Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Master Académique

pour l'obtention du diplôme de Master

En Mathématique

Option:

"Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté et soutenu publiquement par

AMER Bouchra

le 6 juin 2018

Sur la stabilité d'une classe de systèmes fractionnaires positifs non linéaires à temps continu

Jury

GHEZZAR Mohammed Amine,	MCB	Encadreur (Université de Mostaganem, Algérie)
BOUAGADA Djillali ,	Prof	Président (Université de Mostaganem, Algérie)
MOHAMMEDI Mustapha,	MAA	Examinateur (Université de Mostaganem, Algérie)

- Année Universitaire 2017/2018 -

MASTER

Résumé Ce mémoire est dédié à l'étude de la positivité et la stabilité d'une classe de systèmes linéaires et non linéaires singuliers standard et fractionnaires à temps continu. Après une large introduction, le second chapitre se focalise sur la classe des systèmes à dérivée d'ordre entier où les conditions nécessaires et suffisantes pour la positivité des systèmes linéaires singuliers et des conditions suffisantes pour la stabilité des systèmes non linéaires positifs sont données. Une autre partie de notre étude s'est portée sur l'extraction de conditions de stabilité en terme de LMI's en utilisant une extension de la méthode de Lyapunov. Les considérations sont étendues aux systèmes non linéaires fractionnaires dont le dernier chapitre est consacré.

Title On the stability of nonlinear fractional positive systems.

Abstract The focus of this work is the notion of positivity and stability of linear and nonlinear singular continuous time standard and fractional systems. After a general introduction, the second chapter of this dissertation treat the class of integer order systems. Necessary and sufficient conditions for the positivity of singular linear systems and sufficient conditions for the stability of positive nonlinear systems are given. Furthermore,sufficient conditions for the stability are derived using linear matrix inequalities (LMIs) formulation and an extension of the Lyapunov method. The Considerations are extended to fractional nonlinear systems whose last chapter is devoted.

Mots-clés Systèmes différentiels linéaires, Systèmes différentiels non linéaires, Positivité, Stabilité, Fractionnaires, Lyapunov, LMI

Keywords Linear differential systems, Nonlinear differential systems, positivity, Stability, fractional, Lyapunov, LMI

À ma grande mère chérie, j'aurais tant aimé que tu sois présente.

À mes parents qui m'ont toujours entouré et motivé à sans cesse devenir meilleur. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier.

À mes chers frères et soeurs : Salah Dinne, Wallaa, Ryhannah, Mohammed Elhabib.

« Vis parmi les gens de telle façon que si tu meurs, ils pleurent pour toi, et si tu es en vie, ils désirent ta compagnie.»

Paroles de l'Imam '$Ali^{(AS)}$ - paix sur lui -

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier ALLAH pour la force et la volonté qu'il m'a données pour pouvoir achever ce travail.

Ce travail n'aurait pas pu voir le jour sans l'aide et l'encadrement de M. GHEZZAR Mohammed Amine, je le remercie tout spécialement pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa grande patience dont il a su faire preuve malgré ses charges académiques et professionnelles, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire. Merci pour votre travail acharné à mes côtés et heureuse que vous ayez été mon professeur.

Á mon professeur M. BOUAGADDA Djillali, veuillez bien monsieur, recevoir mes remerciement pour l'honneur que vous m'avez fait pour avoir accepter de présider le jury de ma soutenance. Je tenais aussi à vous écrire un « Merci » sincère pour votre soutien, votre enseignement tout au long de cette année qui vient de s'écouler. C'est avec un réel plaisir que nous sommes venus assister à tous vos cours.

Je tiens à remercie M .Mohammedi Mustapha, je vous suis très reconnaissante de la spontanéité et de L'amabilité avec lesquelles vous avez accepté de juger mon travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation LMD.

À tous mes Ami(e)s que j'aime tant, vous qui m'apportez beaucoup je vous adore. En Souvenirs de plus beaus instants qu'on a passé ensemble...

Je tiens aussi à remercier les nombreuses personnes qui directement, indirectement, humainement, amicalement, ironiquement, amoureusement, haineusement, ont contribué à former ma personnalité.

Enfin, j'aimerais conclure en saluant tous ceux qui luttent, individuellement ou collectivement, pour vivre dignement aujourd'hui.

Table des matières

Notations

Ensembles et fonctions

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{R}^n$	Espace des vecteurs à n entiers réelles
$\mathbb{R}^{n\times m}$	Espace des matrices réelles de dimensions $n \times m$
$\mathbb{R}_+^{n\times m}$	Espace des matrices à entrées réelles non négatives de dimensions $n \times m$
$\mathbb{M}_n$	Ensemble des matrices de Metzler de dimensions n
$rg(\mathrm{A})$	Rang d'une matrice A
I_n	Matrice identité de dimension n
$\mathscr{L}$	Transformée de Laplace

Matrices, opérations et relations matricielles

$\mathrm{R}e(\mathrm{Z})$	Partie réelle d'un nombre complexe Z
$\sigma(\mathrm{A})$	Spectre d'une matrice A
$det(\mathrm{A})$	Déterminant d'une matrice A
A^{-1}	Inverse d'une matrice A
A^{T}	Transposée d'une matrice A
$n!$	Factorielle d'un nombre n
D^{α}	Opérateur de dérivation fractionnaire.

Abréviations

LMI	Inégalité Matricielle Linéaire (en anglais, LMI :Linear matrix inequality)

Chapitre 1

Introduction générale

Le monde industriel connait actuellement un énorme développement technologique sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus exigent, du point de vue qualité et performance. En grande partie, ce mémoire est dû au développement qu'a connu la recherche fondamentale dans divers domaines tels que ceux de l'analyse numérique et de la théorie des systèmes. Tout ceci a permis de mettre en oeuvre des méthodes et approches très complexes pour l'identification et la commande des systèmes. Le développement des mathématiques en générale a été et sera toujours nécessaire pour la résolution des problèmes de la physique et de l'ingénierie.

De nombreux processus en biologie, en écologie et en économie ainsi qu'en mécanique et en chimie peuvent être modélisés par des systèmes non linéaires, en particulier dont les variables sont par nature positives. Il est bien connu que la positivité et la stabilité sont des notions importantes en théorie des systèmes et de contrôle. La classe des systèmes positifs est une classe particulière importante et fascinante des systèmes différentiels. Nous pouvons citer quelques exemples de systèmes positifs tels que : les procédés industriels impliquant des réacteurs chimiques, des échangeurs de chaleur et des colonnes de distillation, des systèmes de stockage, des systèmes à compartiments, des modèles de pollution de l'eau et de l'atmosphère...etc. Une variété de modèles ayant un comportement non-linéaire positif peut être trouvée dans l'ingénierie, la science de gestion, l'économie, les sciences sociales, la biologie, la médecine, etc. Un aperçu de l'état de l'art dans la théorie des systèmes positifs est donné dans la monographie [13].

La notion de stabilité est assez intuitive, le premier a avoir formulé mathématiquement cette idée est Lyapunov à la fin du 19^e siècle. Son nom y est depuis associé, que ce soit pour s'y référer — “stable au sens de Lyapunov” — ou pour s'en distinguer. Partant d'une position d'équilibre, elle sera dite stable si, en s'en écartant, on en reste “proche”. C'est, par exemple, ce que nous observons sur les montagnes russes d'une fête foraine. Imaginons qu'aucune force ne soit appliquée sur le chariot et qu'il se trouve dans un creux de la montagne : cette position serait alors une position d'équilibre stable puisqu'un léger mouvement du chariot ne provoquerait qu'un faible déplacement de ce dernier, les lecteurs pourront se référer à [18].

Le concept de stabilité des systèmes non linéaires a fait l'objet d'une riche littérature depuis le siècle dernier (Kraokovski, Lasalle, Poincaré) [18]. Par rapport à des méthodes comme les méthodes géométriques ou celles basées sur les normes vectorielles et les systèmes de comparaison, la stabilité au sens de Lyapunov est une approche largement utilisée pour l'étude des problèmes de stabilité. Dans le cas des systèmes fractionnaires, l'étude de la stabilité est plus délicate que pour leurs homologues, les systèmes d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires sont, d'une part, considérés comme des systèmes à mémoire, notamment pour la prise en compte des conditions initiales, et, d'autre part, ils présentent une dynamique beaucoup plus complexe. Dans ce cas, l'absence d'une formulation adéquate de la méthode de Lyapunov ne permet pas d'utiliser efficacement cette approche dans la théorie du contrôle. Récemment, Trigeassou [25] propose l'application de la méthode de Lyapunov aux systèmes linéaires et non linéaires fractionnaires grâce à la définition d'une fonction spécifique de Lyapunov.

Nous considérons dans ce projet une classe de systèmes dits systèmes standards et fractionnaires, les résultats proposés dans ce mémoire ont été étendus aux cas des systèmes algébro-différentiels, aussi appelés systèmes singuliers. Les systèmes fractionnaires sont décrits par l'équation diférentielle à dérivée fractionnaire et sont d'un grand intérêt pour modéliser de nombreux procédés pratiques comme pour leurs homologues les systèmes singuliers linéaires d'ordre entier. Nous signalons que très peu de contributions traitent les problèmes de la stabilité des systèmes singuliers fractionnaires. Á l'instar des modèles standards, l'étude de la stabilité des systèmes singuliers est importante pour comprendre le comportement transitoire du système, en particulier la stabilité asymptotique. Nous utiliserons l'approche de Lyapunov qui est réalisée en intégrant des condition initiales de la stabilité asymptotique. L'approche est basée sur la résolution d'inégalités matricielles linéaires en anglais LMI (Linear Matrix Inequality) (LMI) appliquées dans un domaine non convexe (ordre de dérivation compris entre 0 et 1).

