MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Hanane MESSABIH

Opérations sur les Distributions et Applications

soutenu publiquement le 13 Juin 2019 devant le jury composé de :

Président :	Souad LAZERGUI	MAB	UMAB
Examinateur :	Mohammad KAID	MAA	UMAB
Encadreur :	Sofaine MESSIRDI	MCB	UMAB

Année Universitaire : 2018/ 2019

Dédicaces

Arrivé au terme de mes études, j'ai le grand plaisir de dédier ce modeste travail :
A ma tèrs chère mère, qui me donne toujours l'espoire de vivre et qui n'a jamais cessé de prier pour moi.
A mon tèrs chère père décédé qui m'a toujours poussé et motivé dans mes études. j'espère qu'il apprécira cet humble geste comme preuve de reconnaissance de la part d'une fille qui a toujours prié pour le salut de son âme . Puisse dieu, le tout puissant, l'avoir en sa sainte miséricorde.
A mon mari, pour ses encouragements.
A ma très chère soeurs sara et fatima zohra, et mon frère madjid.
A mon encadeur Mr Messirdi Sofaine qui m'a guidé dans toute ma recherche.
A mes meilleurs amis chacun à nom du département mathématique, qui m'ont apporté leurs support moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Remerciements

D'abord, je tiens à remercier Allah, le tout Puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.
Je voudrais remercier vivement mon encadreur de mémoire, Mr Messirdi Sofiane, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils,qui ont contribués à alimenter ma réflexion.
Je voudrais également remercier les membres du jury pour l'honneur qu'ils m' ont fait en acceptant de présider et d'examiner mon travail.
Mes remerciement les plus chaleureux vont à ma famille qui priaient toujours pour mon succés. J'adresse également mes remerciements envers mes amis et mes collégues pour leurs soutien.
Mes sincéres remerciemnts s'adresse aussi aux professeurs intervennants et toute persone qui par leurs paroles, leurs écots, leurs conseils et leurs critiques ont illuminé mes quations durant mes recherches.
Enfin, je remercier tous ceux et celles qui m'ont aidé de loin ou de prés pour l'élaboration de ce travail et toute la famille de département de mathématique.

Table des matières

Introduction

La recherche des solutions calssique des équations différentielles est apparue trop restrictive au début 20ème sciècle plus précisément la notion de solution faible, introduite vers 1930 par J.Leray et L. Sobolev, afin d'y inclure des objets plus singuliers. La théorie des distributions fut formalisée par le mathématicien français laurent Schwartz entre 1944 et 1950 et lui valut la médaille Fields en 1950 comme la plupart de grandes découvertes scientifiques.
Les distributions sont des objets qui généralisent les fonctions localement intégrables et les mesures de Radon sur $\mathbb{R}^n$: L'un des intérètes principaux de la théorie des distributions est de permettre la construction d'un calcul différentiel qui prolonge le calcul différentiel ordinaire et pour lequel toute distribution est indéfiniment dérivable. Cette théorie est devenue un outil essentiel, notament dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Elle a aussi permis une modernisation mathématique pour de nombreux phénomènes physiques. L'idée de base de la théorie des distributions est de définir les distributions par leurs action sur un espace des fonctions appelées "fonction test". On peut noter que cette idée apparait déjà dans la définition de mesure et en particulier dans la définition des mesures de Radon.
Ce mémoire est constitué de quatre chapitres.
Le premier chapitre est consacré à présenter des notions de base et des généralités accompagner par des exemples.
Dans chapitre deux nous nous sommes intéressé au différentes opérations sur les distributions notement le produit.
On a abordé au troisième chapitre le produit de convolution des distributions. Dans le dernier chapitre on a présenté des applications aux EDP à coefficients constant (équation de la chaleur, des ondes et de laplace).

Chapitre 1

Généralités sur les distributions

1 Espace $\mathrm{D}(\Omega)$ des fonctions test

Définition 1.1 *Support d'une fonction[1]*
Soit φ une fonction à valeurs complexes sur $\mathbb{R}^n$. On appelle support de φ (notation Supp φ) l'adhérence de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\varphi(x) \neq 0$:

$$Supp\varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}},$$

$Supp\varphi$ est le plus petit fermé de $\mathbb{R}^n$ où φ ne s'annule pas, c'est aussi le complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ du plus grand ouvert où φ s'annule.

Exemple 1.1 *Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. On pose*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-\|x\|^2}\right) & si \quad \|x\| < 1 \\ 0 & si \quad \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

On a $Supp(\varphi) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\right\}$ la boule de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$.
Il clair que $Supp\lambda\varphi = Supp\varphi$ et $Supp(\psi\varphi) \subseteq Supp\varphi \cap Supp\psi$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et φ et ψ des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.2 *(L'espace $\mathscr{D}$)[5]*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, l'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ $(ou\ \mathbb{R})$ de classe C^∞ sur Ω et à support compact et inclus dans Ω.

$$\mathscr{D} = \left\{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}(ou\,\mathbb{R}) : \varphi \in \mathrm{C}^\infty, Supp(\varphi) compact \subset \Omega\right\}.$$

Exemple 1.2 *1. Un exemple standard est donné dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ par la fonction suivante :*

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \psi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right) & si \quad |x| < 1 \\ 0 & si \quad |x| \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$Supp\psi = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \psi(x) \neq 0\}} = \overline{]-1,1[} = [-1,1]$ *qui est compact dans* $\mathbb{R}$.
ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
En fait, $\psi = (\varphi \circ h)(x)$ où :

$$\begin{array}{rcl} h(x) & = & x^2 \in \mathbb{R}_+ \\ \varphi(X) & = & \left\{ \begin{array}{rl} \exp\left(\frac{1}{X-1}\right) & si \quad 0 \leq X < 1 \\ 0 & si \quad X \geq 1 \end{array} \right. \end{array}$$

puisque $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, *il suffit de montre que* φ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}_+$.
Si $0 \leq X < 1$,

$$\varphi'(X) = -\frac{1}{(X-1)^2} \exp\left(\frac{1}{X-1}\right).$$

Si $X > 1$, $\varphi'(X) = 0$.
Si $X = 1$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi'_d(1) & = & \lim\limits_{X \to 1^+} \frac{\varphi(X) - \varphi(1)}{X-1} = \lim\limits_{X \to 1^+} \frac{0-0}{X-1} = 0, \\ \varphi'_g(1) & = & \lim\limits_{X \to 1^-} \frac{\varphi(X) - \varphi(1)}{X-1} = \lim\limits_{X \to 1^-} \frac{\exp\left(\frac{1}{X-1}\right)}{X-1} = \lim\limits_{Y \to -\infty} Y \exp Y = 0. \end{array}$$

Donc φ *est dérivable au point* $X = 1$ *et sa dérivée* $\varphi'(1) = 0$.
Alors,

$$\varphi'(X) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si \quad X \geq 1 \\ -\frac{1}{(X-1)^2} \exp\left(\frac{1}{X-1}\right) & si \quad 0 \leq X < 1 \end{array} \right.$$

De plus φ' *et continue sur* $[0,1[\cup]+1,+\infty[$ *et au point* $X = 1$ *car* $\lim\limits_{X \to 1^+} \varphi'(X) = 0 = \lim\limits_{X \to 1^-} \varphi'(X) = \lim\limits_{X \to 1^-} \left(-\frac{1}{(X-1)^2} \exp\left(\frac{1}{X-1}\right)\right)$, *donc* φ' *est continue sur* $\mathbb{R}_+$. *Ainsi,* φ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+$, *il en est alors de même pour* ψ *sur* $\mathbb{R}$.

$$\varphi''(X) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{(X-1)^3} + \frac{1}{(X-1)^4} \exp\left(\frac{1}{X-1}\right) & si \quad 0 \leq X < 1 \\ 0 & si \quad X \geq 1 \end{array} \right.$$

φ'' *et aussi continue sur* $\mathbb{R}_+$, *donc* ψ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}$.
Raisonnons par récurrence sur l'ordre de dérivation, en supposant qu' à l'ordre n, φ *est de classe* C^n *sur* $\mathbb{R}_+$ *et on a :*

$$\varphi^n(X) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si \quad X \geq 1 \\ \sum\limits_{i=0}^{m_n} a_i \frac{1}{(X-1)^i} \exp\left(\frac{1}{X-1}\right) & si \quad 0 \leq X < 1 \end{array} \right.$$

où $m_n \in \mathbb{N}^*$ *et* $a_i \in \mathbb{R}$.
Calculons la dérivée d'ordre $(n+1)$ *de* φ *:*
Si $0 < X < 1$ *:*

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{n+1}(X) & = & \sum\limits_{i=1}^{m_n} (-i a_i)(X-1)^{-i-1} \exp\left(\frac{1}{X-1}\right) + \sum\limits_{i=1}^{m_n} (-a_i)(X-1)^{-i-2} \exp\left(\frac{1}{X-1}\right) \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{m'_n} b_i (X-1)^{-i} \exp\left(\frac{1}{X-1}\right) \end{array}$$

avec $m'_n \in \mathbb{N}^*$ *et* $b_i \in \mathbb{R}$.
Si $X > 1$, $\varphi^{n+1}(X) = 0$.
Si $X = 1$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_d^{n+1}(1) & = & 0, \\ \varphi_g^{n+1}(1) & = & \lim\limits_{X\to 1^-} \dfrac{\varphi^n(X) - \varphi^n(1)}{X-1} = \lim\limits_{X\to 1^-} \sum\limits_{i=1}^{m_n} (a_i)(X-1)^{-i-1} \exp\left(\dfrac{1}{X-1}\right) \\ & = & \lim\limits_{X\to -\infty} \sum\limits_{i=1}^{m_n} (a_i) Y^{i+1} \exp^{Y} = 0, \\ \varphi^{n+1}(1) & = & 0, \end{array}$$

D'où,

$$\varphi^{n+1}(X) = \begin{cases} 0 & si \quad X \geq 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{m'_n} b_i (X-1)^{-i} \exp\left(\dfrac{1}{X-1}\right) & si \quad 0 \leq X < 1 \end{cases}$$

Il claire que φ^{n+1} *est contines sur* $\mathbb{R}_+$. *Ainsi,* $\varphi \in C^{n+1}(\mathbb{R}_+)$ *pour toute* $n \in \mathbb{N}$ *ou alors* $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+)$.

2. *Un tel exemple peut être facilement généralisé en dimension* n, *en définissant la fonction suivant :*

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \psi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{\|x\|^2 - 1}\right) & si \quad \|x\| < 1 \\ 0 & si \quad \|x\| \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

où soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.
En prticulier, $Supp\psi \subseteq \overline{B(0,1)} = \left\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\right\}$, *La boule unité fermée de* $\mathbb{R}^n$, *est compact dans* $\mathbb{R}^n$.
ψ *est de classe* C^{∞} *sur* $\mathbb{R}^n$, *car elle se décompose en deux fonctions de classe* C^{∞}, $\psi = \varphi \circ N$ *où :*
$\mathbb{R}^n \ni x \xrightarrow{N} X = \|x\|^2 \in \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\varphi} \varphi(X) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{X-1}\right) & si \quad 0 \leq X < 1 \\ 0 & si \quad X \geq 1 \end{cases}$
D'où, $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

3. *Soient maintenant un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *et a un point de* U . *Il existe alors* $\alpha > 0$, *tel que* $\overline{B(0,1)} \subset U$.
Soit la fonction Ψ *définie de* U *dans* $\mathbb{R}$, *par :*

$$\Psi = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{\|x-a\|^2 - 1}\right) & si \quad \|x-a\| < \alpha \\ 0 & si \quad \|x-a\| \geq \alpha \end{cases}$$

Alors $\Psi \in \mathscr{D}(U)$.
En effet, $Supp\Psi \subseteq \overline{B(a,\alpha)}$, *la boule fermée de* $\mathbb{R}^n$ *de centre a et de rayon* α, *qui est compact dans* U.
Ψ *est de classe* C^{∞} *sur* U, *car elle se décompose en deux fonctions de classe* C^{∞} *de la*

manière suivant :

$$\psi = \varphi_\alpha \circ N_\alpha$$
$$N_\alpha : U \ni x \longrightarrow \quad N_\alpha(x) = \frac{\|x-a\|^2}{\alpha^2} = Y \in \mathbb{R}_+,$$
$$\varphi_\alpha(Y) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{\alpha^2(Y-1)}\right) & si \quad 0 \leq Y < 1 \\ 0 & si \quad Y \geq 1 \end{cases}$$

Lemme 1.1 *(Fonction Plateaux)*
Soient K *un compact de* $\mathbb{R}^n$, U *et* V *deux ouverts de* $\mathbb{R}^n$ *tels que* $K \subset U \subset V$. *Il existe alors une fonction* ϕ *de classe* C^∞ *sur* U *, vérifiant*

$$\begin{cases} \phi = 1 & sur \quad K \\ \phi = 0 & sur \quad U \backslash V \\ 0 \leq \phi \leq 1 & sur \quad U \end{cases}$$

2 Distribution sur un ouvert de R^n

Définition 1.3 *[1] On appelle distribution* T *sur un ouvert* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *toute forme linéaire continue de* $\mathscr{D}(\Omega)$ *dans* $\mathbb{C}$*(ou* $\mathbb{R}$*), i.e elle satisfait les deux conditions suivantes :*

1. T *est LINEAIRE : pour tous* $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *et* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$*, on a*

$$\langle T, \alpha\varphi + \beta\phi \rangle = \alpha\langle T, \varphi\rangle + \beta\langle T, \phi\rangle$$

.

