Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Hanane BENKRADDA

Atteingnabilité et contrôlabilité des systèmes avec Feedback d'état

soutenu publiquement le 30 Avril 2019 devant le jury composé de :

Président :	Mohammed Amine GHEZZAR	MCB	Université de Mostaganem
Examinateur :	Djilali LAID	MCB	Université de Mostaganem
Encadreur :	Djillali BOUAGADA	Prof	Université de Mostaganem

Année Universitaire : 2018 / 2019

MASTER

Dédicaces

Je dédie ce travail à mes parents

Á mes sœurs, mes frères et toute ma famille

Á mon époux et ma belle famille

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Dieu de nous avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terminer notre formation de master et pouvoir réalisé ce travail de recherche.

Je présente mes premiers remerciements à mon encadreur Monsieur **BOUAGADA Djillali** pour m'avoir permis de réaliser ce travail, pour tout le temps passé à la direction et le suivi de ce travail.

Je tiens aussi à remercier Monsieur **GHEZZAR Mohammed Amine** pour l'honneur qu'il ma fait en présidant le jury de ce mémoire.

J'exprime mes vifs remerciements à Monsieur **LAID Djillali** d'avoir accepté d'être membre du jury de ce mémoire.

Je n'oublierai pas de remercier mes parents, mes frères, mes sœurs, mon époux et ma belle famille.

Je remercie également mes copines Mlle BAHOUS Yasmine et Mlle BERILHA Amel qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

Enfin j'adresse mes sincères sentiments de gratitudes et des reconnaissances à toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Index des notations

$\mathbb{Z}$	:	Corps des nombres relatifs
$\mathbb{Z}_+$	:	Corps des nombres relatifs non négatifs
$\mathbb{R}$	:	Corps des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	:	Corps des nombres réels non négatifs.
$\mathbb{R}^n$	:	Espaces des vecteurs à n entrées réelles.
$\mathbb{R}^{n\times m}$	:	Espaces des matrices réelles de dimensions $n \times m$.
$\mathbb{C}$	:	Corps des nombres complexes.
$\mathbb{R}_+^{n\times 1}$	:	Espace des vecteurs à n entiers réelles non négatives .
$\mathbb{R}_+^{n\times m}$	:	Espace des matrices à entrées réelles non négatives.
$\mathbf{M}_n$	:	Ensemble des matrices de Metzler de dimension $n \times n$.
I_n	:	Matrice identité de dimension n.

Introduction

La théorie des systèmes dynamiques est une branche des mathématiques qui étudie les caractéristiques d'un système dynamique. Cette recherche active se développe à frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie et de la théorie de la mesure.

Un système dynamique est un ensemble d'objets ou de phénomènes liés entre eux et isolés artificiellement du monde extérieure. Sa modélisation vise à établir les relations qui lient les variables caractéristiques de ce processus entre elles et à représenter rigoureusement son comportement dans un domaine de fonctionnement donné. Elle nécessite, dans cet objectif, un ensemble de techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système étudie. Dans le même sens, on peut dire que la modélisation théorique exige une connaissance précise des phénomènes intervenant dans le système et une aptitude à les représenter par des équations mathématiques .

On s'intéresse dans ce mémoire à l'étude d'**Atteingnabilité et contrôlabilité des systèmes avec Feedback d'état**.

En mathématiques, le contrôle désigne la théorie qui vise à comprendre la façon dont une commande permet aux humains d'agir sur un système qu'ils souhaitent maitriser. Cette définition recouvre naturellement de très nombreux champs d'applications, par exemple : un ingénieur qui désire contrôler un systèmes mécanique en lui appliquant des forces, un économiste qui veut agir sur un équilibre financier en modélisant un taux, un chimiste qui cherche à améliorer son procéder en régulant la température, et ainsi d'autres applications dans le domaines : électricité, électronique, biologie, etc.

La contrôlabilité fait partie des propriétés dites structurelles qui caractérisent les systèmes, et éventuellement permettent de les classifier, par leurs propriétés algébriques et géométriques. Elle est indispensable dans les applications pour qu'un système puisse être convenablement commandé et permet de construire des lois de commande de façon effective. Cependant, elle sert d'introduction à de nombreuses questions d'une grande importance pratique, comme la planification de trajectoires.

Dans **le premier chapitre** nous présentons : Les notions mathématiques de base (Transformée de Laplace, transformée en Z, matrices particulières , polynôme caractéristique). Ainsi nous étudierons la classe des systèmes linéaires à temps invariants dans les deux cas : continu et discret, et nous introduisons un bref rappel sur la contrôlabilité et l'atteingnabilité .

Dans **le deuxième chapitre**, nous étudierons : La positivité des systèmes linéaires singuliers. La principale propriétés de ces systèmes est que si l'état initial est positif (ou au moins non-négatif), alors la trajectoire se situe entièrement dans l'orthant non-négatif .

Dans **le dernier chapitre** qui consiste à étudier : Atteignabilité des systèmes linéaires positifs en temps discret avec retour d'état (state-feedback).

On termine ce manuscrit par une conclusion générale et des perspectives.

Chapitre 1

Notions de base

1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de donner les outils de bases nécessaires pour appréhender les notions qu'on manipulera tout au long de ce manuscrit. On en présentera les définitions, ainsi que les propriétés directement utiles par la suite. Nous nous basons pour ce faire sur les références suivantes [2],[3],[5],[6],[13],[14].

2 La transformée de Laplace

Définition 1.1 *Une fonction de la variable t est dite* ***causale*** *si elle est nulle pour $t < 0$.*

Le vecteur d'état, le vecteur de sortie et le vecteur de contrôle sont des fonctions causale. Nous définissons donc la transformée de Laplace que pour des fonctions causales.

Définition 1.2 *Soit f une fonction du temps t et causale, sa transformée de Laplace notée* $\mathrm{F}(s)$ *est donnée par :*

$$\mathbf{L}[f(t)] = \mathrm{F}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \tag{1.1}$$

où s est à priori un nombre complexe .

La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ n'existe pas dans tout les cas : il est nécessaire que l'intégrale ci-dessus converge. La fonction $f(t)$ s'appelle l'origine de $\mathrm{F}(s)$.

2.1 Propriétés de la transformée de Laplace

Pour tout α, β dans $\mathbb{R}$ et pour f et g deux fonctions causales, nous décrivons les propriétés importantes et utiles de la transformée de Laplace pour répondre à certains problèmes de résolutions.

- **Linéairité** : Soient α,β des constantes quelconques et soient f et g des fonctions dont les transformées de Laplace sont respectivement $\mathrm{F}(s)$ et $\mathrm{G}(s)$. Alors

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[\alpha f + \beta g](s) &= \alpha\mathfrak{L}[f](s) + \beta\mathfrak{L}[g](s) \\ &= \alpha\mathrm{F}(s) + \beta\mathrm{G}(s). \end{aligned} \tag{1.2}$$

- **Dérivation** : Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable et admettant une transformée de Laplace $\mathfrak{L}[f](s)$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[f'](s) &= s\mathfrak{L}[f](s) - f(0) \\ &= s\mathrm{F}(s) - f(0) \end{aligned} \tag{1.3}$$

- **Intégration** : Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$, alors :

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathfrak{L}(f). \tag{1.4}$$

- **Convolution** :

$$\mathfrak{L}[(f\star g)](s) = \mathfrak{L}[f](s)\mathfrak{L}[g](s) = \mathrm{F}(s)\mathrm{G}(s), \tag{1.5}$$

avec

$$(f\star g)(t) = \int_0^t f(y)g(t-y)dy.$$

2.2 Transformée de Laplace inverse

La transformée inverse de Laplace notée $f(t)$ dite aussi originale d'une fonction $\mathrm{F}(p)$ est définie par :

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\Big[\mathrm{F}\Big](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} \mathrm{F}(s)e^{st}ds. \tag{1.6}$$

3 Transformée en Z

La transformée en Z est un outil mathématique de l'automatique et de traitement du signal, qui est l'équivalent discret de la transformée de Laplace.

