Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

**Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par**

**Université de Mostaganem**

**Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"**

*présenté par :*

**Yasmine BAHOUS**

# Équation de Lane–Emden En Astrophysique : Existence, Unicité & Ulam-Hyres Stabilité des Solutions

*soutenu publiquement le 19 Juin 2019 devant le jury composé de :*

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Président :** | Abdallah MENAD | MCB | Université de Mostganem |
| **Examinateur :** | Zinelaabidine LATREUCH | MCB | Université de Mostganem |
| **Encadreur :** | Zoubir DAHMANI | Prof | Université de Mostganem |

Année Universitaire : 2018/ 2019

MASTER

# Dédicaces

Je dédie ce travail à mes chères parents, les inestimables sacrifices que vous avez consenti pour moi et votre soutien m'ont permis de bien mener mes études sans difficultés majeurs, votre encouragement m'a donné du tonus pour aller de l'avant. Vous êtes pour moi des personnes très chères sur qui je peux toujours compter. En guise de reconnaissance, trouvez ici mon amour filial, que Dieu vous accorde longue vie dans la santé. Je vous serai reconnaissante toute ma vie.

A mes deux sœurs Houda & Latifa et à mes deux frères Mustapha,& Zakaria. Sans vous, ma vie ne serait que simple. Je voudrais vous exprimer à travers ces quelques lignes tout l'amour et toute l'affection que j'ai pour vous, jamais un simple merci ne suffira à vous témoigner ma reconnaissance. Je vous aime tellement.

A la mémoire de mon petit frère Yacine.

Ce travail est dédié également à mes amis : Batoul, Amel, El Hadja ,Fatima, Djihad, Asma, Marwa, Houda, Kawter, Yacine, Othmane, Amine, Mamadou, Mohammed. La fratrie n'est pas seulement héréditaire, vous m'avez toujours soutenu. Conservez-moi votre profonde amitié et votre immense amour et soyez convaincue qu'il en est de même pour moi. Que Dieu vous comble de sa grâce et qu'il vous accorde santé et longévité.

> "Votre temps est limité, ne le gâchez pas en menant une existence qui n'est pas la vôtre. Ayez le courage de suivre votre cœur et votre intuition. L'un et l'autre savent ce que vous voulez réellement devenir. Le reste est secondaire."
> -Steve Jobs-

# Remerciements

Un grand merci à mon père,ma mère, mes frères et mes sœurs pour leur amour, leurs conseils ainsi que leur soutien inconditionnel.

Je tiens à remercier mon encadreur monsieur Zoubir Dahmani, pour l'aide qu'il a fournie et les connaissances qu'il a su me transmettre. Je le remercie également pour sa disponibilité et la qualité de ses conseils.

Merci aux membres du jury, monsieur Abdallah Menad et monsieur Zinelaabidine Latreuch, d'avoir accepté d'évaluer ce mémoire et d'avoir contribuer aux discussions lors de la soutenance.

Qu' il me soit permis de remercier madame Ablaoui Naima, qui m'a toujours encouragé par sa sympathie humaine et professionnelle témoignée à mon égard. j ai une dette de gratitude éternelle envers vous, merci beaucoup.

Je tiens à témoigner ma reconnaissance également, à l'ensemble des enseignants de département de Mathématiques et Informatique, mille merci à vous.

J' adresse un grand merci à mon amie Amel, j'ai souvent eu besoin de ton aide et de ton soutien et à chaque fois tu as su répondre présent. Bien souvent, je me demande comment te rendre la pareille.

Enfin, merci du fond du cœur à tous mes amis, pour votre présence rassurante à mes côtés. Sachez que votre support ainsi que chacune de vos attentions, ont été considérés comme un précieux cadeau. Veuillez agréer toute mes reconnaissance.

# Table des matières


**Index des notations** v

**Introduction Générale** 1
- 1 Évolution Stellaire . . . 1
- 2 Équation de Lane-Emden En Astrophysique . . . 1

**1 Préliminaires** 4
- 1 Introduction . . . 4
- 2 Outils d'Analyse Fonctionnelle . . . 4
- 3 Opérateurs . . . 6
- 4 Théorèmes de point fixe . . . 6
- 5 Conclusion . . . 7

**2 Éléments de Calcul Fractionnaire** 8
- 1 Introduction . . . 8
- 2 Fonctions Élémentaires du Calcul Fractionnaire . . . 8
  - 2.1 La Fonction Gamma d'Euler . . . 8
  - 2.2 La Fonction Bêta d'Euler . . . 9
- 3 Intégrale Fractionnaire de Riemann-Liouville . . . 10
- 4 Dérivées fractionnaires . . . 10
  - 4.1 Dérivée au Sens de Riemann-Liouville . . . 10
  - 4.2 Dérivée Fractionnaire de Caputo . . . 12
  - 4.3 Le lien entre les deux approches . . . 14
- 5 Conclusion . . . 15

**3 Résolution de l'équation de Lane−Emden** 16
- 1 Introdution . . . 16
- 2 Représentation Intégrale . . . 17
- 3 Existence d'une solution unique . . . 19
- 4 Existence d'au moins une Solution . . . 23
- 5 Application . . . 29
- 6 Conclusion . . . 30

**4 Stabilité au sens de Ulam−Hyres** 31
- 1 Introduction . . . 31
- 2 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers . . . 31
- 3 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers généralisée . . . 32
- 4 Etude de la Stabilité . . . 32
- 5 Conclusion . . . 34

**Conclusion Générale** 35

**Bibliographie** **36**

# Index des notations

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | : | Ensemble des nombres réels. |
| $\mathbb{R}^+$ | : | Ensemble des nombres réels positifs. |
| $\mathbb{C}$ | : | Ensemble des nombres complexes. |
| $\mathbb{N}$ | : | Ensemble des nombres entiers naturels. |
| $\mathbb{K}$ | : | Corps qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. |
| $L^p([a,b])$ | : | L'espace des fonctions $p^{\text{ème}}$ intégrables sur $[a,b]$ . |
| $B_r$ | : | Boule ouverte de centre zéro, et de rayon $r>0$. |
| $C([a\ b],\mathbb{R})$ | : | Espace des fonctions continues de $[a,b]\subset\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ . |
| $\Vert.\Vert_E$ | : | Norme de l'espace vectoriel E. |
| $\vert.\vert$ | : | Valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe. |
| $[.]$ | : | Partie entière d'un nombre réel. |
| $\Gamma(.)$ | : | Fonction Gamma d'Euler . |
| $\beta(.,.)$ | : | Fonction Bêta d'Euler . |
| $I^n$ | : | Intégrale d'ordre entier. |
| $D^n$ | : | Dérivation d'ordre entier. |
| $I^\alpha$ | : | Opérateur d'intégration fractionnaire . |
| $D^\alpha$ | : | Opérateur de dérivation fractionnaire. |

# Introduction Générale

«...Voici les réflexions qui doivent toujours te préoccuper : quelle est la nature de l'univers ? Quelle est la mienne ? Quels sont les rapports entre ma nature et celle de l'univers ? » (Pensées pour moi-même – Livre II, IX – Marc Aurèle) [1]

Durant le vingtième siècle, l'astronomie est de plus en plus devenue astrophysique. Les astronomes se sont rendu compte que la même physique que nous avons appris à connaître en laboratoire, peut guider à comprendre ce qui se passe dans l'univers qui nous entoure, ceci est une véritable révolution.

Actuellement, l'astronomie moderne s'appuie sur les développements les plus poussés des mathématiques, des sciences physiques, aussi bien en physique nucléaire qu'en mécanique quantique.

## 1 Évolution Stellaire

Bien que les principes fondamentaux de l'évolution stellaire soient assez bien compris, plusieurs aspects de l'évolution et de la structure interne des étoiles restent à approfondir. Si nos connaissances de l'évolution de l'Univers dans sa totalité et des grandes structures qui le composent sont parfois encore assez rudimentaires, il semble que nous sommes arrivés déjà fort loin dans notre compréhension de la structure et de l'évolution des étoiles [8],[17],[22]. Les étoiles semblent fixes et immuables, mais elles évoluent pourtant. Comme les êtres vivants, elles naissent, vivent et meurent.

## 2 Équation de Lane-Emden En Astrophysique

L'étude de la structure interne des étoiles a commencée dans les années 20, les modèles de structure interne sont un pilier fondamental de la physique stellaire, ces équations sont basées sur les lois de l'équilibre hydrostatique et de l'équilibre radiatif en symétrie sphérique. L'équation différentielle de Lane-Emden donnée par

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\dfrac{d}{dx}\left(x^2\dfrac{du}{dx}\right)=-u^n \\ \\ u(0)=1 \quad u'(0)=0, \end{cases} \tag{1}$$

modélise le comportement thermique d'un nuage de gaz sphérique agissant sous l'attraction mutuelle de ses molécules et soumis aux lois classiques de la thermodynamique [26].

Cette équation a été proposée par Jonathan Homer Lane (1819-1880), astrophysicien américain et initiateur de la théorie d'évolution stellaire [16], puis étudiée en détail par

1. Marcus Aurelius Antoninus Augustus :Empereur, Homme d'état, Philosophe (121 - 180)

Jacob Robert Emden (1862-1940), astrophysicien suisse, qui a fourni un modèle mathématique comme base de la structure stellaire.

La solution de l'équation (1) a une signification physique aussi longtemps que $u \geq 0$, et la surface d'une étoile polytropique est déterminée pour $x = x_1$, où $u = 0$. Une solution analytique exacte de l'équation (1) n' existe que pour $n = 0, n = 1$ et $n = 5$ et elle est donnée par :

- Pour $n = 0$ $\quad u(x) = 1 - \frac{x^2}{6}$ $\quad x_1 = \sqrt{6} \simeq 2,45$
- Pour $n = 1$ $\quad u(x) = \frac{sinx}{x}$ $\quad x_1 = \pi \simeq 3,14$
- Pour $n = 5$ $\quad u(x) = \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $\quad x_1 = \infty.$

Ces calculs sont détaillés dans le livre de Chandrasekhar [29]. Il est à noter que les deux cas les plus intéressants pour les vraies étoiles sont pour $n = 1,5$ et $n = 3$, malheureusement, aucun n'a de solution analytique. Cependant, l'équation a été résolue numériquement par différentes méthodes pour plusieurs indices polytropiques $n$. La figure ci−dessous présente le comportement de la solution pour différents indices [35].

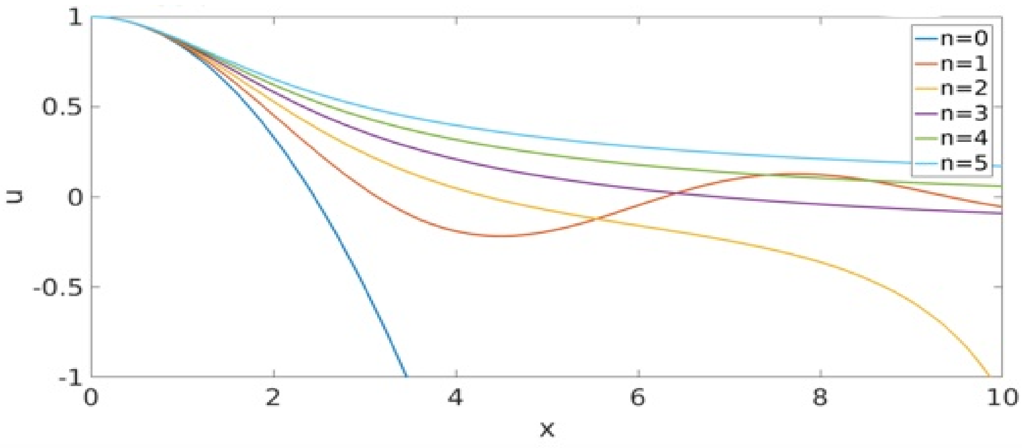


FIGURE 1 – Solutions Approchées

A travers ce mémoire ce mémoire, on se propose d'étudier une équation différentielle fractionnaire de type Lane−Emden qui a la fomre :

$$\begin{cases} D^{\beta}(D^{\alpha} + \frac{k}{t^{\alpha-\beta}})y(t) + \lambda f(t, D^{\delta}y(t)) + g(t, y(t)) = h(t) \quad, t \in (0,1] \\ \\ y(0) = a \qquad y(1) = b, \end{cases} \tag{2}$$

avec $D^{\mu}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $\alpha, \beta, \delta \in ]0,1]$, $a, b \in \mathbb{R}$ , $k, \lambda > 0$, $f, g$ et $h$ des fonctions qui seront spécifiées ultérieurement .

