REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS – MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques et Informatique

MASTER

=−=−=−=−=−=−=−=−=−*o* ◯ *o*−=−=−=−=−=−=−=−=−=

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Ordre De Croissance Des Solutions Des Equations Différentielles

Présentée par : **ALEM AICHA**

Soutenue devant le jury composé de **:**

Président	:	Dr Belarbi Lakehal	MCA	UMAB
Examinateur	:	Dr Andasmas Maamar	MCB	UMAB
Encadreur	:	Dr FETTOUCH Houari	MCB	UMAB

juin 2019

Remerciements

Tout d'abord

Je remercie Allah pour m'avoir guidé vers le chemin du savoir et de la lumière. Pour m'avoir donné courage et volonté pour pouvoir réaliser ce modeste travail.

Je ne peux exprimer par les mots :
Le sens de mes remerciements pour ma mère et mon père : que serais-je sans leurs permanents soutiens dans ma vie.

Je remercie ensuite
Dr Fettouch Houari pour sa patience et ses conseils pour la réalisation de ce mémoire. Que mes profondes reconnaissances vont vers lui.

Mes gratitudes et mes remerciements
Pour le docteur Maamar. Andasmas, pour avoir accepter de présider le Jury de la soutenance. Aussi, je remercie le docteur Lakehal. Belarbi le membre de jury qui a accepté d'éxaminer le ravail.

Ainsi que pour
L'ensemble des enseignants qui m'ont encadré soutenus et encouragés durant ma formation et par qui j'ai appris à apprécier les mathématiques.

Merci à
Toute personne m'ayant aidé, soutenue, ou encouragé de prés ou encouragé de prés ou de loin.

Table des matières

INTRODUCTION

La théorie de Nevanlinna joue un rôle très important dans la théorie des fonctions, en particulier dans l'étude des propriétés des solutions des équation différentielles complexes notammenent la croissance et l'oscillation des solution. En effet de puis 1925, l'année où R.Nevanlinna a publié les résultats de ses travaux sur la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes, les chercheurs ne cessent de publier dans le même thématique et plusieurs problèmes ont été étudiés et résolus. Des liens étroits avec d'autres domaines sont mis en évidence, en particulier avec la théorie analytique des équations différentielle.

Ce mémoire se compose d'une introduction et de deux chapitres.

Le premier chapitre présente une introduction à la théorie de R.Nevanlinna, dans lequel on donne des notations, définitions et résultats dont on aura besoin dans le deuxième chapitre.

Le deuxième chapitre consiste à étudier l'ordre de croissance des solutions des équations différentielles linéaires dant les coéfficients sont des fonctions entières.

Chapitre 1

Introduction à la théorie de R.Nevanlinna

Dans ce chapitre, on va présenter les notions de base nécéssaire et donner quelques définitions et résultats dont on aura besoin tout au long de notre travail.

1.1 Formule de Poisson-Jensen et Formule de Jensen

Théorème 1.1.1 *([7, 1], **Formule de Poisson -Jensen**) Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le domaine $|z| < R$ $(0 < \infty \leq R)$ non identiquement nulle, et $a_\lambda(\lambda = 1, 2, ..., h)$ $($respectivement $b_\mu(\mu = 1, 2, ..., k))$ ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors dans le disque $|z| < \rho$ on a*

$$\begin{aligned}\log|f(z)| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(\rho e^{i\theta})\right| \mathrm{Re}\left(\frac{\rho e^{i\theta}+z}{\rho e^{i\theta}-z}\right) d\theta \\ &\quad -\sum_{\lambda=1}^{h} \log\left|\frac{\rho^2-\overline{a_\lambda}z}{\rho(z-a_\lambda)}\right| + \sum_{\mu=1}^{k} \log\left|\frac{\rho^2-\overline{b_\mu}z}{\rho(z-b_\mu)}\right|.\end{aligned}$$

Nevanlinna appelé cette formule la formule de Poisson-Jensen.
Le cas où f n'admet ni zéros ni plôes généralement la formule s'appelle la formule de Poisson.
Le cas où $z = 0$ s'appelle la formule de Jensen.

Théorème 1.1.2 *([7, 6], **Formule de Jensen**) Soit f une fonction méromorphe telle que $f(z) \not\equiv 0, \infty$ et $a_1, a_2, ..., a_n$ (respectivement $b_1, b_2, ..., b_n$) ses zéros (respectivement ses poles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta + \sum_{|bj|<r} \log\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r} \log\frac{r}{|a_j|}.$$

Preuve. On démontre le théorème dans le cas où f n'admet ni zéros ni pôles sur le cercle $|z| = r$. Considérons la fonction

$$g(z) = f(z) \prod_{|a_j|<r} \frac{r^2 - \overline{a_j} z}{r(z - a_j)} \left(\prod_{|b_j|<r} \frac{r^2 - \overline{b_j} z}{r(z - b_j)} \right)^{-1}.$$

On a $g \neq 0, \infty$ dans le disque $|z| < r$ et $\log |g(z)|$ est une fonction harmonique. D'après la formule de la moyenne, on a

$$\log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| g\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta.$$

D'autre part,

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{|a_j|<r} \frac{r}{|a_j|} \left(\prod_{|b_j|<r} \frac{r}{|b_j|} \right)^{-1}$$

d'où

$$|g(0)| = \log |f(0)| + \sum_{|a_j|<r} \log \frac{r}{|a_j|} - \sum_{|b_j|<r} \log \frac{r}{|b_j|}.$$

Pour $z = re^{i\theta}$, on a

$$\left| \frac{r^2 - \overline{a_j} z}{r(z - a_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \overline{a_j} re^{i\theta}}{r(re^{i\theta} - a_j)} \right| = \left| \frac{e^{i\theta}(re^{-i\theta} - \overline{a_j})}{re^{i\theta} - a_j} \right| = 1$$

et

$$\left| \frac{r^2 - \overline{b_j} z}{r(z - b_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \overline{b_j} re^{i\theta}}{r(re^{i\theta} - b_j)} \right| = \left| \frac{e^{i\theta}(re^{-i\theta} - \overline{b_j})}{re^{i\theta} - b_j} \right| = 1.$$

D'où $\left|g(re^{i\theta})\right| = \left|f(re^{i\theta})\right|$. D'où, on obtient le formule de Jensen.

1.2 Fonction caractéristique de R.Nevalinna

Fonction a-points

Définition 1.2.1 *[1] Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leq t$. Chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité et par $n(t, \infty, f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$. On définit*

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \log r, \qquad a \neq \infty$$

et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r,$$

où $N(r, f)$ est appelée la fonction a-points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$.