Définition 1.3 *La transformée en Z est une application qui transforme une suite x (définie sur les entiers) en une fonction* $\mathbf{X}$ *d'une variable complexe nommée z, telle que :*

$$\mathbf{X}(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}, \quad z \in \mathbb{Z}. \tag{1.7}$$

où, z est une variable complexe. On appelle encore l'équation (1.7) la transformée directe, car c'est la relation qui permet d'obtenir $\mathbf{X}(z)$ *à partir de* $x(n)$.
Cette transformation est qualifiée de bilatérale par opposition à unilatérale.
La transformée en Z unilatérale est définie par $\mathbf{X}_u(z)$, *calculée comme suit*

$$\mathbf{X}_u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}.$$

Remarque 1.1

- *Dans le cas séquences causales, ces deux transformations sont mes mêmes.*
- *Toute transformée en Z doit être accompagnée de la région pour laquelle elle converge.*

Pour déterminer la région de convergence, on utilise le critère de Cauchy sur la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{1.8}$$

qui converge si

$$\lim_{n\to\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \tag{1.9}$$

Quelques propriétés importantes seront cependant données.

3.1 Propriétés de la transformée en Z

- **Linéarité** : La linéarité de la transformée en z signifie que la transformée d'une séquence obtenue par combinaison linéaire d'autres séquences n'est rien d'autres que la combinaison linéaire de la transformée correspondantes .Donc soient deux suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettant des transformée en z , $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ donc :

$$\mathcal{Z}[\alpha U_n + \beta W_n](z) = \alpha\mathcal{Z}[U_n](z) + \beta\mathcal{Z}[W_n](z). \tag{1.10}$$

- **Dérivation** :
  Comme

$$\mathbf{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n},$$

  on a aussi

$$\frac{d\mathbf{X}(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-n) x(n) z^{-n-1},$$

  et donc

$$-z\frac{d\mathbf{X}(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n x(n) z^{-n}.$$

- **Convolution** :
  Cette propriété est une des plus importantes et justifie à elle seule l'usage qui fait de la transformée en Z pour étudier les systèmes linéaires permanents en temps discret.
  Si $y(n)$ est obtenue par convolution de $x(n)$ et $g(n)$, on a que :

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) g(n-m), \tag{1.11}$$

  donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) g(n-m) z^{-n}, \\
&= \Big[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) z^{-m}\Big]\Big[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n-m) z^{-(n-m)}\Big], \\
&= \mathbf{X}(z)\mathbf{G}(z).
\end{aligned}$$

3.2 Z-Transformée inverse

En prenant la définition de la transformée en $\mathcal{Z}$ donnée par (1.7), en multipliant les deux membres par z^{k-1} et on intègre le long d'un contour entourant l'origine et appartenant au domaine de convergence, on trouve :

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma}\mathbf{X}(z)z^{k-1}dz &= \oint_{\Gamma}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n+k-1}dz,\\ &= x(n)\oint_{\Gamma}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}z^{-n+k-1}dz.\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Cauchy , on a finalement :

$$x(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}z^{-n+k-1}dz.$$

4 Polynôme caractéristique

Définition 1.4 *Soit* $\mathrm{A}=(a_{ij})$ *et* E *sont des matrices de taille* $n\times m$*, le polynôme caractéristique est*

$$det(\mathrm{E}\lambda-\mathrm{A})=z^{r}+a_{r-1}z^{r-1}+\ldots+a_{1}z-a_{0} \tag{1.12}$$

5 Matrices particulières :

5.1 Matrice non- négative, Positive, Permutation, Metzler :

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et caractérisations des matrices non-négative, positive, monomiale, Metzler et matrice de permutation.

Soient $\mathrm{A}=(a_{ij})_{i,j}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ et $\mathrm{B}=(b_{ij})_{i,j}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ des matrices à coefficients réels, par suite nous notons I_n la matrice identité d'ordre n où bien I, A^{T} la transposée d'une matrice A , $\bar{n}$ l'ensemble des n premiers entiers naturels $1,\cdots,n$.

Définition 1.5 *soit la matrice* $\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ *une matrice* ***non-négative*** *si* $\forall i\in n,\forall j\in m: a_{ij}\geq 0$ *autrement dit si tout ces coefficients sont non-négatifs, nous notons une telle matrice par* $\mathrm{A}\geq 0$*, où encore* $\mathrm{A}\in\mathbb{R}_{+}^{n\times m}$.

Exemple 1.1

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&7&2\\5&4&1\\3&3&9\end{pmatrix} \tag{1.13}$$

A est une matrice non-négative

Définition 1.6 A *est une matrice* ***positive*** *si* A *est non-négative et* $\exists k\in\bar{n}$, $\exists l\in\bar{m}: a_{kl}>0$ *(i.e) : tout ces coefficients non-négatifs avec au moins un coefficient strictement positif, nous noterons une telle matrice* $\mathrm{A}>0$.

Exemple 1.2

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

A est une matrice positive.

Définition 1.7 A *est une matrice **strictement positive** si* $\forall i \in n \forall j \in m$ *avec :* $a_{ij} > 0$ *(i.e) : tout ces coefficients sont strictement positifs, nous noterons une telle matrice par* $\mathrm{A} \gg 0$.

Définition 1.8 A *est une matrice de **Metzler** si* $\forall i \in n, j \in m$ *avec* $i \neq j$ *:* $a_{ij} \geq 0$ *(i.e) : tout ces coefficients hors diagonale sont non-négatifs .*

Exemple 1.3

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

A est une matrice de Metzler.

Proposition 1.1 A *est une matrice de **Metzler** si et seulement si*

$$\forall t \geq 0, e^{\mathrm{A}t} \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$$

où de manière équivalente, $\forall t \geq 0$ *l'orthant positif* $\mathbb{R}_+^n$ *est* $e^{\mathrm{A}t}$ *invariant (i.e) :*

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^n : e^{\mathrm{A}t} x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Preuve.
<u>Nécessité</u> :
supposons que A est une matrice de Metzler, on peut trouver un réel $\lambda > 0$ telle que : $(\mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}_n) > 0$ sachant que :

$$\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n + \lambda \mathrm{I}_n = (\mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}_n) - \lambda \mathrm{I}_n$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{A}t} &= e^{(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)t + (-\lambda \mathrm{I}_n)t} \\ &= e^{(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)t} e^{(-\lambda \mathrm{I}_n)t} \end{aligned}$$

du fait que $e^{(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ et $e^{(-\lambda \mathrm{I}_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.

<u>Suffisance</u> :

Supposons que $\forall t \geq 0, e^{\mathrm{A}t} \geq 0$.

Ainsi,

$$\mathrm{A} = \frac{d}{dt}\left(e^{\mathrm{A}t}\right)_{t=0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{\mathrm{A}t} - \mathrm{I}}{t}$$

prenons comme e_j le $j^{ième}$ vecteur de la base canonique, nous obtenons pour $i \neq j$:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\langle e^{\mathrm{A}t} e_j - e_j, e_i\rangle}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \left\{ \frac{\langle e^{\mathrm{A}t} e_j - e_j, e_i\rangle}{t} - \frac{\langle e^j, e^i\rangle}{t} \right\} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\langle e^{\mathrm{A}t} e_j - e_j, e_i\rangle}{t} \geq 0, \end{aligned}$$

puisque $\langle e_j, e_i\rangle = 0$, Dés lors $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ et la matrice A est donc de Metzler. ■

Définition 1.9 *(**Matrice de permutation**)*
*Une matrice de **permutation** est une matrice carrée qui vérifie les propriétés suivantes :*
- *Les coefficients sont 0 et 1.*
- *Il n'y a qu'un seul 1 par ligne.*
- *Il n'y a qu'un seul 1 par colonne.*

5.2 Matrice monomiale

Dans cette section, nous présentons une autre classe des matrices : les matrice monomiales et matrice de permutation. L'utilité d'une telle matrice sera mis en évidence lors de l'étude de l'atteignabilité des modèles linéaires positifs.