Chapitre 2

Préliminaires et notions fondamentales

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons les éléments nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit. Nous rappelons certaines définitions ainsi que les propriétés générales des matrices particulières. Ensuite, nous présentons des définitions dans lesquelles nous différencions les types de systèmes que nous étudierons en détail dans ce mémoire. La deuxième partie est dédié aux définitions à quelques notions importantes concernant le calcul fractionnaire. Un rappel historique et une description exhaustive de la théorie de la dérivation fractionnaire sont proposés : la définition de la dérivation fractionnaire proposées dans la littérature (Caputo), la transformation de Laplace, les fonctions de Mittag-Leffler.

2 Notions de base sur la théorie des matrices

2.1 Introduction

Nous présentons dans cette première partie quelques notions sur la théorie générale des matrices positives et des matrices de Metzler. Dans la litterature, on peut trouver une multitude de references sur ces classes de matrices (voir [1, 2, 3]). Nous commençons par les défnitions et quelques propriétés générales, où nous étudions plus particulièrement les matrices positives et les matrices de Metzler qui permettent de caractériser la positivité de systèmes linéaires et non linéaires. Ensuite, nous examinerons un autre type de matrices, dite matrice de permutation généralisé (voir [24]). Une analyse de ces systèmes fera l'objet des chapitres 2 et 3.

2.2 Matrices particulières

Soit $\mathrm{A} = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ une matrice à entrées réelles. Par la suite, nous notons I_n la matrice identité d'ordre n, A^{T} la transposée d'une matrice A, $\bar{n}$ l'ensemble des n premiers entiers naturels, $1,...,n$.

Définition 2.1 *On dit que* A *est une matrice positive si* $\forall i \in \bar{n}, \forall j \in \bar{m} : a_{ij} \geq 0$ *et* $\exists k \in \bar{n}, \exists l \in \bar{m} : a_{kl} > 0$ *c'est à dire toutes ses entrées sont non négatives avec au moins une entrée strictement positive.*

Définition 2.2 *On dit que* A *est une matrice de Metzler si* $\forall i \in \bar{n}, \forall j \in \bar{n}, i \neq j : a_{ij} \geq 0$ *i.e toutes ses entrées hors diagonales sont non négatives.*

Exemple 2.1 *La matrice* A *suivante est une matrice de Metzler ,*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices de Metzler trouvent leurs applications majeurs dans l'analyse de stabilité et la positivité des systèmes linéaires. Ces deux livre [4] et [5] sont nos principales références sur ces classes de matrices et qui donnent des conditions équivalentes pour qu'une matrice de Metzler soit asymptotiquement stable. Nous devons rappeler alors des notions primaire du calcul matriciel :

Remarque 2.1 *Chaque matrice de Metzler* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *a une valeur propre réelle* $\alpha = \max_i \mathrm{Re}\, s_i$ *et* $\mathrm{Re}\, s_i < 0$ *pour* $i = 1,...,n$ *si* $\alpha < 0$*, où* $s_i = s_i(\mathrm{A})$*,* $i = 1,...,n$ *sont les valeurs propres de* A.

Théorème 2.1 *[14]* A *est une matrice de Metzler si et seulement si* $\forall t \geq 0, \quad e^{\mathrm{A}t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.

Preuve.

- Nécessité : Supposant que A est une matrice de Metzler, on peut trouver un réel $\lambda \geq 0$ tel que $(\mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}_n) > 0$. Sachant que

$$(\mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}_n)(-\lambda \mathrm{I}_n) = (-\lambda \mathrm{I}_n)(\mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}_n)$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{A}t} &= e^{(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)t + (-\lambda \mathrm{I}_n)t} \\ &= e^{(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)t} e^{(-\lambda \mathrm{I}_n)t} \end{aligned}$$

du fait que $e^{(A+\lambda I_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$

et

$e^{-\lambda I_n t} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda I_n)^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k I_n^k}{k!} = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!}\right) I_n = e^{-\lambda} I_n \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \quad car \quad e^{-\lambda} I_n \in \mathbb{R}_+$.

- Suffisance : Supposons que $\forall t \geq 0, \quad e^{At} \geq 0$. Ainsi, puisque

$$A = \frac{d}{dt}(e^{At})_{t=0} = \lim_{t\to 0_+} \frac{e^{At} - I}{t}.$$

Prenons comme e_j le j^{me} vecteur de la base canonique, nous obtenons pour $i \neq j$,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \lim_{t\to 0_+} \frac{\langle e^{At} e_j - e_j, e_i\rangle}{t} \\ &= \lim_{t\to 0_+} \frac{\langle e^{At} e_j, e_j\rangle}{t} - \frac{\langle e_j, e_i\rangle}{t} \\ &= \lim_{t\to 0_+} \frac{\langle e^{At} e_j, e_i\rangle}{t} \geq 0, \end{aligned}$$

puisque $\langle e_j, e_i\rangle = 0$. Dés lors, $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ et la matrice A est donc une matrice de Metzler. ■

Définition 2.3 *A est une matrice de permutation généralisée si les entrées de A sont toutes nulles sauf une qui égale à 1, dans chaque ligne et chaque colonne.*

Exemple 2.2 *La matrice* A *suivante est une matrice de permutation généralisée,*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lemme 2.1 *[11] Soit* $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *une matrice singuliere, alors il existe deux matrices* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et* $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *inversibles tel que*

$$QEP = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où n_1 *étant le rang de la matrice* E.

Théorème 2.2 *(Théorème de Koteja ski [13]) Si les entrées hors-diagonales de la matrice* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *sont non-positifs* $a_{ij} \neq 0$ *pour* $i \neq j$ *et les mineurs principaux sont positifs, i.e*

$$a_{11} > 0, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, \ldots, det A > 0, \tag{2.1}$$

alors tous les mineurs principaux de la matrice sont positifs, i.e.

$$A_{i_1,i_2 \ldots i_k}^{i_1,i_2 \ldots i_k} > 0 \quad pour \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n; \quad k = 1, 2, .., n$$

3 Trajectoire d'états et réponse de systèmes singuliers en temps continu

Dans cette section nous rappelons brièvement l'expression des trajectoires d'états et des réponses de systèmes linéaires singuliers en temps continu, voir [8, 6]. Considérons le système linéaire à temps continu décrit par les équations

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \tag{2.2a}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2.2b}$$

où $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur semistate à l'instant t, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y = y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie et E, A, B, C et D sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

Définition 2.4

- *Le système décrit par les équations (2.2a) et (2.2b) est appelé singulier si* $det E = 0$.
- *Dans le cas contraire, c'est à dire si* $det E \neq 0$*, il est dit standard.*

Définition 2.5 *Le système décrit par les équations (2.2a) et (2.2b) est appelé régulier si et seulement si*

$$\det[Es - A] \neq 0$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$

4 Étude des inégalités matricielles linéaires LMIs

Le terme IML (Inégalité Matricielle Linéaire), (LMI : Linear Matrix Inequality en anglais) est maintenant couramment employé dans la littérature liée à l'analyse ou à la commande des systèmes. Nous rappelons néanmoins quelques notions IMLs [12].

Définition 2.6 *On appelle une inégalité matricielle linéaire notée (LMI) le problème suivant : étant données les matrices réelles, carrées et symétriques* $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$*,* $i = 1...m$ *et* $x \in \mathbb{R}^m$ *tel que*

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0 \tag{2.3}$$

L'inégalité (2.3) implique que : $\mathrm{F}(x)$ *est une matrice défnie positive c'est-à-dire :*

$$u^{\mathrm{T}}\mathrm{F}(x)u > 0 \quad pour \quad tous \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad u \neq 0, \tag{2.4}$$

De manière équivalente, la valeur propre la plus petite de $\mathrm{F}(x)$ *est positive.*

Remarque 2.2

- *L'inégalité (2.3) est une LMI stricte si* $\mathrm{F}(x)$ *est seulement définie positive (non négative) autrement LMI est dite non stricte.*
- *Le succès des LMIs vient du développement des méthodes dites du point intérieur qui permettent de résoudre ces problèmes de manière eficace.*

4.1 Problème de faisabilité

Le problème de faisabilité d'une LMI est le problème de trouver l'ensemble des points : $x \in \mathrm{C}$ où

$$\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{R}^n / \mathrm{F}(x) > 0\} \quad \text{qui} \quad \text{vérifient} \quad \text{LMI} : \mathrm{F}(x) > 0, \tag{2.5}$$

alors le problème $\mathrm{F}(x) > 0$ est dit faisable (ou réalisable) et ces points appelées points faisables.

Exemple 2.3 *Les LMIs ne se présentent pas souvent directement sous la forme (2.3) ; Prenons un exemple classique de l'automatique : la stabilité au sens de Lyapunov pour un système linéaire*

$$\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t). \tag{2.6}$$

Il s'agit de trouver une matrice réelle $\mathrm{X} = \mathrm{X}^{\mathrm{T}} > 0$ *de même dimensions que A telle que :*

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} + \mathrm{X}\mathrm{A} < 0 \tag{2.7}$$

Considérons à titre d'exemple le cas où A est une matrice 2×2 *:*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

La matrice symétrique X dépend alors de 3 *paramètres* x_i *avec i = 1, 2, 3. Nous pouvons écrire la matrice* X *sous la forme :*

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

La condition de positivité $\mathrm{X} > 0$ *s'écrit alors,*

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0. \tag{2.10}$$

L'inégalité de Lyapunov $A^T X + XA < 0$, *peut se réécrire sous la forme suivante :*

$$x_1 \begin{bmatrix} 2a_1 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & a_1 + a_4 \\ a_1 + a_4 & a_2 + a_3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ a_3 & 2a_4 \end{bmatrix} < 0. \tag{2.11}$$

Cette inégalité est une LMI affine des éléments : x_1, x_2, x_3.