Fonction de proximité

Définition 1.2.2 *[1] Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe. Alors, on définit la fonction de proximité de la fonction f par*

$$m(r,a,f) = m(r, \frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^r \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta, \ a \neq \infty$$

et $m(r,f)$ est appelée fonction de proximité de la fonction f au point a.

Fonction caractéristique de R.Nevanlinna

Définition 1.2.3 *[1] On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction f par*

$$T(r,\infty,f) = T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Exemple 1.2.1 *Pour la fonction $f(z) = e^{-z}$, Nous avons $n(t,f) = 0$ n'admet pas des pôles, par conséquent*

$$N(r,f) = 0$$

De plus

$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|e^{-r\cos\theta}\right| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \log^+ |e^{-r\cos\theta}| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-r\cos\theta) d\theta \\ &= \frac{r}{\pi} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} T\left(r, e^{-z}\right) &= m(r, e^{-z}) \\ &= \frac{r}{\pi} \end{aligned}$$

Exemple 1.2.2 *Pour la fonction $f(z) = e^z/z$, cette fonction admet un pôle simple $z = 0$. Alors*

$$\begin{aligned} N(r,f) &= \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt + n(0,\infty,f)\log r \\ &= \int_0^r \frac{1-1}{t} dt + \log r \\ &= \log r \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
m\left(r,f\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log^{+}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log^{+}\left|\frac{e^{r\cos\theta}}{r}\right|d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{e^{r\cos\theta}}{r}\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r\cos\theta d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log r d\theta \\
&= \frac{r}{\pi}-\frac{1}{2}\log r.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
T\left(r,e^{z}/z\right) &= m(r,e^{z}/z)+N(r,e^{z}/z) \\
&= \frac{r}{\pi}-\frac{1}{2}\log r+\log r \\
&= \frac{r}{\pi}+\frac{1}{2}\log r.
\end{aligned}$$

Exemple 1.2.3 *Pour la fonction* $f(z)=e^{az},\ a\neq 0,$ *On a* $m(r,f)=\frac{|a|r}{\pi}$, $N(r,f)=0$
D'où

$$T(r,f)=\frac{|a|r}{\pi}.$$

Proposition 1.2.1 *[7] Soit f un fonction méromorphe, f est rationnelle si seulement si*

$$T(r,f)=O(\log r).$$

Proposition 1.2.2 *[7] Soit f une fonction méromorphe avec le developpment de Laurent*

$$f(z)=\sum_{j=m}^{+\infty}c_j z^j, c_m\neq 0, m\in\mathbb{Z}.$$

Alors

$$\log|c_m|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta+N(r,f)-N(r,\frac{1}{f}).$$

Preuve du proposition (1.2.2)**.** On Considère la fonction

$$h(z)=f(z)z^{-m},\ z\in\mathbb{C}$$

il est clair que $m = n(0,0,f) - n(0,\infty,f)$ et $h(0) \neq 0,\ \infty$. la fonctions h et f ont les même pôles et zéros dans le disque $0 < |z| \leq r$. Par la formule de Jensen on obtient

$$\begin{aligned}
\log|c_m| &= \log|h(0)| \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|h(re^{i\varphi})\right| d\varphi + \sum_{|b_k|<r} \log\left(\frac{r}{|b_k|}\right) - \sum_{|a_i|<r} \log\left(\frac{r}{|a_i|}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})r^{-m}\right| d\varphi \\
&\quad + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi + -m\log r \\
&\quad + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi + -\left[n(0,0,f) - n(0,\infty,f)\right]\log r \\
&\quad + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right).
\end{aligned}$$

Définition 1.2.4 *[7] Pour tout réel $x \geq 0$, on définit*

$$\log^+ x = \max(\log x, 0) = \begin{cases} \log x, & si\ x > 1, \\ 0, & si\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Il est clair que

$$\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x},\ \ x \geq 0.$$

Lemme 1.2.1 *[7] On a les propriétés suivantes*

a)

$$\log x \leq \log^+ x$$

b)

$$\log^+ x \leq \log^+ y \ (si\ 0 < x < y).$$

c)

$$\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}.$$

d)

$$|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}.$$

e)

$$\log^+(\prod_{i=1}^{n} x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i.$$

f)

$$\log^+(\sum_{i=1}^{n} x_i) \leq \log n + \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i.$$

Preuve du Lemme (1.2.1). Montrons *c*) *d*) *e*) et *f*)
c) On a

$$\begin{aligned}\log^+ x - \log^+ \frac{1}{x} &= \max(\log x, 0) - \max(\log \frac{1}{x}, 0)\\ &= \max(\log x, 0) - \max(-\log x, 0)\\ &= \max(\log x, 0) + \min(\log x, 0)\\ &= \log x.\end{aligned}$$

d) On a

$$\begin{aligned}\log^+ x + \log^+ \frac{1}{x} &= \max(\log x, 0) + \max(-\log x, 0)\\ &= \max(\log x, 0) - \min(\log x, 0)\\ &= |\log x|.\end{aligned}$$

e) Si $\prod_{i=1}^{n} x_i \leq 1$, alors l'inégalité est évidente.

Supposons que $\prod_{i=1}^{n} x_i > 1$. Alors

$$\begin{aligned}\log^+(\prod_{i=1}^{n} x_i) &= \log(\prod_{i=1}^{n} x_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \log x_i.\end{aligned}$$

f) On a d'après *b*) et *e*)

$$\begin{aligned}\log^+(\sum_{i=1}^{n} x_i) &\leq \log^+(n \max_{1\leq i\leq n} x_i)\\ &\leq \log n + \log^+ \max_{1\leq i\leq n} x_i\\ &\leq \log n + \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i.\end{aligned}$$

Proposition 1.2.3 *[7] Soient f, f_1, f_2, . . . , f_n des fonctions méromorphes. Alors*

$$\begin{array}{lrcl}
a) & m\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \log n. \\
b) & m\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i). \\
c) & N\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i). \\
d) & N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i). \\
e) & T\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \log n, n \geq 1. \\
f) & T\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i), n \geq 1. \\
g) & T(r, f^n) & = & nT(r, f),\ n\epsilon\mathbb{N}^*.
\end{array}$$