Définition 1.10 *Soit* A *une matrice carrée à valeurs réelles d'ordre n* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

- *A est une matrice **monomiale** (où matrice de **permutation généralisée**) si les entrées de* A *sont toutes nulles sauf une dans chaque ligne et chaque colonne, qui strictement positive .*

Exemple 1.4

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*A est une matrice de **permutation généralisée**.*

En particulier, une matrice de permutation est une matrice monomiale dans laquelle chaque entrée non nulle est égale à 1.

- *l'inverse d'une matrice **monomiale** est également matrice **monomiale**.*
- *l'inverse d'une matrice de **permutation*** A *est égale à **sa transposée**, (i.e)* $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.

telle que chaque entrée non nulle est remplacée par son inverse.

Proposition 1.2 *Une matrice* A ***non singulière** telle que* $\mathrm{A}^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *si et seulement si* A *est une matrice **monomiale**.*

Exemple 1.5 *Soit la matrice monomiale* A *définie par :*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

l'inverse de cette matrice est :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Théorème 1.1 *L'inverse d'une matrice positive* A *est une matrice positive si et seulement si* A *est une matrice monomiale.*

Théorème 1.2 *Soit* $P = (P_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *une matrice monomiale, on a :*

- *La matrice* $B = P^{-1}AP$ *est une matrice positive* $B > 0$ *pour toute matrice* $A > 0$.
- *Les matrices* A *et* B *ont le même spectre* $\sigma(A) = \sigma(B)$.
- *La trace de la matrice* A *(la somme des éléments de la diagonale) est égale à la trace de* B*, (i.e) trace(A)=trace (B).*

6 Système Linéaire à Temps Invariant

Dans ce section nous présentons quelques rappels et définitions sur système linéaire à temps invariant . Dans un premier temps nous introduisons dans ce qui suit, quelques notions sur l'ateingnabilité et contrôlabilité.

Définition 1.11 *Un système est dit* ***linéaire*** *s'il satisfait au théorème de superposition, c'est à dire si l'effet de la somme des grandeurs d'entrée est égale à la somme de leur effets .*

Définition 1.12 *Un système linéaire est dit à temps* ***invariant*** *si tous les matrices d'évolution, de contrôle, d'observabilité et de transmission sont à coefficients constants. La représentation d'état d'un système* **L.T.I** *en temps continu est donnée par*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \tag{1.16}$$

où
$x \in \mathbb{R}^n$ *: l'état du système.*
$y \in \mathbb{R}^P$ *: vecteur de sortie.*
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *: matrice dynamique (d'évolution).*
$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *: matrice de contrôle.*
$C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ *: matrice de sortie.*
$D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ *: matrice de transmission.*

- On applique la transformée de Laplace inverse pour trouver la trajectoire du système (1.16) :

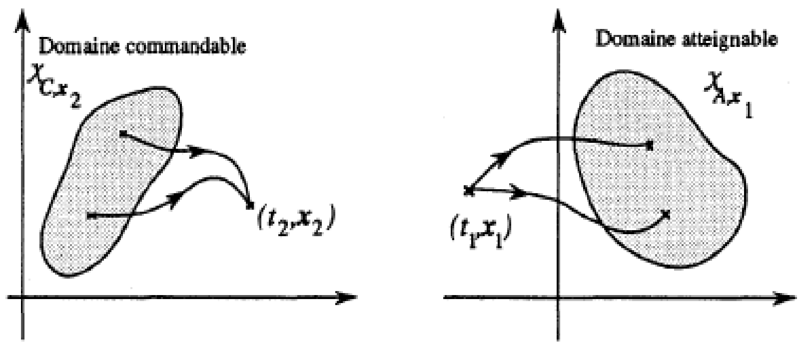
$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [0, t_f].$$

- Réponse du système est donnée par :

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(\tau).$$

7 La notion d'atteignabilité et contrôlabilité

L'étude des systèmes consiste à vérifier l'existence d'une loi de commande admissible $u(t)$ qui permet de transférer un état initial $x_1 = x(t_1)$ du système vers un état d'arrivé $x_2 = x(t_1)$. On introduit pour cela deux notions : la commandabilité de l'état initial vers x_2, et l'atteingnabilité de l'état final à partir de x_1. En général, ces deux notions ne coïncident pas et ont amené à la définition du domaine commandable $\mathrm{X}_{\mathrm{C},x2}$ vers l'état x_2 et du domaine atteignable $\mathrm{X}_{\mathrm{A},x1}$ à partir de l'état x_1 par rapport à l'instant initiale t_1 et l'instant t_2.



Donc, dans cette section on va définir quelque concepts d'atteignabilité et contrôlabilité du système (1.16). Donc on regarde deux types de contrôlabilité :

- La contrôlabilité à partir de zéro.
- La contrôlabilité vers zéro.

Définition 1.13 (atteignabilité) *Un état x est dit* ***atteignable*** *s'il existe un moyen u transférant l'état du système à partir de zéro vers un état final* $x_1 = x_f$ *en un temps fini T.*

Définition 1.14 (contrôlabilité) *Un état x est dit* ***contrôlable*** *s'il existe un moyen u transférant l'état du système de* x_0 *vers zéro en un temps fini T.*

Définition 1.15 *Un système est dit atteignable si tous ces états sont atteignables.*

Définition 1.16 *On dit qu'un système L.T.I à temps continu est atteignable si et seulement si : pour tout* x_0*, pour tout* x_f *il existe u telle que :* $x(\mathrm{T}, x_0, u) = x_f$

Théorème 1.3 (Kalman) *Le système d'ordre n représenté par les équations d'états continu est atteignable (respectivement contrôlable) si et seulement si le rang de la matrice d'atteignabilité est égale à n.*

$$\mathrm{C} = [\mathrm{B}, \mathrm{AB}, \mathrm{A}^2\mathrm{B}, \ldots\ldots, \mathrm{A}^{n+1}\mathrm{B}]$$

Ceci est donc équivalent à $\mathbf{ImC} = \mathbb{R}^n$.

Remarque 1.2 *Dans le cas des systèmes linéaires continus la notion d'atteignabilité est équivalente avec la notion de contrôlabilité. C'est la raison pour laquelle pour ce type de système on parle de matrice de commandabilité.*

Définition 1.17 *le système* $\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t)$ *est* ***complètement atteignable*** *(respectivement* ***complètement contrôlable*** *) si et seulement tout les états sont atteignable (respectivement contrôlable).*

Définition 1.18 *On vérifie facilement que les états commandables (respectivement, non commandables) du système linéaire (1.1) forment un sous-espace commandable (respectivement, non commandable) dans* $\mathbb{R}^n$*. En effet, on définit d'abord le grammien de commandabilité : Le sous-espace d'atteignabilité* $\mathrm{L_T}$ *est défini par :*

$$\mathrm{L_T} = \left\{ x/\, x = \int_0^{t_f} e^{\mathrm{A}(t_f-\tau)} \mathrm{B}u(\tau)\, d\tau \right\},$$

telle que :

- $\mathrm{L_T}$ *est sous-espace vectoriel.*
- $\mathrm{L_T}$ *est sous-espace A-invariant.*

Théorème 1.4 *le système* $\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t)$ *est complètement contrôlable si et seulement si* $\mathrm{L_T} = \mathbb{R}^n$

Chapitre 2

Systèmes Linéaires Singuliers Positifs

1 Introduction

Les systèmes linéaires sont sans doute ceux qui ont le plus suscité d'intérêt dans la théorie des systèmes. A cause de la simplicité des équations, on essaie le plus souvent de se ramener à cette forme d'équations d'état pendant la phase de modélisation : on peut, dans de nombreux cas, obtenir une linéarisation approchée en restreignant les domaines de fonctionnement du processus. Par définition, un modèle linéaire permettra l'application du principe de superposition.