2. T *est CONTINUE : pour toute compact* $K \subset \Omega$ *et pour toute fonction* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *avec* $Supp(\varphi) \subset K$*, il existe une constant* $C > 0$ *et un entier* $m \in \mathbb{N}$ *tels que :*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|$$

Notation 1.1 *On notera dans la suite par* $\mathscr{D}'(\Omega)$ *l'ensemble de toutes les distributions sur* Ω*. On dit aussi que* $\mathscr{D}'(\Omega)$ *est le dual de* $\mathscr{D}(\Omega)$*.*

Définition 1.4 *(Ordre d'une distribution)*
Si l'entier m intervenant dans l'inégalité de continuité de T *peut être choisi indépendamment du compact* K*, on dit que la distribution* T *est d'ordre fini, le plus petit m possible est appelé ordre de la distribution.*

Exemple 1.3 *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $a \in (\Omega)$*. On pose*

$$\begin{array}{rcl} \delta_a : \mathscr{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longrightarrow & \langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a). \end{array}$$

Alors $\delta(a)$ *est une distribution sur* Ω *appellée distribution de Dirac d'ordre 0 et concentrée en* a*. En effet,* $\delta(a)$ *est linéaire de* $\mathscr{D}(\Omega)$ *dans* $\mathbb{C}$ *car*
$\langle \delta_a, \lambda\varphi + \mu\phi\rangle = \langle \lambda\varphi + \mu\phi\rangle(a) = \lambda\varphi(a) + \mu\phi(a) = \lambda\langle \delta_a, \varphi\rangle + \mu\langle\delta_a, \phi\rangle, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall \varphi, \phi \in \mathscr{D}(\Omega)$.
δ_a *est continue sur* $\mathscr{D}(\Omega)$ *car* $|\langle \delta_a, \varphi\rangle| = |\varphi(a)| \leq \sup_{x \in \Omega} = |\varphi(x)|, \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

3 Exemples des distributions

3.1 fonctions localement intégrables

Définition 1.5 *[1] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}(ou\ \mathbb{R})$ est dite localement intégrable sur Ω si pour tout ensemble compact K de Ω, on a :*

$$\int_{\mathbf{K}} |f(x)|dx \prec \infty.$$

On note par $L^1_{loc}(\Omega)$ l'espace des fonctions localement intégrables sur Ω.

Proposition 1.1 *Toute fonction f localement intégrable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ définit une distribution T_f sur Ω par :*

$$\forall \varphi \in \mathbb{C} : \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx.$$

La distribution T_f s'appelle réguliére associée à f.

Remarque 1.1 *Les distributions qui ne sont pas régulières sont dites singuliéres.*

Exemple 1.4 *La fonction de Heaviside (indicatrice de $[0, +\infty[$)*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x \prec 0 \end{cases}$$

est localement intégrable sur $[0, +\infty[$, elle définit une distribution sur $\mathbb{R}$ donnée par :

$$\langle H, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Proposition 1.2 *Deux fonctions localement intégrables f et g définissent la même distribution si et seulement si elles sont presque partoute égales.*

$$T_f = T_g \Leftrightarrow f = g\ p.p.$$

Si $C(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$, on a le résutlat d'isomorphisme suivant :

Proposition 1.3 *L'application de $C(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui a f dans $C(\Omega)$ associé T_f la distribution associé à f sur Ω est linéaire injective cette application n'est pas surjuctive, elle permet alors d'identifier $C(\Omega)$ au sous espace vectoriel, image de $C(\Omega)$, de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans ce sens les fonctions continues peuvent être considérées comme des distributions particulières. Si $f \in C(\Omega)$, on écrit $f \equiv T_f$.*

Exemple 1.5 *Il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$, tels que $\delta_a = T_f$.*
Si celà était le cas, en fisant un compact $K \subset \Omega$, on aurait :
$\forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $Supp\varphi \subset K$, $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) = \int_K f(x)\varphi(x)dx$.
Alors, si $a \ni Supp\varphi$, $\int_K f(x)\varphi(x)dx = 0$.
Donc, pour toute $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega \setminus \{a\})$, $\int_K f(x)\varphi(x)dx = 0$. Par le lemme de Dubois Reymand, $F = 0$ pp sur $\Omega \setminus \{a\}$, donc sur Ω.
Mais alors, pour toute $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $\int_K f(x)\varphi(x)dx = \int_K 0.\varphi(x)dx = 0 = \varphi(a)$
En choisissant $\varphi(a) \neq 0$ on aboutit à une contradiction.

3.2 Distribution valeure principale de $\frac{1}{x}$

Définition 1.6 *[1] La fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$, on définit la distribution valeur principale de Cauchy $\mathbf{vp}(\frac{1}{x})$ par :*

$$\forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \langle \mathbf{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

Cette fonction est localement intégrable sur sur $\mathbb{R}^*$. Nous allons voir comment exprimer la distribution que cette fonction définie sur $\mathbb{R}$. En effet, soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, et soit $a > 0$ tel que $Supp\varphi \subset [-a, a]$.
En utlisant le développement de Taylor de φ, on peut écrire :
$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} & si \quad x \in \mathbb{R}^* \\ \varphi'(0) & si \quad x = 0 \end{cases}$$

$\psi(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, en fait $\psi(x) = \varphi'(\theta x)$, $0 < \theta < 1$.
Puisque $\varepsilon \to 0^+$, on prend $\varepsilon < a$, on a alors :

$$\begin{aligned} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \int_{\varepsilon\leq|x|\leq a} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\ &= \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \varphi(0) \int_{\varepsilon}^{a} \frac{dx}{x} \\ &= \int_{-a}^{-\varepsilon} \psi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{a} \psi(x) dx + \varphi(0) \left[\ln|x|\right]_{-a}^{-\varepsilon} + \varphi(0) \left[\ln|x|\right]_{\varepsilon}^{a} \\ &= \int_{-a}^{-\varepsilon} \psi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{a} \psi(x) dx \end{aligned}$$

et puisque $\psi(x)$ est continue en $x = 0$, alors :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{-a}^{a} \psi(x) dx$$

et une intégrale finie.

$$\langle \mathbf{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \int_{-a}^{a} \psi(x) dx, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Il clair que $\mathbf{vp}(\frac{1}{x})$ est bien définie et linéaire sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Montrons que $\mathbf{vp}(\frac{1}{x})$ est continue sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Soit K un compact de $\mathbb{R}$, il existe alors $a(\mathsf{K}) > 0$, tel que $\mathsf{K} \subset \big[-a(\mathsf{K}), a(\mathsf{K})\big]$. Ainsi pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathsf{K})$, $Supp\varphi \subset\subset \big[-a(\mathsf{K}), a(\mathsf{K})\big]$ et on a :

$$\left|\langle \mathbf{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle\right| = \Big|\int_{-a(\mathsf{K})}^{a(\mathsf{K})} \psi(x) dx\Big| = \Big|\int_{-a(\mathsf{K})}^{a(\mathsf{K})} \varphi'(\theta x) dx\Big| \leq 2a(\mathsf{K}) \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)|.$$

On en déduit que $\mathbf{vp}(\frac{1}{x})$ est une distribution d'ordre 1, sur $\mathbb{R}$.

3.3 La distribution "partie finie"

On montre à l'aide du développement de Taylor à l'ordre 2 que l'application :
$\mathscr{D}(\mathbb{R}) \ni \varphi \longrightarrow \langle \mathbf{pf}(\frac{1}{x^2}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \Big)$
est une distribution d'ordre 2, sur $\mathbb{R}$ *appelée la partie finie de* $\frac{1}{x^2}$.

3.4 Mesure de Radon

l'espace k(U)

Soit U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, *on désigne par* $k(\mathrm{U})$ *l'ensemble des fonctions numériques continues sur* U *à support compact :*
$k(\mathrm{U}) = \Big\{ f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{C} \; continue\ sur\ \mathrm{U}\ et\ \mathrm{S}uppf\ est\ compact\ dans\ \mathrm{U} \Big\}.$

Exemple 1.6 *1.*

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & si \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$\mathrm{S}uppf = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *est compact dans* $\mathbb{R}$ *et* f *étant continue sur tout* $\mathbb{R}$, *d'où* $f \in k(\mathbb{R})$.

2.

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$\mathrm{S}upp\varphi_1 = [-1, 1]$ *est compact mais* f *n'est pas continue sur* $\mathbb{R}$, *donc* $\varphi \notin k(\mathbb{R})$.

3.

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1 - x & si \quad x \in [0, 1] \\ 1 + x & si \quad x \in [-1, 0] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

φ_2 *est continue sur* $\mathbb{R}$, *à support compact égal à* $[-1, 1]$, *donc* $\varphi_2 \in k(\mathbb{R})$.
Pour tout compact K *de* $\mathbb{R}^n$ *inclus dans* U, *on pose :*

$$k(\mathrm{U}, \mathrm{K}) = \{ f \in k(\mathrm{U}) : \mathrm{S}uppf \subseteq \mathrm{K} \}.$$

Clairment $k(\mathrm{U}, \mathrm{K})$ *est un sous espace vectoriel de* $k(\mathrm{U})$. *D'autre part,*

$$k(\mathrm{U}) = \bigcup_{\mathrm{K}compact,\ \mathrm{K} \subset \mathrm{U}} k(\mathrm{U}, \mathrm{K}).$$

En effet, pour tout compact K *inclus dans* U, $k(\mathrm{U}, \mathrm{K}) \subset k(\mathrm{U})$.
Par conséquent,

$$\bigcup_{\mathrm{K}compact,\ \mathrm{K} \subset \mathrm{U}} k(\mathrm{U}, \mathrm{K}) \subset k(\mathrm{U}).$$

Résiproquement, soit $f \in k(\mathrm{U})$ *alors* $\mathrm{S}uppf = \mathrm{K}_0$ *est compact dans* U *donc*

$$f \in k(\mathrm{U}, \mathrm{K}_0) \subset \bigcup_{\mathrm{K}compact,\ \mathrm{K} \subset \mathrm{U}} k(\mathrm{U}, \mathrm{K}).$$

On munit chaque sous espace $k(\mathrm{U},\mathrm{K})$ *de la norme naturalle :*

$$||f||_\infty = \sup_{x\in \mathrm{U}} |f(x)| = \sup_{x\in \mathrm{K}} |f(x)|, f \in k(\mathrm{U},\mathrm{K}).$$

$k(\mathrm{U},\mathrm{K})$ *devient un sous espace vectoriel normé complet donc un espace de Banach. En effet, soit* $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy dans* $k(\mathrm{U},\mathrm{K})$*, donc :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall p,q \in \mathbb{N}, p \geq \mathrm{N}(\varepsilon)\ et\ q \geq \mathrm{N}(\varepsilon) \Longrightarrow ||f_p - f_q||_\infty < \varepsilon$$

où bien,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall p,q \in \mathbb{N}, p \geq \mathrm{N}(\varepsilon)\ et\ q \geq \mathrm{N}(\varepsilon) \Longrightarrow \sup_{x\in\mathrm{U}} |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$$

donc la suit numérique $(f_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy dans* $\mathbb{C}$ *pour tout* $x \in \mathrm{U}$*, elle converge alors vers une limite* $f(x)$*,* f *est bien sur supportée dans le compact* K*. En fait cette convergence est uniforme sur* K *:*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}(\varepsilon), \forall j \in \mathbb{N}, j \geq \mathrm{N}(\varepsilon) \Longrightarrow \sup_{x\in\mathrm{U}} |f_j(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathrm{K}} |f_j(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Par conséquent, $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *et* f *est continue sur* U.

Définition 1.7 *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*. Une mesure de Radon sur* U *est une forme linéaire* μ *sur l'espace vectoriel* $k(\mathrm{U})$*, telle que pour tout compact* K *de* U*, la restriction de* μ *à* $k(\mathrm{U},\mathrm{K})$ *soit continue .*
En d'autre termes, μ *est une mesure de Radon sur* U *si et seulement si les deux propriètés, ci dessous sont verifiées :*

$$\begin{array}{rcl} \mu : k(\mathrm{U}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longrightarrow & \mu(f) \end{array}$$

est linéaire sur $k(\mathrm{U})$ *:* $\forall f,g \in k(\mathrm{U}), \forall \alpha,\beta \in \mathrm{K}$,

$$\mu(\alpha f + \beta g) = \alpha\mu(f) + \beta\mu(g).$$

et μ *est continue :*
$\forall \mathrm{K}, \mathrm{K}$ *compact de* $\mathrm{U}, \exists \mathrm{M_K} > 0$ *:* $|\mu(f)| \leq \mathrm{M_K} \sup_{x\in\mathrm{U}} |f(x)|, \forall f \in k(\mathrm{U},\mathrm{K})$.
En particulier, l'ensemble des mesures de Radon sur U *est un espace vectoriel sur* K*, il est inclus dans le dual algébrique de* $k(\mathrm{U})$.

Exemple 1.7 1. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* μ *une mesure de Radon sur* U *Alors :*

$$\mu(\alpha f + \beta g) = \alpha\mu(f) + \beta\mu(g), \forall f,g \in k(\mathrm{U}), \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}$$

de plus, $\forall \mathrm{K}$ *compact de* U, $\exists \mathrm{M}_k > 0$, *tel que :*

$$|\mu(f)| \leq \mathrm{M}_k \sup_{x\in\mathrm{K}} |f(x)|$$

comme $\mathscr{D}(\mathrm{U}) \subset k(\mathrm{U}), \mathscr{D}(\mathrm{U},\mathrm{K}) \subset k(\mathrm{U},\mathrm{K})$ *alors* $\mu_k = \mu_{\backslash \mathscr{D}(\mathrm{U},\mathrm{K})}$ *est bien une distribution sur* U, *puisque* μ_k *est une forme linéaire sur* $\mathscr{D}(\mathrm{U})$ *satisfaisant :*

$$|\mu(\varphi)| \leq \mathrm{M}_k \sup_{x\in\mathrm{K}} |f(x)|, \quad \forall \in \mathscr{D}(\mathrm{U},\mathrm{K}).$$

Par conséquent, les mesures de Radon sont des distributions d'ordre zéro.