Preuve Montrons e) f) g)
e) On a si z_0 est un pôle de degré λ_i pour la fonction f_i, alors il est de degré égale au plus $\max_{1\leq i\leq n} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ pour la fonction $\sum_{i=1}^{n} f_i$. Alors

$$N(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i)$$

et

$$\begin{aligned}
m(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\sum_{i=1}^{n} f_i\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\sum_{i=1}^{n} f_i\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + \log n \\
&= \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \log n.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
T(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) &= m(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) + N(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \log n.
\end{aligned}$$

f) On a

$$\begin{aligned} m(r,\prod_{i=1}^{n}f_i) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\prod_{i=1}^{n}f_i(re^{i\theta})\right|d\theta \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f_i(re^{i\theta})\right|d\theta \\ &= \sum_{i=1}^{n}m(r,f_i). \end{aligned}$$

si z_0 est un pôle de degré λ_i pour la fonction f_i, alors z_0 est un pôle de la fonction $\prod_{i=1}^{n}f_i$ de degré égale au plus $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$. Donc

$$N(r,\prod_{i=1}^{n}f_i) \leq \sum_{i=1}^{n}N(r,f_i).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} T(r,\prod_{i=1}^{n}f_i) &= m(r,\prod_{i=1}^{n}f_i) + N(r,\prod_{i=1}^{n}f_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(m(r,f_i)+N(r,f_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n}T(r,f_i). \end{aligned}$$

g) On a $|f^n| = |f|^n \leq 1 \iff |f| \leq 1$. Alors si $|f| \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} m(r,f^n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f^n\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta = 0 \\ N(r,f^n) &= nN(r,f) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} T(r,f^n) &= m(r,f^n)+N(r,f^n) = nN(r,f) \\ &= n(m(r,f)+N(r,f)) = nT(r,f). \end{aligned}$$

Si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned} m(r,f^n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f^n(re^{i\theta})\right|d\theta = n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta \\ &= nm(r,f) \end{aligned}$$

et

$$N(r, f^n) = nN(r, f).$$

Donc

$$\begin{aligned} T(r, f^n) &= m(r, f^n) + N(r, f^n) = n(m(r, f) + N(r, f)) \\ &= nT(r, f) \end{aligned}$$

Proposition 1.2.4 *[7] Si f est une fonction méromorphe non-constante, et si*

$$g = \frac{af + b}{cf + d},$$

tels que a, b, c, et d sont des constantes avec $ad - bc \neq 0$, alors

$$T(r, g) = T(r, f) + O(1).$$

Preuve. Si $c = 0$, alors

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{af + b}{d}\right) &= T\left(r, \frac{a}{d}f + \frac{b}{d}\right) \\ &\leq T(r, \frac{a}{d}) + T(r, f) + T(r, \frac{b}{d}) + \log 2 \\ &\leq T(r, f) + \log^+ \left|\frac{a}{d}\right| + \log^+ \left|\frac{b}{d}\right| + \log 2 \\ &= T(r, f) + O(1) \end{aligned}$$

Si $c \neq 0$, alors on écrit

$$\begin{aligned} \frac{af + b}{cf + d} &= \frac{a(f + \frac{b}{a})}{c(f + \frac{d}{c})} = \frac{a}{c} \frac{f + \frac{d}{c} + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{f + \frac{d}{c}} \\ &= \frac{a}{c}\left[1 + \frac{bc - ad}{ac} \frac{1}{f + \frac{d}{c}}\right] \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{f + \frac{d}{c}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{af + b}{cf + d}\right) &= T\left(r, \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{f + \frac{d}{c}}\right) \\ &\leq \log^+ \left|\frac{a}{c}\right| + \log^+ \left|\frac{bc - ad}{c^2}\right| + T(r, f + \frac{d}{c}) + \log 2 + O(1) \\ &\leq T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

1.3 Premier théorème fondamental de R.Nevanlinna

Avant d'énoncer le premier théorème fondamental de R.Nevanlinna on a besoin d'utiliser les lemmes suivants

Lemme 1.3.1 *Soit f une fonction méromorphe avec a-points ; $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ dans le disque $|z| \leq r$ tels que $0 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq ... \leq |\alpha_n| \leq r$. Alors*

$$\int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t} dt = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt = \sum_{|\alpha j| \leq r} \log \frac{r}{|\alpha j|}$$

Théorème 1.3.1 *[7] (Premier théorème fondamental) Soit f une fonction méromorphe avec le dévelopement de Laurent de $f - a$ $(a \in \mathbb{C})$ à l'origine,*

$$f(z) - a = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j, \quad c_m \neq 0, \quad m \epsilon \mathbb{Z}, \quad z \epsilon \mathbb{C}.$$

Alors

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - \log|c_m| + \varphi(r,a)$$

où $|\varphi(r,a)| \leq \log^+|a| + \log 2$.

Preuve Montrons le théorème pour $a = 0$, d'après la Proposition (1.2.2) et Lemme (1.2.1) $c)$ on a

$$\begin{aligned}
\log|c_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})|} d\theta + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= m(r,f) - m(r,0,f) + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
T\left(r, \frac{1}{f}\right) &= m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) \qquad (1.1) \\
&= m(r,f) + N(r,f) - \log|c_m| \\
&= T(r,f) - \log|c_m| \qquad (I)
\end{aligned}$$

où $\varphi(r,a) = 0$.

Montrons le théorème dans le cas général $a \neq 0$. Posons $h = f - a$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{h}\right) &= N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \\ m\left(r, \frac{1}{h}\right) &= m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \\ N\left(r, h\right) &= N(r, f-a) = N(r, f). \end{aligned}$$

On a

$$\log^+ |h| = \log^+ |f - a| \leq \log^+ |f| + \log^+ |a| + \log 2. \tag{1.2}$$

$$\log^+ |f| = \log^+ |h + a| \leq \log^+ |h| + \log^+ |a| + \log 2. \tag{1.3}$$

En intégrant les deux relations (1.2) et (1.3) on aura

$$m(r, h) \leq m(r, f) + \log^+ |a| + \log 2.$$

$$m(r, f) \leq m(r, h) + \log^+ |a| + \log 2.$$

Posons $\varphi(r, a) = m(r, h) - m(r, f)$, on obtient

$$-(\log^+ |a| + \log 2) \leq \varphi(r, a) \leq \log^+ |a| + \log 2 \Leftrightarrow |\varphi(r, a)| \leq \log^+ |a| + \log 2.$$

D'après (I), on a

$$\begin{aligned} T(r, \frac{1}{f-a}) &= T(r, \frac{1}{h}) = m(r, \frac{1}{h}) + N(r, \frac{1}{h}) \\ &= m(r, h) + N(r, h) - \log |c_m| \\ &= m(r, f) + \varphi(r, a) + N(r, f) - \log |c_m| \\ &= T(r, f) + \varphi(r, a) - \log |c_m| . \end{aligned}$$

Où $\varphi(r, a) \leq \log^+ |a| + \log 2$.