Nous nous basons pour ce faire sur les références suivantes [1],[2],[9],[10],[11],[12],[13].

Système : ensemble d'élément ("objets" ou concepts), en inter-relation.

Processus : système physique agissant et évaluant au cours du temps, soumis à l'effet de diverses influences externes (environnement, perturbation) et internes (lois de commandes, rétroactions). On distingue en général trois sous-ensembles de variables : le vecteur des commandes **u** du système (ou du processus), le vecteur des sorties **y** et celui des variables internes **x** est dit vecteur état .

2 Systèmes positifs :

Un système positif est un système qui à une entrée (contrôle) positive associe à une sortie positive. En gros, une représentation d'état avec les mêmes conditions que pour les systèmes standards entraîne un état positif si l'état initial est positif.

Dans ce qui suit nous allons s'intéresser à la notion de positivité concernant un système **L.T.I** à temps continu définit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

Définition 2.1 *Un système est dit positif si à toute entrée positive et la condition initiale positive, correspond un état positif et une sortie positive.*
Alors,le système(2.1) est positif si et seulement si,

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+ \forall u \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow x(t) \in \mathbb{R}_+ \; et \; y(t) \in \mathbb{R}_+$$

2.1 Condition de positivité :

Cas continu : On appelle système continu un système en temps continu et à état continu. Nous nous plaçons dans la classe des systèmes à temps continu, pour caractériser la positivité. Des conditions nécessaires et suffisantes serait cependant établies. Soit le système continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

On note le systéme (2.2) par (A.B.C) alors :

Théorème 2.1 *Un système linéaire à temps continu* (A, B, C) *est positif si et seulement si la matrice* A *est une matrice de Metzler et* $B \geq 0, C \geq 0$.

Preuve. Supposons que A de Metzler, B et C positifs, on montre facilement que le systèmes est positif en utilisant la proposition (1.1).

Pour la réciproque on se réfère à [7] .

■

Exemple 2.1 *Considérons le circuit électrique représenté par la figure (2.1) avec les paramètres donnés* R_1, R_2, R_3, C_1, C_2 *et une source de tension* $e = e(t)$.

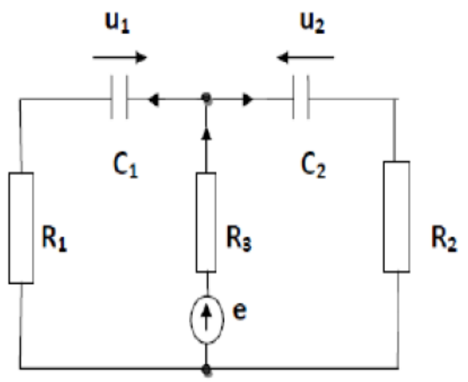


FIGURE 2.1

Choisir les tensions $u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t)$ *comme variables d'état et la sortie* $y = y(t)$, *on peut écrire les équations suivantes*

$$\begin{aligned} R_1C_1\dot{u}_1 + u_1 + R_3(C_1\dot{u}_1 + C_2\dot{u}_2) &= e \\ R_3(C_1\dot{u}_1 + C_2\dot{u}_2) + u_2 + R_2C_2\dot{u}_2 &= e \end{aligned} \tag{2.3}$$

et

$$y = u_1 + u_2. \tag{2.4}$$

A partir de ces équations (2.3) et (2.4) que nous avons

$$\begin{bmatrix} (R_1+R_3)C_1 & R_3C_2 \\ R_3C_1 & (R_2+R_3)C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e$$

et

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + Be \tag{2.5}$$

$$y = C \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_2+R_3}{C_1\left[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3\right]} & \dfrac{R_3}{C_1\left[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3\right]} \\ \dfrac{R_3}{C_2\left[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3\right]} & -\dfrac{R_1+R_3}{C_2\left[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3\right]} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{R_2}{C_1\left[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3\right]} \\ \dfrac{R_1}{C_2\left[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3\right]} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Donc de (2.7) nous déduisons que A *est une matrice de* ***Matzler***, $B \in \mathbb{R}_+^{2\times 1}$ *et* $C \in \mathbb{R}_+^{1\times 2}$. *Par conséquent, le circuit RCL est un bon exemple de système positif en temps continu et pour tous les* $u_1(0) \geq 0$, $u_2(0) \geq 0$ *et* $e(t) \geq 0$, *pour* $t > 0$ *nous avons* $u_1(t) \geq 0$, $u_2(t) \geq 0$ *et* $y(t) \geq 0$.

Cas discret : Un système est discret s'il est en temps discret et à état continu, c'est-à-dire si les variables qui le caractérisent ne peuvent évoluer ou être observées que sur une suite $\{x_k,\, k \in \mathbb{Z}_+\}$ d'instants particuliers du temps. Alors, un système linéaire discret peut alors être décrit par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & Ax_k + Bu_k \\ y_k & = & Cx_k \\ x(0) & = & x_0 \end{array} \right. \tag{2.9}$$

Positivité du système (2.9)$\Leftrightarrow \forall x_0 \geq 0, \forall u_i \geq 0$, alors, $\forall i \geq 0, x_i \geq 0\, et\, y_i \geq 0$

Théorème 2.2 *Un système linéaire à temps discret* (A, B, C) *est positif si et seulement si* $A \geq 0, B \geq 0, et C \geq 0$

3 Positivité des systèmes linéaires :

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la notion de positivité concernant le système (2.1), ainsi que des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ce dernier modèle soit positif. Nous nous basons sur [2], [7].

3.1 Positivité externe :

Tout d'abord, donnons la première définition de positivité des système linéaire, **la positivité externe**.

Définition 2.2 *: Un système linéaire* (A, B, C) *est dit externement positif si la sortie correspondante à l'état initial nul est non-négative pour chaque entrée non-négative i.e. pour* $x_0 = 0$ *et pour tout* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m, t \geq 0$, *on a :* $y(t) \in \mathbb{R}_+^p\, pour\, t \geq 0$

3.2 Positivité interne :

Nous citons la seconde définition de positivité, qui est appelée **positivité interne**.

Définition 2.3 *Un système linéaire* (A, B, C) *est dit internement positif si pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ *et tout contrôle* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$, $t \geq 0$, *on a :*

$$x(t) \in \mathbb{R}_+^n \; et \; y(t) \in \mathbb{R}_+^p$$

Cette définition indique que toutes les trajectoires émanent de n'importe quel point dans l'orthant non-négatif $\mathbb{R}_+^n$ *(frontière incluse) de l'espace d'état* $\mathbb{R}$*, obtenues en appliquant une entrée non-négative au système, demeurent dans l'orthant non-négatif et mènent à une sortie non-négative.*

Remarque 2.1 *La positivité interne implique la positivité externe, mais l'inverse n'est pas vrai.*

Théorème 2.3 *Un système linéaire* (A, B, C) *est dit internement positif si et seulement si la matrice* A *est de Metzler,* $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$ *et* $D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$.

Preuve.

<u>**Nécessité**</u> :

Si le système est internement positif, alors,

$$x(t) \in \mathbb{R}_+^n et, y(t) \in \mathbb{R}_+^p pour \, x_0 \in \mathbb{R}_+^n et, u(t) \in \mathbb{R}_+^m$$

tel que

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

et

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(\tau).$$

L'idée est de considérer la i^{eme} composante de la matrice A, B et C respectivement et faire étendre pour toutes les composantes.

<u>**Suffisance**</u> :

Si on suppose que la matrice A est de *Metzler* et les matrices B, C et D sont positives, Alors $e^{(At)}$ est positif d'après la proposition (1.1) et cela montre que $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}_+^p, \forall t \geq 0$.