2. *Mesure, distribution de Dirac :*
   Soient U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $a \in \mathrm{U}$. *On définit l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mu_a : k(\mathrm{U}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longrightarrow & \mu_a(\varphi) = \varphi(a) \end{array}$$

   μ_a *est la mesure de Dirac concentrée au point* a. *On note* $\delta_a = \mu_{\backslash \mathscr{D}(\mathrm{U})}$, *alors* δ_a *est une distribution d'ordre 0 sur* U, *définie par :*

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \mu_a(\varphi) = \varphi(a), \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{U}).$$

3. *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction continue. On considère l'application suivante :*

$$\begin{array}{rcl} \mu_f : k(\mathrm{U}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longrightarrow & \mu_f(\varphi) = \displaystyle\int_{\mathrm{U}} f(x)\varphi(x)dx \end{array}$$

   μ_f *est bien définie est linéaire sur* $\mathrm{K}(\mathrm{U})$. *En effet, pout tout* $\varphi, \psi \in k(\mathrm{U})$, $a, b \in \mathrm{C}$, *on a :*

$$\begin{array}{rcl} |\mu_f(\varphi) \quad | = & \left| \displaystyle\int_{\mathrm{U}} f(x)\varphi(x)dx \right| \leq & \displaystyle\int_{\mathrm{U}} |f(x)||\varphi(x)|dx \\ \leq & \displaystyle\sup_{x\in\mathrm{U}} |\varphi(x)| \int_{supp\varphi} |f(x)|dx < +\infty & \end{array}$$

   puisque $\mathrm{S}upp\varphi$ *est compact dans* U *et* f *est continue sur* U, *donc* f *est localement intégrable sur tout compact de* U, *et en particulier sur* $\mathrm{S}upp\varphi$,

$$\begin{array}{rcl} \mu_f(a\varphi + b\psi) & = & \displaystyle\int_{\mathrm{U}} f(x)(a\varphi(x) + b\psi(x))dx \\ & = & a\displaystyle\int_{\mathrm{U}} f(x)\varphi(x)dx + b\int_{\mathrm{U}} f(x)\psi(x)dx \\ & = & a\mu_f(\varphi) + b\mu_f(\psi) \end{array}$$

   μ_f *est aussi continue sur* $k(\mathrm{U})$, *car pour tout compact* K *inclus dans* U, *on a :*

$$|\mu_f(\varphi)| \leq \mathrm{M}_\mathrm{K} \sup_{x\in\mathrm{U}} |\varphi(x)|, \forall \varphi \in k(\mathrm{U},\mathrm{K})$$

   où $\mathrm{M}_\mathrm{K} = \displaystyle\int_{\mathrm{K}} |f(x)|dx$. *Ainsi,* μ_f *est une mesure de Radon sur* U, *et alors sa restriction* *à* $\mathscr{D}(\mathrm{U})$ *:*

$$\begin{array}{rcl} \mu_{f\backslash_{\mathscr{D}(\mathrm{U})}} : \mathscr{D}(\mathrm{U}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longrightarrow & \mu_f(\varphi) = \int_{\mathrm{U}} f(x)\varphi(x)dx \end{array}$$

est une distribution d'ordre 0 sur U. *On note cette distribution par* $\mu_{f\backslash_{\mathscr{D}(\mathrm{U})}}$ *ou* T_f *ou bien* $[f]$, *et on dit que c'est la distribution associée à la fonction continue* f.

4 Support d'une distribution

Définition 1.8 *[5]*

1. *On dit qu'une distribution* T *est nulle sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *si* $\langle \mathrm{T}, \varphi\rangle = 0$ *pour toute fonction* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *dont le support est contenu dans* U.
2. *On appelle support d'une distribution* T *le plus petit fermé de* $\mathbb{R}^n$ *tel que* T *soit nul dans son complémentaire.*

Conséquence Immédiates *:*
Voilà quelques propriètés du support d'une distribution $\mathrm{S} \in \mathscr{D}'(\mathrm{U})$ *qui sont faciles à obtenir directement de la définition du support.*

1. $Supp\mathrm{S}$ *est toujours fermé dans* U.

2. $x \in Supp\mathrm{S}$ *si et seulement si pour tout ouvert inclus dans* U *contenant* x, *il existe* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{U})$ *tel que* $Supp\varphi \subset \mathrm{V}$ *et* $\langle \mathrm{S}, \varphi\rangle \neq 0$.
   En effet,

$$x \in Supp\mathrm{S} \Leftrightarrow x \notin \omega.$$

   Où ω *est le plus grand ouvert d'annulation de* S. *Soit* V *une ouvert contenant* x, *et inclu dans* V, *supposons que pour toute* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{U},\mathrm{V}).(i.e\ \varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{U}))$ *et* $Supp\varphi \subset \mathrm{V}$ *, on ait* $\langle \mathrm{S}, \varphi\rangle = 0$. *Dans ce cas,* $\mathrm{S}_{\backslash \mathrm{V}} = 0$ *et alors* V *est un ouvert d'annulation de* S, $x \in \mathrm{V} \subset \omega$ *donc* $x \in \omega = \mathrm{U}\backslash Supp\mathrm{S}$. *Ainsi, le résultat s'obtient par négation.*

3. $x \notin Supp\mathrm{S} \Leftrightarrow \exists \mathrm{V}$ *voisinage de* x *tel que*

$$\langle \mathrm{S}, \varphi\rangle = 0, \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{U},\mathrm{V}).$$

4. *Soit* $\mathrm{A} \subset \mathrm{U}$,

$$Supp\mathrm{S} \subset \mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{S} \equiv 0\ dans\ \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{A}.$$

Exemple 1.8 1. *Soit* f *fonction localement intégrable. Soit* T_f *sa distribution associée, le support de* T_f *coincide avec celui de* f.

$$Supp(\mathrm{T}_f) = Supp(f).$$

En effet,
Si f est une fonction continue de U *dans* $\mathbb{C}$*, alors le support de f autant que fonction et le support de f autant que distribution coicident, c'est à dire*

$$\mathrm{S}upp\mathrm{T}_f = \mathrm{S}upp f.$$

On montre que $\mathrm{U}\backslash(\mathrm{S}upp\mathrm{T}_f) = \mathrm{U}\backslash(\mathrm{S}upp f)$.

i) $\mathrm{U}\backslash(\mathrm{S}upp\mathrm{T}_f) \subset \mathrm{U}\backslash(\mathrm{S}upp f)$. *Pour établir cette première inclusion il suffit de vérifier que* $\mathrm{U}\backslash(\mathrm{S}upp f)$ *est un ouvert d'annulation de la distribution de* T_f.
En effet,
$\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{U})$, *tell que* $\mathrm{S}upp\varphi \subset \mathrm{U}\backslash(\mathrm{S}upp f)$, *ou bien* $\mathrm{S}upp\varphi \cap \mathrm{S}upp f = \emptyset$, *on a :*

$$\langle \mathrm{T}_f, \varphi\rangle = \int_{\mathrm{U}} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathrm{U}} 0dx = 0$$

car $\mathrm{S}upp(f\varphi) \subset \mathrm{S}upp f \cap \mathrm{S}upp\varphi = \emptyset$ *et alors* $f(x) = \varphi(x) = 0,\ \forall x \in \mathrm{U}$.

ii) $\mathrm{U}\backslash(\mathrm{S}upp\mathrm{T}_f) \subset \mathrm{U}\backslash(\mathrm{S}upp f)$. *Soit* $x \in \mathrm{U}\backslash(\mathrm{S}upp\mathrm{T}_f)$ *donc* $x \notin (\mathrm{S}upp\mathrm{T}_f)$. *Ainsi, il existe* V *un ouvert inclus dans* U, $x \in \mathrm{U}$, *tel que* $\langle \mathrm{T}_f, \varphi\rangle = 0$, $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{U},\mathrm{V})$. *D'où :*

$$\int_{\mathrm{U}} f(y)\varphi(y)dx = 0,\ \forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{U},\mathrm{V})$$

et alors $f(y) = 0$, $\forall y \in \mathrm{U}$. *Par conséquent,* $x \notin \mathrm{S}upp f$.

2. *On considére la fonction de Heavisite H. Ainsi que sa distribution* $\mathbf{T}_{\mathrm{H}}$ *associée, pour toute* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, *on a*

$$\langle \mathrm{T}_{\mathrm{H}}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}(x)\varphi(x)dx = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx.$$

   On a donc $\mathrm{S}upp(\mathrm{T}_{\mathrm{H}}) = \mathbb{R}_+$.

3. *Montrons que* $\mathrm{S}upp\delta_a = \{a\}$.
   Soit $\omega = \mathbb{R}/\{a\}$ *et* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\mathrm{S}upp(\varphi) \subset \mathbb{R}/\{a\}$. *On a donc* $\varphi(a) = 0$, $\langle\delta_a, \varphi\rangle = 0$.
   Donc δ_a *est nulle sur* $\mathbb{R}/\{a\}$.
   De plus, δ_a *n'est pas nulle sur* $\mathbb{R}$ *car il existe des fonctions* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *telles que* $\langle\delta_a, \varphi\rangle \neq 0$.
   Donc $\mathbb{R}/\{a\}$ *est le plus grand ouvert sur lequel* δ_a *est nulle. Donc* $\mathrm{S}upp(\delta_a) = \{a\}$, *et* δ_a *a support compact.*

5 Distribution à support compact

Notation 1.2 *On note par* $\mathscr{E}(\Omega)$ *l'espace des fonctions de classe* C^{∞} *de Ω dans* $\mathbb{C}$ *et par* $\mathscr{E}'(\Omega)$ *l'espace des distributions à support compact sur Ω.*

Théorème 1.1 *[5] Une forme linéaire sur* $\mathscr{D}(\mathrm{U})$ *est une distribution à support compact si et seulement si elle est continue pour la topologie induite sur* $\mathscr{D}(\mathrm{U})$ *par celle de* $\mathscr{E}(\mathrm{U})$ *. Dans ce cas, elle se prolonge d'une manière unique en une forme linéaire continue sur* $\mathscr{E}(\mathrm{U})$.

Rapalons qu'une suite φ_j *converge vesr* φ *dans* $\mathscr{E}(\Omega)$ *si pour toute* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *et pour toute compact* K *de* Ω *la suite de fonction* $\mathrm{D}^\alpha(\varphi)$ *converge uniformément vres* $\mathrm{D}^\alpha\varphi$ *sur* K *:*

$$\lim_{j\to+\infty} \sup_{x\in\mathsf{K}} |\mathrm{D}^\alpha\varphi_j(x) - \mathrm{D}^\alpha\varphi(x)| = 0.$$

Exemple 1.9 *Soit* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, *alors* $\mathrm{T}_\varphi \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\delta_a \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\forall a \in \mathbb{R}^n$.

Chapitre 2

Opération sur les Distributions

Dans cette section , on va passer en revue toutes les opérations principales sur les distributions.

1 Addition, Soustraction et Multiplication par un scalaire

Les distributions étant définies comme des formes linéaires, on peut les additionner, soustraire, ou mltiplier par un scalaire, sans rencontre aucune difficulté.
Soient $S, T \in \mathscr{D}'(U)$, U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$, *alors* $S \pm T$ *et* λS *sont aussi des distributions sur* U *définies pour tout* $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ *par :*

$$\langle S \pm T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle \pm \langle T, \varphi \rangle,$$

$$\langle \lambda S, \varphi \rangle = \langle S, \lambda\varphi \rangle = \lambda \langle S, \varphi \rangle.$$

Il claire que d'aprés ce qui précéde on vient de munir l'espace des distributions $\mathscr{D}'(U)$ *sur l'ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *d'une structure d'espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$.

2 Translatée et Transposition d'une Distribution

2.1 La translatée d'une distribution

Notons que pour une fonction f *localement intégrable sur* $\mathbb{R}^n$ *et* $a \in \mathbb{R}^n$ *, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-a)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x+a)\,dx, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

Via la chengement de variable $y = x - a$ *cette expression peut être facilement étendue aux distribution.*
Si $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, *on définit la translatée* S_a *da la distribution* S *de vecteur* $a \in \mathbb{R}^n$, *par :*

$$\langle S_a, \varphi(x) \rangle = \langle S, \varphi(x+a) \rangle, \ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$$

S_a *est bien une distribution sur* $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2.1 *La translatée de la valeur principale de cauchy $\frac{1}{x}$ est la valeur principale de $\frac{1}{x-a}$.*

2.2 Transposition d'une distribution

Soit f une fonction localement intégrable de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{C}$, cherchons la distribution associée à la fonction $f(x) = f(-x)$. On a pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle T_{\widehat{f}}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(-x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(-x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\varphi}(x)dx.$$

La tronsposée d'une distribution S, notée $\widehat{S}$ est la distribution définie par :

$$\langle \widehat{S}, \varphi\rangle = \langle S, \widehat{\varphi}\rangle, \ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

La notion de transposée permet de définir des distributions paires et impaires comme pour les fonctions.

