*c(θ3) - 1.0*θ 1*s(θ2)*s(θ3)) - 1.0*c(θ5)*(s(θ4)*( $\bar{\theta}$  2 + θ 3) - 1.0*c(θ4)*(θ 1*c(θ2)*s(θ3) + θ 1*c(θ3)*s(θ2)))) - (0.00015*c(θ6)*(θ 5 + c(θ4)*( $\bar{\theta}$  2 + θ 3) + s(θ4)*( $\bar{\theta}$  1*c(θ2)*s(θ3) + θ 1*c(θ3)*s(θ2))) + 0.00015*s(θ6)*(s(θ5)*( $\bar{\theta}$  4 + θ 1*c(θ2)*c(θ3) - 1.0*θ 1*s(θ2)*s(θ3)) - 1.0*c(θ5)*(s(θ4)*( $\bar{\theta}$  2 + θ 3) - 1.0*c(θ4)*(θ 1*c(θ2)*s(θ3) + θ 1*c(θ3)*s(θ2)))))*( $\bar{\theta}$  1*c(θ6)*(s(θ5)*( $\bar{\theta}$  4 + θ 1*c(θ2)*c(θ3) - 1.0*θ 1*s(θ2)*s(θ3)) - 1.0*c(θ5)*(s(θ4)*( $\bar{\theta}$  2 + θ 3) - 1.0*c(θ4)*(θ 1*c(θ2)*s(θ3) + θ 1*c(θ3)*s(θ2))) - s(θ6)*( $\bar{\theta}$  5 + c(θ4)*( $\bar{\theta}$  2 + θ 3) + s(θ4)*( $\bar{\theta}$  1*c(θ2)*s(θ3) + θ 1*c(θ3)*s(θ2))) + 0.00004*s(θ5)*( $\bar{\theta}$  4 + c(θ4)*( $\bar{\theta}$  2 + θ 3) + s(θ4)*( $\bar{\theta}$  1*c(θ2)*s(θ3) + θ 1*c(θ3)*s(θ2))) + s(θ4)*( $\bar{\theta}$  2 + θ 3) - 1.0*c(θ4)*(c(θ3)*( $\bar{\theta}$  1*s(θ2) + θ 1*c(θ2)*s(θ3) - 1.0*θ 1*s(θ2)*s(θ3)) + s(θ3)*( $\bar{\theta}$  1*c(θ2) - 1.0*θ 1*θ 2*s(θ2))) + 0.00004*c(θ5)*( $\bar{\theta}$  4 - 1.0*θ 3*(θ 1*c(θ2)*s(θ3) + θ 1*c(θ3)*s(θ2)) - 1.0*s(θ3)*( $\bar{\theta}$  1*s(θ2) + θ 1*c(θ2)*s(θ3)) + c(θ3)*( $\bar{\theta}$  1*c(θ2) - 1.0*θ 1*c(θ2)*s(θ2))) - 0.00004*θ 5*(s(θ5)*( $\bar{\theta}$  4 + θ 1*c(θ2)*c(θ3) - 1.0*θ 1*s(θ2)*s(θ3)) - 1.0*c(θ5)*(s(θ4)*( $\bar{\theta}$  2 + θ 3) - 1.0*c(θ4)*(θ 1*c(θ2)*s(θ3) + θ 1*c(θ3)*s(θ2)))))
```