L'objectif est d'étendre cette notion importante dans la pratique qui est la positivité aux système différentielle linéaire . ■

3.3 Quelques applications

Les applications sont nombreuses, on cite quelques exemples :

- Des systèmes à variables physiques positives par nature (niveaux, débits, concentrations,...).
- Modèles à compartiments : applications en médecine, cinétique chimique, . . .
- Modèles économiques
- Modèles de dynamiques de population.
- Circuit RLC.
- Sciences de la communication et de l'information.
- Processus industriels impliquant des réacteurs chimiques,...

4 Cas singulier :

4.1 Trajectoire d'états et réponse de systèmes singuliers en temps continu

Nous rappelons brièvement dans cette section l'expression des trajectoires d'états et des réponses de systèmes linéaires singuliers en temps continu. Nous nous basons sur [2],[4],[8].

4.2 Trajectoire d'état de systèmes singuliers en temps continu :

Considérons le système linéaire continu suivant,

$$\mathrm{E}\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t) \tag{2.10}$$

$$y(t) = \mathrm{C}x(t) + \mathrm{D}u(t) \tag{2.11}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie et $\mathrm{E}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ et D sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

Définition 2.4

- *Le système (2.10) est dit **singulier** si* $det\mathrm{E} = 0$.
- *Dans le cas contraire, c'est à dire si* $det\mathrm{E} \neq 0$, *il est dit **standard**.*
- *Si* $\mathrm{E} = \mathrm{I}_n$, *le système est aussi appelé standard (ou **explicite**).*

Exemple 2.2

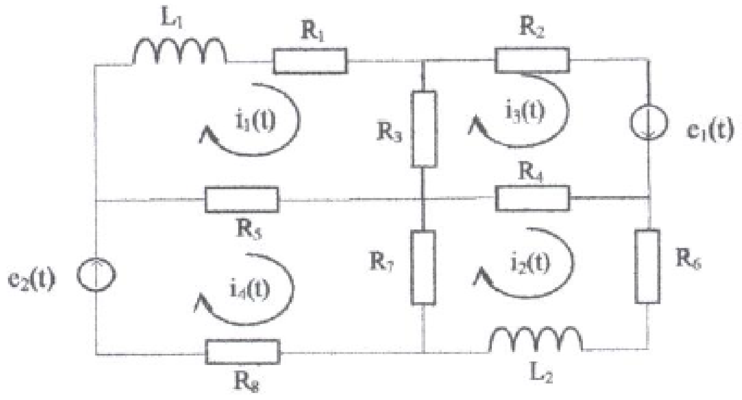


FIGURE 2.2 – circuit RLC

Considérons le circuit RL à quatre mailles représenté par la figure (2)*, où* R_i*,* $i = 1, 2, \cdots, 8$ *sont les résistances données,* L_1, L_2 *les inductances et* e_1, e_2 *les sources de voltages. On note par* i_1, i_2, i_3, i_4 *les intensités du courant dans les quatre mailles. En appliquant la lois des mailles, nous allons vous montrer que la modélisation à travers les lois de l'électricité aboutit à un système singulier, on utilise, alors les lois de Kirchoff pour cela la méthode des mailles sur le circuit donne les équations physiques suivantes*

$$\left\{\begin{array}{rcl} L_1\frac{di_1(t)}{dt} & = & -(R_1+R_3+R_5)i_1(t)+R_3i_3(t)+R_5i_4(t) \\ L_2\frac{di_2(t)}{dt} & = & -(R_4+R_6+R_7)i_2(t)+R_4i_3(t)+R_7i_4(t) \\ 0 & = & R_3i_1(t)+R_4i_2(t)-(R_2+R_3+R_4)i_3(t)+e_1 \\ 0 & = & R_5i_1(t)+R_4i_2(t)-(R_5+R_7+R_8)i_3(t)+e_2 \end{array}\right.$$

Si on pose $x_1 = i_1(t), x_2 = i_2(t), x_3 = i_3(t), x_4 = i_4(t)$*, on peut cependant écrire les quatre équations sous la forme suivante*

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Si on pose

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & i_1(t) \\ x_2(t) & = & i_2(t) \\ x_3(t) & = & i_3(t) \\ x_4(t) & = & i_4(t) \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} R_{11} & = & R_1+R_3+R_5; \\ R_{22} & = & R_4+R_6+R_7; \\ R_{33} & = & R_2+R_3+R_4; \\ R_{44} & = & R_5+R_7+R_8; \\ R_{13} & = & R_{31}=R_3; \\ R_{14} & = & R_{41}=R_5; \\ R_{23} & = & R_3=R_4; \\ R_{42} & = & R_{24}=R_7; \end{array}$$

donc on peut écrire les équations précédentes sous forme d'un système de type,

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) & = & Ax(t)+Bu(t) \\ \\ x(0) & = & x_0 \end{cases}$$

tels que :

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x(t)=\begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} -\frac{R_{11}}{L_1} & 0 & \frac{R_{13}}{L_1} & \frac{R_{14}}{L_1} \\ 0 & \frac{R_{22}}{L_2} & \frac{R_{23}}{L_2} & \frac{R_{24}}{L_2} \\ R_{31} & -R_{32} & -R_{33} & 0 \\ R_{41} & R_{42} & 0 & R_{44} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Nous avons donc un système linéaire singulier. Pour résoudre le système (2.10), on distingue deux cas.

- Premier cas : Si la matrice E est non singulière ($detE \neq 0$) donc le système (2.10) est équivalent à

  $$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & E^{-1}Ax(t)+E^{-1}Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t)+Dx(t) \end{cases}$$

  et on obtient un système LTI standard à temps continu, en appliquant la transformée de Laplace, on trouve la solution,

  $$x(t)=e^{E^{-1}At}x_0+\int_0^t e^{E^{-1}A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

  La réponse donnée par,

  $$y(t)=Ce^{E^{-1}At}x_0+C\int_0^t e^{E^{-1}A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau+Du(\tau).$$

- Deuxième cas : Si la matrice E est singulière ($detE=0$), pour cela on va considérer la définition suivante.

Définition 2.5 *Le système (2.10) est dit* ***régulier*** *si et seulement si*

$$det(Es-A)\neq 0 \tag{2.12}$$

pour un certain $s\in\mathbb{C}$.

Théorème 2.4 *Si la relation (2.12) est vérifiée, alors l'équation (2.10) et l'équation*

$$\dot{x}=\phi_0Ax+\phi_0Bu+\sum_{j=1}^{\mu}\phi_{-j}\left(Bu^{(j)}+Ex_0\delta^{(j)}\right) \tag{2.13}$$

$x(0)=x_0$ possèdent la même solution

$$x(t)=e^{\phi_0At}\phi_0Ex_0+\int_0^t e^{\phi_0A(t-\tau)}\phi_0Bu(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{\mu}\phi_{-j}\left(Bu^{(j-1)}+Ex_0\delta^{(j-1)}\right) \tag{2.14}$$

5 Solution d'un système LTI singulier en temps continu :

Définition 2.6 *Dans ce cas, on peut écrire la matrice résolvante comme unique série de l'Aurent au voisinage de l'infini.*

$$(Es-A)^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)}$$

où

μ *est appelé indice de nilpotence du faisceau* $(Es-A)$ μ *est décrit par*

$$\mu = rg(E) - deg[det(Es-A)] + 1$$

et ϕ *est la matrice fondamentale de (2.10), qui satisfait les équations suivantes*

$$\begin{cases} E\phi_i - A\phi_{i-1} & = & \delta_{0i} I_n \\ \phi_i E - \phi_{i-1} A & = & \delta_{0i} I_n \\ \forall i \leq -\mu ; \phi_i = 0 \end{cases}$$

où

$$\delta_{0i} = \begin{cases} I & si & i=0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

est le delta de Kronecker.