3 Dilatation d'une Distribution

Si f est localement intégrable de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{C}$, et si $a \in \mathbb{R}^*$, alors la dilatée de la fonction f est définie par $x \longrightarrow \widehat{f}(x) = f(ax)$. Sa distribution associée vérifie :

$$\langle T_{\widehat{f}}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(ax)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(\frac{x}{a})\frac{dx}{|a|^n} = \frac{1}{|a|^n}\langle T_f, \widehat{\varphi}\rangle.$$

La dilatée d'une distribution $S \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, notée $\widehat{S}$ est la distribution définie par :

$$\langle \widehat{S}, \varphi\rangle = \frac{1}{|a|^n}\langle S, \widehat{\varphi}\rangle.$$

Exemple 2.2 *La dilatée de la fonction de Dirac est $\widehat{\delta_a} = \frac{1}{|a|}\delta$.*

4 Dérivation d'une Distribution

Soit f une fonction de classe C^1. En faisant une intégration par parties, on obtient immédaitement

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \langle f', \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\langle f, \varphi'\rangle.$$

car $\varphi(\pm\infty) = 0$. On est donc conduit à la définition générale suivant :

Définition 2.1 *On appelle dérivée T' d'une distribution T sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}$, la fonctionnelle définie par la relation :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \langle T', \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle$$

Proposition 2.1 *Toute distribution admet des dérivées de toute entire $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée $n^{iéme}$ de T est définie par :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \langle \mathrm{T}^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle \mathrm{T}, \varphi^{(n)} \rangle.$$

a) **Dérivée de la fonction d'Heaviside**
Rappelons que la fonction d'Heaviside (dite échelon unité) est définie par

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x \prec 0 \end{cases}$$

et détermine une distribution notée H. *Au sens des fonctions, la dérivée de* $\mathrm{H}(x)$ *n'existe pas au point* $x = 0$. *Mais au sens des distributions, on a pour* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{H}', \varphi \rangle &= \langle \mathrm{H}, \varphi' \rangle \\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx \\ &= \varphi(0) \\ &= \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

car $\varphi(+\infty) = 0$. *Par conséquent,* $\mathrm{H}' = \delta$, *c'est à dire la distribution* H *a pour dérivée la distribution de Dirac* δ *concentrée en 0.*

b) **Dérivée de la Distribution de Dirac**
On a

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0).$$

En général, on a

$$\langle \delta^{(m)}, \varphi \rangle = (-1)^m \varphi^{(m)}(0), \ m \in \mathbb{N}.$$

4.1 Extension au cas de plusieurs variables

Dans le cas de plusieurs variables, on définit la dérivée $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i}$ *d'une distribution* T *sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^n$, *par :*

$$\Big\langle \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i}, \varphi \Big\rangle = -\Big\langle \mathrm{T}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big\rangle, \ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

.
On a

$$\Big\langle \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x_i \partial x_j}, \varphi \Big\rangle = -\Big\langle \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big\rangle = \Big\langle \mathrm{T}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \Big\rangle,$$

où $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathscr{D}(\Omega)$*, donc* $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial y_j} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_i}$*, et par conséquent*

$$\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Plus généralement, on a

$$\left\langle \mathrm{D}^\alpha \mathrm{T}, \varphi \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle \mathrm{T}, \mathrm{D}^\alpha \varphi \right\rangle.$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *avec* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ *et* D^α *désigne l'opérateur de dérivation :*

$$\mathrm{D}^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Proposition 2.2 *Si* $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$*, alors* $\mathrm{D}^\alpha \mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Preuve.
$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\mathrm{D}^\alpha \mathrm{T}$ *est bien définie de* $\mathscr{D}(\Omega)$ *dans* $\mathbb{C}$ *car* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\mathrm{D}^\alpha \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.
De plus, $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *:*

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{D}^\alpha \mathrm{T}, a\varphi + b\psi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \left\langle \mathrm{T}, \mathrm{D}^\alpha (a\varphi + b\psi) \right\rangle. \\
&= (-1)^{|\alpha|} a \left\langle \mathrm{T}, \mathrm{D}^\alpha \varphi \right\rangle + (-1)^{|\alpha|} b \left\langle \mathrm{T}, \mathrm{D}^\alpha \psi \right\rangle = a \left\langle \mathrm{D}^\alpha \mathrm{T}, \varphi \right\rangle + b \left\langle \mathrm{D}^\alpha \mathrm{T}, \psi \right\rangle
\end{aligned}$$

alors $\mathrm{D}^\alpha \mathrm{T}$ *est linéaire.*
$\mathrm{D}^\alpha \mathrm{T}$ *est aussi continue sur* $\mathscr{D}(\Omega)$*, car* $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega, \mathrm{K})$ *où* K *est compact inclus dans* Ω*, on a :*

$$\left| \langle \mathrm{D}^\alpha \mathrm{T}, \varphi \rangle \right| = \left| \langle \mathrm{T}, \mathrm{D}^\alpha \varphi \rangle \right| \leq \mathrm{M}_\mathrm{K} \sum_{\beta \in \mathbb{N}, |\beta| \leq k_\mathrm{K}} \sup_{x \in \Omega} \left| \mathrm{D}^\beta \mathrm{D}^\alpha \varphi(x) \right|$$

où $\mathrm{M} < 0$, $k_\mathrm{K} \in \mathbb{N}$ *proviennent de la continuité de* T *sur* $\mathscr{D}(\Omega)$*, Ainsi,*

$$\begin{aligned}
\left| \langle \mathrm{T}, \mathrm{D}^\alpha \varphi \rangle \right| &\leq \mathrm{M}_\mathrm{K} \sum_{|\beta| \leq k_\mathrm{K}} \sup_{x \in \Omega} \left| \mathrm{D}^{\alpha+\beta} \varphi(x) \right| \\
&\leq \mathrm{M}_\mathrm{K} \sum_{|\alpha+\beta| \leq k_\mathrm{K} + |\alpha|} \sup_{x \in \Omega} \left| \mathrm{D}^\alpha \varphi(x) \right|
\end{aligned}$$

car $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \leq k_\mathrm{K} + |\alpha| \in \mathbb{N}$.

4.2 Propriètes de la dérivation distributionelle

Soient U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{S}, \mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\mathrm{U})$, $a, b \in \mathbb{C}$*, et* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$*. Alors :*

1. *pour tout* $i = \{1, \ldots, n\}$*, on a :*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a\mathrm{S} + b\mathrm{T}) = a\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_i} + b\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i}.$$

2. *Si* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{U})$*, on a :*

$$\langle \mathrm{D}^\alpha \mathrm{S}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \mathrm{S}, \mathrm{D}^\alpha \varphi \rangle.$$

3.

$$\mathrm{D}^\alpha(a\mathrm{S} + b\mathrm{T}) = a\mathrm{D}^\alpha \mathrm{S} + b\mathrm{D}^\alpha \mathrm{T}.$$

4.

$$\mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}^\beta \mathrm{S} = \mathrm{D}^\beta \mathrm{D}^\alpha \mathrm{S} = \mathrm{D}^{\alpha+\beta} \mathrm{S}.$$

5.

$$\mathrm{S}upp\mathrm{D}^\alpha \mathrm{S} \subset \mathrm{S}upp\mathrm{S}.$$

Preuve.

1. $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{U})$,

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(a\mathrm{S} + b\mathrm{T}), \varphi \rangle &= -\langle a\mathrm{S} + b\mathrm{T}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = -a\langle \mathrm{S}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle - b\langle \mathrm{T}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \\
&= a\langle \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_i}, \varphi \rangle + b\langle \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i}, \varphi \rangle = \langle a\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_i} + b\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i}, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

2. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ *et*
   $\mathrm{D}^\alpha = \mathrm{D}_1^{\alpha_1} \ldots \mathrm{D}_i^{\alpha_i} \ldots \mathrm{D}_n^{\alpha_n}$ *où* $\mathrm{D}_i^{\alpha_i} = \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial x_i^{\alpha_i}}$
   $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{U})$*, on a en réitérant les dérivations jusqu'à l'ordre* α_i *:*

$$\langle \mathrm{D}_i^{\alpha_i} \mathrm{S}, \varphi \rangle = (-1)^{\alpha_i} \langle \mathrm{S}, \mathrm{D}_i^{\alpha_i} \varphi \rangle, i = \{1, \ldots, n\}$$

et ensuite :

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{D}^\alpha \mathrm{S}, \varphi \rangle &= \langle \mathrm{D}_1^{\alpha_1} \ldots \mathrm{D}_i^{\alpha_i} \ldots \mathrm{D}_n^{\alpha_n} \mathrm{S}, \varphi \rangle = (-1)^{\alpha_1} \langle \mathrm{D}_2^{\alpha_2} \ldots \mathrm{D}_n^{\alpha_n} \mathrm{S}, \mathrm{D}_1^{\alpha_1} \varphi \rangle \\
&= (-1)^{\alpha_1}(-1)^{\alpha_2} \langle \mathrm{D}_3^{\alpha_3} \ldots \mathrm{D}_n^{\alpha_n} \mathrm{S}, \mathrm{D}_2^{\alpha_2} \mathrm{D}_1^{\alpha_1} \varphi \rangle \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= (-1)^{\alpha_1}(-1)^{\alpha_2} \ldots (-1)^{\alpha_n} \langle \mathrm{S}, \mathrm{D}_n^{\alpha_n} \ldots \mathrm{D}_2^{\alpha_2} \mathrm{D}_1^{\alpha_1} \varphi \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle \mathrm{S}, \mathrm{D}^\alpha \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

3. $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{U})$,

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{D}^\alpha(a\mathrm{S} + b\mathrm{T}), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle (a\mathrm{S} + b\mathrm{T}), \mathrm{D}^\alpha \varphi \rangle \\
&= a(-1)^{|\alpha|} \langle \mathrm{S}, \mathrm{D}^\alpha \varphi \rangle + b(-1)^{|\alpha|} \langle \mathrm{T}, \mathrm{D}^\alpha \varphi \rangle \\
&= a\langle \mathrm{D}^\alpha \mathrm{S}, \varphi \rangle + b\langle \mathrm{D}^\alpha \mathrm{T}, \varphi \rangle \\
&= \langle a\mathrm{D}^\alpha \mathrm{S} + b\mathrm{D}^\alpha \mathrm{T}, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}
\langle D^\alpha D^\beta S, \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle D^\alpha S, D^\beta\varphi\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\beta|}\langle S, D^\alpha D^\beta\varphi\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha+\beta|}\langle S, D^{\alpha+\beta}\varphi\rangle \\
&= \langle D^{\alpha+\beta}S, \varphi\rangle \\
&= \langle D^\beta D^\alpha S, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

5. *$x \in Supp D^\alpha S$ si et seulement si pour tout V ouvert, $V \subset U$, $x \in V$, il existe $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ tel que $Supp\varphi \subset V$ et $\langle D^\alpha S, \varphi\rangle \neq 0$. Or, on a*

$$\langle D^\alpha S, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle S, D^\alpha\varphi\rangle \neq 0 \Longrightarrow \langle S, D^\alpha\varphi\rangle \neq 0.$$

On pose alors $\psi = D^\alpha\varphi$. ψ est de classe C^∞ sur U, de plus $Supp D^\alpha\varphi \subset Supp\varphi \subset V$ et $\langle S, \psi\rangle \neq 0$, donc $x \in Supp S$.

Exemple 2.3 *1. La fonction $f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$ et continue mais non dérivéble sur $\mathbb{R}$. Soit $[f]$ la distribution associée à f :*

$$\begin{aligned}
[f] : \mathscr{D}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\varphi &\longrightarrow \langle [f], \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} |x|\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{0} -x\varphi(x)dx + \int_0^{+\infty} x\varphi(x)dx
\end{aligned}$$

Calculons la dérivée au sens des distribution de $[f]$:

$$\begin{aligned}
\langle \tfrac{d}{dx}[f], \varphi\rangle &= -\langle [f], \tfrac{d\varphi}{dx}(x)\rangle = -\int_{\mathbb{R}} |x|\frac{d\varphi(x)}{dx}dx = \int_{-\infty}^{0} x\frac{d\varphi}{dx}(x)dx - \int_0^{+\infty} x\frac{d\varphi)}{dx}(x)dx \\
&= [x\varphi(x)]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0}\varphi(x)dx - [x\varphi(x)]_0^{-\infty} + \int_0^{+\infty}\varphi(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)dx + \int_0^{+\infty}\varphi(x)dx = \langle [f^*], \varphi\rangle
\end{aligned}$$

où $f^*(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$
Ainsi, $\frac{d}{dx}[f] = [f^*]$, car f^* est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. *Soit $[H] = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ -1 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$*
la fonction caractéristique de $]0, +\infty[$. H n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, mais on peut lui faire correspondre une distribution sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle y est localement intégrable on note $[H] = H$,

$$\begin{aligned}
[H] : \mathscr{D}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\varphi &\longrightarrow \langle [H], \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty}\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Donc $\frac{dH}{dx} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ avec :

$$\begin{aligned}
\langle \tfrac{d}{dx}[H], \varphi\rangle &= -\langle [H], \tfrac{d\varphi}{dx}(x)\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \frac{d\varphi}{dx} = -[\varphi(x)]_0^{+\infty} \\
&= \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

où δ_0 est la distribution de Dirac sur $\mathbb{R}$ concentrée en 0.

$$\frac{dH}{dx} = \delta_0$$

dérivation d'une fonction discontinue (**formule des sauts**) *On vient de voir que la dérivée au sens des distribution de la distribution de Heaviside était égale à la distribution de Dirac δ_0. Maintenant, si on considéré la fonction de Heaviside, sa dérivée est nulle partout sauf en 0 où elle n'est pas définie et la distribution associée n'est pas δ_0. Par conséquent, les opérations "prendre la distribution associée" et "dérivation" ne commutent pas, ou autrement dit, $(T_f)' \neq T'_f$ cela est le cas pour toute fonction présentant une discontinuité en un point.*
Soit f une fonction C^1 par morceaux. Soient $a_1, \ldots, a_p$ des points de discontinuité de première espèce de f (que nous supposons en nombre fini et où limite à droite $f(a_i^+)$ et à gouche $f(a_i^-)$ existent et sont finies) et $s_i = s(f, a_i) = f(a_i^+) - f(a_i^-)$ est le saut de discontinuité de f en a_i, $i = 1, \ldots, p$. La fonction f peut alors s'écrite comme la somme d'une fonction continue g et de fonction de Heaviside :

$$f(x) = g(x) + \sum_{i=1}^{p} s_i H(x - a_i).$$

De plus, on a $T'_f = T'_g$ ou f' désigne la dérivée de f là où elle est bien définie c'est à dire en dehors des points de discontinuité précédentes, on a :

Théorème 2.1 *Soit f une fontion de classe C^1 par morceux sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$, avec les notations précédentes, on a alors :*

$$(T_f)' = T'_f + \sum_{i=1}^{p} s_i \delta_{a_i}.$$

cette formule s'appelle la formule de sauts.