Ce mémoire se compose de quatre chapitres.

**Le Premier Chapitre :** La présentation des notions et les définitions de base (norme, limite, suite de Cauchy,...) sera l'objectif de la première partie de ce chapitre. Ensuite on donne quelques résultats de la théorie de l'analyse fonctionnelles (principe de contraction de Banach, équicontinuité, théorème d'Arzela-Ascoli,...) utilisés par la suite .

**Le deuxième Chapitre :** Consacré à la théorie du calcul fractionnaire. On introduit dans ce chapitre les fonctions élémentaires de cette théorie, principalement les deux fonctions : Gamma et Bêta d'Euler. Dans la deuxième partie de ce chapitre, on introduira l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann Liouville, puis l'accent est mis sur les opérateurs de dérivation fractionnaire, on va présenter deux approches les plus intéressantes, celle de Riemann-Liouville et celle de Caputo. On présentera quelques unes de leurs propriétés et on précisera aussi la relation entre ces deux approches.

**Le troisième Chapitre :** Dans ce chapitre, on abordera la question d'existence et d'unicité de la solution pour le problème fractionnaire (2). à travers le troisième chapitre, on présentera une approche utilisée pour aborder la question d'existence et d'unicité (principe de contraction de Banach) et une approche utilisée pour aborder la question d'existence d'au moins une solution qui n'est pas nécessairement unique (point fixe de Krasnoselskii) des solutions des équations différentielles fractionnaires, dans un espace fonctionnel convenablement choisi.

**Le quatrième Chapitre :** Dans le dernier chapitre, on introduit la notion de la stabilité des équations fonctionnelles, puis pour l'étude de la stabilité du problème(2) au sens de Ulam-Hyers, on donne quelques conditions suffisantes pour la stabilité au sens de Ulam-Hyers de la solution du problème considéré et la stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisée.

On finira ce mémoire par une conclusion générale.

# Chapitre 1

# Préliminaires

## 1 Introduction

Ce chapitre constitue une partie préliminaire dans laquelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle, qui représentent un outil indispensable dans notre étude. Le chapitre est divisé en trois sections, dans la première section, des notions et des définitions d'outils d'analyse fonctionnelle sont introduites. La deuxième section contient un aperçu sur les opérateurs. Puis dans la troisième section on rappelle quelques théorèmes classiques du point fixe.

## 2 Outils d'Analyse Fonctionnelle

On rappelle de prime abord les définitions des outils de bases d'analyse fonctionnelle. On propose au lecteur de revenir aux sources originales comme [4, 7, 9, 15, 23, 33].

**Définition 1.1** *(**Norme**) Soit* $E$ *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$. *Une norme sur* $E$ *est une application* $N$ *de* $E$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *vérifiant les conditions suivantes, pour tout* $x, y$ *dans* $E$

- $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \forall x \in E.$
- $N(x + y) \leq N(x) + N(y),$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, *on a* $N(\lambda x) = |\lambda| N(x). \forall x \in E,$

Si seules les deux dernières propriétés sont satisfaites, on dit que N est une semi-norme.

**Définition 1.2** *(**Espace vectoriel normé**) Soient E un espace vectoriel et N une norme sur E, le couple* $(E, N)$ *est appelé un espace vectoriel normé.*

**Définition 1.3** *(**Suite de Cauchy**) On dit qu'une suite* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de réels ou de complexes est une suite de Cauchy, si elle vérifie la propriété suivante appelée critère de Cauchy :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}; \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p \geq N_0, p \geq N_0 \Rightarrow |x_p - x_q| < \varepsilon.$$

**Définition 1.4** *(**Limite d'une suite**) On dit qu'une suite réelle* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *a pour limite* $l \in \mathbb{R}$, *si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{N},\ n \geq \mathrm{N} \Rightarrow\ |x_n - l| \leq \varepsilon,$$

*si c'est le cas, on dit que la suite est convergente.*

**Définition 1.5** *(**Continuité**) Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle* $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ *et $a$ un point de I, la fonction $f$ est dite continue en $a$, si pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe un autre réel* $\delta > 0$ *(qui depend du choix de* $\varepsilon$ *et de $a$ aussi) tel que pour tout $x$ de* $\mathrm{I}$ *on a :*

$$|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

**Définition 1.6** *(**Famille équicontinue**) Soient* $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$, $\mathscr{P}$ *une partie de* $\mathrm{C}(\mathrm{X})$ *et $x$ un point de* $\mathrm{X}$ *On dit que* $\mathscr{P}$ *est une famille equicontinue en $x$ si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\forall\, y \in \mathrm{X}$ :

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \forall f \in \mathscr{P}.$$

**Définition 1.7** *(**Espace complet**) Un espace vectoriel normé* $(\mathrm{E}; \|.\|_{\mathrm{E}})$ *est dit complet, si toute suite de Cauchy* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de E converge ( pour cette norme) dans E.*

**Exemple 1.1** *La droite réelle* $\mathbb{R}$ *est complète, car toute suite numérique de Cauchy converge.*

**Définition 1.8** *(**Espace de Banach**) Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.*

**Définition 1.9** *(**Ensemble relativement compact**) Un ensemble* $\mathrm{G} \subset \mathrm{E}$ *est relativement compact, si pour toute suite* $(x_n)$ *de* G *, il existe une sous suite* $(x_n)_k$ *qui converge dans* E.

**Définition 1.10** *(**Ensemble uniformément borné**) On dit que* M *est un ensemble uniformément borné, si il existe une constante positive* $\mathrm{C} > 0$ *tel que :*

$$\|f\|_\infty \leq \mathrm{C}\ , \forall f \in \mathrm{M}.$$

**Définition 1.11** *(**Application Lipschitzienne**) Soient* $(\mathrm{E}, \|.\|_{\mathrm{E}})$ *et* $(\mathrm{F}, \|.\|_{\mathrm{F}})$ *deux espaces vectoriels normés. Une application* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *est dite $k$ Lipschitzienne si :*

$$\exists\, k > 0, \forall x, y \in \mathrm{E}, \|f(x) - f(y)\|_{\mathrm{F}} \leq k\|x - y\|_{\mathrm{E}}.$$

**Définition 1.12** *(**Application Contractante**) Une application* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *est dite contractante, si elle est Lipschitzienne de rapport* $0 < k < 1$.

# 3 Opérateurs

Tout au long de cette section, on entend par $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés [15].

**Définition 1.13** *(**Opérateur Continu** ) Soit* $T$ *un opérateur linéaire défini sur un sous ensemble* $G \subset E$ *dans* $F$*, il est dit continu au point* $x_0 \in G$ *si pour toute suite* $x_n$ *de* $G$ *qui converge vers* $x_0$*, la suite* $T(x_n)$ *converge vers* $T(x_0)$ *c'est à dire :*

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = T(x_0).$$

***Remarque 1.1*** *L'opérateur* $T$ *est dit continu sur* $G$*, s'il est continu en chaque point de l'ensemble* $G$*.*

**Définition 1.14** *(**Opérateur Compact** ) Soit* $T : E \to F$ *un opérateur, On dit que* $T$ *est compact s'il est continu et l'image de tout borné de E est relativement compact (c'est à dire son adhérence est compact) dans F.*

**Définition 1.15** *(**Opérateur Borné** ) Un Opérateur linéaire* $T$ *défini sur* $E$ *dans* $F$ *est dit borné si il existe une constante positive* $C > 0$*,telle que :*

$$\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \ \forall x \in E.$$

**Définition 1.16** *(**Opérateur complètement continue** ) On dit que l'opérateur* $T : E \to F$ *est complètement continu si il est continu et compact.*

Le théorème suivant est connu pour son nombre considérable d'applications, entre autres la compacité de certains opérateurs. Il caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues d'un espace compact dans un espace quelconque.

**Théorème 1.1** *(**Ascoli-Arzelà**) Soient* $E$ *un compact et* $A$ *un sous-ensemble de* $C(E)$*, si* $A$ *est borné et equicontinu, alors* $A$ *est relativement compact.*

# 4 Théorèmes de point fixe

Les théorèmes de point fixe sont des outils très utiles en mathématiques, essentiellement dans la résolution des équations différentielles [5],[12],[34]. Dans cette section, on va donner les théorèmes de point fixe dont on a aura besoin dans le présent document.

**Définition 1.17** *(**Point fixe**) Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $I$ *, on dit que* $x \in I$ *est un point fixe de* $f$ *lorsque :*

$$f(x) = x.$$

**Théorème 1.2** ***(Principe de contraction de Banach)***
*Soient* $X$ *un espace de Banach,* $f : X \to X$. *Si la fonction* $f$ *est contractante, alors* $f$ *admet un point fixe unique.*

Les théorèmes du point fixe suivants déterminent seulement l'existence d'un point fixe.

**Théorème 1.3** ***(Schauder)***
*Soit* $(E; d)$ *un espace métrique complet, soit X une partie convexe et fermée et non vide de E, et soit* $T : X \to X$ *une application telle que l'ensemble* $A = \{Tx; x \in X\}$ *est relativement compacte dans E, alors T possède au moins un point fixe.*

**Théorème 1.4** ***( Schaefer)***
*Soient* $X$ *un espace de Banach et* $T : X \to X$ *un opérateur complètement continu, si l'ensemble*

$$A = \left\{u \in X : \lambda T u = u, \text{ pour un certain } \lambda \in (0,1)\right\}$$

*est borné, alors T possède au moins un point fixe.*

**Définition 1.18** ***( Krasnoselskii)***
*Soient* $(X, \|.\|)$ *un espace de Banach,* $A$ *une partie non vide, convexe et fermée de* $X$*, on suppose que* $T_1, T_2 : A \to X$ *sont deux applications satisfaisant les trois conditions suivantes :*

- ▲ $T_1 x + T_2 y \in A, \forall x, y \in A$
- ▲ $T_1$ *est un opérateur compact*
- ▲ $T_2$ *est une contraction*

*alors il existe* $x^* \in A$*, qui satisfait* $T_1 x^* + T_2 x^* = x^*$.

**Remarque 1.2** *Si* $T_1 = 0$*, alors ce théorème coïncide avec le principe de l'application contractante de Banach.*

# 5 Conclusion

Dans ce chapitre on a introduit les outils et les définitions de base qui seront utilisés par la suite dans ce travail, en particulier les théorèmes de points fixes qui fournissent des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de solution d'un problème différentiel fractionnaire donné.

# Chapitre 2

# Éléments de Calcul Fractionnaire

## 1 Introduction

De nombreux mathématiciens ont contribué au développement de la théorie du calcul fractionnaire jusqu'à la moitié du siècle passé, citons entre autres Laplace (1812), Fourrier (1822), Liouville (1832-1873), Riemann (1847).

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relative à la théorie du calculs fractionnaires, on commence par introduire les deux fonctions spéciales, la fonction Gamma et Bêta d'Euler qui jouent un rôle très important dans cette théorie, on énonce quelques propriétés de l'intégrale fractionnaire de Riemann Liouville, puis on cite les deux approches les plus utilisées :

1. L'approche de Riemann-Liouville.
2. L'approche de Caputo.

Plusieurs résultats introduits ici peuvent être retrouvés dans [1, 2, 6, 14, 19, 21, 24, 25].

## 2 Fonctions Élémentaires du Calcul Fractionnaire

### 2.1 La Fonction Gamma d'Euler

En mathématiques, de nombreux concepts complexes se sont développés à partir de concepts simples, par exemple, on peut faire référence à l'extension du factoriel de nombre naturel au nombre réel dans certaines formules mathématiques.