La solution du système (2.10) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ *; et le contrôle* $u(t)$ *est donnée par*

$$x(t) = e^{\phi_0 A t}\phi_0 E x_0 + \int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 B u(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{-j}(Bu^{(j-1)} + Ex_0\delta^{(j-1)}) \tag{2.15}$$

où

$$u^j = \frac{d^j u}{dt^j}, j = 1, \cdots, \mu - 1.$$

La sortie du système singulier (2.10) est donnée par :

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$y(t) = Ce^{\phi_0 A t} E x_0 + \int_0^t Ce^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 B u(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} C\phi_{-j}\left(Bu^{(j-1)} + Ex_0\delta^{(j-1)}\right) + Du(t).$$

5.1 Positivité de systèmes linéaires singuliers en temps continu

Considérons à présent les définitions et quelques résultats de positivité en temps continu.

5.2 Positivité externe :

Tout d'abord, donnons la première définition de la positivité de système linéaires,la positivité externe.

Définition 2.7 *Le système singulier (2.10) est dit externement positif si pour $x_0 = 0$ et tout contrôle non-négatif $u(t) \geq 0$ avec $u^{(j)}(t) \geq 0$ pour $j = 1, \cdots, \mu - 1$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ la sortie est aussi non-négative i.e $y(t) \geq 0$ pour $t > 0$.*

5.3 Positivité interne :

A présent, nous pouvons donner la seconde définition de positivité, qui peut être appelée positivité interne.

Définition 2.8 *Le système singulier (2.10) est dit internement positif si pour tout état initial admissible $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ et tout contrôle non-négatif $u(t) \geq 0$ avec $u^{(j)}(t) \geq 0, j = 0, 1, \cdots, \mu - 1$ pour $t \in \mathbb{R}^n_+$, l'état $x(t) \in \mathbb{R}^n_+$ et la sortie $y(t) \in \mathbb{R}^p_+$ pour $t \geq 0$.*

Remarque 2.2 *Un système singulier internement positif est toujours externement positif*

6 Systèmes Linéaires Singuliers à Temps Discret

Nous présentons les systèmes positifs singuliers en temps discret.

6.1 Trajectoire d'état et réponse de systèmes singuliers en temps discret

Dans cette section, nous considérons les systèmes linéaires singuliers discret en temps invariant. Nous regardons alors comment s'écrivent les trajectoires d'état et les réponses de tels systèmes.

6.2 Trajectoire d'état de systèmes singuliers en temps discret

Considérons le système linéaire singulier en temps discret suivant

$$Ex_{i+1} = Ax_i + Bu_i \tag{2.16}$$

$$y_i = Cx_i + Du_i \tag{2.17}$$

où $x_i \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état, $u_i \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y_i \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie et $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

Définition 2.9 *Le système (2.16) est dit **singulier** si $det E = 0$. Dans la cas contraire, il sera dit standard.*

On suppose que :

$$det(Ez - A) \neq 0 \tag{2.18}$$

pour certain $z \in \mathbb{C}$ si cette dernière relation est satisfaite, alors

$$(Ez - A)^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i z^{-(i+1)} \tag{2.19}$$

*où μ est appelé **indice de nilpotence** du faisceau $(zE - A)$ il est décrit par :*

$$\mu = rg(E) - deg[det(Ez - A)] + 1$$

ϕ_i est appelée la matrice fondamentale de (2.16). Il s'ensuit directement de la relation (2.19) que la matrice fondamentale ϕ_i satisfait les équations suivantes :

$$\begin{cases} E\phi_i - A\phi_{i-1} &= \delta_{0i} I \\ \phi_i E - \phi_{i-1} A &= \delta_{0i} I \\ \forall i \leq -\mu; \phi_i = 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

où,

$$\delta_{0i} = \begin{cases} I & si \quad i = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

est le delta de Kronecker.

Notons que nous avons les mêmes propriétés que dans le cas continu. Cependant, l'application de la z-transformée au système (2.16) donne

$$(zE - A)X(z) = zEx_0 + BU(z) \tag{2.21}$$

ou encore

$$X(z) = (zE - A)^{-1} zEx_0 + (zE - A)^{-1} BU(z) \tag{2.22}$$

d'après (2.19), on obtient

$$X(z) = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i z^{-(i+1)} BU(z) + \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i z^{-i} Ex_0 \tag{2.23}$$

Utilisons maintenant la z-transformée inverse pour obtenir la solution du système

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i BU(z) z^{(n-i-2)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i z^{(n-i-1)} Ex_0 \tag{2.24}$$

par conséquent, la solution du système est

$$x(n) := x_n = \phi_n Ex_0 + \sum_{-\mu}^{\infty} \phi_i Bu(n - i - 1)$$

$$x(n) := x_n = \phi_n Ex_0 + \sum_{0}^{n+\mu-1} \phi_{n-i-1} Bu(i)$$

Il s'ensuit par suite,

$$x_n = \phi_n Ex_0 + \sum_{n=0}^{n+\mu-1} \phi_{n-i-1} Bu_i, n \in \mathbb{Z}_+ \tag{2.25}$$

qui représente la solution du système singulier à temps discret.

Exemple 2.3 *Dans cet exemple, on considère le système (2.16) avec les matrices*

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 1$$

donc

$$\begin{aligned} det(Ez - A) &= det\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= det\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \\ &= -z \end{aligned}$$

tels que

$$\begin{aligned} \mu &= rg E - deg[det(Ez - A)] + 1 \\ &= 1 - 0 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

donc le système est régulier et l'indice de nilpotence $\mu = 2$ *et on a d'après la définition :*

$$\begin{aligned} (Ez - A)^{-1} &= \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i z^{-(i+1)} \\ &= \phi_{-2} z^1 + \phi_{-1} z^0 + \phi_0 z^{-1} + \phi_1 z^{-2} + \cdots \end{aligned}$$

Donc

$$(Ez - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

par conséquent les matrices fondamentales sont tels que

$$\phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

par suite

$$\phi_0 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \phi_i = \phi_0 A \phi_{i-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{pour } i \geq 1$$

alors la solution est donnée par,

$$\begin{aligned} x_n &= \phi_{-2} B u_{n+1} + \phi_{-1} B u_n + \phi_0 B u_{n-1} \\ x_n &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u_{n+1} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_n + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_{n-1} \end{aligned}$$

soit encore

$$x_n \begin{bmatrix} -u_n \\ u_{n-1} \\ -u_{n+1} \end{bmatrix}$$

La sortie du système sera cependant égale à

$$y_n = u_{n+1} + 2u_n$$

6.3 Positivité des systèmes singuliers en temps discret

On considère deux types de positivité : la positivité externe et la positivité interne.

6.4 Positivité externe :

Rappelons d'abord la définition de positivité externe,

Définition 2.10 *Un système linéaire singulier est dit externement positif si la sortie correspondant à l'état initial nul est non-négative pour chaque entrée non-négative, i.e,* $u_i \in \mathbb{R}^m_+, i \in \mathbb{Z}_+ : y_i \in \mathbb{R}^p_+$,*pour* $i \in \mathbb{Z}_+$

6.5 Positivité interne :

Étudions à présent la positivité interne de systèmes linéaires singuliers en temps discret.

Définition 2.11 *Le système linéaire singulier décrit par (2.16) est dit internement positif si pour des conditions initiales admissibles* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *et toute suite de contrôle* $u_i \in \mathbb{R}^m_+, i \in \mathbb{Z}_+$ *on a* $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ *et* $y_i \in \mathbb{R}^p_+$, *pour* $i \in \mathbb{Z}_+$.

Définition 2.12 *Le système(2.16) singulier avec* $\mathrm{E}^{-1} \in \mathbb{R}^n_+, \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}_+, \mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}_+, \mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}_+$ *et* $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}_+$ *est un système standard positif.*

Remarque 2.3 *Si le système est internement positif, alors il est externement positif.*
La réciproque est fausse.