Preuve.
En effet, soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ alors pour un point a des discontinuité de première espèce de f, on a :

$$\begin{aligned}
\langle (T_f)', \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{a} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{a}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= -[f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{a} + \int_{-\infty}^{a} f'(x)\varphi(x)dx - [f(x)\varphi(x)]_{a}^{+\infty} + \int_{a}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx \\
&= (f(a_i^+) - f(a_i^-))\varphi(a) + \int_{-\infty}^{a} f'(x)\varphi(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx \\
&= (f(a_i^+) - f(a_i^-))\langle \delta_a, \varphi \rangle + \langle T'_f, \varphi \rangle \\
&= \langle (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_a + T'_f, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

Donc

$$(T_f)' = T'_f + (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_a.$$

En remplaçant maintenant a par des point discontinuité de première espèce a_i de f et en sommant pour $i = 1, \ldots, p$, on a directement le résultat.

Remarque 2.1 *Ce resultat se généralise facilement dans le cas d'un nombre dénombrable des points de discontinuité de première espèce* $(a_i)_{i} \in \mathbb{N}^*$ *de* f *:*

$$(T_f)' = T'_f + \sum_{i=1}^{+\infty} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i}$$

Exemple 2.4 1. *Posons* $x^+ = \max(x, 0)$, *alors* $(T_x^+)' = H$ *et* $(T_{\frac{|x|}{2}})'' = \delta_0$.

2. *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *tell que* $f(x) = (\frac{1}{2} - \frac{x}{\pi})$, $x \in [0, 2\pi]$, *périodique de période* 2π *le saut aux points de discontinuité* $x_i = 2i\pi$, $i \in \mathbb{Z}$, *est égale à 1. En appliquant la formule des sauts on obtient :*

$$(Tf)' = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_{x_i}.$$

5 Produit d'une distribution par une fonction C^∞

On définira le produit entre une fonction C^∞ *et une distribution de telle manière que si la distribution est une fonction localement intégrable, le résultat soit le produit habituel des fonctions.*

Définition 2.2 *[6]Le produit d'une distibution quelconque* T *par une fonction* g *de classe* C^∞ *et une distribution définit par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle.$$

En effet, soient U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, S *une distribution sur* U *et* g *une fonction de classe* C^∞ *de* U *dans* $\mathbb{C}$. *L'application notée* gS *de* $\mathcal{D}(U)$ *dans* $\mathbb{C}$ *par :*

$$\begin{array}{rcl} gS : \mathcal{D}(U) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & \langle gS, \varphi \rangle = \langle S, g\varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(U) \end{array}$$

est une distribution sur U, *appellé le produit de la distribution* S *par la fonction* g *de classe* C^∞.
gS *est bien définie si* $g \in C^\infty(u)$ *et* $\varphi \in C^\infty(U)$ *alors* $g\varphi \in C^\infty(U)$ *et* $Supp(g\varphi) \subset Supp g \cap Supp\varphi \subset Supp\varphi$ *est compact inclus dans* U *donc* $g\varphi \in \mathcal{D}(U)$.
On vérifie que gS *est bien une distribution sur* U.
Il est simple de voir que $gS :\longrightarrow \mathbb{C}$ *est linèaire, car pour* $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(U)$ *et* $a, b \in \mathbb{C}$, *on a :*

$$\begin{array}{rcl} \langle gS, a\varphi + b\psi \rangle & = & \langle S, g(a\varphi + b\psi) \rangle \\ & = & a\langle S, g\varphi \rangle + b\langle S, g\psi \rangle = a\langle gS, \varphi \rangle + b\langle gS, \psi \rangle \end{array}$$

gS *est continue sur* $\mathcal{D}(U)$.
Soit K *un compact de* $\mathbb{R}^n$ *inclus dans* U, *vérifions la continuité de* $gS_{|\mathcal{D}(U,K)|} : \mathcal{D}(U, K) \longmapsto \mathbb{C}$. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(U, K)$. *En tenant compte du fait que* $g\varphi \in \mathcal{D}(U, K)$ *et que* S *est continue sur* $\mathcal{D}(U, K)$, *il existe alors une constante* $M_K > 0$ *et un entier* $k_K \in \mathbb{N}$, *tels que :*

$$\left|\langle gS,\varphi\rangle\right| = \left|\langle S,g\varphi\rangle\right| \leq M_K \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,|\alpha|\leq k_K} \sup_{x\in U}\left|D^\alpha(g\varphi)(x)\right|$$

$$D^\alpha(g\varphi)(x) = \sum_{\beta\in\mathbb{N}^n,\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta D^\beta\varphi(x)D^{\alpha-\beta}g(x)$$

$$\begin{aligned}
\left|\langle gS,\varphi\rangle\right| &\leq M_K \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,|\alpha|\leq k_K} \sup_{x\in K}\Big|\sum_{\beta\in\mathbb{N}^n,\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta D^\beta\varphi(x)D^{\alpha-\beta}g(x)\Big| \\
&\leq M_K \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,|\alpha|\leq k_K}\ \sum_{\beta\in\mathbb{N}^n,\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta \sup_{x\in K}\left(|D^\beta\varphi(x)||D^{\alpha-\beta}g(x)|\right) \\
&\leq M_K \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,|\alpha|\leq k_K}\ \sum_{\beta\in\mathbb{N}^n,\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta \sup_{x\in K}\left|D^\beta\varphi(x)\right| \sup_{x\in K}\left|D^{\alpha-\beta}g(x)\right|
\end{aligned}$$

pour α *fixé, notons* $A_\alpha = \max_{\beta\in\mathbb{N}^n,\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta \sup_{x\in K}\left|D^{\alpha-\beta}g(x)\right| \prec +\infty$

$$\left|\langle gS,\varphi\rangle\right| \leq M_K \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,|\alpha|\leq k_K} A_\alpha \sum_{\beta\in\mathbb{N}^n,\beta\leq\alpha} \sup_{x\in U}\left|D^\alpha\varphi(x)\right|$$

Notons aussi $A = \max_{\alpha\in\mathbb{N}^n,|\alpha|\leq k_K} A_\alpha \prec +\infty$ *alors :*

$$\begin{aligned}
\left|\langle gS,\varphi\rangle\right| &\leq AM_K \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,|\alpha|\leq k_K}\ \sum_{\beta\in\mathbb{N}^n,\beta\leq\alpha} \sup_{x\in U}\left|D^\beta\varphi(x)\right| \\
&\leq \sum_{\beta\in\mathbb{N}^n,\beta\leq\alpha} C_\beta \sup_{x\in U}\left|D^\beta\varphi(x)\right|
\end{aligned}$$

où C_β *est la nombre de* β *tels que* $\beta\leq\alpha$, $C_i = \left\{C_\beta : \beta\in\mathbb{N} et |\beta|\leq k_K\right\}$. *Finalement,*

$$\left|\langle gS,\varphi\rangle\right| \leq AM_K \subset \sum_{\beta\in\mathbb{N}^n,|\beta|\leq k_K} \sup_{x\in U}\left|D^\beta\varphi(x)\right|.$$

Exemple 2.5 *Si* δ *est la distribution de Dirac à l'origine et* $g\in C^1$*, alors*

$$g\delta = g(0)\delta.$$

En effet, soit $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$*, on a*

$$\begin{aligned}
\langle g\delta,\varphi\rangle &= \langle\delta,g\varphi\rangle \\
&= g(0)\varphi(0) \\
&= g(0)\langle\delta,\varphi\rangle \\
&= g(0)\delta.
\end{aligned}$$

Remarque 2.2 *Si dans l'exemple précédent, on choisit* $g(x)=x$*, alors on aura en particlier* $g(0)=0$ *et donc* $x\delta=0$*. On en déduit que le produit* $gT=0$ *peut être nul sans que* g *ou* T *soit nulle.*

Exemple 2.6 *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$*, on a*

$$x.\mathbf{vp}(\frac{1}{x}) = 1$$

$$\begin{aligned}
\langle x.vp(\tfrac{1}{x}),\varphi\rangle &= \langle vp(\tfrac{1}{x}),x\varphi\rangle = \int_0^{+\infty}\frac{x\varphi(x)+x\varphi(-x)}{x}dx.\\
&= \int_0^{+\infty}(\varphi(x)+\varphi(-x))dx = \int_{-\infty}^{+\infty}1.\varphi(x)dx\\
&= \langle 1,\varphi\rangle
\end{aligned}$$

où 1 désigne la distribution réguliére associée à la fonction constante $x \longrightarrow 1$.

Proposition 2.3 *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $g,h\in C^\infty(\mathscr{D})$ *et* $S,T\in\mathscr{D}'(U)$

1. *Si* $S=[f]$, f *continue de* U *dans* $\mathbb{C}$, *alors* $gS=g[f]=[gf]$.

2. $(g+h)S=gS+hS, ghS=g(hS)$ *et* $g(S+T)=gS+gT$.

3. $Supp(gS)\subset Supp g\cap Supp S$.

4. $\forall i\in\{1,\dots,n\}, \dfrac{\partial}{\partial x_i}(gs)=\dfrac{\partial g}{\partial x_i}S+g\dfrac{\partial S}{\partial x_i}$.
5. *Forme générale de la formule de Leibniz.* $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$:

$$D^\alpha(gS)=\sum_{\beta\in\mathbb{N}^n,\beta\le\alpha}C_\alpha^\beta D^\beta gD^{\alpha-\beta}S=\sum_{\beta\in\mathbb{N}^n,\beta\le\alpha}C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta}gD^\beta S.$$

Preuve.

1. *Est une conséquence immédiate du préambule de ce paragraphe. Soit* $\varphi\in\mathscr{D}(U)$,

$$\begin{aligned}
\left|\langle g[f],\varphi\rangle\right| &= \left|\langle [f],g\varphi\rangle\right| = \int_U f(x)g(x)\varphi(x)dx\\
&= \int_U \big(f(x)g(x)\big)\varphi(x)dx = \langle [f.g],\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

2. $\forall\varphi\in\mathscr{D}(U)$,

$$\begin{aligned}
\langle (g+h)S,\varphi\rangle &= \langle S,(g+h)\varphi\rangle=\langle S,g\varphi\rangle+\langle S,h\varphi\rangle=\langle gS,\varphi\rangle+\langle hS,\varphi\rangle=\langle gS+hS,\varphi\rangle\\
\langle ghS,\varphi\rangle &= \langle hS,g\varphi\rangle=\langle g(hS),\varphi\rangle\\
\langle g(S+T),\varphi\rangle &= \langle S+T,g\varphi\rangle=\langle S,g\varphi\rangle+\langle T,g\varphi\rangle\\
&= \langle gS,\varphi\rangle+\langle gT,\varphi\rangle=\langle gS+gT,\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

3. *Si* $x\in Supp(gS)$, *alors pour tout voisinage* V *de* x, *il existe* $\varphi\in\mathscr{D}(U,V)$ *tel que* $\langle gS,\varphi\rangle=\langle S,g\varphi\rangle\neq 0$. *Puisque* $g\varphi\in\mathscr{D}(U,V)$, *alors* $x\in Supp S$.
De plus, $\langle S,g\varphi\rangle\neq 0$, *implique que* $g\varphi$ *n'est pas une fonction identiquement nulle sur* V, *et alors la restriction de g à* V *n'est pas nulle, donc il existe* x_0 *dans* V *pour lequel* $g(x_0)\neq 0$, *pour tout voisinage* V *de* x. *Ou encore tout voisinage de* x *recontre* $\{y\in U : g(y)\neq 0\}$, *ceci implique que* $x\in\overline{\{y\in U: g(y)\neq 0\}}=Supp g$. *D'où,* $x\in Supp g\cap Supp S$.
4. *puisque* gS *est une distribution sur* U, *alors pour tout* $i\in\{1,\dots,n\}$ *et* $\varphi\in\mathscr{D}(U)$, *on a :*

$$\langle\frac{\partial}{\partial x_i}(gS),\varphi\rangle=-\langle gS,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle=-\langle S,g\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle.$$

Or, $g\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(g\varphi) - \varphi\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$. *D'où :*

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(g\mathrm{S}), \varphi\right\rangle &= -\left\langle \mathrm{S}, \frac{\partial}{\partial x_i}(g\varphi) - \varphi\frac{\partial g}{\partial x_i}\right\rangle = -\left\langle \mathrm{S}, \frac{\partial}{\partial x_i}(g\varphi)\right\rangle + \left\langle \mathrm{S}, \varphi\frac{\partial g}{\partial x_i}\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_i}, g\varphi\right\rangle + \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_i}\mathrm{S}, \varphi\right\rangle = \left\langle g\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_i}, \varphi\right\rangle + \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_i}\mathrm{S}, \varphi\right\rangle \\
&= \left\langle g\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}\mathrm{S}, \varphi\right\rangle,\ \forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{U}).
\end{aligned}$$