**Définition 2.1** *Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(x) > 0$, la fonction Gamma est donnée par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

*cette intégrale est convergente pour tout complexe $x$ tel que $\Re(x) > 0$.*

**Remarque 2.1**

- $\Gamma(1) = 1$. *et* $\Gamma(0_+) = +\infty$.
- $\dfrac{1}{\Gamma(n)} = 0, \ \forall n = \{-1, -2, -3 \ldots\}$.

– *$\Gamma(x)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < x \leq 1$ et monotone et strictement croissante pour $x \geq 2$.*

**Propriétés :**

1. Pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(x) > 0$, on a :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{2.1}$$

**Preuve**. Les deux fonctions $u \to u^x$ et $t \to e^{-u}$ sont de classe $C^1([0; +\infty[)$, on peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-u}u^x du = \Big[-e^{-u}u^x\Big]_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}du \\ &= x\Gamma(x).\end{aligned}$$

2. Pour $x = n \in \mathbb{N}$, la propriété (2.1) nous permet d'établir que :

$$\Gamma(n+1) = n!$$

**Preuve.** On pose $x = n \in \mathbb{N}^*$ dans (2.1), alors on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &\vdots \\ &= n(n-1)(n-2)...\Gamma(1) \\ &= n!\end{aligned} \tag{2.2}$$

## 2.2 La Fonction Bêta d'Euler

**Définition 2.2** *La fonction Bêta est définie pour des nombres complexes u et v à parties réelles strictement positives par :*

$$\beta(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt, \Re(u) > 0 \ et \Re(v) > 0.$$

**Propriétés :**

1. La fonction Bêta est une fonction symétrique :

$$\beta(u,v) = \beta(v,u), \Re(u) > 0 \text{ et } \Re(v) > 0.$$

2. La fonction Gamma est liée à la fonction Bêta par la relation suivante :

$$\beta(u,v) = \frac{\Gamma(v)\Gamma(u)}{\Gamma(u+v)}, \Re(u) > 0 \text{ et } \Re(v) > 0.$$

# 3 Intégrale Fractionnaire de Riemann-Liouville

Soient $f$ une fonction réelle, $a$ appartient au domaine de définition de $f$ et $\alpha$ un nombre réel strictement positif.

**Définition 2.3** *On définit sur* $L_1[a,b]$ *l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville par :*

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s) ds,\ \alpha > 0, x > a. \tag{2.3}$$

**Exemple 2.1** *Soit* $h : [a\ b] \to \mathbb{R}$*, telle que* $h(x) = (x-a)^{\beta}$ *, l'application de l'intégrale fractionnaire d'ordre* $\alpha > 0$ *de Riemann-Liouville sur la fonctionf est donnée par :*

$$I^{\alpha} h(x) = I^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}, \beta > -1\ x > a. \tag{2.4}$$

**Propriétés :**
Pour $f, g \in C([a;b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, l'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville possède les propriétés suivantes,

1. **La linéarité** : pour $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ , on a

$$I^{\alpha}\big(\lambda f(x) + \gamma g(x)\big) = \lambda I^{\alpha} f(x) + \gamma I^{\alpha} g(x),\ x > a \tag{2.5}$$

2. **Semi-groupe et commutativité** : l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe c'est à dire :

$$I^{\alpha} \circ I^{\beta} f(x) = I^{\beta} \circ I^{\alpha} f(x) = I^{\alpha+\beta} f(x),\ x > a \tag{2.6}$$

3. $I^0 f(x) = f(x)$.

# 4 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs définitions de la dérivée fractionnaire, et elles sont toutes mathématiquement correctes, du point de vue physique, chaque définition a sa propre application et interprétation, dans ce qui suit, on introduit deux approches.

## 4.1 Dérivée au Sens de Riemann-Liouville

**Définition 2.4** *Soient* $f$ *une fonction intégrable sur* $[a,b]$*,*$n-1 < \alpha < n$*, alors la dérivée fractionnaire d'ordre* $\alpha$ *au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{RL} f(x) &= D^n I^{n-\alpha} f(x), \\ &= \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds\right)\ a < x < b \end{aligned} \tag{2.7}$$

avec

$$n = [\alpha] + 1.$$

**Exemple 2.2** *Soit $h : [a\ b] \to \mathbb{R}$, telle que $h(x) = (x-a)^{\beta}$, avec $\beta > -1$, alors l'application du dérivée au sens de Riemann-Liouville sur la fonction $h(x)$ donne :*

$$\begin{aligned} D_{RL}^{\alpha} h(x) &= D^n I^{n-\alpha} h(x) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\alpha-\beta}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

**Propriétés**

Pour comprendre en profondeur la dérivée de Rieman- Liouville, on donne quelques propriétés cruciales de cet opérateur.

1. Soient $f$ et $g$ deux fonctions dont les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$ existent, donc pour tout $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, la dérivée de Rieman-Liouville de $(\mu_1 f + \mu_2 g)$ existe et on a :

$$D_{RL}^{\alpha}(\mu_1 f(x) + \mu_2 g(x)) = \mu_1 D_{RL}^{\alpha} f(x) + \mu_2 D_{RL}^{\alpha} g(x)$$

2. L'opérateur de différentiation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur intégration fractionnaire :

$$D_{RL}^{\alpha}\left(I^{\alpha} f(x)\right) = f(x).$$

3. L'opérateur de différentiation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville n'est pas commutatif :

$$D_{RL}^{\alpha}\left(D_{RL}^{\beta} f(x)\right) \neq D_{RL}^{\beta}\left(D_{RL}^{\alpha} f(x)\right) \neq D_{RL}^{\alpha+\beta} f(x).$$

4. Soit $n = [\alpha] + 1$, et $f$ une fonction vérifiant $D_{RL}^{\alpha} f = 0$ , alors :

$$\begin{gathered} D_{RL}^{\alpha} f(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+\alpha-n+1)}(x-a)^{i+\alpha-n}, \\ c_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, n-1, n = [\alpha] + 1. \end{gathered} \tag{2.9}$$

**Démonstration** : Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $n - 1 < \alpha < n$ :

(1) La linéarité de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville découle de la linéarité de l'intégrale et la dérivé d'ordre entier .

(2) D'après définition de la dérivée au sens de Riemann-Liouville :

$$\begin{aligned} D_{RL}^{\alpha}\left(I^{\alpha} f(x)\right) &= D^n(I^{n-\alpha}(I^{\alpha} f(x)) \\ &= D^n(I^{n+\alpha-\alpha} f(x)) \\ &= D^n(I^n f(x)) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

(4)Supposons que $D^{\alpha}_{RL} f(x) = 0$, d'après la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville on obtient :

$$D^n\big(I^{n-\alpha} f(x)\big) = 0 \Longrightarrow I^{n-\alpha} f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x-a)^i, \tag{2.10}$$

on applique $I^{\alpha}$ sur les deux membres de (2.10), d'après la propriété de semi-groupe (2.6) on trouve :

$$I^n f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)(x-a)^{i+\alpha}}{\Gamma(i+\alpha+1)},$$

par application de $D^n$ on trouve :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+\alpha-n+1)} (x-a)^{i+\alpha-n}.$$

**Réciproquement** : Supposons maintenant que :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+\alpha-n+1)} (x-a)^{i+\alpha-n}, \tag{2.11}$$

on applique l'opérateur de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville aux deux membres de l'égalité (2.11) :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{RL} f(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+\alpha-n+1)} D^{\alpha}_{RL} (x-a)^{i+\alpha-n} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)\Gamma(i+\alpha-n+1)}{\Gamma(i+\alpha-n+1)\Gamma(i-n+1)} (x-a)^{i-n} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i-n+1)} (x-a)^{i-n} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

## 4.2 Dérivée Fractionnaire de Caputo

Comme la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville a échoué dans la description et la modélisation de certains phénomènes, la dérivée de Caputo a été introduite en 1967.

**Définition 2.5** *Étant donnée une fonction f de classe* $C^n([a,b])$, *alors on définit la dérivée au sens de Caputo d'ordre* $\alpha > 0$ *pour* $f$ *par :*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{c} f(x) &= I^{n-\alpha} f^{(n)}(x), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds; a < x < b \end{aligned} \tag{2.13}$$

*avec*

$$n = [\alpha] + 1.$$

***Exemple 2.3*** *Soit $f : [a\ b] \to \mathbb{R}$, telle que $f(x) = (x-a)^{\beta}$, avec $\beta > -1$, alors l'application du dérivée au sens de Caputo sur la fonction $h(x)$ donne :*

$$\begin{aligned} D_c^{\alpha} h(x) &= I^{n-\alpha} D^n h(x) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\alpha-\beta}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

*en particulier, si $h$ est une fonction constante sur $[a\ b]$, alors :*

$$D_c^{\alpha} h(x) = 0.$$

**Propriétés** Soient $f, g \in C^0([a;b])$; $n-1 < \alpha < n$ , $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1. La linéarité :

$$D_c^{\alpha}\big(\mu_1 f(x) + \mu_2 g(t)\big) = \mu_1 D_c^{\alpha} f(x) + \mu_2 D_c^{\alpha} g(x).$$

2. L'opérateur de différentiation fractionnaire au sens de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire :

$$D_c^{\alpha}\big(I^{\alpha} f(x)\big) = f(x),$$

et en général on a pour $\alpha < \beta$ :

$$D_c^{\alpha} I^{\beta} f(x) = I^{\beta-\alpha} f(x). \tag{2.15}$$

3. Le noyau d'opérateur $D_c^{\alpha}$ est donné par :

$$D_c^{\alpha} f(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x-a)^i \ \ c_i \in \mathbb{R}.$$

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n-1 < \alpha < n$, $f \in C^n([a,b])$, alors on a :

$$\begin{aligned} &I^{\alpha} D_c^{\alpha} f(x) = f(x) + c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_{n-1}(x-a)^{n-1}. \\ &c_i \in \mathbb{R};\ n = [\alpha] + 1. \end{aligned} \tag{2.16}$$

**Démonstration :** Soient $f$ une fonction de classe $C^n([a;b])$ et $0 < n-1 < \alpha < n$ :

(3) On pose $D_c^{\alpha} f(x) = 0$, alors par définition on a :

$$I^{n-\alpha} D^n f(x) = 0 \Longrightarrow D^n f(x) = 0, \tag{2.17}$$

par conséquent :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x-a)^i.$$

**Réciproquement** : on pose $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x-a)^i$, on applique l'opérateur $D_c^{\alpha}$ sur la fonction $f$ :

$$\begin{aligned} D_c^{\alpha} f(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i D_c^{\alpha} (x-a)^i \\ D_c^{\alpha} f(x) &= I^{n-\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{d}{dx^n} (x-a)^i \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

(4) Soit $f \in C^n([a,b]), n-1 < \alpha < n$, alors :

$$\begin{aligned} I^{\alpha} D_c^{\alpha} f(x) &= I^{\alpha} \left( I^{n-\alpha} D^n \right) f(x) \\ &= I^n D^n f(x) \\ &= f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \\ &= f(x) + c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_{n-1}(x-a)^{n-1}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

**Remarque 2.2** *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $n-1 < \alpha < n$, s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre $n-\alpha$ suivit d'une dérivation classique d'ordre n, alors que La dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.*

## 4.3 Le lien entre les deux approches

Le théorème suivant établit la relation entre la dérivée fractionnaire de caputo et celle de Riemann-Liouville.