5 Théorie de la dérivation non entière

5.1 Introduction

Le but de cette partie est de présenter, d'une manière synthétique et unifiée, les éléments sur la théorie du calcul fractionnaire et des systèmes à dérivée d'ordre non entier sur lesquels s'appuient nos travaux décrits dans le chapitre 3.

En premier nous rappelons l'historique du dérivation fractionnaire ensuite, nous exposons de manière exhaustive la théorie de la dérivation fractionnaire tout en passant par les différentes définitions de la dérivation fractionnaire. Une évaluation numérique de la dérivée fractionnaire de quelques fonctions usuelles qui feront le développement d'une analyse des solutions numériques des équations différentielles fractionnaires .

5.2 Historique

Dans la littérature, on attribue souvent le nom de la dérivation fractionnaire à la généralisation de la dérivation à un ordre quelconque, entier ou non entier, réel ou complexe.

L'histoire du calcul fractionnaire commença par une question clé de Leibniz, à qui on doit l'idée de la dérivation fractionnaire. Il introduisit le symbole de dérivation d'ordre n, $\dfrac{d^n y}{dx^n} \equiv D^n y$, où n est un entier positif. Ce fut peut être un jeu naïf des symboles qui poussa l'Hospital à s'interroger sur la possibilité d'avoir n dans $\mathbb{Q}$.Il posa la question : et si $n = \frac{1}{2}$? En 1695, dans une lettre à l'Hospital, Leibniz écrivit prophétiquement : « Ainsi il s'ensuit que $d^{\frac{1}{2}}x$ sera égal un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences ». Sur ces questions, nous retrouvons les contributions de grands mathématiciens tels qu'Euler ou Lagrange au XVIII^e siècle, Laplace, Fourier, Liouville (1832 ; 1837) ou Riemann (1847) au XIX^e siècle, ainsi qu'à Grünwald (1867) et Letnikov (1868) dans la seconde moitié du même siècle. Le paradoxe des définitions distinctes fut résolu par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière. Pour plus de détails historiques, nous renvoyons à [10, 20]. Pendant ces trois dernières décennies, plus d'intérêts ont été prêtés au calcul fractionnaire et les champs d'applications se sont diversifiés.

5.3 Fonctions spécifiques pour la dérivation non entière

Fonctions utiles

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma d'Euler et Mittag-Leffler, qui seront utilisées dans la suite. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

la fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler notée Γ(x), et définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \mathrm{R}e(x) > 0,$$

Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(x)$ est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

qu'on peut démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = [-e^{-t} t^x]_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x).$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$.

La fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle, $e^{\lambda_i t}$, joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler [21, 22] et désignée par la fonction suivante

$$\mathrm{E}_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \tag{2.12}$$

Une extension de la fonction Mittag-Leffler à un paramètre est la fonction suivante.

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\mathrm{B})}, \tag{2.13}$$

est appelé la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.

5.4 Définitions et propriétés

Nous utiliserons dans ce mémoire la notation proposée par Davis [9], à savoir

$$ {}_{a}\mathrm{D}_{t}^{\alpha} f(t) $$

où les réels a et t désignent respectivement la condition initiale et la variable par rapport à laquelle on applique l'opérateur de dérivation fractionnaire.

- "L'équation différentielle fractionnaire" est une équation qui contient une ou des dérivées fractionnaires.
- "Le système fractionnaire" est un système qui est décrit par une équation différentielle fractionnaire.

Nombreuses sont les définitions de cet opérateur de dérivation fractionnaire, malheureusement toutes les définitions proposées ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette partie celle qui est la plus utilisée.

Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Les problèmes appliqués demandent des définitions des dérivés fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, les quelles contiennent f(a), f'(a),etc... Malgré le fait que des problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement. La solution de ses problèmes a été proposé par M.Caputo [7] (dans les années soixante) dans sa défintion qu'il a adapté avec Mainardi dans la structure de la théorie de visco-elastique. Donc on introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville [23].

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction $f(t)$) est définie par la relation suivante

$$ {}_{0}^{C}\mathrm{D}_{t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_{0}^{t} \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \tag{2.14} $$

L'avantage principal de l'approche Caputo est que les conditions initiales de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo des équations différentielles fractionnaires prennent la même forme que dans le cas des équations différentielles d'ordre entier.

5.5 Méthodes opérationnelles fractionnaires

Le calcul opérationnel est un outil souvent utilisé pour la résolution des problèmes d'ingénierie. Il s'avère être puissant et indispensable notamment dans l'étude des systèmes fractionnaires. C'est pourquoi, nous allons rappeler dans ce paragraphe quelques éléments de base de la transformée de Laplace dans le cas entier que nous allons par la suite étendre au cas fractionnaire.

Eléments sur la transformée de Laplace

Soit $\mathrm{F}(s)$, la transformée de Laplace de $f(t)$ définie par

$$\mathrm{F}(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Le produit de convolution des fonctions f et g est donné par

$$f(t) * g(t) = \int_0^{t} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \tag{2.15}$$

La transformée de Laplace de la dérivée de premier ordre de la fonction $f(t)$ a la forme

$$\mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s\mathrm{F}(s) - \mathrm{F}(0^+). \tag{2.16}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\frac{df(t)}{dt}] &= \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-st}df = e^{-st}f\,|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\ &= s\mathrm{F}(s) - f(0^+)\end{aligned} \tag{2.17}$$

■

Généralisant (2.16) pour dérivation d'ordre n nous obtenons

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^{\alpha}}{dt^{n}}f(t)\right] = s^{n}\mathrm{F}(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0^+). \tag{2.18}$$

Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire

La transformée de Laplace de l'intégrale-dérivée (2.14) a la forme

$$\mathscr{L}\left[{}_{0}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_{t}^{\alpha}f(t)\right] = s^{\alpha}\mathrm{F}(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{\alpha-k}f^{(k-1)}(0^+). \tag{2.19}$$

Preuve. En utilisant (2.18), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[{}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha} f(t)\right] &= \mathscr{L}\left[\frac{1}{\tau(n-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{f^{(n)}\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\mathscr{L}\left[t^{n-\alpha-1}\right]\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma(n-\alpha)}{s^{n-\alpha}}\left[s^{n}F(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}f^{(k-1)}(0^{+})\right] \\
&= s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{\alpha-k}f^{(k-1)}(0^{+})
\end{aligned}$$

■

6 conclusion

Ce chapitre a vu l'introduction de quelques concepts fondamentales de la théorie des matrices et du calcul fractionnaire utilisées essentiellement dans notre travail, la théorie de la dérivation non entière a été introduite à partir de quelques rappels sur les fonctions Gamma d'Euler et Mittag-Leffler et sur les différentes définitions et propriétés de la dérivée fractionnaire.

Quelques notions sur les inégalités matricielles linéaires (LMI's) ont été présentées dans le but de leurs exploitations dans la partie du travail laquelle concerne l'étude de l'analyse de la stabilité au sens de Lyapunov.

Chapitre 3

Les systèmes à dérivée d'ordre entier : Stabilité et positivité

1 Introduction

Nous utilisons dans ce chapitre des résultats largement répandus dans la littérature sur la stabilité des systèmes linéaires continus. Il se focalise surtout sur l'étude de la stabilité et la positivité pour les systèmes algébro-différentiels où les conditions pour la stabilité sont étudiés via une approche basée sur les LMIs.

2 Les systèmes linéaires à temps continu

Considérons le système linéaire à temps continu décrit par les équations

$$\dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{B}u, \quad x(0) = x_0 \tag{3.1a}$$

$$y = \mathrm{C}x + \mathrm{D}u \tag{3.1b}$$

où $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état à l'instant t, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y = y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie, $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.
Soit $\mathbb{R}_+^{n\times m}$ l'ensemble des $n \times m$ matrices avec des entrées non négatives et $\mathbb{R}_+^n := \mathbb{R}_+^{n\times 1}$.

Corollaire 3.1 *Si* A *est une matrice de Metzler du système standard* ($\dot{x} = \mathrm{A}x$) *asymptotiquement stable alors* $-\mathrm{A}^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.

3 Positivité des systèmes linéaires

Définition 3.1 *Le système des équations (3.1a) et (3.1b) est appelé intérieurement positif si et seulement si pour toute conditions initiales $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ et chaque $u(t) \in \Re_+^m$, $t \geq 0$ nous avons $x \in \mathbb{R}_+^n$ et $y \in \mathbb{R}_+^p$ pour tous $t \geq 0$.*

Théorème 3.1 *Le système à temps continu dans les équations (3.1a) et (3.1b) est intérieurement positif si et seulement si la matrice* A *est une matrice de Metzler et* $\mathrm{B} \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$, $\mathrm{D} \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$.

Preuve.

- Suffisance :
  La solution de l'équation (3.1a) a la forme (voir [15, 16])

$$x(t) = e^{\mathrm{A}t}x_0 + \int_0^t e^{\mathrm{A}(t-\tau)}\mathrm{B}u(\tau)d\tau \tag{3.2}$$

  Par le théorème (2.1) la matrice $e^{\mathrm{A}t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ si et seulement si A est la matrice de Metzler. Si A est la matrice de Metzler et $\mathrm{B} \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$, $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ pour $t \geq 0$, puis de l'quations (3.2) nous obtenons $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ pout $t \geq 0$ et de l'équation (3.1b) $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$, puisque $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$, $\mathrm{D} \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$.