5. *Est une généralisation directe de la formule de Liebniz dans le cas des distributions.*

Exemple 2.7 *L'exemple ou plutôt le contre exemple, suivant, a permis à Schwartz en 1954 de démontrer l'impossibilité de la multiplication des distribution en général, On se place dans* $\mathbb{R}$*. comme on a déjà vu, on a* $xvp(\frac{1}{x}) = 1$ *et* $x\delta_0 = 0$ *au sens des distributions. Si l'on arvient à définir un produit raisonnable sur l'espace des distribution, alors ce produit est du moins associatif, ce qui conduit à la contradiction*

$$\delta_0 = \delta_0\big(xvp(\frac{1}{x})\big) \neq (x\delta_0)\,vp(\frac{1}{x}) = 0.$$

6 Convergence dans $\mathrm{D}'(\Omega)$

On définira une convergence des suites dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ *où* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*.*

Définition 2.3 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $\{\mathrm{T}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suit de distribution sur* Ω *et* $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$*. On dit que* $\{\mathrm{T}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* T *quand* $n \longrightarrow +\infty$ *au sens des distributions si et selement si*

$$\forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \left\langle \mathrm{T}_n, \varphi\right\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left\langle \mathrm{T}, \varphi\right\rangle.$$

Cette notion de convergence est donc une convergence simple. On écrira dans cette situation

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{T}_n = \mathrm{T}\ ou\ \mathrm{T}_n \xrightarrow{\mathscr{D}'} \mathrm{T} quand\ n \longrightarrow +\infty.$$

Exemple 2.8 *Montrons que :* $\delta_n \longrightarrow 0$*. En effet, on a*

$$\forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \left\langle \delta_n, \varphi\right\rangle = \varphi(n)$$

et puisque φ *est à support compact, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \left\langle \delta_n, \varphi\right\rangle = \varphi(n) = 0.$$

Exemple 2.9 1. *La suite de distribution* $\mathrm{T}_k = k1_{[0,\frac{1}{k}]}$ *tend vers* δ_0 *dans* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$*. En effet, Soit* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$*, on a :*

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{T}_n, \varphi\right\rangle - \left\langle \delta_0, \varphi\right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} k1_{[0,\frac{1}{k}]}\varphi(x)dx - \varphi(0) = k\int_0^{\frac{1}{k}} \varphi(x)dx - \varphi(0) \\
&= k\int_0^{\frac{1}{k}} (\varphi(x) - \varphi(0))dx.
\end{aligned}$$

Or, $k\int_0^{\frac{1}{k}}\varphi(x)dx = k[\phi(\frac{1}{k})-\phi(0)]$ *où* ϕ *est une primitive de* φ, ϕ *est dérivable, par le théorème des accoroissements finis, on obtient :*

$$\phi(\frac{1}{k})-\phi(0) = \frac{1}{k}\phi'(0)+o(\frac{1}{k}).$$

Ainsi, on a :

$$k[\phi(\frac{1}{k})-\phi(0)] = \phi'(0)+o(1) = \varphi(0)+o(1).$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty}\langle \mathrm{T}_n,\varphi\rangle = \varphi(0) = \langle\delta_0,\varphi\rangle$$

ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{T}_n = \delta_0$ *dans* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

2. *Si* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est une suite convergente vers a dans* $\mathbb{R}$*, alors la suite de distribution* $(\delta_{a_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers* δ_a *dans* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

3. *La suite de fonction* $f_k(x) = \sin(2k\pi x)$ *ne converge pas quand* $k\ tend\ vers\ +\infty$. *Cependant, la suite des distributions associées* $\mathrm{T}_{f_k} = \mathrm{T}_k$ *converge vers la distribution nulle dans* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$*, c'est une conséquence immédiate du théorème de Riemann-Lebesgue :*

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\sin(2k\pi x)dx = 0,\ \forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

4. *Soit* $\mu\in(\mathbb{R})$*, alors* $\lim\limits_{k\to+\infty}\mu\frac{k}{2}\big(\delta_{\frac{1}{k}}-\delta_{\frac{-1}{k}}\big) = -\mu\delta_0'$ *dans* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.
En effet, Soit $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\langle\mu\tfrac{k}{2}\big(\delta_{\frac{1}{k}}-\delta_{\frac{-1}{k}}\big),\varphi\rangle &= \mu\tfrac{k}{2}\big[\varphi(\tfrac{1}{k})-\varphi(\tfrac{-1}{k})\big]\\
&= \mu\tfrac{k}{2}\big[\varphi(0)+\tfrac{1}{k}\varphi'(0)+o(\tfrac{1}{k^2})-\varphi(0)+\tfrac{1}{k}\varphi'(0)+o(\tfrac{1}{k^2})\big]\\
&= \mu\varphi'(0)+o(\tfrac{1}{k^2}) \longrightarrow \mu\varphi'(0) = -\mu\langle\delta_0',\varphi\rangle = \langle-\mu\delta_0,\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

5. $\mathrm{T}_k = \dfrac{1_{[\frac{1}{k},+\infty[}(|x|)}{x} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} vp(\dfrac{1}{x})$ *dans* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.
Soit $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\langle T_n, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1_{[\frac{1}{k},+\infty[}(|x|)}{x} \varphi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{1_{[\frac{1}{k},+\infty[}(-x)}{x} \varphi(x)dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1_{[\frac{1}{k},+\infty[}(x)}{x} \varphi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{-1}{k}} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\frac{+1}{k}}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\
&= \int_{|x|>\frac{1}{k}} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \langle vp(\frac{1}{k}), \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Théorème 2.2 *Si* $(T_n)_{n>0}$ *est une suite de distribution sur* Ω *tell que :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \lim_{n\to+\infty} \langle T, \varphi \rangle \ existe.$$

alors la forme linéaire T *sur* Ω *définie par*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \langle T, \varphi \rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi \rangle$$

est une distribution sur Ω *et* $T_n \underset{\mathscr{D}'}{\longrightarrow} T \ quand \ n \longrightarrow +\infty.$

Théorème 2.3 *(Quelques propriétés de la limite)*

1. *Si* $(T_j)_{j\in\mathbb{N}} \longrightarrow T$ *dans* $\mathscr{D}'(U)$, *alors* $(D^\alpha T_j) \longrightarrow D^\alpha T, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

2. *Pour tout* $f \in \mathscr{E}(U)$, *si* $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *converge vers* T *dans* $\mathscr{D}'(U)$, *alors* (fT_j) *converge vers* fT *dans* $\mathscr{D}'(U)$.

3. *Si* $f \in L^2(U)$, *et* $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $L^2(U)$ *converge vers* f *dans* $L^2(U)$, *alors* $(T_{f_j})_{j\in\mathbb{N}}$ *converge vres* T_f *dans* $\mathscr{D}'(U)$.

Preuve.

1. $\forall \varphi \in \mathscr{D}(U)$,

$$\langle D^\alpha T_j, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_j, D^\alpha \varphi \rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle = \langle D^\alpha T, \varphi \rangle$$

   car $D^\alpha \varphi \in \mathscr{D}(U)$.

2. *Soit* $f \in \mathscr{E}(U)$,

$$\langle fT_j, \varphi \rangle = \langle T_j, f\varphi \rangle \longrightarrow \langle T, f\varphi \rangle = \langle fT, \varphi \rangle$$

   car $f\varphi \in \mathscr{D}(U), \ \forall \varphi \in \mathscr{D}(U)$.

3. $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{U})$, *on obtient à l'aide de l'inégalité de Cauchy- Schawrtz dans* $\mathrm{L}^2(\mathrm{U})$ *:*

$$\begin{aligned} \left|\langle \mathrm{T}_j,\varphi\rangle - \langle \mathrm{T}_f,\varphi\rangle\right| &= \left|\int_{\mathrm{U}}(f_j(x)-f(x))\varphi(x)dx\right| = |\langle f_j - f, \overline{\varphi}\rangle| \\ &\leq ||f_j - f||_{\mathrm{L}^2(\mathrm{U})}||\varphi||_{\mathrm{L}^2(\mathrm{U})} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

7 Quelques équations classiques dans l'espace des distributions

7.1 Résolution de l'equation $x\mathrm{T}=0$ pour $\mathrm{T}\in\mathscr{D}'$

Par définition

$$x\mathrm{T}=0 \Leftrightarrow \langle x\mathrm{T},\phi\rangle = 0$$

pour tout fonction $\phi\in\mathscr{D}$.
Or

$$\langle x\mathrm{T},\phi\rangle = \langle \mathrm{T}, x\phi\rangle.$$

Il en résulte que T *est nulle sur toute fonction* χ *de la forme* $\chi = x\phi$ *avec* $\phi\in\mathscr{D}$. *Mais ces fonctions* χ *ne remplissant pas tout* D. *Elles sont en fait caractérisées par la condition* $\chi(0)=0$.
En effet, si $\chi = x\phi$ *avec* $\phi\in\mathscr{D}$, *on a* $\chi(0)=0$.
Inversement, si $\chi\in\mathscr{D}$ *vérifie* $\chi(0)=0$, *on peut l'écrire*

$$\chi(x) = x\phi(x)$$

,
où $\phi\in\mathscr{D}$.
Soit alors $\psi_0\in\mathscr{D}$ *une fonction fixée, choisie de telle sorte que* $\psi_0(0)=1$. *On peut écrire, pour toute fonction* $\psi\in\mathscr{D}$, *lequel est un espace vectoriel*

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(0)\psi_0 + \chi \\ \psi(0) &= \psi(0)\psi_0 + \chi(0) \\ &= \psi(0) + \chi(0) \end{aligned}$$

d'où $\chi(0)=0$.
Alors

$$\langle \mathrm{T},\psi\rangle = \psi(0)\langle \mathrm{T},\psi_0\rangle + \langle \mathrm{T},\chi\rangle$$

et compte tenu de ce que

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{T},\chi\rangle &= 0 \\ &= \psi(0)\langle \mathrm{T},\psi_0\rangle \\ &= \mathrm{C}\psi(0) \end{aligned}$$

en posant $\langle T, \psi_0 \rangle = C$

$$= \langle C\delta, \psi \rangle$$

pour toute fonction $\psi \in \mathscr{D}$. *Donc,* T *est nécessairement de la forme*

$$T = C\delta.$$

La réciproque est évidente, car si $T = C\delta$, *on a* $xT = 0$ *pour toute constante* C.
En résumé

$$xT = 0 \Leftrightarrow T = C\delta,$$

où C *est un nombre complexe.*

7.2 Résolution de l'équation $T' = 0$ pour $T \in \mathscr{D}'$

Cette équation est équivalente à

$$\langle T', \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle = 0, \; \forall \phi \in \mathscr{D}.$$

Par conséquent, T *est nulle lorsqu'elle est testée par toute fonction qui est la dérivée d'une fonction de* D.*Mais les fonctions* ϕ_0 *de ce type ne remplissant pas tout* D. *Elles sont caractérisées en fait par les deux conditions*

$$\phi_0 \in \mathscr{D}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_0 = 0,$$

constituant ainsi un sous-espace vectoriel $E_0 \subset \mathscr{D}$.
On a donc

$$\langle T, \phi_0 \rangle = 0$$

pour toute fonction $\phi_0 \in E_0$.
Rappelons que T *ne sera connue que si ses valeurs* $\langle T, \phi \rangle$ *sont connues pour toute* $\phi \in \mathscr{D}$.
Considérons alors une fonction $\phi_1 \in \mathscr{D}$ *n'appartenant pas à* E_0, *choisie de telle sorte que*

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_1 = 1.$$

L'espace $\mathscr{D}$ *étant un espace vectoriel, on peut toujours écrire, pour* $\phi \in \mathscr{D}$ *quelconque*

$$\phi' = \phi_1 \int_{\mathbb{R}} \phi + \phi_0$$

où $\phi_0 \in \mathscr{D}$.
On remarque que nécessairement $\phi_0 \in E_0$ *car*

$$\int_{\mathbb{R}} \phi = \int_{\mathbb{R}} \phi_1 . \int_{\mathbb{R}} \phi + \int_{\mathbb{R}} \phi_0,$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_0 = 0$$

De plus, la valeur de T *testée par* $\phi \in \mathscr{D}$ *quelconque sera alors connue si on connaît* $\langle T, \phi_1 \rangle$.
En effet

$$\langle T, \phi' \rangle = \langle T, \phi_1 \rangle \int_{\mathbb{R}} \phi + \langle T, \phi_0 \rangle$$

Le dernier terme étant nul, on a en posant $\langle T, \phi_1 \rangle = k$

$$\langle T, \phi \rangle = k \int_{\mathbb{R}} \phi = \langle k, \phi \rangle$$

pour toute $\phi \in \mathscr{D}$.
Il en résulte que T *est nécessairement de la forme*

$$T = k.$$

Réciproquement, si $T = k$ *on a* $T' = 0$. *En résumé*

$$T' = 0 \Leftrightarrow T = k,$$

où k *est une constant complexe*

Chapitre 3

Produit de Convolution des distributions

1 Convolution des fonctions

Définition 3.1 *[2] Soient φ et ψ deux fonctions C^∞ à supports compacts sur $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$. On pose :*

$$(\varphi * \psi)(x) = \int \varphi(y)\psi(x-y)dy = \int \varphi(x-y)\psi(y)dy. \tag{3.1}$$