**Théorème 2.1** *Soient $n \in \mathbb{N}^*, n-1 < \alpha < n$, et $f \in C^n([a,b])$, alors on a :*

$$D_c^{\alpha} f(x) = D_{RL}^{\alpha} \left[ f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right]. \tag{2.20}$$

**Démonstration** On considère le développement en série de Taylor de la fonction f au point $x = a$,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + I^n D^n f(x). \tag{2.21}$$

puis on applique $D_{RL}^{\alpha}$ sur les deux membres de l'égalité :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{\alpha}_{\mathrm{RL}} f(x) &= \mathrm{D}^{\alpha}_{\mathrm{RL}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \mathrm{D}^n \mathrm{I}^{n-\alpha} \mathrm{I}^n \mathrm{D}^n f(x) \\
\mathrm{D}^{\alpha}_{\mathrm{RL}} f(x) &= \mathrm{D}^{\alpha}_{\mathrm{RL}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \mathrm{I}^{n-\alpha} \mathrm{D}^n f(x) \\
\mathrm{D}^{\alpha}_{\mathrm{RL}} f(x) &= \mathrm{D}^{\alpha}_{\mathrm{RL}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \mathrm{D}^{\alpha}_{c} f(x)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

d'où

$$\mathrm{D}^{\alpha}_{c} f(x) = \mathrm{D}^{\alpha}_{\mathrm{RL}} f(x) - \mathrm{D}^{\alpha}_{\mathrm{RL}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a). \tag{2.23}$$

**Remarque 2.3** *La formule* (2.20) *signifie que :*

1. *La dérivation au sens de Caputo d'une fonction $f$, est une dérivation fractionnaire du reste dans le développement de Taylor de $f$.*
2. *Les opérateurs fractionnaires de Caputo et de Riemann-Liouville coïncident si et seulement si $f(x)$ en même temps que les premiers $(n-1)$dérivées sont nulles au point $x = a$.*

# 5 Conclusion

Dans ce chapitre on a défini les fonctions élémentaires et les différents opérateurs fractionnaires. On vient de voir les principales notions et propriétés de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, aussi on a introduit les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo, le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul classique et par conséquent il conserve de nombreuses propriétés de base.

# Chapitre 3

# Résolution de l'équation de Lane–Emden

## 1 Introduction

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Cette théorie a de nombreuses applications dans la description de plusieurs évènements dans le monde réel. Les équations différentielles fractionnaires sont souvent applicables dans l'ingénierie, la physique, la chimie...etc. Une de ces équations a pour but de généraliser l'équation différentielle ordinaire de Lane-Emden donnée par :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\dfrac{d}{dx}\left(x^2\dfrac{du}{dx}\right) = -u^n \\ \\ u(0) = 1 \quad u'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Dans [11] l'auteur a étudié le problème d'existence et d'unicité de l'équation différentielle fractionnaire de Lane-Emden suivant :

$$\begin{cases} \mathrm{D}^{\beta}\left(\mathrm{D}^{\alpha} + \dfrac{a}{t}\right)u(t) + f(t, u(t)) = g(t), \\ \\ u(0) = \mu, \ u(1) = \nu, \\ \\ 0 < \alpha, \beta \leq 1, \ 0 < t \leq 1, \ a \geq 0, \end{cases}$$

où $\mathrm{D}^{\beta}$, $\mathrm{D}^{\alpha}$ sont les dérivées au sens de Caputo, $f$ est une fonction continue, et $g \in \mathrm{C}([0,1])$.
Et dans [27] une étude numérique a été présentée sur l'équation différentielle fractionnaire de type Lane-Emden suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{D}^{\alpha}y(t) + \dfrac{k}{t^{\alpha-\beta}}\mathrm{D}^{\beta}y(t) + f\left(t, y(t)\right) = g(t), \ t \in (0,1], \\ \\ y(0) = \mathrm{A}, \ y'(0) = \mathrm{B}. \\ k \geq 0, \ 1 < \alpha \leq 2, \ 0 < \beta \leq 1. \end{cases}$$

Au sein de ce chapitre, on étudie un problème différentiel fractionnaire de type Lane-Emden à dérivées au sens de Caputo. On va aborder la question d'existence et d'unicité de ce problème, en utilisant des théorèmes classiques de point fixe, pour cela on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{\beta}(D^{\alpha} + \frac{k}{t^{\alpha-\beta}})y(t) + \lambda f(t, D^{\delta} y(t)) + g(t, y(t)) = h(t) \ \ , t \in J \\ \\ y(0) = a \qquad y(1) = b, \end{cases} \tag{3.2}$$

pour ce problème, on prend $\alpha, \beta, \delta \in ]0,1]$ avec $0 < \beta < \alpha \leq 1$ et $\delta < \alpha$,$D^{\beta}$ , $D^{\alpha}$ et $D^{\delta}$ sont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo,$k > 0$, $a$, et $\lambda$ sont des réelles. On prend aussi $J = (0,1]$, les fonctions $f, g : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, et $h \in C(J, \mathbb{R})$.

## 2 Représentation Intégrale

**Lemme 3.1** *La représentation intégrale du problème (3.2) est donnée par :*

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Big( \int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} (h(u) - \lambda f(u, D^{\delta} y(u)) - g(u, y(u))) du - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}} y(s) \Big) ds \\ & - t^{\alpha} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Big( \int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} (h(u) - \lambda f(u, D^{\delta} y(u)) - g(u, y(u))) du - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}} y(s) \Big) ds \\ & - t^{\alpha}(a-b) + a. \end{aligned} \tag{3.3}$$

**Preuve.** On a :

$$D^{\beta}(D^{\alpha} + \frac{k}{t^{\alpha-\beta}})y(t) = h(t) - \lambda f(t, D^{\delta} y(t)) - g(t, y(t)), \tag{3.4}$$

on applique $I^{\beta}$ sur (3.4) on trouve :

$$\big(D^{\alpha} + \frac{k}{s^{\alpha-\beta}}\big) y(s) + c_0 = \int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \big(h(u) - \lambda f(u, D^{\delta} y(u)) - g(u, y(u))\big) du. \tag{3.5}$$

$$D^{\alpha} y(s) = \int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \big(h(u) - \lambda f(u, D^{\delta} y(u)) - g(u, y(u))\big) du - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}} y(s) - c_0, \tag{3.6}$$

ensuite on applique $I^{\alpha}$ à la formule obtenue, on aura :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Big( \int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \Big( (h(u) - \lambda f(u, D^{\delta} y(u))) - g(u, y(u)) \Big) du - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}} y(s) \Big) ds \\ & - \frac{c_0 \Gamma(1) t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - c_1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

On passe maintenant à déterminer les constantes $c_0$ et $c_1$ ; En utilisant les conditions initiales du problème(3.2), on trouve :

$$y(0) = a \quad \Rightarrow \quad c_1 = -a. \tag{3.8}$$

et

$$y(1) = b \Rightarrow c_0 = \Gamma(\alpha+1)\int_0^1 \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\Big(\big(h(u) - \lambda f(u, D^\delta y(u)) - g(u, y(u))\big)du$$

$$- \frac{k}{s^{\alpha-\beta}} y(s)\Big)ds + \Gamma(\alpha+1)(a-b). \tag{3.9}$$

Enfin, on remplace les quantités (3.8) et (3.9)dans (3.7) ; On obtient (3.3), d'où le résultat.

■

**Existence et Unicité des Solutions**

En générale, pour résoudre un problème de point fixe on doit identifier trois éléments fondamentaux, à savoir :

1. Un ensemble convenable E apte à contenir les solutions du problème.
2. Une application T : E → E ayant la particularité qu'un point fixe est solution du problème.
3. Un théorème de point fixe qui assure l'existence d'un tel point fixe de T sur E.

Tout d'abord, on transforme le problème (3.2) en un problème de point fixe. Puis on introduit l'espace de Banach suivant :

$$X := \Big\{ y \in C([0,1], \mathbb{R}), D^\delta y \in C([0,1], \mathbb{R}) \Big\}$$

muni de la norme

$$\|y\|_X = Max\Big\{\|y\|_\infty, \|D^\delta y\|_\infty\Big\},$$

où :

$$\|y\|_\infty = \sup_{t\in J} |y(t)| \text{ et } \|D^\delta y\|_\infty = \sup_{t\in J} |D^\delta y(t)|.$$

On considère l'opérateur H qui sera définit de X dans lui-même par :

$$\begin{aligned} H : X &\longrightarrow X \\ y &\longrightarrow H(y) \end{aligned}$$

tel que, $\forall t \in J$ on a :

$$\begin{aligned}(\mathrm{H}y)(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(h(u)-\lambda f(u,\mathrm{D}^{\delta}y(u))-g(u,y(u)))du \\ &\quad -\frac{k}{s^{\alpha-\beta}}y(s)\Big)ds - t^{\alpha}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(h(u)-\lambda f(u,\mathrm{D}^{\delta}y(u)) \\ &\quad -g(u,y(u)))du - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}}y(s)\Big)ds - t^{\alpha}(a-b)+a.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Clairement, les points fixes de H sont les solutions de l'équation (3.2).

On considère les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_1 &= \frac{2\big(|\lambda|\mathrm{L}_f+\mathrm{L}_g\big)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+2k\Big(\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}\Big).\\ \mathrm{Q}_2 &= (|\lambda|\mathrm{L}_f+\mathrm{L}_g)\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta+1)}+\frac{\beta(\alpha+1,\beta)}{\Gamma(\alpha-\delta+1)\Gamma(\beta)}\Big)\\ &\quad +k\Big(\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\delta+1)}+\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\delta+1)\Gamma(\beta+1)}\Big).\end{aligned}$$

$$\mathrm{Q}' = \mathrm{M}ax\begin{cases}\dfrac{|\lambda|\mathrm{L}_f+\mathrm{L}_g}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+k\dfrac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}.\\[2ex] \dfrac{(|\lambda|\mathrm{L}_f+\mathrm{L}g)\beta(\alpha+1,\beta)}{\Gamma(\alpha-\delta+1)\Gamma(\beta)}+k\dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\delta+1)\Gamma(\beta+1)}.\end{cases}$$

## 3 Existence d'une solution unique

Dans le premier résultat, on étudie l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.2).

**Théorème 3.1** *On suppose que :*

– (P1) *Les fonctions $f$ et $g$ vérifient la condition Lipschitz, i.e. : il existe des constantes de Lipschitz $\mathrm{L}_f$, respectivement $\mathrm{L}_g$, telles que $\forall\, t \in \mathrm{J}$ et pour tout $v, v^* \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\begin{aligned}|f(t,v)-f(t,v^*)| &\leq \mathrm{L}_f|v-v^*|,\\ |g(t,v)-g(t,v^*)| &\leq \mathrm{L}_g|v-v^*|,\end{aligned}$$

*alors Le problème (3.2) admet une unique solution, pourvue que $0<\mathrm{Q}<1$, où*

$$\mathrm{Q} = \mathrm{M}ax\,\{\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2\}.$$

**Preuve.**

La démonstration de ce théorème est basée sur l'application du principe de contraction de Banach. On procède en deux étapes, dans la première étape, on cherche une constante $0 < Q_1 < 1$, telle que, quel que soit $x, y \in X$ et pour tout $t \in J$ on obtient :

$$\left\|Hy - Hx\right\|_\infty \leq Q_1 \|y - x\|_X.$$

dans la seconde étape, on cherche a trouver une constante $0 < Q_2 < 1$ telle que, quel que soit $x, y \in X$ et pour tout $t \in J$ on obtient

$$\left\|D^\delta Hy - D^\delta Hx\right\|_\infty \leq Q_2 \|y - x\|_X.$$

Le résultat final est donc obtenu par le passage au maximum des deux normes.