Remarque 1.3.1 *Le premier théorème fondamental peut être formulé comme suit : Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors pour tout $a \in \mathbb{C}$*

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) + O(1), \quad r \to \infty$$

Exemple 1.3.1 *On a*

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \\ &= -i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \frac{-ie^{2iz} + i}{e^{2iz} + 1}. \end{aligned}$$

D'après la Propositoion (1.2.4) *on a*

$$\begin{aligned} T(r, \tan z) &= T(r, e^{2iz}) + O(1) \\ &= \frac{2r}{\pi} + O(1) \end{aligned}$$

1.4 L'ordre et le type de croissance d'une fonction

Définition 1.4.1 *[7] Soit f une fonction entière. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par*

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r},$$

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r},$$

où $M(r,f) = \max\{|f(z)|, |z| = r\}$. Si f est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis par

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 1.4.1 *La fonction $g(z) = \exp\{\exp z\}$ est d'ordre $\rho(g) = \infty$ et d'hyper ordre $\rho_2(g) = 1$.*

Exemple 1.4.2 *La fonction $g(z) = \exp(z^n)$ est d'ordre $\rho(g) = n$ et d'hyper ordre $\rho_2(g) = 0$.*

Exemple 1.4.3 *Soit $f(z) = \frac{\exp(z)}{z}$, on a $T(r,f) = \frac{r}{\pi} + O(\log r)$. De plus*

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\exp(z)}{z}\right) &= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\left[\frac{r}{\pi} + O(\log r)\right]}{\log r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log \frac{r}{\pi}\left[1 + O(\frac{\log r}{r})\right]}{\log r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log r + \log\left(1 + O(\frac{\log r}{r}) - \log\pi\right)}{\log r} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_2\left(\frac{\exp(z)}{z}\right) &= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\ln r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\left[\frac{r}{\pi} + O(\log r)\right]}{\ln r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log \frac{r}{\pi}\left[1 + O(\frac{\log r}{r})\right]}{\ln r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\left[\log r - \log\pi + \log\left[1 + O(\frac{\log r}{r})\right]\right]}{\ln r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log r\left[1 - \frac{\log\pi}{\log r} + \frac{\log\left[1+O(\frac{\log r}{r})\right]}{\log r}\right]}{\ln r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log r + \log\left[1 - \frac{\log\pi}{\log r} + \frac{\log\left[1+O(\frac{\log r}{r})\right]}{\log r}\right]}{\log r} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Remarque 1.4.1 *Si f est d'ordre fini, Alors l'hyper-ordre de cette fonction est nulle.*

Mesure linéaire et logarithmique

Définition 1.4.2 *[7] La mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty[$ est définie par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E et la mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty[$ est définie par

$$L_m(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt.$$

Exemple 1.4.4 *La mesure linéaire de l'ensemble $E = [1, 2[\subset [0, +\infty[$ est*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)dt = \int_1^2 dt = 1$$

Exemple 1.4.5 *La mesure linéaire de l'ensemble $E = [2, 6] \cup [7, 8] \subset [0, \infty)$ est*

$$m(E) = \int_0^{\infty} \chi_E(t)\, dt = \int_2^6 dt + \int_7^8 dt = 5.$$

Exemple 1.4.6 *La mesure linéaire de l'ensemble $E = \mathbb{N}$ est nulle, de plus la mesure linéaire de chaque ensemble dénombrable est nulle.*

Exemple 1.4.7 *La mesure logarithmique de l'ensemble $F = [1, 5] \subset [1, \infty)$ est*

$$lm(F) = \int_1^{\infty} \chi_F(t) \frac{dt}{t} = \int_1^5 \frac{dt}{t} = \log 5.$$

1.5 L'exposant de convergence des zéros

Définition 1.5.1 *[7] Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros de la fonction f respectivement par*

$$\lambda(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

$$\lambda_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(r, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

tel que $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq r$.

1.6 Deuxième théorème fondamental de Nevanlinna

Afin de prouver le deuxième théorème fondamentale de R. Nevanlinna, on a besoin d'abord du lemme suivant.

Lemme 1.6.1 *[7] Soit f une fonction méromorphe non constante sur $|z| < R$ et a_j $(j = 1, 2, ..., q)$ des nombres complexes finis distincts. Alors l'égalité*

$$m\left(r, \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{f - a_j}\right) = \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + O(1) \tag{1.4}$$

est vrai pour $0 < r < R$.

Théorème 1.6.1 *[7] Soit f une fonction méromporphe non-constante dans le disque $|z| < R$ et a_j $(j = 1, 2, ..., q)$ des nombres complexes finis distincts. Alors pour $0 < r < R$, on a*

$$m(r, f) + \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) \leq 2T(r, f) - N_1(r) + S(r, f), \tag{1.5}$$

où

$$N_1(r) = 2N(r, f) - N(r, f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right), \tag{1.6}$$

et

$$S(r, f) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \sum_{j=1}^{q} \frac{f'}{f - a_j}\right) + O(1). \tag{1.7}$$

Preuve du Thèorème (1.6.1)**.** Soit

$$F(z) = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{f(z) - a_j}$$

D'après le Lemme (1.6.1), on a

$$m(r, F) = \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + O(1), \tag{1.8}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} m(r,F) &\le m(r,f'F)+m\left(r,\frac{1}{f'}\right) \\ &\le m(r,f'F)+T\left(r,\frac{1}{f'}\right)-N\left(r,\frac{1}{f'}\right) \\ &\le m(r,f'F)+T(r,f')-N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+O(1). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Comme

$$\begin{aligned} T(r,f') &= m(r,f')+N(r,f') \\ &\le m(r,f)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+N(r,f') \\ &\le T(r,f)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+N(r,f')-N(r,f), \end{aligned} \tag{1.10}$$

il resulte de (1.7) − (1.9) que

$$m(r,f)+\sum_{j=1}^{q} m\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right) \le 2T(r,f)-\left\{2N(r,f)-N(r,f')+N\left(r,\frac{1}{f'}\right)\right\}$$

$$+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\sum_{j=1}^{q}\frac{f'}{f-a_j}\right)+O(1),$$

ce cqui complète la preuve du Théorème (1.6.1).

1.7 L'éstimation de $S(r,f)$

Nous avons besoin d'éstimer le terme $S(r,f)$, c'est a dire on a besoin d'étudier la croissance du $m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)$. dans cette section on va introduire un lemme qui s'apelle le lemme des dérivées logarithmiques .