La fonction $(\varphi * \psi)$ ainsi définie est de classe C^∞ à support compact vérifiant :
$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ D^\alpha(\varphi * \psi) = D^\alpha\varphi * \psi = \varphi * D^\alpha\psi$

$$Supp(\varphi * \psi) \subset Supp(\varphi) + Supp(\psi).$$

On l'appelle la convolée des deux fonctions φ et ψ.
On peut bien sur définir la convolée de fonctions moins réguliéres.
L'extension la plus naturelle concerne les fonctions intégrables : si φ et ψ appartiennent a $L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\varphi * \psi$ définie par (3.1) appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$ et on a :

$$\int |\varphi * \psi(x)|dx \leq \int |\varphi(x)|dx. \int |\psi(x)|dx.$$

Néanmoins, ce n'est pas cette extension que nous utiliserons le plus fréquement,mais plutot celle décrit dans les définitions et ci dessous,qui concernent les cas où $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ou $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$.
En particulier, la formule (3.1) permet d'écrire en identifiant ψ à $T\psi$,

$$T\psi * \varphi(x) = \left\langle T\psi, \varphi(x-y)\right\rangle \tag{3.2}$$

2 Convolution des distributions

On pourra utiliser l'identité (3.2) pour définir le produit de convolution d'une distribution par une fonction C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.2 *[4] Soient $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, la formule*

$$T * \varphi(x) = \langle T, \varphi_x\rangle,\ avec\ \varphi_x(y) = \varphi(x-y)$$

définit sur $\mathbb{R}^n$ *une fonction* $T * \varphi$ *de classe* C^∞. *Cette fonction vérifie en outre :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \partial^\alpha (T * \varphi) = T * \partial^\alpha \varphi = \partial^\alpha T * \varphi \tag{3.3}$$

$$supp(T * \varphi) = supp(T) + supp(\varphi). \tag{3.4}$$

De plus, si $f, g \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ *et* $supp g$ *est compact dans* $\mathbb{R}^n$, *alors* $f * g$ *et une fonction de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^n$ *de plus* $T_f, T_g, T_{f*g} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *et on a :*

$$\begin{aligned}\langle T_{f*g}, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy\Big)\varphi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(z)\varphi(y+z)dydz = \big\langle (T_f)_y, \langle (T_g)_z, \varphi(y+z)\rangle\big\rangle.\end{aligned}$$

On utilise cette identité pour définir le produit de convolution de deux distributions sur $\mathbb{R}^n$ *dont l'une au moins est à support compact.*
Soit $S, T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. *Alors* $\langle S_y, \varphi(x+y)\rangle$ *est une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ *de* x, *la notation* S_y *signifiant que la distribution ne s'applique qu'à la variable* y. *On gardera ces notations tout au long de cette partie.*

Définition 3.3 *Soient* T *et* S *deux distributions sur* $\mathbb{R}^n$. *On applle produit de convolution de* T *et* S , *noté* $T * S$, *la distribution définie sur* $\mathbb{R}^n$, *si elle existe, par :*

$$T * S : \begin{cases} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longrightarrow & \big\langle T_x, \langle S_y, \varphi(x+y)\rangle\big\rangle \end{cases}$$

Remarque 3.1

1. $T * S$ *n'existe pas toujours : il faut que* $\langle S_y, \varphi(x+y)\rangle$ *appartienne à* D *ce qui n'est pas assuré dans le cas général sauf si* $suupS$ *est compact dans* $\mathbb{R}^n$ *car l'application* $x \longrightarrow \langle S_y, \varphi(x+y)\rangle$ *et de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha(\langle S_y, \varphi(x+y)\rangle) = \langle S_y, D^\alpha \varphi(x+y)\rangle$ *et* $supp(x \longrightarrow \langle S_y, \varphi(x+y)\rangle) \subset supp\varphi + suppS$.

2. *En fait, on peut définir le produit de convolution de deux distribution quelconques* T *et* S *sur* $\mathbb{R}^n$, *si pour tout compact* K *de* $\mathbb{R}^n$ *l'esemble :*
$(suppS \times suppT) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n / x + y \in K\}$ *est compact dans* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

3. *On note* $\mathscr{D}'_+$ *(respectivement* $\mathscr{D}'_-$*) l'esemble des distributions sur* $\mathbb{R}$ *à support dans* $[0, +\infty[$ *(respectivement* $]-\infty, 0]$*). Alors le produit de convolution est bien définie dans* $\mathscr{D}'_+$ *et* $\mathscr{D}'_-$ *car par exemple si* $S, T \in \mathscr{D}'_+$ *et* K *est un compact de* $\mathbb{R}$, *donc* $\exists M > c$, $\forall z \in K$, $|z| \leq M$, *si* $x \in SuppS$, $y \in SuppT$ *et* $x + y \in K$ *on a :*

$$\begin{cases} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ 0 & \leq & x + y \leq M \end{cases}$$

alors $x \leq M$ *et* $y \leq M$
c'est à dire $(suppS \times suppT) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n / x + y \in K\} \subset [-M, M]^2$ *est compact dans* $\mathbb{R}^2$ *et donc on peut définir* $S * T$.

Proposition 3.1 *(Conditions suffisantes d'existence du produit)*
Soient T *et* $S \in \mathscr{D}'$.

1. a) *si* T *ou* S *est dans* $\mathscr{E}'$, *alors* $T * S$ *est défini.*

   b) *si* T *et* S *est dans* $\mathscr{E}'$*, alors* $T * S$ *est défini et* $T * S \in \mathscr{E}'$

2. a) *si* T *et* S *est dans* $\mathscr{D}'_+$*, alors* $T * S$ *est défini et* $T * S \in \mathscr{D}'_+$

   b) *si* T *et* S *est dans* $\mathscr{D}'_-$*, alors* $T * S$ *est défini et* $T * S \in \mathscr{D}'_-$

Proposition 3.2 *Si* $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ *et* $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$*, alors on a* $T*S = S*T$ *et* $Supp(S*T) = SuppS + SuppT$.

Preuve.

1. *Provient immédiatement de la définition de produit de convolution :*

$$\begin{aligned} \langle S * T, \varphi\rangle &= \langle S \otimes T, \psi(x)\varphi(x+y)\rangle \\ &= \langle T \otimes S, \psi(x)\varphi(x+y)\rangle \\ &= \langle T * S, \varphi\rangle. \end{aligned}$$

2. *Montrons que*

$$\mathbb{R}^n \setminus (SuppS + SuppT) \subset \mathbb{R}^n \setminus (Supp(S * T))$$

il suffit pour cela de vérifier que $\mathbb{R}^n \setminus (SuppS + SuppT)$ *est un ouvert d'annulation de la distribution* $S * T$.
Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$*, telle que* $Supp\varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus (SuppS + SuppT)$ *, alors* $Supp\varphi \cap (SuppS + SuppT) = \emptyset$ *ou oncore* $(Supp\varphi - SuppS) \cap SuppT = \emptyset$ *. En effet, si* $a \in (Supp\varphi - SuppS) \cap SuppT$*, alors* $a = t - s$ *avec* $t \in Supp\varphi$ *et* $s \in SuppS$*. Donc* $t = a + s \in Supp\varphi \cap (SuppS + SuppT)$.
Ainsi, $Supp\Psi \cap SuppT = \emptyset$*, puisque* $Supp\Psi \subset Supp\varphi - SuppS$ *où* $\langle S*T, \varphi\rangle = \langle T_y, \Psi(x)\rangle$ *et* $\Psi(x) = \langle S_x, \varphi(x+y)\rangle$*. Donc* $\langle S * T, \varphi\rangle = 0$.

Exemple 3.1 *Il est utile de remarquer que* δ_0 *et* H *sont des élements de* $\mathscr{D}'_+$.

3 propriétés

On remarque que si $T, S_1, S_2 \in D'(\mathbb{R}^n)$ *et si* $T * S_1$ *et* $T * S_2$ *existe alors :*

$$T * (S_1 + S_2) = T * S_1 + T * S_2$$

.

Proposition 3.3 *Si on considère la fonction translation définie par :*

$$\tau(a) = \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - a \end{cases}$$

Alors $\forall T \in \mathscr{D}'$*, on a :*

$$\delta_{(a)} * T = T \circ \tau(a).$$

Cas particulier : Soient a et b deux réels $\delta_{(a)} * \delta_{(b)} = \delta_{(a+b)}$.

Proposition 3.4 *1. Si* $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ *et* $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$*, alors :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ D^\alpha(S * T) = (D^\alpha S) * T = S * (D^\alpha T)$$

2. Pour toute distribution T *sur* $\mathbb{R}^n$*, on a :*

$$S * \delta_0 = \delta_0 * T = T.$$

3. Si $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *et* $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$*, alors :*

$$S * T_\rho = T_f \ \textit{ou}\ f(t) = \langle S_x, \rho(t-x)\rangle$$

Preuve.

1. *On sait que* $S * T$ *et* $D^\alpha(S * T)$ *sont des distributions sur* $\mathbb{R}^n$*, pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
   $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *:*

$$\begin{aligned}
\langle D^\alpha(S * T), \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle S * T, D^\alpha \varphi\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|}\big\langle T_y, \langle S_x, (D^\alpha\varphi)(x+y)\rangle\big\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|}\big\langle T_y, \langle S_x, D^\alpha_x(\varphi)(x+y)\rangle\big\rangle \\
&= \big\langle T_y, (-1)^{|\alpha|}\langle S_x, (D^\alpha_x\varphi)(x+y)\rangle\big\rangle \\
&= \big\langle T_y, \langle (D^\alpha S_x), \varphi(x+y)\rangle\big\rangle \\
&= \langle T * D^\alpha S, \varphi\rangle = \langle S * D^\alpha T, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

2. $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *:*

$$\begin{aligned}
\langle T * \delta, \varphi\rangle &= \big\langle T_y, \langle(\delta)_x, \varphi(x+y)\rangle\big\rangle \\
&= \langle T_y, \varphi(y)\rangle = \langle T, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

3. $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *:*

$$\begin{aligned}
\langle S * T_\rho, \varphi\rangle &= \big\langle \widetilde{S}_x, \langle (T_\rho)_y, \varphi(x+y)\rangle\big\rangle = \langle \widetilde{S}_x, \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\varphi(x+y)\,dy\rangle \\
&= \langle \widetilde{S}_x, \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho(t-x)\varphi(t)\,dt\rangle = \textstyle\int_{\mathbb{R}^n}\langle S_x, \rho(t-x)\varphi(t)\,dt\rangle \\
&= \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\varphi(t)\,dt = \langle T_f, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

   ou $f(t) = \langle \widetilde{S}_x, \rho(t-x)\rangle = \langle S_x, \rho(t-x)\rangle$.

Remarque 3.2 *1. Le produit de convolution n'est en général pas associatif :*

$$\begin{aligned}
(T_H * \delta') * 1 &= \delta * 1 = 1 \\
T_H * (\delta' * 1) &= T_H * 0 = 0
\end{aligned}$$

2. *Le produit de convolution de* $S, T, R \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *est associatif* $T * (S * R) = (T * S) * R$ *si deux au moins de ces distributions sont à support compacts.*

Chapitre 4

Application aux EDP à coefficients constants

1 Opération différentiels à coefficients constants

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ *un polynôme à n variable à coefficients complexes.* P *s'écrit*

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \mathrm{X}^\alpha, \ \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n,$$

où a_α *les sont des nombre complexes, et* $m \in \mathbb{N}$ *est le degré de* P. *on note* $\mathrm{P}(\partial)$ *l'opérateur linéaire sur* $\mathscr{D}'(\Omega)$ *défini par*

$$\mathscr{D}'(\Omega) \ni \mathrm{T} \mapsto \mathrm{P}(\partial)\mathrm{T} = \sum_{|\alpha \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$$

les opérateur de cette forme sont appelés opérateurs différentiels à coefficients constants. L'équation

$$\mathrm{P}(\partial)\mathrm{T} = \mathrm{F},$$

où $\mathrm{F} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *est donnée, et* $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *est l'inconnue, est une équation aux dérivées partielles (EDP) linéaire d'ordre m à coefficients constants, avec second membre (ou bien inhomogène, ou encore avec terme source, suivant le contexte).*

Remarque 4.1 *Pour* $n = 1$, *l'equation* $\mathrm{P}(\partial)\mathrm{T} = \mathrm{F}$ *est une équation différentiels d'ordre m à coefficients costants, que l'on sait parfaitement résoudre. Pour* $n > 1$, *on ne sait en général plus rien faire du tout, mêmê pas montrer l'existence de solutions.*

Exemple 4.1 *Voici une liste d'EDP linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, avec le polynôme corespondant. Chacune des ses équations à des propriétés différentes (autrement dit : les solution de ces équation on des propriétés différents). et toute EDP linéaire d'ordre 2 peut se ramener à l'une de ces 4 equations*

i) Equation de laplace (ou équation de poisson) :

$$\Delta \mathrm{T} = \mathrm{F} \ \ dans \ \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \ \ \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{X}_j^2$$

ii) Equation des ondes :

$$\partial^2_{tt}\mathrm{T} - \Delta\mathrm{T} = \mathrm{F} \ \ dans \ \ \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{1+n}), \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}_0^2 - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{X}_j^2$$

iii) Equation des Chaleur :

$$\partial_t\mathrm{T} - \Delta\mathrm{T} = \mathrm{F} \ \ dans \ \ \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{1+n}), \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}_0 - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{X}_j^2$$

iv) Equation des Schrodinger :

$$i\partial_t\mathrm{T} - \Delta\mathrm{T} = \mathrm{F} \ \ dans \ \ \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{1+n}), \mathrm{P}(\mathrm{X}) = i\mathrm{X}_0 - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{X}_j^2$$

2 Solution élémentaires

Définition 4.1 *[7] Soit* $\mathrm{P} = \mathrm{P}(\partial)$ *un opérateur différentiel à coefficients constants. On dit que* $\mathrm{E} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *est une solution élémentaire de* P *lorsque* $\mathrm{PE} = \delta_0$.