7 Atteignabilité et contrôlabilité des systèmes positifs en temps discret

Nous allons maintenant énoncer les théorèmes sur la commandabilité et l'atteignabilité d'un système linéaire positif à temps discret. On met d'abord en évidence les conditions dans lesquelles un état est commandable ou non.Les définitions et les résultats concernant les notions importantes d'atteignabilité, de contrôlabilité pour des systèmes singuliers en temps discret sont exactement les mêmes que ceux développés dans le cas continu, excepté le fait que le temps t est à présent l'entier i. Considérons d'abord le système linéaire standard en temps discret décrit par :

$$x_{i+1} = \mathrm{A}x_i + \mathrm{B}u_i \tag{2.26}$$

$$y_i = \mathrm{C}x_i + \mathrm{D}u_i \tag{2.27}$$

où $\mathrm{F} \in \mathbb{R}^{n\times m}_+$ et $\mathrm{G} \in \mathbb{R}^{n\times m}_+$

Définition 2.13
- *Le système positif (2.26) est dit* ***atteignable au pas h*** *si pour chaque $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ et x_0 il existe une suite de contrôle $u_i \in \mathbb{R}_+^m, i = 0, 1, \cdots, h-1$ tels que $x_h = x_f$.*
- *Le système positif (2.26) est dit* ***atteignable*** *si pour chaque $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ et x_0 il existe $h \in \mathbb{Z}_+$ et $u_i \in \mathbb{R}_+^m, i = 0, 1, \cdots, h-1$ tels que $x_h = x_f$.*
- *Le système positif (2.26) est dit* ***contrôlable*** *si pour chaque état non nul $x_f, x_0 \in \mathbb{R}_+^n$, il existe $h \in \mathbb{Z}_+$ et $u_i \in \mathbb{R}_+^m, i = 0, 1, \cdots, h-1$ tels que $x_h = x_f$.*
- *Le système positif (2.26) est dit* ***contrôlable en zéro*** *si pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ il existe $h \in \mathbb{Z}_+$ et $u_i \in \mathbb{R}_+^m, i = 0, 1, \cdots, h-1$ tels que $x_h = 0$.*

Théorème 2.5 *Le système positif (2.26) est dit* ***atteignable au pas n*** *si et seulement si,*
- *rang* $\mathrm{R}_n = n$
- *il existe une sous matrice monomiale de* R_n *où :*

$$\mathrm{R}_n = [\mathrm{G}, \mathrm{FG}, \cdots\cdots, \mathrm{F}^{n-1}\mathrm{G}] \in \mathbb{R}_+^{n\times nm} \tag{2.28}$$

Remarque 2.4 *Si le système positif (2.26) est atteignable alors il est atteignable au pas n.*

Théorème 2.6 *Le système positif (2.26) est dit* ***contrôlable*** *si et seulement si la matrice* R_n *est monomiale*

Test de contrôlabilité *:*

supposons que pour $m = 1$ les matrices A *et* B *de (2.26) ont le canonique de*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^n$$

telle que A *est la matrice compagnon.*

Il est facile de voir que :

$$rang[\mathrm{B}, \mathrm{AB}, \mathrm{A}^2\mathrm{B}, \mathrm{A}^3\mathrm{B}, \cdots\cdots, \mathrm{A}^{n-1}\mathrm{B}] = n \tag{2.29}$$

Comme R_n *est de rang plein, alors le système positif (2.26) est contrôlable.*

Nous allons maintenant nous intéresser aux cas de systèmes singuliers positifs en temps discret. Considérons alors le système singulier décrit par (2.16)

Définition 2.14

- *Le système singulier positif (2.16) est dit* ***atteignable au pas h*** *si pour chaque $x_f \in \mathbb{R}_+^n, i = 0, 1, \cdots, h-1$ qui transfert le système d'un état initial nul $x_0 = 0$ à un état final x_f.*
- *Le système singulier positif (2.16)est dit* ***atteignable*** *si pour chaque $x_f \in \mathbb{R}_+^n$, il existe un entier positif h tel que le système sera atteignable au pas h.*

Théorème 2.7 *Le système singulier positif (2.16) est* ***atteignable au pas n*** *si et seulement si :*

- *rang* $R_n = n$,
- *Il existe une sous matrice monomiale de* R_n *où*

$$R_n = [\phi_{n-1}B, \phi_{n-2}B, \cdots, \phi_0 B, \phi_{-1}B, \cdots, \phi_{-\mu}B] \tag{2.30}$$

Exemple 2.4 *Considérons le système (2.16) avec*

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

alors

$$(Ez - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -z \end{pmatrix}$$

par suite les matrices fondamentales sont

$$\phi_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour $i \geq 0$

$$\phi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

par conséquent, la matrice d'atteignabilité sera

$$R_3 = \left(\phi_2 B, \phi_1 B, \phi_0 B, \phi_{-1}B, \phi_{-2}B\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Notons que rang $R_3 = 3$ *mais la condition 2 n'est pas satisfaite du fait que*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}_+^{3\times 3}$$

Le système n'est donc pas atteignable au pas 3.

Chapitre 3

Le retour d'état (state-feedback)

1 Introduction

En automatique, la commande par retour d'état est un moyen de modifier le comportement en boucle fermée d'un système dynamique donné par une représentation d'état. Cette approche suppose l'état connu.

L'idée consiste toujours à piloter le système par un signal de consigne et à générer automatiquement le signal de commande en confrontant en permanence la valeur de la consigne et le comportement réel du système. L'écart entre consigne et comportement réel sert de base au signal de commande du système. Dans la commande par retour d'état, nous n'allons pas mesurer le signal de sortie pour le boucler sur l'entrée, mais nous allons nous servir du vecteur d'état complet pour prendre connaissance du comportement du système.

Pour ce faire nous nous basons sur [7],[11],[15].

2 Atteignabilité des systèmes linéaires positifs en temps discret avec retour d'état (state-feedback) :

L'atteignabilité et la contrôlabilité sont des concepts de base de la théorie de contrôle moderne. Il est bien connu que l'atteignabilité et la contrôlabilité des systèmes linéaires standards sont invariants sous retours d'états par contre elle ne le sont pas pour les systèmes linéaires standards positifs en temps discret,
il peut l'être sous un choix d'une matrice de gain par retour d'état (state feed-back).
Supposons $m = 1$ et choisissons A et B tels que,

$$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{c} 0 \quad \mathrm{I}_{n-1} \\ \hline a \end{array}\right] \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n} \text{ où } a = \left[-a_0, -a_1, \cdots, -a_{n-1}\right]$$

considérons le système (2.26) avec retour d'état "feed-back" :

on pose :

$$u_i = v_i + \mathrm{K}x_i \tag{3.1}$$

où $\mathrm{K} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ et v_i est la nouvelle substitution d'entrée de (3.1) en (2.26) donne

$$x_{i+1} = A_c x_i + Bv_i, i \in \mathbb{Z}_+ \tag{3.2}$$

avec

$$A_c = A + BK, \quad K = [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}]$$

La matrice $A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$

on obtient :

$$[B, A_cB, A_c^2B, A_c^3B, \cdots, A_c^{n-1}B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Nous allons alors proposé une extension des résultats aux systèmes linéaires singuliers positifs en temps discret, autrement dit montrons que si un modèle singulier positif n'est pas atteignable, il peut l'être sous un choix d'une matrice de gain par retour d'état (state feedback)

Supposons $m = 1$ et choisissons E tels que

$$E = \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$$

A fin de ne peut pas encombrer les calculs, on préfère choisir

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{5\times 5}, \ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{5\times 5}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^5$$