**Étape 1** :

On montre que l'opérateur $H : X \to X$ est un opérateur contractant, soient $x, y \in X$ et $t \in J$, on a :

$$\left\|Hx - Hy\right\|_\infty = \sup_{t\in J} \left|Hx(t) - Hy(t)\right| \tag{3.11}$$

par la suite on a :

$$\begin{aligned}
\left|Hx(t) - Hy(t)\right| \leq & \sup_{t\in J} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |\lambda||f(u, D^\delta x(u)) - f(u, D^\delta y(u))|du\Big)ds \\
& + \sup_{t\in J} t^\alpha \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |\lambda||f(u, D^\delta x(u)) - f(u, D^\delta y(u))|du\Big)ds \\
& + \sup_{t\in J} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |g(u, x(u)) - g(u, y(u))|du\Big)ds \\
& + \sup_{t\in J} t^\alpha \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |g(u, x(u)) - g(u, y(u))|du\Big)ds \\
& + \sup_{t\in J} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{k}{s^{\alpha-\beta}} \big(x(s) - y(s)\big)ds + \sup_{t\in J} t^\alpha \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{k}{s^{\alpha-\beta}} \big(x(s) - y(s)\big)ds,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

en vertu de l'hypothèse (P1) on peut écrire :

$$
\begin{aligned}
\left|\mathrm{H}x(t)-\mathrm{H}y(t)\right| \leq & |\lambda|\mathrm{L}_f\|\mathrm{D}^\delta x-\mathrm{D}^\delta y\| \sup_{t\in \mathrm{J}} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}du\Big)ds \\
& + |\lambda|\mathrm{L}_f\|\mathrm{D}^\delta x-\mathrm{D}^\delta y\| \sup_{t\in \mathrm{J}} t^\alpha \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}du\Big)ds \\
& + \mathrm{L}_g\|x-y\| \sup_{t\in \mathrm{J}} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}du\Big)ds \\
& + \mathrm{L}_g\|x-y\| \sup_{t\in \mathrm{J}} t^\alpha \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}du\Big)ds \\
& + k\|x-y\| \sup_{t\in \mathrm{J}} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} s^{\beta-\alpha}ds + k\|x-y\| \sup_{t\in \mathrm{J}} t^\alpha \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} s^{\beta-\alpha}ds
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

comme $\beta<\alpha$, alors $-1<\beta-\alpha<0$, par conséquent on a :

$$
\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} s^{\beta-\alpha}ds = \mathrm{I}^\alpha s^{\beta-\alpha}(t) = \frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)\,t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}.
$$

grâce à la propriété (2.6) de semi-groupe, alors :

$$
\begin{aligned}
\left|\mathrm{H}x(t)-\mathrm{H}y(t)\right| \leq & |\lambda|\mathrm{L}_f\|\mathrm{D}^\delta x-\mathrm{D}^\delta y\|\Big(\sup_{t\in \mathrm{J}} \int_0^t \frac{(t-u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}du + \sup_{t\in \mathrm{J}} t^\alpha \int_0^1 \frac{(t-u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}du\Big) \\
& + \mathrm{L}_g\|x-y\|\Big(\sup_{t\in \mathrm{J}} \int_0^t \frac{(t-u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}du + \sup_{t\in \mathrm{J}} t^\alpha \int_0^1 \frac{(t-u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}du\Big) \\
& + k\|x-y\| \sup_{t\in \mathrm{J}}\Big(\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)\,t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)\,t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\beta+1)}\Big)
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

on calcule les intégrales du second membre, on aboutit à :

$$
\begin{aligned}
\left|\mathrm{H}x(t)-\mathrm{H}y(t)\right| \leq & |\lambda|\mathrm{L}_f\|\mathrm{D}^\delta x-\mathrm{D}^\delta y\| \sup_{t\in \mathrm{J}}\Big(\frac{\Gamma(1)\,t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{\Gamma(1)\,t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\Big) \\
& + \mathrm{L}_g\|x-y\|\Big(\frac{\Gamma(1)\,t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{\Gamma(1)\,t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\Big) \\
& + k\|x-y\| \sup_{t\in \mathrm{J}}\Big(\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)\,t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)\,t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\beta+1)}\Big).
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

puisque $t \in (0,1]$, donc le passage au sup sur J donne :

$$\begin{aligned}\|\mathrm{H}x-\mathrm{H}y\|_{\infty} \leq & |\lambda|\mathrm{L}_f\|x-y\|_{\mathrm{X}}\Big(\frac{2}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\Big)+\mathrm{L}_g\|x-y\|_{\mathrm{X}}\Big(\frac{2}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\Big)\\ & +2k\|x-y\|_{\mathrm{X}}\Big(\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}\Big).\end{aligned} \tag{3.16}$$

ce qui implique que :

$$\|\mathrm{H}x-\mathrm{H}y\|_{\infty} \leq \|x-y\|_{\mathrm{X}}\Big(\frac{2}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\Big)\big(|\lambda|\mathrm{L}_f+\mathrm{L}_g\big)+2k\|x-y\|_{\mathrm{X}}\Big(\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}\Big). \tag{3.17}$$

ainsi, d'après ce qui précède, on trouve :

$$\|\mathrm{H}x-\mathrm{H}y\|_{\infty} \leq \mathrm{Q}_1\|x-y\|_{\mathrm{X}} \tag{3.18}$$

**Etape2** :

On passe maintenant à étudier la contraction de l'opérateur $\mathrm{D}^{\delta}\mathrm{H}$, on a$\forall\, t \in \mathrm{J}$ :

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^{\delta}\mathrm{H}y(t) \;=\; & \mathrm{D}^{\delta}\mathrm{I}^{\alpha}\Big[\mathrm{I}^{\beta}\Big(h(s)-\lambda f(s,\mathrm{D}^{\delta}y(s))-g(s,y(s))\Big)-\frac{k}{s^{\alpha-\beta}}y(s)\Big](t)\\ & -\mathrm{D}^{\delta}t^{\alpha}\mathrm{I}^{\alpha}\Big[\mathrm{I}^{\beta}\Big(h(s)-\lambda f(s,\mathrm{D}^{\delta}y(s))-g(s,y(s))\Big)-\frac{k}{s^{\alpha-\beta}}y(s)\Big](1)\\ & -\mathrm{D}^{\delta}t^{\alpha}(a-b)+\mathrm{D}^{\delta}a,\end{aligned} \tag{3.19}$$

d'après la propriété (2.15), on obtient $\forall\, t \in \mathrm{J}$ :

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^{\delta}\mathrm{H}y(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\delta-1}\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(h(u)-\lambda f(u,\mathrm{D}^{\delta}y(u))-g(u,y(u)))du\\ & -\frac{k}{s^{\alpha-\beta}}y(s)\Big)ds-\frac{\Gamma(\alpha+1)\,t^{\alpha-\delta}}{\Gamma(\alpha-\delta+1)}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(h(u)-\lambda f(u,\mathrm{D}^{\delta}y(u))\\ & -g(u,y(u)))du-\frac{k}{s^{\alpha-\beta}}y(s)\Big)ds-\frac{\Gamma(\alpha+1)\,t^{\alpha-\delta}}{\Gamma(\alpha-\delta+1)}(a-b).\end{aligned} \tag{3.20}$$

on va appliquer les mêmes arguments que précédemment, et donc on trouve :

$$\left\|D^{\delta}Hx-D^{\delta}Hy\right\|_{\infty}\leq\left(\frac{(|\lambda|L_f+Lg)}{\Gamma(\alpha-\delta+\beta+1)}\right)\|x-y\|_X+k\left(\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\delta+1)}\right)\|x-y\|_X$$
$$+\frac{(|\lambda|L_f+Lg)\beta(\alpha+1,\beta)}{\Gamma(\alpha-\delta+1)\Gamma(\beta)}\|x-y\|_X+k\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\delta+1)\Gamma(\beta+1)}\right)\|x-y\|_X \tag{3.21}$$

par conséquent :

$$\left\|D^{\delta}\left(Hy-Hz\right)\right\|_{\infty}\leq Q_2\|y-z\|_X.$$

Maintenant on passe au maximum des normes trouvées :

$$\mathrm{Max}\left(\|H(y)-H(z)\|_{\infty},\|D^{\delta}\left(H(y)-H(z)\right)\|_{\infty}\right)\leq\mathrm{Max}\left(Q_1,Q_2\right)\|y-z\|_X, \tag{3.22}$$

il en résulte que :

$$\|H(y)-H(z)\|_X\leq Q\|y-z\|_X, \tag{3.23}$$

d'où, le problème (3.2) admet une unique solution sur J. ■

# 4 Existence d'au moins une Solution

Dans cette partie, on étudie l'existence d'au moins une solution pour le problème (3.2).

**Théorème 3.2** *Sous les hypothèses suivantes :*

- (P1) *Les fonctions* $f$ *et* $g : J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sont continues .*
- (P2) *Il existe des constantes de Lipschitz* $L_f$*, respectivement* $L_g$ *telles que* $\forall\, t\in J$ *et pour tout* $v, v^*\in\mathbb{R}$*; On a :*

$$|f(t,v)-f(t,v^*)| \leq L_f|v-v^*|.$$
$$|g(t,v)-g(t,v^*)| \leq L_g|v-v^*|.$$

- (P3) *Il existe des constantes positives* $M_f$ *et* $M_g$ *telles que :*

$$|f(t,x)|\leq M_f$$
$$|g(t,x)|\leq M_g$$

*si* $0<Q'<1$, *alors le problème* (3.2) *admet au moins une solution .*

**Preuve.**

Pour la démonstration de ce résultat, on applique le théorème de point fixe de Krasnoselskii.

Tout d'abord, on introduit le sous espace fermé convexe $B_r\subset X$ définit par :

$$\mathrm{B}_r = \Big\{x \in \mathrm{X}, \|x\|_{\mathrm{X}} \leq r\Big\},$$

avec

$$r \geq \mathrm{M}ax \begin{cases} \dfrac{2\Big(\mathrm{M}_h + \mathrm{M}_f + \mathrm{M}_g\Big)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)(1-\mathrm{Q}_1)} + \dfrac{2|a|+|b|}{(1-\mathrm{Q}_1)}, \\ \dfrac{\mathrm{M}_h + \mathrm{M}_f + \mathrm{M}_g}{1-\mathrm{Q}_2}\Big(\dfrac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta+1)} + \dfrac{\beta(\alpha+1,\beta)}{\Gamma(\alpha-\delta+1)\Gamma(\beta)}\Big) + \dfrac{\Gamma(\alpha+1)|a-b|}{\Gamma(\alpha-\delta+1)(1-\mathrm{Q}_2)}, \end{cases}$$

puis on considère les deux opérateurs $\mathrm{T}_1$ et $\mathrm{T}_2$, définis sur cet ensemble comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{T}_1 : (\mathrm{B}_r, \|.\|_{\mathrm{X}}) & \longrightarrow & (\mathrm{B}_r, \|.\|_{\mathrm{X}}) \\ y & \longrightarrow & \mathrm{T}_1(y) \end{array}$$

tel que :

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_1(y)(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(h(u) - \lambda f(u, \mathrm{D}^\delta y(u)) \\ &\quad - g(u, y(u)))du - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}}y(s)\Big)ds, \end{aligned} \tag{3.24}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{T}_2 : (\mathrm{B}_r, \|.\|_{\mathrm{X}}) & \longrightarrow & (\mathrm{B}_r, \|.\|_{\mathrm{X}}) \\ y & \longrightarrow & \mathrm{T}_2(y) \end{array}$$

tel que :

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_2(y)(t) &= -t^\alpha \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(h(u) - \lambda f(u, \mathrm{D}^\delta y(u)) \\ &\quad - g(u, y(u)))du - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}}y(s)\Big)ds - t^\alpha(a-b) + a. \end{aligned} \tag{3.25}$$

La preuve est divisée en trois étapes, dans un premier temps on montre que $\mathrm{T}_1 x + \mathrm{T}_2 y \in \mathrm{B}_r, \forall x, y \in \mathrm{B}_r$, ensuite on montre que l'opérateur $\mathrm{T}_2$ est une contraction sur $\mathrm{B}_r$,finalement on montre que $\mathrm{T}_1$ est un opérateur compact .