Lemme 1.7.1 *[1] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non-constante et pour k un entier positif dans le plan complexe. Si f est d'ordre fini, Alors*

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)=O(\log r),\quad (r\to\infty).$$

Si f est d'ordre infini, alors

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)=O(\log(rT(r,f))),\quad (r\to\infty,\ r\notin E_0),$$

où E_0 est un ensemble de mésure linéaire ne dépasse pas 2

Définition 1.7.1 *[1] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non-constante dans le plan complexe, on définit la quantité $S(r, f)$ par*

$$S(r, f) = o(T(r, f)), \quad (r \to \infty).$$

Si f est d'ordre fini, et

$$S(r, f) = o(T(r, f)), \quad (r \to \infty, \ r \notin E_0),$$

où E_0 est un ensemble de mésure linéaire finie si f est d'ordre infini.

Chapitre 2

Ordre de croissance des solutions des équations différentielles

2.1 Introdution et résultats

De nombreaux auteurs [2, 3, 5] ont étudié l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$f'' + h_1(z)e^{p(z)}f' + h_0(z)e^{Q(z)}f = 0 \tag{2.1.1}$$

où $p(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes non constants, $h_1(z)$ et $h_0(z)$ $(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières telles que $\rho(h_1) < \deg p$ et $\rho(h_0) < \deg Q$. Gundersen a montré dans [[5], p. 419] que si $\deg p \neq \deg Q$, alors toute solution non constante de l'équation (2.1.1) est d'ordre infini. si $\deg p = \deg Q$, alors l'équation (2.1.1) peut avoir des solutions non constantes d'ordre fini. En effet, $f(z) = z$ satisfait l'équation

$$f'' - z^3\ e^z f' + z^2 e^z f = 0 \tag{2.1.2}$$

Z.X. chen et K.H. Shon ont également étudié la croissance des solutions des équations différentielles linéaires du second ordre et ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 2.1.1 *[3] soient $A_j(z)(\not\equiv 0)$ $(j = 0, 1)$ des fonctions entières avec $\rho(A_j) < 1$, a et b des constantes complexes telles que $ab \neq 0$ et $\arg a \neq b$ ou $a = cb$ $(0 < c < 1)$.*
Alors toute solution $f(\not\equiv 0)$ de l'équation différentielle

$$f'' + A_1(z)e^{az}f' + A_0(z)e^{bz}f = 0 \tag{2.1.3}$$

est d'ordre infini.

En 2008, Wong et laine [10] ont étudié l'équation différentielle linéaire non homogène

$$f'' + A_1(z)e^{az}f' + A_0(z)e^{bz}f = H, \tag{2.1.4}$$

où $A_j(z)$ $(j = 0,\ 1)$ sont des fonctions entières et a, b sont des constantes complexes et ils ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 2.1.2 *[10] supposons que $A_j(z)(\not\equiv 0)$ $(j = 0, 1)$ et H sont des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à 1 et les constantes complexes a, b vérifie $ab \neq 0$ et $b \neq a$ Alors toute solution nontrivale f de l'équation (2.1.4) est dordre infini. considérons maintenant l'équation différentielle linéaire non homogène*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + ...A_1(z)f' + A_0(z)f = H, \tag{2.1.5}$$

où $k \geq 2$ est un nombre entier, $A_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ et $H(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières d'ordre fini. Il est bien connu que toutes les solutions de l'équation (2.1.5) sont des fonction entières et si certains des coefficients sont des fonctions transcendantes, alors la plupart des solutions de l'équation (2.1.5) sont d'ordre infini.

Alors une question naturelle qui se pose est : quelles conditions sur $A_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ et H garantira que chaque solution de l'équation (2.1.5) sont d'ordre infini ?
Wong et Laine [11] ont étudié le problème et ont prouvè le résultat suivant qui généralise le Théorème 2.1.2 pour l'équations différentielles linéaire d'ordre supérieur :

Théorème 2.1.3 *[11] supposons que $A_j(z) = h_j(z)e^{p_j(z)}$ $(j = 0, ...k-1)$, où $p_j(z) = a_{jn}z^n + ...a_{j0}$ sont des polynômes de degré $n \geq 1$, $h_j(z)$ sont des fonctions entières non toutes nulles d'ordre strictement inférieur à n, et $H \not\equiv 0$ est une fonction entière d'ordre strictement inférieur à n. si les nombres complexes $a_{jn}(j = 0, ...k-1)$ sont distincts, alors toutes les solutions de l'équation (2.1.5) sont d'ordre infini.*

Exemple 2.1.1 *considérons l'équation différentielle :*

$$f^{(3)} + \sin ze^{2z^3}f'' + e^{4z^3+z}f' + ze^{5z^3-1}f = e^z \tag{2.1.1}$$

on a
$n = 3$; $a_{23} = 2$; $a_{13} = 4$ et $a_{03} = 5$ sont distincts et d'ordre $\rho(e^z) = 1 < 3$, Donc, les conditions du Théoréme (2.1.3) sont vérifiées. Alors toutes les solutions de l'équation 2.1.1 sont d'ordre infini.

Ils ont également considéré l'équation (2.1.5) dans le même article et ont étudié l'ordre de croissance de leurs solutions transcendantes. Ils ont démontré les deux résultats suivants :

Théorème 2.1.4 *[11] supposons que $A_j(z) = h_j(z)e^{p_j(z)}$ $(j = 0, ...k-1)$, où $p_j(z) = a_{jn}z^n + ...a_{j0}$ sont des polynômes de degré $n \geq 1$, $h_j(z)$ et $H \not\equiv 0$ sont des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à n. De plus, supposons qu'il existe deux coefficients A_s et A_l telle que $a_{sn} = |a_{sn}|e^{i\theta_s}$ et $a_{lm} = |a_{lm}|e^{i\theta_l}$, où $0 \leqslant s < l \leqslant k-1$, θ_s, $\theta_l \in [0, 2\pi)$, $\theta_s \not\equiv \theta_l$, $h_sh_l \not\equiv 0$ et pour $j \not\equiv s$, l, $a_{jn} = d_ja_{sn}$ $(0 < d_j < 1)$ ou $a_{jn} = d_ja_{lm}$ $(0 < d_j < 1)$. Alors toute solution transcendante de l'équation (2.1.5) est d'ordre infini.*

Exemple 2.1.2 *considérons l'équation différentielle :*

$$f^{(3)} + e^{iz^2+1}f'' + e^{\frac{1}{2}z^2+z}f' + e^{\frac{1}{4}z^2-z}f = e^{2z+1} \tag{2.1.2}$$

On a
$n = 2$; $a_{22} = i$; $a_{12} = \frac{1}{2}i$; $a_{02} = \frac{1}{4}i$; $a_{12} = \frac{1}{2}a_{22}$; $a_{02} = \frac{1}{4}a_{22}$ *et* $\rho(e^{2z+1}) = 1 < 2$,
Donc, les conditions du Théorème (2.1.4) sont vérifiées. Alors toute solution transcedante de l'équation 2.1.2 est d'ordre infini.