On parle aussi des solutions fondamentale, ou la fonction de Green.

Exemple 4.2 *Si* $\mathrm{P} = \frac{d}{dx} - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$ *alors* $\mathrm{E} = e^{\lambda x}\mathrm{H}(x)$ *ou* $\mathrm{H}(x)$ *est la distribution de Heaviside est une solution fondamentale de* P *dans* $\mathscr{D}'_+$.
En effet,

$$\begin{aligned}\mathrm{PE} = (\tfrac{d}{dx} - \lambda)e^{\lambda x}\mathrm{H}(x) &= e^{\lambda x}\tfrac{d\mathrm{H}}{dx}(x) + \lambda e^{\lambda x}\mathrm{H}(x) - \lambda e^{\lambda x}\mathrm{H}(x).\\ &= e^{\lambda x}\delta = \delta.\end{aligned}$$

On montre par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$, *que* $\mathrm{E} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda x}\mathrm{H}$ *est solution fondamentale de* $(\frac{d}{xd} - \lambda)^m$ *dans* $\mathscr{D}'_+$.

Remarque 4.2 *Si* $\mathrm{P} = \sum_{j=0}^{n} a_j \dfrac{d^j}{dx^j}$, $a_j \in \mathbb{C}$, *alors* $(\mathrm{P}\delta)^{-1} = \big(\sum_{j=0}^{n} a_j \dfrac{d^j f}{dx^j}\big)^{-1}$
est la solution fondamentale de P *dans* $\mathscr{D}'_+$. *par exemple* $(\delta - \lambda\delta)^{-m} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda x}\mathrm{H}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$
Le théoréme de B.Malgrage et L.Ehrenpreis (démontré en 1954/ 1955) dit que tout opérateur différentiel à coefficients constants (non-nul) admet une solution élémentaire.

Théorème 4.1 *(Malgrange Ehrenpreis)[7]*
Tout opérateur différentiel à coefficients constants P *sur* $\mathbb{R}^n$ *admet une solution fondamentale* E *dans* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.
La solution fondamentale est utilisée pour déterminer les solution de certaines équations aux dérivées partielles.

Proposition 4.1 *Si* P *posséde une solution fondamentale, alors pour tout* $\mathrm{F} \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, *l'équation* $\mathrm{PT} = \mathrm{F}$ *admet une solution .*

Preuve. *Puisque* F *est à support compact,* E *et* F *sont convolables, et*

$$\mathrm{P}(\mathrm{E} * f) = (\mathrm{PE}) * \mathrm{F} = \delta * \mathrm{F} = \mathrm{F},$$

donc $\mathrm{E} * \mathrm{F}$ *est une solution.*

3 Equation de la Chaleur

[3]L'équation de la chaleur est l'EDP :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

Le problème de chauchy associé consiste à trouver la solution $u(x,t)$ de cette équation qui vérifie la condition initiale.

$$u(x,0) = f(x)$$

La solution, au sens des distributions, est $u \in \mathscr{D}'_{x,t}$. Posons

$$\mathrm{D} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Vérifions que la distribution régulière associée à la fonction localement intégrable $\mathrm{E} : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ *défini par :*

$$\mathrm{E}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)$$

est une solution élémentaire. On doit alors vérifier que $\mathrm{DE} = \delta_{(0,0)}$. *En effet,*

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\mathrm{E}), \varphi \right\rangle &= -\langle \mathrm{E}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle - \langle \mathrm{E}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \rangle \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{t>\varepsilon} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt \right) dx \\
&- \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{t>\varepsilon} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dt \right) dx \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi \varepsilon}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right) \varphi(x,\varepsilon) dx \\
&= \varphi(0,0) = \langle \delta_{(0,0)}, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Dans les ces général, notons $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$ la variable temps .
l'opérateur de laplace est

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

L'opérateur différentiel :

$$\mathrm{D} = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$$

est dit opérateur de la Chaleur. La distribution

$$\mathrm{E}(x,t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^n \mathrm{H}(t) \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right)$$

est une solution fondamentale de D.

4 Equation des Ondes

[3]C'est l'équation aux dérivées partielles.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

qui satisfait les conditions initiales.

$$u(x,0) = f_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(x)$$

où $f_0 \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ et $f_1 \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$. La solution élémentaire du problème de Cauchy est la distribution régulière g_t associée à la fonction localement intégrable.

$$g_t(x) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{H}(x+t) - \mathrm{H}(x-t)\big)$$

et on a $\lim\limits_{t\to 0^+} g_t = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\partial g_t}{\partial t} = \delta$. La solution générale de l'équation des ondes s'écrit

$$u_t = f_0 * \frac{\partial g_t}{\partial t} + f_1 * g_t.$$

En fait, la solution de l'équation des ondes est de la forme

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$$

où f et g sont des fonctions continues, En effet, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi \rangle &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x+t) + g(x-t)\big)\varphi(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\varphi''(u-t)\,du + \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\varphi''(u+t)\,du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+t) + g(x-t))\varphi''(x)\,dx \\
&= \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

5 Equation de Laplace

Théorème 4.2 *[3] La fonction définié sur $\mathbb{R}^n$ par :*

$$\mathrm{E}_n = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-2)\mathrm{S}_n ||x||^{n-2}} & pour \quad n \geq 3 \\[2ex] \frac{1}{2\pi} \log ||x|| & pour \quad n = 2 \end{cases}$$

est la solution fondamentale du Laplacien Δ_n sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve.
$E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *puisqu'elle est localement intégrable. En fait les fonctions* $\log||x||$ *si* $n = 2$ *et* $\frac{1}{||x||^{n-2}}$ *si* $n \geq 3$ *sont harmonique respectivement sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *et* $\mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ *pour* $n \geq 3$

1. *Si* $n = 2$, *soit* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ *, il existe alors* $a > 0$ *tel que* $Supp\varphi \subset B(0, \frac{a}{2}) = \{x \in \mathbb{R}^2 / ||x|| \leq \frac{a}{2}\}$

$$\begin{aligned} \langle \Delta_2 E_2, \varphi \rangle &= \langle (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) E_2, \varphi \rangle = \langle E_2, \Delta_2 \varphi \rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon \leq ||x|| \leq a} (\Delta_2 \varphi)(x) \log||x|| dx \end{aligned}$$

on utilise la formule de Green :
on note $\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n / ||x|| > \varepsilon\}$ *et* $\partial\Omega_\varepsilon = S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n / ||x|| = \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.
Alors, $\forall f \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *et* $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, *on a :*
$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left[\Delta f(x)\varphi(x) - f(x)\Delta\varphi(x)\right] dx = \int_{S_\varepsilon} \left[\varphi(x)\frac{\partial f}{\partial r} - f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial r}(x)\right] d\sigma_\varepsilon$$
où $\Delta = \Delta_n$, $\frac{\partial}{\partial r}$ *désigne la dérivée radiale et* $d\sigma_\varepsilon$ *la mesure sur la surface de la sphère* S_ε.

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon \leq ||x|| \leq a} \log(||x||) \Delta_2 \varphi(x) dx &= \int_{\varepsilon \leq ||x|| \leq a} \varphi(x) \Delta_2 (\log||x||) dx \\ &+ \int_{S_\varepsilon \cup S_a} \left(\log||x|| \frac{\partial \varphi}{\partial r}(x) - \varphi(x) \frac{\partial}{\partial r} \log(||x||)\right) dl \\ &= \int_{S_a} (\log||x|| \frac{\partial \varphi}{\partial r}(x)) - \varphi(x) \frac{\partial}{\partial r}(\log||x||) dl \\ &- \int_{S_\varepsilon} [\log||x|| \frac{\partial \varphi}{\partial r}(x) - \varphi(x) \frac{\partial}{\partial r}(\log||x||)] dl \\ &= -\int_{||x||=\varepsilon} \left[\log||x|| \frac{\partial \varphi}{\partial r}(x) - \varphi(x) \frac{\partial}{\partial r}(\log||x||)\right] dl. \end{aligned}$$

puisque $\varphi = 0$ *sur* S_a.
$$\Big|\int_{||x||=\varepsilon} \log||x|| \frac{\partial \varphi}{\partial r}(x) dl\Big| \leq |\log\varepsilon| \int_{||x||=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(x) dl \leq \sup_{||x|| \leq \varepsilon} \Big|\frac{\partial \varphi}{\partial r}(x)\Big| 2\pi\varepsilon |\log\varepsilon| \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$
Ainssi, $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{||x||=\varepsilon} \log||x|| \frac{\partial \varphi}{\partial r} dl = 0$, *et*
$$\begin{aligned} \langle \Delta_2 E_2, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{||x||=\varepsilon} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial r}(\log||x||) dl = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{||x||=\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{||x||} dl. \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{||x||=\varepsilon} \varphi(x) dl = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \Big[\int_{||x||=\varepsilon} [\varphi(x) - \varphi(0)] + \varphi(0)\Big] dl \\ &= 2\pi\varphi(0), car\ \frac{1}{\varepsilon}\Big|\int_{||x||=\varepsilon} [\varphi(x) - \varphi(0)]\Big| dl \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{||x|| \leq \varepsilon} \big|\varphi(x) - \varphi(0)\big| 2\pi\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

D'où, $\Delta_2 E_2 = 2\pi\delta_0$, $\frac{1}{2\pi} E_2$ *est solution fondamentale de* Δ_2 *sur* $\mathbb{R}^2$.

2. *Si* $n \geq 3$, *si* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, *on a :*

$$\begin{aligned}
\langle \Delta_n E_n, \varphi\rangle = \langle E_n, \Delta_n \varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\|x\|\geq\varepsilon} E_n(x)\Delta_n\varphi(x)\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\|x\|\geq\varepsilon} \Delta_n E_n(x)\varphi(x)\,dx + \int_{S_\varepsilon}\Big(E_n(x)\frac{\partial\varphi}{\partial r}(x) - \varphi(x)\frac{\partial E_n}{\partial r}(x)\Big)d\sigma_\varepsilon \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{S_\varepsilon}\Big(E_n(x)\frac{\partial\varphi}{\partial r}(x) - \varphi(x)\frac{\partial E_n}{\partial r}(x)\Big)d\sigma_\varepsilon
\end{aligned}$$

pour calculer cette limite, on peut passer en coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x_i = r f_i(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}),\ i=1,\ldots,n \\ r = \|x\| \end{cases}$$

On a alors :

$$dx = F(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})r^{n-1}d\theta_1,\ldots,d\theta_{n-1}$$

donc la mesure superficielle portée par la sphére de rayon ε *est égale à*
$d\sigma_\varepsilon = \varepsilon^{n-1}F(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})d\theta_1,\ldots,d\theta_{n-1} = \varepsilon^{n-1}dF$ *ou* $dF_1 = F(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})d\theta_1,\ldots,d\theta_{n-1}$,
est la mesure sur la sphère unité
D'autre part puisque $\frac{\partial x_i}{\partial r} = f_i(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) = \frac{x_i}{r}$, *On a*
$\frac{\partial}{\partial r} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial r} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial x_i}$

$$\begin{aligned}
\langle \Delta_n E_n, \varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\int_{S_\varepsilon}\frac{-1}{(n-2)\varepsilon^{n-2}S_n}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\varepsilon^{n-1}d\sigma_1 + \int_{S_\varepsilon}\frac{\widetilde{\varphi}(\varepsilon,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})}{(n-2)S_n}(2-n)\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\varepsilon^{n-1}d\sigma_1\Big) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(-\int_{S_\varepsilon}\frac{1}{(n-2)S_n}\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial r}d\sigma_1 - \int_{S_\varepsilon}\frac{\widetilde{\varphi}(\varepsilon,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})}{S_n}d\sigma_1
\end{aligned}$$

La première intégrale tend vers 0 car $|\frac{\partial\varphi}{\partial r}| \leq \sum \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\Big| \leq C_n$
quant au $2^{éme}$ *terme, il tend vers :*

$$\frac{\varphi(0)}{S_n}\int_{S_\varepsilon} d\sigma_1 = \varphi(0)$$

d'aprés le théorème de Lebesgue.
D'où,

$$\langle \Delta_n E_n, \varphi\rangle = \langle \delta_0, \varphi\rangle \ et\ \Delta_n E_n = \delta_0.$$

Bibliographie

[1] ***François Bayen, Christian Margaria.*** *(1988), Distributions analyse de fourier et transformation de laplace, Tome 3, Paris.*

[2] ***Jean-Michel Bony.*** *(2001), Cours d'analyse :Théorie des distributions et analyse de Fourier., ed. Polytechnique, Paris. 3, 6, 7, 8*

[3] ***Gilbert Demengel.*** *(1996), Distributions et Applications, Paris. 31*

[4] ***Amara Hitta.*** *(2008-2009), Espace vectoriels topologiques, distributions et EDP , cours de master, Université Guelma. 38, 39*

[5] ***François Roddier.*** *(1978), Distributions et transformations de Fourier. Ed. McGraw-Hill. 31*

[6] ***Laurant Schwartz.*** *(1996), Théorie des distributions., Hermann, Paris. 3, 12, 14 22*

[7] ***Claud Zuily.*** *(2002), Element de distributions et d'équations aux dérivées partielle, Dunod 37*