**Étape1** Soient $x\ y \in \mathrm{B}_r\ t \in \mathrm{J}$, alors on a :

$$\begin{aligned} \Big|\mathrm{T}_1 y(t) + \mathrm{T}_2 x(t)\Big| &\leq \sup_{t\in\mathrm{J}}\Big|\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(h(u) - \lambda f(u, \mathrm{D}^\delta y(u)) - f(u,0) + f(u,0)) \\ &\quad - g(u, y(u))) - g(u,0) + g(u,0))du - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}}y(s)\Big)ds + t^\alpha \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ &\quad \times\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(h(u) - \lambda f(u, \mathrm{D}^\delta x(u)) - f(u,0) + f(u,0)) - g(u, x(u))) \\ &\quad - g(u,0) + g(u,0))du - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}}x(s)\Big)ds + t^\alpha|a-b| + |a|\Big|, \end{aligned} \tag{3.26}$$

maintenant,à partir de l'hypothèse $(P_2)$, et comme la fonction $h \in C(J,\mathbb{R})$, alors $\exists M_h > 0$ telle que $\|h\|_\infty = M_h$, ainsi on trouve :

$$\left\|T_1 y + T_2 x\right\|_\infty \leq \frac{2\Big(M_h + M_f + M_g + \big(|\lambda| L_f + L_g\big) r\Big)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2kr\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)} + 2|a| + |b|. \tag{3.27}$$

Raisonnant de la même manière, on trouve :

$$\begin{aligned}\left\|D^\delta T_1 y + D^\delta T_2 x\right\|_\infty \leq & \Big((|\lambda| L_f + L_g) r + M_h + M_f + M_g\Big)\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta+1)} + \frac{\beta(\alpha+1,\beta)}{\Gamma(\alpha-\delta+1)\Gamma(\beta)}\Big) \\ & + kr\Big(\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\delta+1)} + \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\delta+1)\Gamma(\beta+1)}\Big) + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\delta+1)}|a-b|.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Comme conséquence on a :

$$\text{Max}\Big(\|T_1 y + T_2 x\|_\infty, \|D^\delta\big(T_1 y + T_2 x\big)\|_\infty\Big) \leq r$$

d'où $\forall x\ y \in B_r\ t \in J$ ,on a :

$$T_1 y + T_2 x \in B_r$$

**Étape2** : On montre maintenait que l'opérateur $T_2$ est contractant, soient $x, y \in B_r$ et $\forall t \in J$ on a d'une part :

$$\|T_2(x) - T_2(y)\|_\infty \leq \|x-y\|_X\Big(\frac{\big(|\lambda| L_f + L_g\big)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\Big) + k\|x-y\|_X\Big(\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}\Big), \tag{3.29}$$

et d'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\|D^\delta T_2(x) - D^\delta T_2(y)\|_\infty \leq & \frac{(|\lambda| L_f + Lg)\beta(\alpha+1,\beta)}{\Gamma(\alpha-\delta+1)\Gamma(\beta)}\|x-y\|_X \\ & + k\Big(\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\delta+1)\Gamma(\beta+1)}\Big)\|x-y\|_X\end{aligned} \tag{3.30}$$

le passage à la norme donne :

$$\text{Max}\Big(\|T_2(x) - T_2(y)\|_\infty, \|D^\delta T_2(x) - D^\delta T_2(y)\big)\|_\infty\Big) \leq Q'\|y-z\|_X, \tag{3.31}$$

d'où

$$\|T_2(x) - T_2(y)\|_X \leq Q'\|y-z\|_X. \tag{3.32}$$

**Étape3** : On montre que l'opérateur $T_1$ est un opérateur compact, pour cela on doit montrer que $T_1$ est continu et relativement compact.

- La continuité : Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$, on va montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_1(y_n) = T_1(y)$, $\forall t \in J$ on trouve :

$$\begin{aligned}\left|(T_1 y_n)(t) - (T_1 y)(t)\right| &\leq \sup_{t\in J}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\Big[|\lambda||f(u,D^\delta y_n(u)) - f(u,D^\delta y(u))| \\ &\quad + g(u,y_n(u)) - g(u,y(u))|du\Big] - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}}\big(y_n(s)-y(s)\big)\Big)ds\end{aligned} \tag{3.33}$$

après le calcul des intégrales, on aboutit à :

$$\begin{aligned}\left|(T_1 y_n)(t) - (T_1 y)(t)\right|_\infty &\leq |\lambda|\left\|f(.,D^\delta y_n(.)) - f(.,D^\delta y(.))\right\| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &\quad + \left\|g(.,y_n(.)) - g(.,y(.))\right\| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &\quad + K\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}\|y_n - y\|.\end{aligned} \tag{3.34}$$

grâce à l'hypothèse (P1), on obtient :

$$\begin{array}{c} f(.,D^\delta y_n(.)) - f(.,D^\delta y(.)) \longrightarrow 0 \\ n \longrightarrow \infty \end{array} \tag{3.35}$$

et

$$\begin{array}{c} g(.,y_n(.)) - g(.,y(.)) \longrightarrow 0 \\ n \longrightarrow \infty \end{array} \tag{3.36}$$

par conséquent :

$$\left\|T_1 y_n - T_1 y\right\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty \tag{3.37}$$

En outre :

$$\begin{aligned}\left\|D^\delta T_1 y_n - D^\delta T_2 y\right\|_\infty &\leq |\lambda|\left\|f(.,D^\delta y_n(.)) - f(.,D^\delta y(.))\right\|_X \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta+\beta+1)}\right) \\ &\quad + \left\|g(.,y_n(.)) - g(.,y(.))\right\|_X \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta+\beta+1)}\right) \\ &\quad + \frac{k\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\delta+1)}\|y_n - y\|_X\end{aligned} \tag{3.38}$$

ce qui implique :

$$\left\|D^\delta T_1 y_n - D^\delta T_1 y\right\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty. \tag{3.39}$$

De (3.40) et (3.39), il résulte que :

$$\left\|\mathrm{T}_1 y_n - \mathrm{T}_1 y\right\|_{\mathrm{X}} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty \tag{3.40}$$

d'où l'opérateur $\mathrm{T}_1$ est continu.

- L'opérateur $\mathrm{T}_1$ est borné : soit $x \in \mathrm{B}_r$ et $\forall t \in \mathrm{J}$, on a :

$$\|\mathrm{T}_1(x)\|_\infty \leq \|x\|_{\mathrm{X}}\Big(\frac{\mathrm{M}_h + \mathrm{M}_f + \mathrm{M}_g}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\Big) + k\|x\|_{\mathrm{X}}\Big(\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}\Big), \tag{3.41}$$

par conséquent :

$$\|\mathrm{T}_1(x)\|_\infty \leq r\Big(\frac{\mathrm{M}_h + \mathrm{M}_f + \mathrm{M}_g}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\Big) + kr\Big(\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}\Big), \tag{3.42}$$

de manière analogue, on trouve :

$$\|\mathrm{D}^\delta \mathrm{T}_1(x)\|_\infty \leq r\Big(\frac{\mathrm{M}_h + \mathrm{M}_f + \mathrm{M}_g}{\Gamma(\alpha-\delta+\beta+1)}\Big) + kr\Big(\frac{\Gamma(\beta-\alpha-\delta+1)}{\Gamma(\beta+1)}\Big), \tag{3.43}$$

de (3.42) et (3.43) on conclut que :

$$\|\mathrm{T}_1(x)\|_{\mathrm{X}} < \mathrm{Max}\big(\|\mathrm{T}_1(x)\|_\infty, \|\mathrm{D}^\delta \mathrm{T}_1(x)\|_\infty\big) < +\infty \tag{3.44}$$

D'où l'opérateur $\mathrm{T}_1$ est uniformément borné sur $\mathrm{B}_r$.

- La famille $\mathrm{T}_1(x)$ est equicontinue : Soient $t_1, t_2 \in (0,1], t_1 < t_2$, et soit $x \in \mathrm{B}_r$, Donc pour tout $t \in (0,1]$ on a

$$\begin{aligned}
\big|(\mathrm{T}_1 y)(t_1) - (\mathrm{T}_1 y)(t_2)\big| &= \Big|\int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\big(h(u) - \lambda f(u, \mathrm{D}^\delta y(u))\\
&\quad - g(u, y(u))du - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}} y(s)\Big)ds - \int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\\
&\quad \big(h(u) - \lambda f(u, \mathrm{D}^\delta y(u)) - g(u, y(u))du - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}} y(s)\Big)ds\Big|,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

puisque $t_1 < t_2$, alors on peut écrire(3.45) comme suit :

$$
\begin{aligned}
\left|(\mathrm{T}_1 y)(t_1)-(\mathrm{T}_1 y)(t_2)\right| &= \Big|\int_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^{s}\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\big(h(u)-\lambda f(u,\mathrm{D}^{\delta}y(u))\\
&\quad -g(u,y(u))du-\frac{k}{s^{\alpha-\beta}}y(s)\Big)ds-\int_0^{t_1}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^{s}\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\\
&\quad \big(h(u)-\lambda f(u,\mathrm{D}^{\delta}y(u))-g(u,y(u))du-\frac{k}{s^{\alpha-\beta}}y(s)\Big)ds\\
&\quad -\int_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^{s}\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\big(h(u)-\lambda f(u,\mathrm{D}^{\delta}y(u))\\
&\quad -g(u,y(u))du-\frac{k}{s^{\alpha-\beta}}y(s)\Big)ds\Big|,
\end{aligned} \tag{3.46}
$$

en calculant les intégrales et grâce à l'hypothèse (P3), on obtient :

$$
\begin{aligned}
\left|(\mathrm{T}_1 y)(t_1)-(\mathrm{T}_1 y)(t_2)\right| &\le \left[(t_1{}^{\alpha+\beta}-t_2{}^{\alpha+\beta})+\big(t_2-t_1\big)^{\alpha+\beta}\right]\frac{\big(\mathrm{M}_g+\mathrm{M}_h+\mathrm{M}_f\big)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\\
&\quad +\big(t_2-t_1\big)^{\alpha+\beta}\big)\frac{\big(\mathrm{M}_g+\mathrm{M}_h+\mathrm{M}_f\big)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\\
&\quad +\frac{kr\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\alpha-\lambda+1)}\left[\big(t_1{}^{\alpha}-t_2{}^{\alpha}\big)+2\big(t_2-t_1\big)^{\alpha}\right],
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

par conséquent on trouve :

$$
\begin{aligned}
\left\|(\mathrm{T}_1 y)(t_1)-(\mathrm{T}_1 y)(t_2)\right\|_{\infty} &\le \left[(t_1{}^{\alpha+\beta}-t_2{}^{\alpha+\beta})+2\big(t_2-t_1\big)^{\alpha+\beta}\right]\frac{\big(\mathrm{M}_g+\mathrm{M}_h+\mathrm{M}_f\big)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\\
&\quad +\frac{kr\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\alpha-\lambda+1)}\left[\big(t_1{}^{\alpha}-t_2{}^{\alpha}\big)+2\big(t_2-t_1\big)^{\alpha}\right].
\end{aligned} \tag{3.48}
$$

De la même manière, on a pour tout $t_1,t_2\in(0,1], t_1<t_2$ :

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathrm{D}^{\delta}(\mathrm{T}_1 y)(t_1)-\mathrm{D}^{\delta}(\mathrm{T}_1 y)(t_2)\right\|_{\infty} &\le \left[(t_1{}^{\alpha+\beta-\delta}-t_2{}^{\alpha+\beta-\delta})+2\big(t_2-t_1\big)^{\alpha+\beta-\delta}\right]\frac{\big(\mathrm{M}_g+\mathrm{M}_h+\mathrm{M}_f\big)}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta+1)}\\
&\quad +\frac{k\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\alpha-\lambda-\delta+1)}\left[(t_1{}^{\alpha-\delta}-t_2{}^{\alpha-\delta})+2\big(t_2-t_1\big)^{\alpha-\delta}\right].
\end{aligned} \tag{3.49}
$$

Quand $t_1$ tend vers $t2$ ; les seconds membres de (3.48) et(3.49) tendent vers zéro. Donc, on a l'opérateur$\mathrm{T}_1$ est continu, borné et la famille $\mathrm{T}_1(y)$ est équicontinu. Donc, d'après le théorème d'Ascoli–Arzéla $T_1$ est compact.

Les étapes 1, 2 et 3 nous permettent de conclure que le problème (3.2) admet au moins un point fixe sur $B_r$.