Théorème 2.1.5 *[11] supposons que* $A_j(z) = h_j(z)e^{p_j(z)} + g_j(z)$ $(j = 0...k-1)$, *où* $p_j(z) = a_{jn}z^n + ... + a_{j0}$ *sont des polynôme de degré* $n \geq 1$, $h_j(z)$, $g_j(z)$ *et* $H \not\equiv 0$, *sont des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à* n. *En outre, supposons qu'il existe* $a_{sn} = d_s e^{i\varphi}$ *et* $a_{lm} = -d_l e^{i\varphi}$ *avec* $d_s > 0$, $d_l > 0$ *et* $0 \leq s \leq k-s$ *tels que pour* $j \not\equiv s$, l, $a_{jn} = d_j e^{i\varphi}(d_j \geq 0)$ *ou* $a_{jn} = -d_j e^{i\varphi}(d_j \geq 0)$ *et* $\max\{d_j : j \neq s, l\} = d < \min\{d_s, d_l\}$. *si* $h_s h_l \not\equiv 0$, *alors chaque solution transcendante de l'équation* (2.1.5) *est d'ordre infini.*

Exemple 2.1.3 *considérons l'équation différentielle :*

$$f^{(4)} + e^{\frac{1}{2}iz^2+3}f^{(3)} + e^{2iz^2+z}f'' + e^{-3iz^2}f' + e^{\frac{1}{4}iz^2-z+3}f = 0 \tag{2.1.3}$$

On a

$n = 2$; $a_{32} = \frac{1}{2}i$; $a_{22} = 2i$; $a_{12} = -3i$; *et* $a_{02} = \frac{1}{4}i$.

ainsi

$$\begin{aligned} l &= 1 \Longrightarrow a_{12} = -3i = -3e^{i\frac{\pi}{2}} \\ s &= 2 \Longrightarrow a_{22} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

de plus on a

$$a_{32} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}; a_{02} = \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

et

$$\max\{d_3, d_0\} = \frac{1}{2} < \min\{2, 3\} < 2.$$

Alors chaque solution transcendente de l'équation 2.1.3 *est d'ordre infini.*

Remarque 2.1.1 *sous les hypothèses du Théorème* (2.1.5), *des solution polyônmiales peuvent exister. par exemple, l'équation*

$$f^{(4)} + (e^{3z}+1)f^{(3)} + (e^{-2z}+3z)f'' + (ze^z+3)f' - (e^z+2)f = 3 - 2z$$

admet le polynôme $f(z) = z$ *comme solution.*

Remarque 2.1.2 *Dans les trois Théorèmes précédents, si* $\rho(f) = \infty$, *alors on a oussi* $\lambda(f) = \infty$. *En effet, en réécrivant* (2.1.5) *dans la forme suivante*

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{H}\left(\frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f} + ... + A_0\right), \tag{2.1.6}$$

on a

$$m(r, \frac{1}{f}) \leq m(r, \frac{1}{H}) + \sum_{j=0}^{k-1} m(r, A_j) + \sum_{j=0}^{k-1} m(r, \frac{f^{(j)}}{f}) = o(r^B) + s(r, f) \tag{2.1.7}$$

pour un certain B *fini. par conséquent,* $N(r, \frac{1}{f})$ *doit etre d'ordre infini.*

2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.2.1 *[12] supposons que $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$ $(n \geqslant 2)$ sont des fonctions méromorphes et $g_1(z)$, $g_2(z)$, ..., $g_n(z)$ sont des fonctions entières vérifiant les conditions suivantes :*
(i) $\sum_{j=1}^{n} f_j(z)e^{g_j(z)} \equiv 0$
(ii) $g_j(z) - g_k(z)$ *ne sont pas constantes pour* $1 \leq j < k \leq n$,
(iii) pour $1 \leq j \leq n, 1 \leq h < k \leq n$,

$$T(r, f_j) = o\{T(r, e^{g_h - g_k})\}, (r \to \infty, r \notin E) \tag{2.2.1}$$

où E est un ensemble de mesure linéaire finie
Alors

$$f_j \equiv 0 \ (j = 1, 2, ...n) \tag{2.2.2}$$

Lemme 2.2.2 *[12] supposons que $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$ $(n \geq 2)$ sont des fonctions méromorphes linérement indépendantes vérifiant l'égalité suivante :*

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \equiv 1 \tag{2.2.3}$$

Alors pour $1 \leq j \leq n$, on a

$$T(r, f_j) \leq \sum_{j=1}^{k} N(r, \frac{1}{f_k}) + N(r, f_j) + N(r, D) - \sum_{k=1}^{n} N(r, f_k) - N(r, \frac{1}{D}) + S(r) \tag{2.2.4}$$

où D est le déterminant Wronskien $W(f_1, f_2, ..., f_n)$,

$$S(r) = o(\max_{1 \leq k \leq n}\{T(r, f_k)\}), (r \to \infty, r \notin E) \tag{2.2.5}$$

E est un ensemble de mesure linéaire finie.

Lemme 2.2.3 *[9] supposons $P(z) = (\alpha + i\beta)z^n + ...(\alpha, \beta$ sont des nombres réels, $|\alpha| + |\beta| \neq 0)$ est un polynôme de degré $n \geq 1$ et que $A(z) \not\equiv 0$ est un fonction entière avec $\rho(A) < n$, $g(z) = A(z)e^{p(z)}$, $z = re^{i\theta}$, $\delta(p, \theta) = \alpha \cos(n\theta) - \beta \sin(n\theta)$. Alors pour tout $\varepsilon \geq 0$, il existe un ensemble $H_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire finie telle que pour tout $\theta \in [0, 2\pi \backslash (H_1 \cup H_2)$, il existe $R > 0$ tel que pour $|z| = r > R$, on ait*
(i) si $\delta(p, \theta) > 0$, alors

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta(p, \theta)r^n\} < |g(re^{i\theta})| < \exp\{(1 + \varepsilon)\delta(p, \theta)r^n\}, \tag{2.2.6}$$

(ii) si $\delta(p, \theta) < 0$, alors

$$\exp\{(1 + \varepsilon)\delta(p, \theta)r^n\} < |g(re^{i\theta})| < \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(p, \theta)r^n\}, \tag{2.2.7}$$

où

$$H_2 = \{\theta \in [0, 2\pi); \ \delta(p, \theta) = 0\}. \tag{2.2.8}$$

Lemme 2.2.4 *[4] soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini ρ et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $H \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| \notin H \cup \pi[1, \infty]$ et pour tout $0 \leq j < k$, on ait*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\epsilon)} \tag{2.2.9}$$

De même, il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que pour tout $z = re^{i\theta}$ avec $|z|$ suffisamment grand et $\theta \in [0, 2\pi) \backslash E$ et pour tout K, j $(0 \leq j < K)$, l'inégalité (2.2.8) soit vérifiée.