- Nécessité :
  Soit $u(t) = 0$ pour $t \geq 0$ et $x_0 = e_i$ (la ième colonne de I_n). La trajectoire ne quitte pas le quart $\mathbb{R}_+^n$ seulement si $\dot{x}(0) = \mathrm{A}e_i \geq 0$ ce qui implique $a_{ji} \geq 0$ pour $i \neq j$. La matrice A doit être la matrice de Metzler. Pour les mêmes raisons, pour $x_0 = 0$ nous avons $\dot{x}(0) = \mathrm{B}u(0) \geq 0$ ce qui implique $\mathrm{B} \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$ puisque $u(0) \in \mathbb{R}_+^m$ peut être arbitraire. De l'equation (3.1b)pour $u(0) = 0$ nous avons $y(0) = \mathrm{C}x_0 \geq 0$ et $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$ puisque $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ peut être arbitraire. De la même manière, en supposant que $x_0 = 0$ nous obtenons $y(0) = \mathrm{D}u(0) \geq 0$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$ puisque $u(0) \in \mathbb{R}_+^m$ peut être arbitraire.

■

4 Stabilité des systèmes linéaires

Définition 3.2 *Le système positif (3.1a) pour $u(t) = 0$ est appelé asymptotiquement stable si*

$$\lim_{x\to\infty} x(t) = 0, \quad pour \quad tous \quad x(0) \in \Re_+^n. \tag{3.3}$$

Théorème 3.2 *[17] Le système positif (3.1a) pour $u(t) = 0$ est asymptotiquement stable si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaisante :*

1) *Tous les coefficients du polynôme caractéristique*

$$\mathrm{H}(s) = det[\mathrm{I}_n s - \mathrm{A}] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 \tag{3.4}$$

sont positifs, i.e. $a_i > 0$ *pour* $i = 0, 1, ..., n-1$.

Preuve.

- *Nécessité.*
  Les valeurs propres s_1, s_2, s_n *de* A *sont complexes conjuguées ou réellss puisque les coefficients* a_i *de* $\mathrm{H}(s)$ *sont réels. Donc si Re* $s_i < 0, i =$ *0, l, ..., n-1 alors tous les coefficients du polynôme* $\mathrm{H}(s) = (s - s_1)(s - s_2)...(s - s_n)$ *sont positifs,* $a_i > 0$ *pour i=0,1,...,n-1.*
- *Suffisance.*
  Cela sera prouvé par contradiction. Si A *est une matrice de Metzler alors par la remarque 2.1* $\alpha = \max\limits_i \mathrm{Re} s_i$ *est sa valeur propre et* $\mathrm{Re} s_i < 0$ *si* $\alpha < 0$*. Pour* a_i *pour* $i = 1, 2, ...n-1$ *et réel s nous avons* $\mathrm{H}(s) = \det[\mathrm{I}_n s - \mathrm{A}] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 > 0$ *et* A *n'a pas de réelle valeur propre non négative. Ainsi, nous obtenons la contradiction et* $\alpha < 0$.

■

2) *Tous les principaux mineurs* $\bar{\mathrm{M}}_i, i = 1, ..., n$ *de la matrice* $-\mathrm{A}$ *sont positifs, i.e.*

$$\bar{\mathrm{M}}_1 = | -a_{11} | > 0, \bar{\mathrm{M}}_2 = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{22} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} > 0, ..., det[-\mathrm{A}] > 0 \tag{3.5}$$

Preuve. *Notons que le polynôme caractéristique (3.4) peut être écrit comme* $\mathrm{H}(s) = \det[\mathrm{I}s - \mathrm{A}] = \det[se_1 - a_1, se_2 - a_2, ..., se_n - a_n]$*, où* a_i *et* e_i *sont respectivement les i-ième colonnes de* A *et la matrice* I *d'identité* $n \times n$.
La décomposition du déterminant sur la somme de 2^n *donne des déterminants dont les colonnes sont* $a_1, a_2, .., a_n$ *ou* $se_1, se_2, ..., se_n$*. Parmi eux, nous avons* $\frac{n!}{(n-i)!i!}$ *déterminants, qui contiennent des colonnes de la forme* se_i, $i \in (1, 2, ..., n)$*. Chaque déterminant est égal au principal mineur de l'ordre (n-i)ème de la matrice A. La somme de ces déterminants est égale au terme* $a_i s^i$, $i = 0, 1, ..., n-1$ *de* $\mathrm{H}(s)$*. D'après le théorème de Koteja ski il s'ensuit que si les conditions de l'équation (3.5) sont satisfaites alors tous les principaux mineurs sont positifs, puisque la matrice* $-\mathrm{A}$ *a toutes les entrées non-diagonales non positives pour la matrice de Metzler* A.
Par conséquent, tous les coefficients de $\mathrm{H}(s)$ *sont positifs si et seulement si les conditions de l'équation (3.5) sont satisfaites.* ■

5 Positivité et Stabilité des systèmes singuliers linéaires

Dans cette section, nous proposons une étude du problème de la stabilitée des systèmes linéaires singuliers.

Considérons le système singulier linéaire à temps continu

$$\mathrm{E}\dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{B}u, \tag{3.6}$$

Etant donné que le système (3.28) est singulier (ie : $\det \mathrm{E} = 0$), nous pouvons supposer :

(A1) Le rang de la matrice E vérifie : rg(E)= $n_1 < n$.

(A2) Le faisceau du système (3.28) est régulier, i.e.

$$det[\mathrm{E}s - \mathrm{A}] \neq 0 \quad \text{pour} \quad \text{certains} \quad s \in \mathbb{C}$$

Définissons le nouveau vecteur d'état

$$\bar{x} = \bar{x}(t) = \mathrm{P}^{-1}x(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}, \bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, n_2 = n - n_1 \tag{3.7}$$

et prémultiplions l'équation (3.6) par la matrice $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nous obtenons

$$\mathrm{QEPP}^{-1}\dot{x} = \mathrm{QAPP}^{-1}x + \mathrm{QB}u \tag{3.8}$$

nous aurons deux nouveaux systèmes l'un différentiel et l'autre algébrique

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{\mathrm{A}}_{11}\bar{x}_1 + \bar{\mathrm{A}}_{12}\bar{x}_2 + \bar{\mathrm{B}}_1 u, & (3.9) \\ 0 = \bar{\mathrm{A}}_{21}\bar{x}_1 + \bar{\mathrm{A}}_{22}\bar{x}_2 + \bar{\mathrm{B}}_2 u, & (3.10) \end{cases}$$

où

$$\begin{array}{c} \mathrm{QEP} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathrm{A}} = \mathrm{QAP} = \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{A}}_{11} & \bar{\mathrm{A}}_{12} \\ \bar{\mathrm{A}}_{21} & \bar{\mathrm{A}}_{22} \end{bmatrix}, \bar{\mathrm{A}}_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \\ \bar{\mathrm{A}}_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}, \quad \bar{\mathrm{B}} = \mathrm{QB} = \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{B}}_1 \\ \bar{\mathrm{B}}_2 \end{bmatrix}, \bar{\mathrm{B}}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}, \bar{\mathrm{B}}_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m} \end{array}. \tag{3.11}$$

Les matrices Q et P peuvent être obtenues par l'algorithme suivant[13] :

Algorithm 3.1

(1) Multiplication de la i-ème ligne (colonne) par un nombre réel c. Cette opération sera notée par $\mathrm{L}[i \times c]$ $(\mathrm{R}[i \times c])$.

(2) Ajout à la i-ème ligne (colonne) de la j-ème ligne (colonne) multipliée par un nombre réel c. Cette opération sera notée par $\mathrm{L}[i + j \times c]$ $(\mathrm{R}[i + j \times c])$.

(3) Échange des i-ème et j-ème lignes (colonnes). Ces opérations seront dénotées par $\mathrm{L}[i,j]$ $(\mathrm{R}[i,j])$.

A partir de l'hypothèse (A1), il s'ensuit que la matrice P est une matrice de permutation et $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$. Donc, si $x(t) \in \mathbb{R}_+^n, t \geq 0$ alors $\bar{x}(t) = \mathrm{P}^{-1}x(t) \in \mathbb{R}_+^n, t \geq 0$. La matrice $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ peut être obtenue en effectuant les opérations de lignes élémentaires sur la matrice d'identification I_n (voir l'exemple 3.1).

Théorème 3.3 *Le système singulier linéaire (3.6) satisfaisant aux hypothèses (A1) et (A2) est positif et stable si et seulement si la matrice* $\bar{A} \in M_n$ *est asymptotiquement stable et* $\bar{B} \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$.

Preuve. Si $\bar{A} \in M_n$ est asymptotiquement stable alors $\bar{A}_{22} \in M_{n_2}$ et par le corollaire 3.1 $-\bar{A}_{22}^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n_2\times n_2}$. De l'équation (3.10) nous avons

$$\bar{x}_2 = -\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21}\bar{x}_1 - \bar{A}_{22}^{-1}\bar{B}_2 u. \tag{3.12}$$

Notons que $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}_+^{n_2}$ pour $\bar{x}_1(t) \in \mathbb{R}_+^{n_1}$ $\quad et \quad$ $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$, depuis $-\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21} \in \mathbb{R}_+^{n_2\times n_1}$ et $-\bar{A}_{22}^{-1}\bar{B}_2 \in \mathbb{R}_+^{n_2\times m}$.