■

# 5 Application

Dans cette partie, on va considérer un exemple pour illustrer les résultats théoriques énoncées dans la section précédente :

$$\begin{cases} D^{0.12}\Big(D^{0.76}+\frac{0.01}{t^{0.64}}\Big)y(t)-0.004\Big(\frac{\cos(1-t)}{\ln(t+15)^2}+\frac{3(D^{0.59}y(t))}{38}\Big)+\frac{\Gamma(\sqrt[3]{\pi})}{t+\sin(t-1)}y=\exp^{3t} \quad , t\in J=(0,1] \\ \\ y(0)=\sqrt{3\pi+1} \qquad y(1)=\frac{1}{16}, \\ \end{cases} \tag{3.50}$$

dans ce problème on a,

$\alpha=0.76\ \beta=0.12\ \delta=0.59$ et $\lambda=-0.004 k=0.01$

$$f(t,y) = \frac{\cos(1-t)}{\ln(t+15)^2}+\frac{3y}{38}.$$

$$g(t,y) = \frac{\Gamma(\sqrt[3]{\pi})}{t+\sin(t-1)}y.$$

$$h(t) = \exp^{3t}.$$

On a $\forall t\in J, \forall x,y\in\mathbb{R}$ :

$$\big|f(t,x)-f(t,y)\big| \leq \frac{3}{38}\big|x(t)-y(t)\big|.$$

$$\big|g(t,x)-g(t,y)\big| \leq \frac{\Gamma(\sqrt[3]{\pi})}{2}|x-y|.$$

donc on a : $L_f=\frac{3}{38}$ et $l_g=\frac{\Gamma(\sqrt[3]{\pi})}{2}$.

Maintenant on calcul $Q=Max\{Q_1,Q_2\}$ :

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{2\big(|\lambda| L_f + L_g\big)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + 2k\Big(\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}\Big) \\
&= \frac{2(0.004\times 0.0789+0.4428)}{0.9551} + 2\times 0.01\big(\frac{2.4727}{0.9436}\big) \\
&= 0.9803. \\
Q_2 &= (|\lambda| L_f + L_g)\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta+1)} + \frac{\beta(\alpha+1,\beta)}{\Gamma(\alpha-\delta+1)\Gamma(\beta)}\Big) + k\Big(\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\delta+1)} + \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\delta+1)\Gamma(\beta+1)}\Big) \\
&= (0.004\times 0.0789+0.4428)\Big(\frac{1}{0.8990} + \frac{7.5858}{7.2896}\Big) + 0.01\Big(\frac{2.4727}{1.6747} + \frac{0.9214\times 2.4727}{0.9267\times 0.9436}\Big) \\
&= 0.6027.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$Q = Max\{Q_1, Q_2\} = 0.9803 < 1$$

Ainsi, l'ensemble d'hypothèses du théorème (3.1) est remplie. Par conséquent, le problème (3.50) admet une solution unique.

# 6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a discuté l'existence et l'unicité des solutions du problème (3.2), les résultats obtenus sont basés sur les théorèmes classiques du point fixe, le premier résultats consiste à étudier l'existence et l'unicité de solutions du problème (3.2), et le deuxième résultat assure l'existence d'au moins une solution du problème fractionnaire traité.

# Chapitre 4

# Stabilité au sens de Ulam−Hyres

## 1 Introduction

Dans la littérature très riche sur la stabilité des équations fonctionnelles, un grand nombre de notions différentes de stabilité ont été étudiées, les définitions de ces notions ne sont pas équivalentes, mais les auteurs emploient dans les travaux à ce sujet le même terme : "la stabilité "(stabilité au sens de Lyapounov, stabilité de Von Neumann, stabilité asymptotique $\cdots$) , cependant des confusions peuvent se produire.
En 1940, Ulam [32] posa la question suivante "sous quelles conditions existe-t-il une application additive suffisamment proche d'une application additive approchée ?" C'est un problème de stabilité pour les équations fonctionnelles (homomorphismes de groupe). Un an plus tard, en 1941 Hyers [10] donna une réponse positive dans le cas des espaces de Banach. C'est la raison pour laquelle ce type de stabilité s'appelle aujourd'hui Hyers-Ulam stabilité des équations fonctionnelles.
Après le résultat de Hyers, de nombreux articles ont été consacrés à ce sujet, étendant le problème de Ulam à d'autres équations et généralisant le résultat de Hyers dans différentes directions [31]. Habituellement, le problème a été pris en compte pour les fonctions avec des valeurs dans les espaces de Banach, cependant, à l'origine il a été indiqué pour les fonctions avec des valeurs dans des espaces métriques.

Le concept de stabilité pour l'équation fonctionnelle se pose, quand on remplace l'équation fonctionnelle par une inégalité dont le second membre est une perturbation de l'équation.

Pour plus d'informations et de références sur ce sujet, on se réfère à [1],[3],[13],[30].

## 2 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers

Dans cette section, on va donner la signification de différentes stabilités et on présente quelques conditions pour la stabilité au sens d'Ulam-Hyers et la stabilité d'Ulam-Hyers généralisée du problème de Lane−Emden étudié dans la section précédente donné par :

$$\begin{cases} D^{\beta}(D^{\alpha}+\dfrac{k}{t^{\alpha-\beta}})y(t)+\lambda f(t,D^{\delta}y(t))+g(t,y(t))=h(t) \ \ ,t\in(0,1] \\ \\ y(0)=a \qquad y(1)=b \\ \\ \alpha,\beta\in\,]0,1] \ \ ,a,b\in\mathbb{R}\,,k,\lambda,>0 \end{cases} \tag{4.1}$$

**Définition 4.1** *L'équation* (4.1) *est dite stable au sens d' Ulam−Hyres si il existe un réel positif* R, *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$, *et pour tout* $x \in X$ *solution qui vérifie l'inégalité suivante :*

$$\left|D^{\beta}(D^{\alpha} + \frac{k}{t^{\alpha-\beta}})x(t) + \lambda f(t, D^{\delta}x(t)) + g(t, x(t)) - h(t)\right| \leq \varepsilon \tag{4.2}$$

*il existe une solution* $y \in X$ *de* (4.1) *satisfaisant :*

$$\begin{aligned} &D^{\beta}(D^{\alpha} + \frac{k}{t^{\alpha-\beta}})y(t) + \lambda f(t, D^{\delta}y(t)) + g(t, y(t)) = h(t) \\ &y(0) = a \qquad y(1) = b, \end{aligned} \tag{4.3}$$

*avec*

$$\|y - x\|_X \leq R\varepsilon,\ t \in (0, 1]. \tag{4.4}$$

# 3 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers généralisée

**Définition 4.2** *L'équation* (4.1) *est dite stable au sens d' Ulam−Hyres généralisée si il existe une fonction* $\Phi \in (\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$, *telle que pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $x \in X$ *solution de l'inégalité* (4.2), *il existe une solution* $y \in X$ *de* (4.1) *(qui vérifie* $y(0) = a, y(1) = b$*), telle que :*

$$\|x - y\|_X \leq \Phi(\varepsilon),\ t \in (0, 1].$$

**Remarque 4.1**

- *Une fonction* $x \in X$ *est solution de l'inégalité* (4.2) *si et seulement si il existe une fonction* $\Psi \in C(J; \mathbb{R})$ *telle que :*
  1. $|\Psi(t)| \leq \varepsilon, \forall t \in J.$
  2. $D^{\beta}(D^{\alpha} + \frac{k}{t^{\alpha-\beta}})x(t) = \Psi(t) + h(t) - \lambda f(t, D^{\delta}x(t)) - g(t, x(t)).$
- *Si un problème est stable au sens d' Hlam−Hyres, alors il est stable au sens d' Hlam−Hyres généralisé .*

# 4 Etude de la Stabilité

**Théorème 4.1** *On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

– (P1) *Il l existe des constantes* $L_f > 0$ *et* $L_g >$, *telles que* $\forall t \in J$ *et* $\forall v, v^* \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$\begin{aligned} |f(t, v) - f(t, v^*)| &\leq L_f |v - v^*|. \\ |g(t, v) - g(t, v^*)| &\leq L_g |v - v^*|. \end{aligned}$$

– (P2)$Q = Max\{Q_1, Q_2\} < 1$,

*alors le problème* (4.1) *est stable au sens d'Hlam−Hyres.*

**Preuve.** Soient $\varepsilon > 0$ , $x \in \mathrm{X}$ une fonction qui vérifie l'inégalité (4.2) :

$$\left| \mathrm{D}^{\beta}(\mathrm{D}^{\alpha} + \frac{k}{t^{\alpha-\beta}})x(t) + \lambda f(t, \mathrm{D}^{\delta}x(t)) + g(t, x(t)) - h(t) \right| \leq \varepsilon, \forall t \in \mathrm{J}. \tag{4.5}$$

La solution du problème (3.2) est donnée par :

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{I}^{\alpha}\Big[\mathrm{I}^{\beta}(h(s) - \lambda f(s, \mathrm{D}^{\delta}y(s)) - g(s, y(s))) - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}}y(s)\big](t) - t^{\alpha}\mathrm{I}^{\alpha}\big[\mathrm{I}^{\beta}(h(s) - \lambda f(s, \mathrm{D}^{\delta}y(s)) \\ &\quad - g(s, y(s))) - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}}y(s)\Big](1) - t^{\alpha}(a-b) + a \end{aligned} \tag{4.6}$$

on intègre (4.2), on trouve :

$$\left| \begin{array}{l} x(t) - \mathrm{I}^{\alpha}\Big[\mathrm{I}^{\beta}(h(s) - \lambda f(s, \mathrm{D}^{\delta}x(s)) - g(s, x(s))) \\ -\frac{k}{s^{\alpha-\beta}}x(s)\big](t) - t^{\alpha}\mathrm{I}^{\alpha}\big[\mathrm{I}^{\beta}(h(s) - \lambda f(s, \mathrm{D}^{\delta}x(s)) \\ +a - g(s, x(s))) - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}}x(s)\Big](1) - t^{\alpha}(a-b) \end{array} \right| \leq \frac{t^{\alpha+\beta}\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

on a donc :

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq \frac{t^{\alpha+\beta}\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \Big|\mathrm{I}^{\alpha}\big[\mathrm{I}^{\beta}(h(s) - \lambda f(s, \mathrm{D}^{\delta}x(s)) - g(s, x(s))) - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}}x(s)\big](t) \\ &\quad - t^{\alpha}\mathrm{I}^{\alpha}\big[\mathrm{I}^{\beta}(h(s) - \lambda f(s, \mathrm{D}^{\delta}x(s)) - g(s, x(s))) - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}}x(s)\big](1) \\ &\quad - \mathrm{I}^{\alpha}\big[\mathrm{I}^{\beta}(h(s) - \lambda f(s, \mathrm{D}^{\delta}y(s)) - g(s, y(s))) - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}}y(s)\big](t) \\ &\quad + t^{\alpha}\mathrm{I}^{\alpha}\big[\mathrm{I}^{\beta}(h(s) - \lambda f(s, \mathrm{D}^{\delta}y(s)) - g(s, y(s))) - \frac{k}{s^{\alpha-\beta}}y(s)\big](1)\Big| \end{aligned} \tag{4.7}$$

d'apres l'hpothèse (P1), on trouve :