Lemme 2.2.5 *[11] soit f(z) une fonction entière. supposons que*

$$G(z) = \frac{\log^+ \left|f^{(K)}(z)\right|}{|z|^\rho} \tag{2.2.10}$$

n'est pas bornée sur un certain rayon $\arg z = \theta$ avec une constante $\rho > 0$. Alors il existe une suite infini de points $\{z_n = r_n e^{i\theta}\}$ $(n = 1, 2, ...)$, où $r_n \to \infty$ telle que $G(z) \to \infty$ et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_n)}{f^K(z_n)}\right| \leq \frac{1}{(K-j)}(1 + o(1))r_n^{K-1}, \ j = 0, ..., K-1 \tag{2.2.11}$$

quant $n \to \infty$.

preuve. posons

$$M(r, G, \theta) = \max\{G(z) : 0 \leq |z| \leq r, \arg z = \theta\} \tag{2.2.12}$$

on peut prendre la suite $\{z_n\}$ dans la première assertion telle que

$$G(z_n) = M(r_n, G, \theta) \tag{2.2.13}$$

comme

$$G(z_n) \to \infty \tag{2.2.14}$$

quand $n \to \infty$, on voit immédiatement que

$$\left|f^{(k)}(z_n)\right| = M(r_n, f^{(k)}, \theta) \to \infty \tag{2.2.15}$$

quand $n \to \infty$. En utilisant maintenant le même raisonnement que dans la preuve du ([5],lemme 4), voir aussi ([8], lemme 3.1), la deuxième assertion (2.2.10) est vérifiée

Lemme 2.2.6 *[11] soit $f(z)$ une fonction entière avec $\rho(f) = \rho < \infty$. supposons qu'il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que*

$$\log^+ \ |f(re^{i\theta})| \leq Mr^\sigma \tag{2.2.16}$$

pour tout rayon $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \backslash E$, où M est une constante positive dépendant de θ et σ est une constante positive indépendante de θ. Alors $\rho(f) \leq \sigma$.

preuve. De toute évidence, nous pouvons supposer que $\sigma < \rho$ comme E est de mesure linéaire nulle, nous pouvons choisir

$$\theta_j \in [0, 2\pi) \backslash E \tag{2.2.17}$$

tel que

$$0 \leq \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_{n+1} = 2\pi \tag{2.2.18}$$

et

$$\max\{\theta_{j+1} - \theta_j, 1 \leq j \leq n\} \leq \frac{\pi}{\rho + 1}. \tag{2.2.19}$$

Nous étudions d'abord le sécteur

$$H_1 = \{z : \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\} \tag{2.2.20}$$

Définissons

$$\Phi(z) = f(z) \exp\{-be^{i\theta_0} z^\sigma\}, \tag{2.2.21}$$

où

$$\theta_0 = \frac{\sigma(\theta_1 + \theta_2)}{2} \tag{2.2.22}$$

et b est une constante positive qu'on peut déterminer. Alors $\Phi(z)$ est holomorphe à l'intérieur du secteur H_1. De (2.2.19), on a

$$\rho \leq \frac{\pi}{(\theta_2 - \theta_1) - 1} \tag{2.2.23}$$

par conséquent,

$$0 > \arg(e^{-i\theta_0} z^\sigma) = \arg(e^{-i\theta_0} r^\sigma e^{i\sigma\theta_1}) = \frac{\sigma(\theta_1 - \theta_2)}{2} \geq \frac{-\pi}{2} + \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2} \tag{2.2.24}$$

sur le rayon $\arg z = \theta_1$ et respectivement

$$0 < \arg(e^{-i\theta_0} z^\sigma) = \arg(e^{-i\theta_0} r^\sigma e^{i\sigma\theta_2}) = \frac{\sigma(\theta_1 - \theta_2)}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2} \tag{2.2.25}$$

sur le rayon $\arg z = \theta_2$. Ainsi on peut maintenant fixer $b > 0$ de telle façon que

$$b \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2}\right) > M. \tag{2.2.26}$$

par un calcul élémentaire, $|\Phi(z)| \leq M$ sur la frontière de H_1, où $M > 0$ est une constante bornée par le même à chaque occurrence. Par la définition de Φ dans (2.2.21), il est immédiat de voir que Φ est d'ordre ou plus que ρ. Par le théorème de Phragmén-Lindelof, on conclut que

$$|\Phi(z)| \leq M \tag{2.2.27}$$

est vérifiée sur tout l'endemble du secteur H_1. Ainsi

$$|f(z)| \leq |\exp\{be^{-i\theta_0}z^{\sigma}\}| \leq \exp\{br^{\sigma}\}$$

dans H_1. En répétant le même raisonnement pour tous les secteurs

$$H_j = \{z : \theta_j \leq \arg z \leq \theta_{j+1}\}, \tag{2.2.28}$$

où θ_j sont déterminés dans (2.2.18), l'affirmation immédiatement est vérifiée.

2.3 Preuves des théorèmes

Preuve du Théorème 2.1.3

supposons que f est une solution de (2.1.5) avec $\rho(f) = \rho < \infty$. Alors $n \leq \rho$. si $f^{(k)} = H$, on peut appliquer le Lemme (2.2.1) pour conclure que $h_s f^{(s)} \equiv 0$ pour un certain s, $(0 \leq s \leq k-1)$ tel que $h_s \not\equiv 0$. Alors f est un polynôme de degré inférieur à s et donc $H \equiv 0$; c'est une contraduction. Ainsi on peut supposer que $f^{(k)} \not\equiv H$. Par Le lemme (2.2.2), il facile de voir que $n \leq \rho$ puisque les fonctions exponentielles $e^{p_j}(j = 0, 1, ..k-1)$ sont linéairement indépendantes. D'après le Lemme (2.2.3), il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$. de mesure linéaire tel que à chaque fois que $\theta \in [0, 2\pi)\backslash E$, alors $\delta(P_j, \theta) \neq 0$ pour tout $0 \leq j \leq k-1$ et $\delta(P_j - P_i, \theta) \neq 0$ pour tout i, j avec $0 \leq i < j \leq k-1$. si $z = re^{i\theta}$ avec r assez grand, alors chaque $A_j(z)$ vérifie les deux inégalité (2.2.5) ou (2.2.6). D'après le Lemme (2.2.4), on peut supposer que

$$\left|\frac{f^j(z)}{f^j(z)}\right| \leq |z|^{k\rho}, 0 \leq i < j \leq k \tag{2.3.1}$$

comme a_{jn} sont des nombres complexes distincts, alors pour tout $\theta \in [0, 2\pi)\backslash E$ fixé, il existe précisément un $s \in \{0, ..., k-1\}$ tel que

$$\delta(p_s, \theta) = \delta : \quad = \max\{\delta(p_j, \theta) : j = 0, ..., k-1\} \tag{2.3.2}$$