La substitution de l'équation (3.12) à l'équation (3.9) donne

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_1\bar{x}_1 + \widehat{B}_1 u, \tag{3.13}$$

où

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21}, \quad \widehat{B}_1 = \bar{B}_1 - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{B}_2. \tag{3.14}$$

De l'hypothèse $\bar{A} \in M_n$, $\bar{B} \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$ et $-\bar{A}_{11} \in \mathbb{R}_+^{n_2\times n_2}$ il s'ensuit que $\bar{A}_1 \in M_{n_1}$, $\bar{B}_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1\times m}$ depuis $\bar{A}_{11} \in M_{n_1}$ et $-\bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21} \in \mathbb{R}_+^{n_1\times n_1}$, $-\bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{B}_2 \in \mathbb{R}_+^{n_1\times m}$.

Donc, $\bar{x}_1(t) \in \mathbb{R}_+^{n_1}$ et $\bar{x}_2(t) \in \mathbb{R}_+^{n_2}$, $t \geq 0$ et le système singulier (3.6) est positif. Prémultiplions l'équation

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \bar{x} \tag{3.15}$$

par la matrice

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & -\bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1} \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

nous obtenons

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \bar{x}. \tag{3.17}$$

De l'équation (3.17), il s'ensuit que la matrice $\bar{A}_1$ est asymptotiquement stable si et seulement si la matrice $\bar{A} \in M_n$ est asymptotiquement stable. ■

Exemple 3.1 *Considérons le système singulier (3.6) avec les matrices*

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ -8 & 3 & -6 & 11 \\ 2 & -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

Le système satisfait les hypothèses (A1) et (A2) puisque la matrice E *n'a que* $n_1 = 2$ *colonnes non nulles et*

$$\det[Es - A] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & s+4 \\ s+3 & -1 & 0 & -1 \\ 2s+8 & -3 & 6 & -2s-11 \\ -2 & 2 & -2 & s+4 \end{bmatrix} = 4s^2 + 22s + 24. \tag{3.19}$$

La matrice de permutation P *a la forme*

$$\mathrm{P}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\tag{3.20}$$

et elle peut être obtenu à partir de I_4 *en effectuant l'opération de colonne* R[2,4].
La matrice

$$\mathrm{Q}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\2&-2&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}\tag{3.21}$$

peut être obtenu à partir de I_4 *en effectuant les opérations de ligne* $\mathrm{L}[1,2], \mathrm{L}[3+1\times(-2)], \mathrm{L}[3+2\times 2]$ *et* $\mathrm{L}[4+2\times(-1)]$.
En utilisant les équations (3.11), (3.15), (3.20) et (3.21) , nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathrm{QEP} &= \begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\2&2&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\2&0&0&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\\
\bar{\mathrm{A}}=\mathrm{QAP} &= \begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\2&2&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2&-4\\-3&1&0&1\\-8&3&-4&11\\2&-2&2&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&1&0&1\\1&-4&2&0\\0&1&-2&1\\1&0&0&-2\end{bmatrix}\\
\bar{\mathrm{B}}=\mathrm{QB} &= \begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\2&0&0&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\1&0\\2&-3\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\\0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\mathrm{B}}_1\\\bar{\mathrm{B}}_2\end{bmatrix}
\end{aligned}\tag{3.22}$$

De l'équation (3.22) il s'ensuit que $\bar{\mathrm{A}}\in \mathrm{M}_4$, $\bar{\mathrm{B}}\in\mathbb{R}_+^{4\times 2}$ *et la matrice* $\bar{\mathrm{A}}$ *est asymptotiquement stables puisque tous ses principaux mineurs sont positifs :*

$$\begin{aligned}
\bar{\mathrm{M}}_1 &= |-a_{11}| = 3>0,\\
\bar{\mathrm{M}}_2 &= \begin{vmatrix}3&-1\\-1&4\end{vmatrix}=11>0,\\
\bar{\mathrm{M}}_3 &= \begin{vmatrix}3&-1&0\\1&4&-2\\0&-1&2\end{vmatrix}=16>0,\\
\bar{\mathrm{M}}_4=\det|-\bar{\mathrm{A}}| &= \begin{vmatrix}3&-1&0&-1\\-1&4&-2&0\\0&-1&2&-1\\-1&0&0&2\end{vmatrix}=24>0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le théorème 3.2 le système singulier avec l'équation (3.18) est positif. En utilisant les équations (3.13), (3.14) et (3.22) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\bar{A}_1 &= \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2.5 & 1 \\ 1.5 & -3 \end{bmatrix}, \\
\widehat{B}_1 &= \bar{B}_1 - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{B}_2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0.5 & 3 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.23}$$

et le système positif du équations (3.13), (3.14) a la forme

$$\dot{\bar{x}}_1 = \begin{bmatrix} -2.5 & 1 \\ 1.5 & -3 \end{bmatrix} \bar{x}_1 + \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0.5 & 3 \end{bmatrix} u \tag{3.24}$$

et sa solution est donnée par

$$\bar{x}_1 = e^{\bar{A}_1 t}\bar{x}_1(0) + \int_0^t e^{\bar{A}_1(t-\tau)}\bar{B}_1 u(\tau)d\tau, \tag{3.25}$$

où

$$e^{\bar{A}_1 t} = \begin{bmatrix} \frac{1.5}{2.5}e^{-1.5t} + \frac{1}{2.5}e^{-4t} & \frac{1}{2.5}e^{-1.5t} - \frac{1}{2.5}e^{-4t} \\ \frac{1.5}{2.5}e^{-1.5t} - \frac{1.5}{2.5}e^{-4t} & \frac{1}{2.5}e^{-1.5t} + \frac{1.5}{2.5}e^{-4t} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

Connaissant la solution $\bar{x}_1(t)$ de l'équation (3.24) et en utilisant l'équation (3.12), nous pouvons trouver

$$\begin{aligned}
\bar{x}_2(t) &= -\bar{A}_{22}\bar{A}_{21}\bar{x}_1(t) - \bar{A}_{22}\bar{B}_2 u(t) \\
&= -\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}_1(t) - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t) \\
&= \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}_1(t) + \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} u(t).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

6 Positivité et Stabilité des systèmes singuliers non linéaires

Considérons le système non linéaire à temps continu

$$E\dot{x} = Ax + f(x, u), \tag{3.28}$$

où $x = x(t) \in \Re^n, u = u(t) \in \Re^m$ sont les vecteurs d'état et d'entrée et ,$\mathrm{E}, \mathrm{A} \in \Re^{n\times n}$ et $f(x,u) \in \Re^n$ est la fonction de vecteur continu de x et u.

Nous supposons que les matrices E et A satisfont aux hypothèses (A1) et (A2) de la section 5.
Définissant le nouveau vecteur d'état par l'équation (3.7) et prémultipliant les deux memebres du système l'équation (3.28) par la matrice Q et P nous obtenons le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\bar{x}} = \bar{\mathrm{A}}\bar{x} + \mathrm{Q}f(x,u) \tag{3.29}$$

où

$$\begin{aligned} \bar{\mathrm{A}} = \mathrm{QAP} = \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{A}}_{11} & \bar{\mathrm{A}}_{12} \\ \bar{\mathrm{A}}_{21} & \bar{\mathrm{A}}_{22} \end{bmatrix}, \bar{\mathrm{A}}_{11} \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}, \bar{\mathrm{A}}_{22} \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}, \\ \mathrm{Q}f(x,u) = \mathrm{Q}f(\mathrm{P}\bar{x},u) = \begin{bmatrix} f_1(\bar{x},u) \\ f_2(\bar{x},u) \end{bmatrix}, f_1(\bar{x},u) \in \mathbb{R}^{n_1}, f_2(\bar{x},u) \in \mathbb{R}^{n_2}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Remarque 3.1 *La matrice* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est dite matrice de permutation généralisée et la matrice* $\mathrm{Q} \in \Re^{n\times n}$ *étant la matrice des opérations élémentaires sur les lignes et sont calculées avec le même algorithme que celui utilisé pour les systèmes singuliers linéaires.*

Nous obtiendrons du système (3.29) un nouveau système de deux equations

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{\mathrm{A}}_{11}\bar{x}_1 + \bar{\mathrm{A}}_{12}\bar{x}_2 + f_1(\bar{x},u) & (3.31) \\ 0 = \bar{\mathrm{A}}_{21}\bar{x}_1 + \bar{\mathrm{A}}_{22}\bar{x}_2 + f_2(\bar{x},u) & (3.32) \end{cases}$$

Théorème 3.4 *Le système linéaire singulier (3.28) satisfaisant aux hypothèses (A1), (A2) est positif si la matrice* $\bar{\mathrm{A}} \in \mathrm{M}_n$ *est asymptotiquement stable et*

$$\begin{bmatrix} f_1(\bar{x},u) \\ f_2(\bar{x},u) \end{bmatrix} \in \Re^n_+ \quad pour \quad \bar{x}(t) \in \Re^n_+ \quad et \quad u(t) \in \Re^m_+, \quad t \geq 0. \tag{3.33}$$

Preuve.