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \|x-y\|_{\mathrm{X}}\big(|\lambda|\mathrm{L}_f + \mathrm{L}_g\big)\sup_{t\in\mathrm{J}}\mathrm{I}^{\alpha}\mathrm{I}^{\beta}1(t) \\ &\quad + \|x-y\|_{\mathrm{X}}\big(|\lambda|\mathrm{L}_f + \mathrm{L}_g\big)\sup_{t\in\mathrm{J}}\mathrm{I}^{\alpha}\mathrm{I}^{\beta}1 + 2k\sup_{t\in\mathrm{J}}\mathrm{I}^{\alpha}s^{\beta-\alpha} \end{aligned} \tag{4.8}$$

ce qui implique que :

$$\|x-y\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \|x-y\|_{\mathrm{X}}\Big(\frac{2\big(|\lambda|\mathrm{L}_f + \mathrm{L}_g\big)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2k\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}\Big) \tag{4.9}$$

d'où :

$$\|x-y\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \|x-y\|_{\mathrm{X}}\mathrm{Q}_1 \tag{4.10}$$

d'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{\delta} y(t) &= \mathrm{I}^{\alpha-\delta}\Big[\mathrm{I}^{\beta}\Big(h(s)-\lambda f(s,\mathrm{D}^{\delta}y(s))-g(s,y(s))\Big)-\frac{k}{s^{\alpha-\beta}}y(s)\Big](t)\\
&\quad -\frac{\Gamma(\alpha+1)\,t^{\alpha-\delta}}{\Gamma(\alpha-\delta+1)}\mathrm{I}^{\alpha}\Big[\mathrm{I}^{\beta}\Big(h(s)-\lambda f(s,\mathrm{D}^{\delta}y(s))-)g(s,y(s))\Big)-\frac{k}{s^{\alpha-\beta}}y(s)\Big](1) \qquad (4.11)\\
&\quad -\frac{(a-b)\Gamma(\alpha+1)\,t^{\alpha-\delta}}{\Gamma(\alpha-\delta+1)}.
\end{aligned}$$

De la même manière, on trouve :

$$\begin{aligned}
\Big|\mathrm{D}^{\delta}x(t)-\mathrm{D}^{\delta}y(t)\Big| \le \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta+1)} &+\|x-y\|_{\mathrm{X}}\Big[\frac{(|\lambda|\mathrm{L}_f+\mathrm{L}g)}{\Gamma(\alpha-\delta+\beta+1)}+k\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\delta+1)}\\
&+\frac{(|\lambda|\mathrm{L}_f+\mathrm{L}g)\beta(\alpha+1,\beta)}{\Gamma(\alpha-\delta+1)\Gamma(\beta)}+k\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\delta+1)\Gamma(\beta+1)}\Big]
\end{aligned} \qquad (4.12)$$

d'où :

$$\left\|\mathrm{D}^{\delta}x-\mathrm{D}^{\delta}y\right\|_{\infty} \le \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta+1)}+\|x-y\|_{\mathrm{X}}\mathrm{Q}_2. \qquad (4.13)$$

Comme conséquence

$$\left\|x-y\right\|_{\mathrm{X}} \le \mathrm{Max}\Big(\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+1)};\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta+1)}\Big)+\|x-y\|_{\mathrm{X}}\mathrm{Q}, \qquad (4.14)$$

finalement, on trouve :

$$\left\|x-y\right\|_{\mathrm{X}} \le \mathrm{R}\varepsilon,$$

avec

$$\mathrm{R}=\frac{1}{(1-\mathrm{Q})\mathrm{Max}\Big(\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+1)};\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta+1)}\Big)},$$

d'où le problème (3.2) est stable au sens d'Ulam−Hyres.

Posant $\Psi(\varepsilon)=\mathrm{R}\varepsilon$ ; le problem (3.2) est donc stable au sens d'Ulam−Hyrs généralisé.

■

# 5 Conclusion

Dans ce chapitre on a étudié la stabilité du problème différentiel fractionnaire de Lane-Emden, on a introduit les deux sens de cette stabilité et on a fournit des conditions suffisantes sur les données de l'équation en question pour asurer la stabilité.

# Conclusion Générale

Ce travail de mémoire se voulait principalement théorique, en effectuant une étude sur l'équation fractionnaire de Lane-Emden.
En astrophysique, l'équation de Lane-Emden décrit la structure d'un objet dont l'équation d'état est celle d'un polytrope et qui est soumis à l'influence de son propre champ gravitationnel. De nombreux mathématiciens et physiciens se sont intéressés à l'étude de cette équation qui a la forme :

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) - y^n = 0 \\ \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0. \end{cases} \tag{4.15}$$

Dans un modèle polytropique, pour calculer une structure, on choisit d'abord un indice polytropique n et on résout l'équation de Lane-Emden (4.15) pour trouver $x$ et $y'(x)$, ensuite à partir de la masse et du rayon, on détermine la pression, température et densité centrales de l'étoile.Dès l'apparition de ces modèles, de nouveaux débats intellectuels sont nés et ont été nourris de cette pensée. L'étude de la structure interne des étoiles donne lieu aussi à des modèles comportant des dérivées d'ordre fractionnaire.

Ce mémoire avait pour ambition de résoudre l'équation différentielle fractionnaire de type Lane-Emden qui a la forme :

$$\begin{cases} D^{\beta}(D^{\alpha} + \frac{k}{t^{\alpha-\beta}})y(t) + \lambda f(t, D^{\delta}y(t)) + g(t, y(t)) = h(t) \quad , t \in [0,1] \\ \\ y(0) = a \qquad y(1) = b, \\ \end{cases} \tag{4.16}$$

avec $D^{\mu}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo $\alpha$, $beta, \delta \in \,]0,1]$ , $a, b \in \mathbb{R}$ , $k, \lambda > 0$, $f, g$, et $h$ des fonctions continues.
Il a fallu dans un premier temps définir les notions d'analyse fonctionnelle qui fournissent des résultats fondamentaux dans l'étude de ce type d'équations. Au moyen des théorèmes classiques de point fixes il a été possible de se lancer dans ce travail, on a donné des résultats d'existence et d'unicité des solutions.
Dans les pages qui précèdent on a introduit les notions fondamentales d'intégration et de dérivation au sens de Riemann Liouville et au sens de Caputo. Les résultats théoriques étaient illustrés par un exemple.

La question de la stabilité au sens de Ulam- Hyres et au sens de Ulam- Hyres généralisé a été également abordée, en introduisant des conditions suffisantes qui assure la stabilité des solutions de l'équation étudiée (4.16).

# Bibliographie


[1] **Akkouchi, M** (2011), *Stability of certain functional equations via a fixed point of Ćirić,* Filomatl, **2** . doi : 10.2298/FIL1102121A 8, 31

[2] **Amirian, M.M and Jamali, Y** (2017) *The Concepts and Applications of Fractional Order Differential Calculus in Modelling of Viscoelastic Systems : A primer,* Noûs **vol.5** pages 1-36 8

[3] **Baker, J**(1991), *The Stability of Certain Functional Equations* ,Proceedings of The American Mathematical Society - PROC AMER MATH SOCl, **112**, pages 729-729. doi :10.1090/S0002-9939-1991-1052568-7 31

[4] **Bourbaki, N**(2009) *Elements De Mathematique* Springer, New York. 4

[5] **Burton, T. A.** (1998) *A fixed-point theorem of Krasnoselskii* , Applied Mathematics Letters **vol.11** pages 85-88 6

[6] **François, M** *Fonction Gamma d 'Euler et fonction zêta de Riemann* , Département de Mathématiques d'Orsay Université Paris-Sud, France1. 8

[7] **Francis, H and Gilles, L** (2009), *Analyse 1* 4

[8] **Gabriel, M** (1980), *L'évolution stellaire : aspect historique* , Ciel et Terre, **Vol. 96,**, page 4. 1

[9] **Gustave, C** (2010), *Cours de topologie,* 2me édition, Dunod. 4

[10] **Hyers, D.H**(1941), *On the Stability of the Linear Functional Equation.*Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **27,4**, pages 729-729. doi :10.1073/pnas.27.4.222 31

[11] **Ibrahim, R.W**(2012) *Existence of Nonlinear Lane-Emden Equation of Fractional Order* , Miskolc Mathematical Notes **Vol. 13, No. 1**, pages 39–52. 16

[12] **Ioannis, F and Martin, M** (2013 ) *Fixed Point Theorems and Their Applications* , World Scientific , New York 6

[13] **Janusz, B** (2013), *On Ulam's Type Stability of the Cauchy Additive Equation,*thee Scientific World Journall, **2014, 540164,**, doi :10.1155/2014/540164 31

[14] **Keith B.Oldham and Jerome Spanier** (2009), *The Fractional Calculus theory and application of Differentation and integration to Arbitrary Order,* Dover Publications,INC.Mineola,New York 8

[15] **Knlomogorov, A and Fomone, S** (1999) *Éléments l'analyse fonctionnelle,* Dunod, Paris. 4, 6

[16] **Lane, J. H** (1870) *On the theoretical temperature of the Sun, under the hypothesis of a gaseous mass maintaining its volume by its internal heat, and depending on the laws of gases as known to terrestrial experiment* , American Journal of Science pages 57-74 1

[17] **Maratrey, P** (2008) *Le soleil* , **Vol. 130** 1

[18] **Mechee, S.M and Senu, N** (2012 ) *Numerical Study of Fractional Differential Equations of Lane-Emden Type by Method of Collocation* , Applied Mathematics page 851-856

[19] **Miller, K.S and Ross, B** (1993) *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations* Wiley, New York 8

[20] **Nicholas Wheeler** (February 1997), *CONSTRUCTION & PHYSICAL APPLICATION OF THE FRACTIONAL CALCULUS*, Reed College Physics Department

[21] **Omar, A.A and Hasan, R** (2013) *Advances in Fractional Calculus :Theoretical Developments and Applications* , International Conference on Information Technology. 8

[22] **Pétri, J** *Physique stellaire M2 Astrophysique − Strasbourg,* City University of New York, USA . 1

[23] **Pierre, C** (2009), *Éléments d'analyse et d'algèbre*, Édition de l'école Polytechnique , 4

[24] **Richard,H** *Fractional Calculus An Introduction For Physicists*, World Scientific, GigaHedron, Germany . 8

[25] **Sabatier, J . Agrawal, O. P and Tenreiro Machado, J. A** *Advances in Fractional Calculus :Theoretical Developments and Applications* , (2003) Springer, The Netherlands 8

[26] **Scuflaire, R** (2003) *Dynamique stellaire* Institut d'Astrophysique et de Géophysique Université de Liéege 1

[27] **S.M. Mechee and N. Senu :** *Numerical Study of Fractional Differential Equations of Lane-Emden Type by Method of Collocation,* Applied Mathematics., 3, (2012), pp. 851-856. 16

[28] **Soon−Mo, J** (2011 ) *Hyers–Ulam–Rassias Stability of Functional Equations in Nonlinear Analysis* , Springer, New York.

[29] **Subrahmanyan, C** *An introduction to the study of stellar structure* , (1939) University of Chicago Press 2

[30] **Themistocles, M** (2010), *Handbook of Functional Equations Stability Theory*, Springe,r NewYork. 31

[31] **Tosio, A** (1950), *On the Stability of the linear Transformation in Banach Spaces*, Journal of the Mathematical Sgciety of Japan, **2**, 65 – 66. 31

[32] **Ulam, S.M**(1960), *A Collection of Mathematical Problems* . Interscience, NewYork . 31

[33] **Yannick, P**, *Espaces Vectoriels Normés et Topologie*, Institut Élie Cartan Nancy (Mathématiques) -Université Henri Poincaré Nancy 1. 4

[34] **Yicheng, L and Zhixiangh, L** (2012) *Krasnoselskii Type Fixed Point Theorems and Applications*, American Mathematical Society **Volume 136, Numéro 4** Pages 1213–1220 6

[35] *[http ://www.chebfun.org/examples/ode-nonlin/LaneEmden.html]* 2

## Résumé

Dans ce travail, on étudie une équation différentielle fractionnaire de Lane-Emden. Les résultats d'existence et d'unicité sont discutés au moyen du théorèmes de point fixe de Banach et de Krsanoselskii. La question de stabilité au sens de Ulam-Hyres et au sens de Ulam-Hyres généralisé est abordée.

**Mots-Clés.** Equation de Lane-Emden, Calcul Fractionnaire, Banach, Krasnoselskii, stabilité au sens de Ulam-hyres, stabilité au sens de Ulam-hyres généralisée.

---

In this work, we study a Lane-Emden fractional differential equation. The existence and uniqueness results are discussed using the fixed point theorems of Banach and Krsanoselskii. The question of stability in the sense of of Ulam-Hyres and in the sense of Ulam-Hyres generalized is also addressed.

## Abstract

**Key Words.** Lane-Emden equation,Fractional Calculus, Banach, Krasnoselskii, Ulam-Hyres Stability, Ulam-Hyres generalized Stability.