On a

$$det(Ez - A) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1^z + (1 + a_0),$$

$$\begin{aligned} \mu &= rgE - deg[det(Ez - A)] + 1 \\ &= 4 - 4 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

par suite l'indice de nilpotence est $\mu = 2$, il s'ensuit alors

$$(Ez-A)^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1^z+(1+a_0)} \\ \frac{z}{a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1^z+(1+a_0)} \\ \frac{z^2}{a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1^z+(1+a_0)} \\ \frac{z^3}{a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1^z+(1+a_0)} \\ \frac{z^4}{a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1^z+(1+a_0)} \end{pmatrix} = \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i B z^{-(i+1)}$$

telle que

$$\phi_{-1}B = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix},\ \phi_0 B = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\a_3 \end{pmatrix},\ \phi_1 B = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\a_3\\a_3^2+a_2 \end{pmatrix},\ \phi_2 B = \begin{pmatrix} 0\\1\\a_3\\a_3^2+a_2\\a_3^3+2a_3a_2+a_1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_3 B = \begin{pmatrix} 1\\0\\a_3^2+a_2\\ \\a_3^3+2a_3a_2+a_1\\ \\a_3^4+3a_3^2a_2+2a_3a_1+a_2^2+a_0 \end{pmatrix}$$

Enfin

$$(\phi_{-1}B, \phi_0 B, \phi_1 B, \phi_2 B, \phi_3 B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & a_3^2+a_2 \\ 0 & 1 & a_3 & a_3^2+a_2 & a_3^3+2a_3a_2+a_1 \\ 1 & a_3 & a_3^2+a_2 & a_3^3+2a_3a_2+a_1 & a_3^4+3a_3^2a_2+2a_3a_1+a_2^2+a_0 \end{bmatrix}$$

est de rang égal à 5, par contre la deuxième condition n'est pas satisfaite si au moins l'un des $a_i \neq 0$, pour $i = 0, 1, 2, 3$. Dans ce cas, le système n'est pas atteignable au pas 5.

Considérons le système (2.16) avec le feed-back d'état, on pose :

$$u_i = v_i + Kx_i \tag{3.4}$$

où $K \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ et v_i est la nouvelle commande. Une substitution de (3.4) en (2.16) donne

$$Ex_{i+1} = A_k x_i + Bv_i \tag{3.5}$$

où

$$A_k = A + BK$$

choisissons K telle que

$$K = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$$

La matrice A_k sera donc égale à

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{bmatrix} (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

par conséquent

$$(\phi_{-1}^{k}B, \phi_{0}^{k}B, \phi_{-2}^{k}B, \phi_{-3}^{k}B, \phi_{-4}^{k}B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qui satisfait les deux conditions du théorème et la boucle fermée est atteignable au pas 5. Ceci se généralise si on considère les matrices E, A et B prise au début, dans ce cas la matrice de gain K sera choisie telle que

$$K = (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$$

et la matrice A_K aura la forme suivante

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \iddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

3 L'observabilité sans retour d'état "feedback"

Dans cette partie le problème consiste à déduire l'état initial du système à partir de la connaissance de la commande $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$. Dans l'affirmative, on dira que le système est observable. Autrement dit, de déterminer x_0 de manière unique à partir de la connaissance de A, C et u. Cette partie a essentiellement pour objectif de rappeler la notion et les tests d'observabilité. Pour ce faire nous nous basons sur les références suivantes [7],[11].

3.1 L'observabilité :

Considérons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) \end{array} \right. \tag{3.6}$$

avec :

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n}, C \in \mathbb{R}^{n}$$

.

Définition 3.1 *Le système (3.6) est dit **observable** si x_0 est déterminée d'une manière unique connaissant $u(t)$ et $y(t)$.*

Théorème 3.1 *(Le critère de Kalman)*
*Le système (3.6) est **observable** si et seulement si la matrice d'observabilité* O *est de rang plein n .*

Autrement dit :

$$rang(O) = rang \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

Théorème 3.2 *Le système positif (3.6) est dit **observable** si et seulement si :*
- *la matrice* O_n *est monomiale*

Rappelons que la forme canonique d'observabilité s'écrit :

$$\dot{x}(t) \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Supposons $p = 1$ et choisissons A et C telles que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{1\times n}.$$

il est facile de voir que :

$$O(C,A) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} & -a_{n-2} + a_{n-1}^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} & -a_{n-2} + a_{n-1}^2 & -a_{n-3} + 2a_{n-1}a^{n-2} - a_{n-3}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & * & * & \dots & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

- Ainsi le rang de $O(C,A) = n$ et un système pouvant se mettre sous la forme canonique d'observabilité est toujours observable dans $\mathbb{R}^{n\times n}$.
- Si les $a_i = 0$ pour $i = 1, \cdots, n-1$, alors $O(C,A)$ est monomiale dans $\in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ donc il existe une matrice inversible O composée de n colonnes de O telle que O^{-1} où de manière équivalente O possède n colonnes linéairement indépendantes contenant chacune une seule entrée positive et le système est observable.

- Si toutes les les combinaisons à coefficients $a_i = 0$ pour $i = 1, \cdots, n-1$, alors $\mathrm{O}(\mathrm{C}, \mathrm{A})$ est aussi monomiale dans $\mathbb{R}_+^{n\times n}$. Donc il existe une matrice inversible O composée de n colonnes de O telle que O^{-1} où de manière équivalente O possède n colonnes linéairement indépendantes contenant chacune une seule entrée positive et le système est observable.
- Si les $a_i \neq 0$ pour $i = 1, \cdots, n-1$ de la matrice $\mathrm{O}(\mathrm{C}, \mathrm{A})$.

Conclusion

Bien que l'atteignabilité des systèmes linéaires standards est invariante sous retour d'état, elle ne l'est pas pour les systèmes standards positifs en temps discret . Nous avons proposé alors des résultats étendus aux systèmes linéaires singuliers positifs en temps discret, autrement dit, nous avons montré que pour un système singulier positif l'atteignabilité est non invariante sous retour d'état pour se faire nous nous sommes basé de certains références. Ce problème a également été le but d'étude pour la classe bidimensionnelle, tel le modèle de Roesser et le modèle FM dans ces deux cas. Question de temps que ce chapitre n'a pas très bien été développé.

Bibliographie

[1] **Amirreza, O** (2015), *"Positive control with maximum stability radius for continuous time dynamic systems"*. 12

[2] **Bouagada, D** *" Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIS"* . Thèse en Doctorat En Sciences. Université d'Oran (2007). 3, 12, 14, 16

[3] **Bouagada, D** (2017-2018), *"Cours de théorie de contrôle"* 3

[4] **Brown, R.F** (1985), *" Biomedical systems analysis via compartementel concepts"*, Abacus Press, Tundrige Wells. 16

[5] **Broxom, B and Rghavan, T** (2006), *" Nonnégative Matrices and Applications"*, XX-SPETIO. 3

[6] **Doneddu, A**, *" Polynôme et Algèbre linéaire"*, Tome2. 3

[7] **Kaczorek, T** (2002), *" Positive 1D and 2D Systems"*, Springer-Verlag, London. 13, 14, 26, 29

[8] **Kaczorek, T** (1997), *" Positive linear systems and their relationship with electrical circuits "*, XX-SPETO, , 33 –41. 16

[9] **Kaczorek.T** (1998), *" Vestors and Matrices in Automation and Electrotechimics"* 12

[10] **Kaczorek.T.** (2007), *" Prezemyslaw PRZYBOROWSKI, Positive Continuous -Time Linear Lyapunov Systems"* ,The International Coference on"Computer as a Tool" Warsaw, September 9-12 12

[11] **Kaczorek, T and Sajewski, L** (2014), *" The Realization Problem for Positive and Fractional Systems "*, Springer, Switzerland. 12, 26, 29

[12] **Kaczorek, T.** (1997), *" Positive linéair Systems and Their relationship with electrical circuits"*, XX-SPETO, 33 – 41. 12

[13] **Ronsenbrock, H.H** (1970), *"State space ande multivariable theory "*, Nelson, London. 3, 12

[14] **Mink, H** (1986), *" Non negative matricess, Wiley Interxience Series in Dixrete Time Mathematices and Optimisation"*, John wiley and Sons . 3

[15] **XU, D and Yang, X** (2016), *" Controllability of Fractional Descriptor Linear Systems"*, Advances in Theoretical and Applies Mathemtics, **Volume 11, Numéro 4**, 373 – 382. 26