Si $\bar{\mathrm{A}} \in \mathrm{M}_n$ est asymptotiquement stable alors $\bar{\mathrm{A}}_{22} \in \mathrm{M}_{n_2}$ et par le corollaire 3.1 $-\bar{\mathrm{A}}_{22}^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n_2\times n_2}$. De l'équation (3.32) nous avons

$$\bar{x}_2 = -\bar{\mathrm{A}}_{22}^{-1}\bar{\mathrm{A}}_{21}\bar{x}_1 - \bar{\mathrm{A}}_{22}^{-1} f_2(\bar{x},u) \in \mathbb{R}_+^{n_2}, t \geq 0. \tag{3.34}$$

puisque par l'équation (3.33) $f_2(\bar{x},u) \in \mathbb{R}_+^{n_2}, t \geq 0$.
La substitution de l'équation (3.34) en équation (3.31) donne

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{\mathrm{A}}_1\bar{x}_1 + \bar{f}_1(\bar{x},u), \tag{3.35}$$

où $\bar{A}_1$ est définit par l'equation (3.14) et

$$\bar{f}_1(\bar{x}, u) = f_1(\bar{x}, u) - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1} f_2(\bar{x}, u) \in \mathbb{R}_+^{n_1}, t \geq 0 \tag{3.36}$$

puisque l'equation (3.33) est vérifiée.
Par conséquent, $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1}$ et $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}_+^{n_2}$ pour $t \geq 0$ et le système non linéaire singulier (3.28) est positif. ■

Exemple 3.2 *(Suite d'exemple 3.1) Considérons le système non linéaire singulier avec les matrices* E *et* A *données par l'équation (3.18) et*

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} e^{-t}(1-\sin t) \\ \bar{x}_{21}^2 + \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{11}\bar{x}_{22} \\ 1-e^{-t} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^4, \quad t \geq 0, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

En utilisant les équations matricielles (3.20)-(3.11) obtenues dans l'exemple 3.1, nous avons

$$\dot{\bar{x}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{11} \\ \dot{\bar{x}}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 & 1 \\ 1.5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t}(1-\sin t) \\ 1-e^{-t} \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

et

$$\dot{\bar{x}}_2 = \begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t}(1-\sin t) \\ 1-e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{11}\bar{x}_{12} \\ e^{-t} + \bar{x}_{11}^2 \end{bmatrix}. \tag{3.39}$$

Aprés la resolution de système linéaire positif (3.38) pour $\bar{x}_1(0) \in \mathbb{R}_+^2$ donné, nous obtenons $\bar{x}_1(t) \in \mathbb{R}_+^2$ et ensuite de l'équation (3.39) $\bar{x}_2(0) \in \mathbb{R}_+^2, \quad t \geq 0$.

Par conséquent, le système non linéaire singulier est positif.

Définition 3.3 *Le système non linéaire singulier positif (3.28) pour $u = 0$ est appelé asymptotiquement stable dans la région $D \in \Re_+^n$ si $x(t) \in \Re_+^n, \quad t \geq 0$ et*

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \quad pour \quad tous \quad x(0) \in D \tag{3.40}$$

Pour tester la stabilité asymptotique du système non linéaire positif (3.28), l'extension suivante de la méthode de Lyapunov sera utilisée. En tant que fonction candidate de Lyapunov, nous choisissons

$$V(x) = c^T x > 0 \quad pour \quad x = x(t) \in D \in \Re_+^n, t \geq 0 \tag{3.41}$$

où $c \in \Re_+^n$ est un vecteur avec des composants strictement positifs, $c_k > 0$ pour $k = 1, \ldots, n$. Notons que le système non linéaire singulier positif (3.28) est asymptotiquement stable dans $D \in \mathbb{R}_+^n$ si le sous-système non linéaire (3.35) pour $u = 0$ est asymtotiquement stable dans D et

$$\lim_{t\to\infty} f_1(\bar{x}, 0) = 0 \quad pour \quad x(t) \in D. \tag{3.42}$$

En utilisant l'équation (3.41) pour $x = \bar{x}_1$ et l'équation (3.35) nous obtenons

$$\frac{dV(\bar{x}_1)}{dt} = c_1^T \dot{\bar{x}}_1 = c_1^T [\bar{A}_1 \bar{x}_1 + \bar{f}_1(\bar{x}, 0)] < 0 \tag{3.43}$$

pour

$$\bar{A}_1 \bar{x}_1 + \bar{f}_1(\bar{x}, 0) < 0 \quad pour \quad x(t) \in D \tag{3.44}$$

puisque,$c_1 \in \Re_+^{n_1}$ est strictement positif.

Par conséquent, le théorème suivant a été prouvé.

Théorème 3.5 *Le système non linéaire singulier positif (3.28) pour u = 0 est asymptotiquement stable dans la région* $D \in \mathbb{R}_+^n$ *si les conditions (3.42) et la LMI (3.44) sont satisfaites.*

Exemple 3.3 *(Suite des exemples 3.1 et 3.2) Le sous-système positif (3.38) pour* $u = 0$ *est linéaire et asymptotiquement stable pour tout* $\bar{x}_1(0) \in \mathbb{R}_+^2$ *puisque le polynôme caractéristique*

$$\det[I_2 s - \bar{A}_1] = \begin{bmatrix} s+2.5 & -1 \\ -0.5 & s+3 \end{bmatrix} = s^2 + 5.5s + 7. \tag{3.45}$$

a tous les coefficients positifs (théorème 3.2).

Par conséquent la stabilité asymptotyque du système non linéaire (3.18), (3.37) dans la région $D \in \mathbb{R}_+^n$ *est déterminée par l'égalité*

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{11}\bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{11}^2 \end{bmatrix}, \quad pour \quad \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^2 \tag{3.46}$$

ou

$$\bar{x}_{21} = 0.25(\bar{x}_{11} + \bar{x}_{11}^2) + 0.5(\bar{x}_{12} + \bar{x}_{11}\bar{x}_{12}), \quad \bar{x}_{22} = 0.5(\bar{x}_{11} + \bar{x}_{11}^2) \quad pour\, \bar{x}_{11}, \bar{x}_{12} \in \mathbb{R}_+. \tag{3.47}$$

7 conclusion

Dans ce chapitre, l'analyse de stabilité pour des systèmes singuliers linears et non linears a été étudiée.

Pour la classe des systèmes singuliers non lineaires, la stabilité du système est conditionnée par la stabilité du sous-système différentiel où des conditions suffisantes de stabilité ont été proposées grâce à l'utilisation d'une LMI.

Chapitre 4

Les systèmes d'ordre fractionnaire : Stabilité et positivité

1 Introduction

Dans la théorie de la stabilité des systèmes linéaires à temps invariant et à dérivée d'ordre entier, nous savons bien qu'un système est stable si les racines du polynôme caractéristique sont à parties réelles strictement négatives, donc situées sur la moitié gauche du plan complexe. Par ailleurs, dans le cas des systèmes fractionnaires linéaires à temps invariant, la définition de la stabilité est différente des systèmes d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires ou d'ordre non entier peuvent bel et bien avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stables.

2 Système linéaire fractionnaire à temps continu

Considérons le système linéaire à temps continu décrit par l'équation

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{\alpha} x(t) = \frac{d^{\alpha}x(t)}{dt} = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t), \quad 0 < \alpha < 1 \tag{4.1a}$$

$$ y(t) = \mathrm{C}x(t) + \mathrm{D}u(t), \tag{4.1b}$$

où $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état à l'instant t, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y = y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie et $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

3 Solution de l'équation d'état fractionnaire à temps continu

Théorème 4.1 *La solution de l'équation (4.1a) a la forme*

$$x(t) = \Phi_0(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathrm{B}u(\tau)d\tau, \quad x(0) = x_0, \tag{4.2}$$

où

$$\Phi_0(t) = \mathrm{E}_\alpha(\mathrm{A}t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}, \tag{4.3}$$

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \tag{4.4}$$

$\mathrm{E}_\alpha(\mathrm{A}t^\alpha)$ *est la fonction de Mittag-Leffler et $\Gamma(x)$ est la fonction gamma d'Euler.*

Preuve. Par l'application de la transformée de Laplace à (4.1a) et prenant en compte

$$\mathrm{X}(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt \tag{4.5}$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{D}^\alpha x(t)] = s^\alpha \mathrm{X}(s) - s^{\alpha-1}x_0 \tag{4.6}$$

nous obtenons

$$\mathrm{X}(s) = [\mathrm{I}_n s^\alpha - \mathrm{A}]^{-1}[s^{\alpha-1}x_0 + \mathrm{BU}(s)], \quad \mathrm{U}(s) = \mathscr{L}[\mathrm{U}(t)]. \tag{4.7}$$

nous pouvons démontrer que [13]

$$[\mathrm{I}_n s^\alpha - \mathrm{A}]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k s^{-(k+1)\alpha} \tag{4.8}$$

la substitution de (4.8) à (4.7), donne

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k s^{-(k\alpha+1)}x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k s^{-(k+1)\alpha}\mathrm{BU}(s) \tag{4.9}$$

En utilisant la transformée inverse de Laplace et le théorème de convolution a (Chapitre 1), nous obtenons

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathscr{L}[\mathrm{X}(s)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k \mathscr{L}^{-1}[s^{-(k\alpha+1)}]x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k \mathscr{L}^{-1}[s^{-(k+1)\alpha}\mathrm{BU}(s)] \\ &= \Phi_0(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathrm{B}u(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{4.10}$$

où

$$\Phi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k \mathscr{L}^{-1}[s^{-(k\alpha+1)}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1}, $$

$$\Phi(t) = \mathscr{L}^{-1}[\mathrm{I}_n s^\alpha - \mathrm{A}]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k \mathscr{L}^{-1}[s^{-(k+1)\alpha}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}.$$

■

4 Positivité des systèmes fractionnaires

Définition 4.1 *Le système fractionnaire au equations(4.1a) et (4.1b) est appelé (intérieurement) positif si le vecteur d'état $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ et le vecteur de sortie $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ pour toutes les conditions initiales $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et toutes entrées $u(t) \in \mathbb{R}_+^m, \quad t \geq 0$.*

Lemme 4.1 *Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $0 < \alpha < 1$. Alors*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1} \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \quad t \geq 0, \tag{4.11}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \quad t \geq 0. \tag{4.12}$$

si et seulement si $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n$.

Théorème 4.2 *Le système à temps continu fractionnaire (4.1a), (4.1b) est (intérieurement) positif si et seulement si : $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$, $\mathrm{D} \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$.*
Si $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n$ alors

$$\Phi_0(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \quad et \quad \Phi(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \quad pour \quad t \geq 0. \tag{4.13}$$

Preuve.

- Suffisance. D'après le théorème 4.1, la solution de (4.1a) a la forme (4.2) et $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$, $t \geq 0$, si la condition (4.13) est satisfaite puisque $\Phi_0 \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ pour $t \geq 0$.

- Nécessité. Soit $u(t) = 0$, $t \geq 0$ et $x_0 = e_i$ (i-ème colonne de la matrice d'identité I). La trajectoire ne quitte l'orthant $\mathbb{R}_+^n$ que si la dérivée d'ordre α, $x^\alpha(0) = \mathrm{A}e_i \geq 0$ ce qui implique $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$. La matrice A est une matrice de Metzler. De la même raison pour $x_0 = 0$, nous avons $x^\alpha(0) = \mathrm{B}u(0) \geq 0$, ce qui implique $\mathrm{B} \in {}_+^{n\times m}$ puisque $u(0) \in \mathbb{R}_+^m$ peut être arbitraire. De (4.1b) pour $u(t) = 0$, $t \geq 0$ nous avons $y(0) = \mathrm{C}x_0 \geq 0$ et $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$ puisque $x_0 \in \mathbb{R}_+^m$ peut être arbitraire. De la même manière en supposant $x_0 = 0$ nous obtenons $y(0) = \mathrm{D}u(0) \geq 0$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$, puisque $u(0) \in \mathbb{R}_+^m$ est arbitraire.

■

5 Stabilité des systèmes singuliers non linéaires fractionnaires

Nous considérons dans cette section une nouvelle famille de systèmes dits systèmes singuliers à dérivée d'ordre non entier ou systèmes singuliers fractionnaires.

Ces systèmes sont décrits par l'équation différentielle à dérivée fractionnaire suivante

$$E\frac{d^{\alpha}x}{dt^{\alpha}} = Ax + Bu, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{4.14}$$

Les modèles de systèmes de la forme (4.14) sont d'un grand intérêt pour modéliser de nombreux procédés pratiques comme leurs homologues les systèmes singuliers linéaires de la forme $E\dot{x}(t) = Ax(t)$. L'étude de la stabilité du système (4.14) est importante pour comprendre le comportement transitoire du système, en particulier la stabilité asymptotique. Il faut signaler qu'il y a très peu de contributions qui traitent de l'analyse et de la commande des systèmes singuliers fractionnaires.

On suppose que le système (4.14) satisfait aux conditions (A1) et (A2) de la section 5.

Pour le système linéaire, nous introduisons la nouvelle équation du vecteur d'état (3.7) et choisissons la matrice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pour que l'équation (4.14) prenne la forme

$$\begin{cases} \dfrac{d^{\alpha}\bar{x}_1}{dt^{\alpha}} = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\bar{x}_2 + \bar{B}_1 u, \quad \bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, & (4.15) \\ \quad 0 \quad = \bar{A}_{21}\bar{x}_1 + \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{B}_2 u, \quad \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, & (4.16) \end{cases}$$

où $\bar{A}_{11}, \bar{A}_{12}, \bar{A}_{21}, \bar{A}_{22}$ et $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$ sont définis par l'equation (3.11). Les matrices P et Q peuvent être obtenues en utilisant des opérations de lignes et de colonnes élémentaires de la même manière que pour le système linéaire (3.6).

Théorème 4.3 *Le système singulier linéaire fractionnaire (4.14) satisfaisant aux hypothèses (A1) et (A2) est positif si la matrice $\bar{A} \in M_n$ est asmptotiquement stable et $\bar{B} \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$.*

Preuve. l'idée principale de la preuve est similaire à la preuve du théorème (3.3) Dans ce cas, au lieu de la dérivée première du vecteur d'état, la dérivée fractionnaire d'ordre α devrait être utilisée. ■

Considérons maintenant le système fractionnaire singulier non linéaire à temps continu

$$E\frac{d^{\alpha}x}{dt^{\alpha}} = Ax + f(x,u), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{4.17}$$

où $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ sont les vecteurs d'état et d'entrée et $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $f(x,u) \in \mathbb{R}^n$ est la fonction fectorielle continue en x et en u. il est supposé que E, A satisfont aux hypothèses (A1) et (A2) et de la même manière que pour le système (3.28), nous définissons la nouvelle équation du vecteur d'état (3.7) et prémultiplions l'équation (4.17) par la matrice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nous obtenons

$$\mathrm{QEPP}^{-1}\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = \mathrm{QAPP}^{-1}x + \mathrm{Q}f(x,u), \tag{4.18}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{d^\alpha \bar{x}_1}{dt^\alpha} = \bar{\mathrm{A}}_{11}\bar{x}_1 + \bar{\mathrm{A}}_{12}\bar{x}_2 + f_1(\bar{x},u), & (4.19)\\ 0 \quad = \bar{\mathrm{A}}_{21}\bar{x}_1 + \bar{\mathrm{A}}_{22}\bar{x}_2 + f_2(\bar{x},u), & (4.20) \end{cases}$$

où $\bar{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{A}}_{11} & \bar{\mathrm{A}}_{12} \\ \bar{\mathrm{A}}_{21} & \bar{\mathrm{A}}_{22} \end{bmatrix}$ est définis par l'equation (3.11) et $\begin{bmatrix} f_1(\bar{x},u) \\ f_2(\bar{x},u) \end{bmatrix}$ par l'equation (3.30).

Théorème 4.4 *Le système non linéaire singulier fractionnaire (4.17) satisfaisant aux hypothèses (A1), (A2) est positif si la matrice $\bar{\mathrm{A}} \in \mathrm{M}_n$ est asymptotiquement stable et l'équation (3.33) est vérifiée.*

Preuve. L'idée principale de la preuve est similaire à la preuve du Théorème 3.2. Dans ce cas, au lieu de la dérivée première du vecteur d'état, la dérivée fractionnaire d'ordre α devrait être utilisée ■

Exemple 4.1 *Considérons le système non linéaire fractionnaire (4.17) avec*

$$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, f(x,u) = \begin{bmatrix} -(3+2\bar{x}_{11}^2)e^{-t} \\ (2+\bar{x}_{11}^2)e^{-t} \\ (1-e^{-t})\bar{x}_{11}e^{-t} \end{bmatrix}, \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \end{bmatrix}, u = e^{-t}. \tag{4.21}$$

Il est facile de vérifier que le système non linéaire fractionnaire satisfait aux hypothèses (A1), (A2) et $n_1 = 1, n_2 = 2$.

Dans ce cas les matrices Q *et* P *ont les formes*

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

et peut être obtenu en effectuant des opérations élémentaires de lignes et de colonnes sur I_3.

En utilisant les équations (4.21) et (4.22), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathrm{QEP} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{QAP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \\ \bar{x} = \mathrm{P}^{-1}x &= \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \end{bmatrix}, \mathrm{Q}f(\bar{x}, u) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ \bar{x}_{11}^2 e^{-t} \\ \bar{x}_{11}(1-e^{-t}) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.23}$$

et

$$\frac{d^\alpha \bar{x}_{11}}{dt^\alpha} = e^{-t}, \tag{4.24}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \bar{x}_{11} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{x}_{11}^2 e^{-t} \\ \bar{x}_{11}(1-e^{-t}) \end{bmatrix}. \tag{4.25}$$

La solution de l'équation fractionnaire (4.24) a la forme

$$\begin{aligned} \bar{x}_{11}(t) &= \Phi_0(t)x_0 + \int_0^t \Phi(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= x_0 + \frac{e^{-t}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} e^{\tau} d\tau \geq 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.26}$$

De l'équation (4.25), nous avons

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \bar{x}_{11} + \begin{bmatrix} \bar{x}_{11}^2 e^{-t} \\ \bar{x}_{11}(1-e^{-t}) \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \bar{x}_{11} + \begin{bmatrix} (\bar{x}_{11}^2 - \bar{x}_{11})e^{-t} + \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{11}(1-e^{-t}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^2, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.27}$$

De l'équation (4.26) et (4.27), il s'ensuit que le système non linéaire fractionnaire est positif mais pas asymptotiquement stable.

Si $\bar{A} \in M_n$ est asymptotiquement stable alors $\bar{A}_{22} \in M_{n_2}$ et par le corollaire 3.1 nous avons $\bar{A}_{22}^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times n_2}$ et à partir de l'équation (4.20) nous obtenons

$$\bar{x}_2 = -\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21}\bar{x}_1 - \bar{A}_{22}^{-1} f_2(\bar{x}, u). \tag{4.28}$$

En substituant l'équation (4.28) dans l'équation (4.19), nous obtenons

$$\frac{d^\alpha \bar{x}_1}{dt^\alpha} = \bar{A}_1 \bar{x}_1 + \bar{f}_1(\bar{x}, u), \tag{4.29}$$

où

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21}, \quad \bar{f}_1(\bar{x}, u) = f_1(\bar{x}, u) - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1} f_2(\bar{x}, u). \tag{4.30}$$

Définition 4.2 *Le système non linéaire fractionnaire positif (4.17) pour $u = 0$ est appelé asymptotiquement stable dans la région $\mathrm{D} \in \mathbb{R}_+^n$ si $x(t) \in \mathbb{R}_+^n, \quad t \geq 0$ et*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \quad pour \quad tous \quad x(0) \in \mathrm{D}. \tag{4.31}$$

Pour tester la stabilité asymptotique de l'équation (4.17), l'extension suivante de la méthode de Lyapunov sera utilisée.

En tant que fonction candidate de Lyapunov, nous choisissons l'équation (3.41). Notons que c'est la fonction linéaire du vecteur d'état x et $c \in \mathbb{R}_+^n$ est strictement positif.

Pour le système non linéaire positif (4.17), le théorème de stabilité de Lyapunov peut être énoncé comme suit : Le système non linéaire fractionnaire positif (4.17) est asymptotiquement stable dans $\mathrm{D} \in \mathbb{R}_+^n$ si le sous-système non linéaire (4.19) est asymptotiquement stable dans la région $\mathrm{D} \in \mathbb{R}_+^n$ et si la condition (3.43) est satisfaite.
En utilisant l'équation (3.41) pour $x = \bar{x}_1$ et l'équation (4.29), nous obtenons

$$\frac{d^\alpha \mathrm{V}(\bar{x}_1)}{dt^\alpha} = c_1^{\mathrm{T}} \frac{d^\alpha \bar{x}_1}{dt^\alpha} = c_1^{\mathrm{T}} [\bar{\mathrm{A}}_1 \bar{x}_1 + \bar{f}_1(\bar{x}, 0)] < 0 \tag{4.32}$$

pour

$$\bar{\mathrm{A}}_1 \bar{x}_1 + \bar{f}_1(\bar{x}, 0) < 0 \quad pour \quad x(t) \in \mathrm{D} \in \mathbb{R}_+^n \tag{4.33}$$

puisque $c_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1}$ est strictement positif.

Par conséquent, le théorème suivant a été prouvé.

Théorème 4.5 *Le système non linéaire singulier fractionnaire (4.14) satisfaisant aux hypothèses (A1), (A2) pour $u = 0$ est asymptotiquement stable dans la région $\mathrm{D} \in \mathbb{R}_+^n$ si les conditions (4.31) et (4.33) sont satisfaites.*

Exemple 4.2 *(Suite de l'exemple 4.1) Il résulte de l'équation (4.26) que $\bar{x}_{11}(t)$ ne diminue pas à zéro pour $t \longrightarrow \infty$ puisque $x_0 = \bar{x}_{11}(0) \neq 0$. En substituant $u = e^{-t} = 0$ dans l'équation (4.27) nous obtenons*

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \bar{x}_{11}. \tag{4.34}$$

Par conséquent, le système non linéaire fractionnaire (4.17) avec l'équation (4.21) n'est pas asymptotiquement stable.

Corollaire 4.1 *Les conditions suffisantes pour la stabilité asymptotique des systèmes non linéaires singuliers positifs sont indépendantes de l'ordre de α de l'équation différentielle décrivant le système (sont les mêmes pour $\alpha = 1$ et $0 < \alpha < 1$).*

Notons que pour les systèmes non linéaires positifs, le choix de la fonction de Lyapuno comme forme linéaire du vecteur d'état x est indépendant de l'ordre α. Par conséquent, la fonction lyapunov pour $0 < \alpha < 1$ a la même forme.

Dans le cas particulier pour les systèmes linéaires positifs, le système fractionnaire ($0 < \alpha < 1$*) est asymptotiquement stable si et seulement si le système standard* ($\alpha = 1$) *est asymptotiquement stable.*

6 conclusion

Revenons un instant sur les différents points abordés dans ce chapitre. Premièrement, nous avons abordé la stabilité en temps fini des systèmes fractionnaires singuliers linéaire et non linéaires avec une dérivée d'ordre $0 < \alpha < 1$. Des conditions sufisantes pour la stabilité asymptotique de ses systèmes de type Lyapunov ont été dérivées où l'approche en formulation LMI a été decrite.

Nous avons scellé ce chapitre en disant que le système fractionnaire ($0 < \alpha < 1$) est asymptotiquement stable si et seulement si le système standard ($\alpha = 1$) est asymptotiquement stable.

Chapitre 5

Conclusion générale et perspectives

L'ensemble de ce mémoire est dévolu à la stabilité des systèmes positifs singuliers standards et fractionnaires de type linéaire et non linéaire.

Le chapitre 1 a fait l'objet d'un rappels de quelques notions fondamentales de la théorie des matrices et du calcul fractionnaire. Nous y avons rappelé quelques propriétés de la théorie des matrices et quelques grandes notions du calcul fractionnaire au sens de Caputo ainsi que de l'analyse fractionnaire qui feront l'objectif de développemnt des chapitres futurs .

Le chapitre 2 nous plonge dans le vif du sujet. nous avons étudié la stabilité et la positivité des systèmes à dérivée d'ordre entière. Nous nous sommes intéressé à la stabilité des systèmes singuliers standard, les conditions de stabilité sont obtenues grâce à L'approche proposée — via les 'LMIs — nous avons illustré le résultat par un exemple numérique.

Enfin, le troisième chapitre du mémoire est dédié à la stabilité des systèmes singuliers standard et fractionnaires où nous avons conclu que pour le cas particulier des systèmes linéaires positifs, le système fractionnaire ($0 < \alpha < 1$) est asymptotiquement stable si et seulement si le système standard ($\alpha = 1$) est asymptotiquement stable.

Perspectives Ce travail ouvre la voie à d'autres développements sur les systèmes non linéaires standard et fractionnaires qui restent ouverts. Cependant, des extensions peuvent être apportées à notre travail. Nous pouvons notamment proposer les perspectives suivantes :

- la recherche de nouvelles fonctions de Lyapunov adaptées aux systèmes non linéaires fractionnaires
- l'extension des considérations aux systèmes standards et fractionaires singuliers li-

neares et non linéaires à temps discret.

Enfin, il serait intéressant de valider les résultats présentés dans ce mémoire sur des processus réels.

Bibliographie

[1] **Bapat. R.B, RaghavanT .E.S,** *Nonnégative matrices and applica-tions", Encyclopédia of mathematics and its applications 64,* Cambridge University press,1977. 3

[2] **Berman.A, Neumann.M , Stern. R.J**, *Nonnegative matrices in dynamic systems*, John Wiley and Sons, 1989. 3

[3] **Berman. A, Plemmons. R.J.T,** *Nonnegative matrices in the mathemati-cal sciences*, Academic Press, 1979. 3

[4] **Berman. A, Neumann. Stern. M, R.J.**, *Nonnegative matrices in dy-namic systems*, John Wiley and Sons, 1989. 4

[5] **Berman. A, Plemmons. R.J,***Nonnegative matrices in the mathematical sciences,* Academic Press, 1979. 4

[6] **BOUAGADA. D,** *Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs.* Thèse de Doctorat d'état, centre d'Ingénierie des Systèmes, d'Automatique et de Mécanique Appliquée-UCL. Louvain-La-Neuve- Belgique. 6

[7] **Caputo. M.***Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent.* 10

[8] **Cobb. D,** *Singular control systems (Lecture Note in Control and Information Sciences)* Springer-Verlag, 1989. 6

[9] **Davis. H.T.** *The Theory of Linear Operators. Principia Press*, Bloomington, USA, 1936. 10

[10] **Dugowson. S**. *Les Différentielles Métaphysiques : Histoire et Philosophie de la Généralisation de l'Ordre de Dérivation* .PhD thesis, Université de Paris XIII, Villetaneuse , France, 1994. 8

[11] **Gantmacher. F.R,***Théorie Des Matrices Tom 1,* Edition Dunod, Paris 1966. 5

[12] **Ghezzar. M.A,** *Analyse et synthèse synthèse de certaines classe de systèmes bidimentionnels fractionnaires et/ou singuliers.* Thèse de doctorat en contrôle. 6

[13] **Kaczorek.T,** *Positive 1D and 2D Systems,* Springer-Verlag, London, 2002. 1, 5, 16, 25

[14] **Kaczorek.T,** *Positive linear systems and their relationship with electrical circuits,*XX-SPETO : 33-41. 1997. 4

[15] **Kaczorek.T,,***Canonical forms of singular 1D and 2D linear systems, The Second International Workshop on Multidimensional (nD) systems (NDS-2000),*June 27-30, 2000, Czocha Castle, Lower Silesia, Poland, pp. 189-196. 14

[16] **Kaczorek.T,** *Determination of realisations in canonical forms for singular linear,* Polsko-Ukrainska Szkola-Seminarium, Solina 11-13 .IX.2000, pp.47-51. 14

[17] **Kaczorek.T,,** *Selected problems of fractional systems theory,*Springer-Verlag, Berlin, 2011. 14

[18] **Krasovskii, N.(1963). Stability of motion.** Stanford University Press. 2

[19] **Lewis. F.L,**Descriptor systems : *Decomposition into forward and backward subsystems IEEE,* Trans. Automat. Control 29 : (1984), pp. 167-170.

[20] **Miller. K.S and Ross. B.** *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.*John Wiley Sons Inc, New York, 1993. 8

[21] **Mittag-Leffler. G.M.***Sur la nouvelle fonction* $E_\alpha(x)$ C. R. Académie des Sciences, 137 :554–558, 1903. 9

[22] **Mittag-Leffler. G.M.***Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogène.* Acta Mathematica, 29 :101–182, 1905. 9

[23] **Sabatier. J, Merveillaut. M, Malti. R, and Oustaloup. A.***How to impose physically coherent initial conditions to a fractional system ?* Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 10 :1318–1326, 2010. 10

[24] **Szidarovsky. F and Bahill. A.T,** *Linear systems theory* (CRC Press, London, 1992). 3

[25] **Trigeassou. J.C, Maamri. N, J. Sabatier, and A. Oustaloup.***A Lyapunov approach to the stability of fractional differential equations.* 2