Notons

$$\delta_1 = \max\{\delta(p_j, \theta) : j \neq s\}. \tag{2.3.3}$$

Alors $\delta_1 < \delta$ et $\delta \neq 0$. on discute maintenant deux cas :
cas 1. supposons d'abord que $\delta > 0$. D'après le Lemme (2.2.3), pour tout ε donné ε avec

$$0 < 3\varepsilon < \min\{(\delta - \delta_1)\backslash\delta, n - \rho(H)\}, \tag{2.3.4}$$

on a

$$|A_s(re^{i\theta})| \ \geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta r^n\} \tag{2.3.5}$$

$$|A_j(re^{i\theta})| \ \geq \exp\{(1+\varepsilon)\delta_1 r^n\}$$

pour $j \neq s$ et r suffisamment grand. On va maintenant montrer que

$$\frac{\log^+ |f^{(s)}(z)|}{|z|^{\rho(H)+\varepsilon}} \tag{2.3.6}$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. En supposant le contraire, alors d'aprés le Lemme (2.2.5) il y a une suite des points $\{z_m = r_m e^{i\theta}\}$ telle que $r_m \to +\infty$ et

$$\frac{\log^+ |f^{(s)}(z_m)|}{r_m^{\rho(H)+\varepsilon}} \to \infty \tag{2.3.7}$$

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \leq (1+o(1))r_m^{s-j}(j = 0, ...s-1). \tag{2.3.8}$$

D'après (2.3.7) et la définition de l'ordre, il est facile de voir que

$$\left|\frac{H(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \to 0 \tag{2.3.9}$$

pour m est assez grand. De (2.1.5), on obtient

$$\begin{aligned} |A_s(z_m)| \quad \leq \quad & \left|\frac{f^{(k)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + ... + |A_{s+1}(z_m)| \left|\frac{f^{(s+1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + |A_{s-1}(z_m)| \left|\frac{f^{(s-1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + \\ & ... + |A_0(z)| \left|\frac{f'(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + \left|\frac{H(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \end{aligned}$$

En utilisant (2.3.1),(2.3.5), (2.3.8), et la limite (2.3.9), on conclut de l'inégalité précédente que

$$\exp\{(1-\varepsilon_1)\delta r_m^n\} \leq (k+1)\exp\{(1+\varepsilon_1)\delta_1 r_m^n\} r_m^M, \tag{2.3.11}$$

où $M > 0$ est une constante bornée. ce qui est une contradiction. par conséquent,

$$\frac{\log^+ |f^{(s)}(z)|}{|z|^{\rho(H)+\varepsilon}} \tag{2.3.12}$$

est bornée, et on a

$$|f^{(s)}(z)| \leq M \exp\{r^{\rho(H)+\varepsilon}\} \tag{2.3.13}$$

sur le rayon $\arg z = \theta$. Par le même raisonnement que dans la Preuve du ([7], Lemme 3.1), on peut immédiatement conclure que

$$|f^{(s)}(z)| \leq (1+o(1))r^s |f^{(s)}(z)| \leq (1+o(1))Mr^s e^{r^{\rho(H)+2\varepsilon}} \leq Me^{r^{\rho(H)+2\varepsilon}} \tag{2.3.14}$$

sur le rayon. $\arg z = \theta$.

cas 2. supposons maintenant que $\delta < 0$. De (2.1.5), on a

$$-1 = A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f^{(k)}} + ... + A_j \frac{f^{(j)}}{f^{(k)}} + ... + A_0 \frac{f'}{f^{(k)}} - \frac{H}{f^{(k)}} \tag{2.3.15}$$

D'après le lemme (2.2.3), on a pour tout ε donné avec

$$0 < 3\varepsilon < \min\{1, n - \rho(H)\} \tag{2.3.16}$$

$$|A_j(re^{i\theta})| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta r^n\} \ (j = 0, 1, ..., k-1) \tag{2.3.17}$$

pour r assez grand. comme dans le **cas 1**, montrons que

$$\frac{\log^+ |f^{(k)}(z)|}{|z|^{\rho(H)+\varepsilon}} \tag{2.3.18}$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. supposons le contraire, de même que dans le **cas1**, il résulte du Lemme (2.2.5)qu'il existe une séquence de points $\{z_m = r_m e^{i\theta}\}$ telle que

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right| \leq r_m^{k-j}(1 + o(1)) \ (j = 0, ...k-1) \tag{2.3.19}$$

$$\left|\frac{H(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right| \to 0 \tag{2.3.20}$$

pour m assez grand. En substituant les inégalités (2.3.17) et (2.3.19) dans (2.3.15), on trouve une contradiction. Par conséquent, on a

$$|f^{(k)}(z)| \leq M \exp\{r^{\rho(H)+2\varepsilon}\} \tag{2.3.21}$$

sur le rayon $\arg z = \theta$. ce qui implique que

$$|f(z)| \leq M \exp\{r^{\rho(H)+2\varepsilon}\} \tag{2.3.22}$$

Ainsi pour tout $\theta \in [0, 2\pi)\backslash E$, où E de la mesure linéaire nulle, on obtient (2.3.22) sur le rayon $\arg z = \theta$ à condition que r soit suffisamment grand.
Alors d'après le Lemme (2.2.6), $\rho(f) \leq \rho(H) + 2\varepsilon < n$. c'est une contraduction. donc toute solution transcendante de (2.1.5) doit être d'ordre infini.

Preuve du Théorème 2.1.4

supposons que f est une solution transcendantale de l'inégalité (2.1.5) avec $\rho(f) = \rho < \infty$. si $f^{(k)} \equiv H$ et $\rho < n$, alors d'après (2.1.5), on obtient que

$$f^{(l)} h_l e^{p_l(z)} + f^{(s)} h_s e^{p_s(z)} + \sum_{u=1}^{p} B_u(z) e^{d_{ju} p_l(z)} + \sum_{v=1}^{p} C_v(z) e^{d_{jv} p_s(z)} = 0 \tag{2.3.23}$$

où $B_u(u = 1, ..., p)$, $C_v(v = 1...q)$ sont des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à n. En rassemblant les termes du même type, si nécessaire, alors on peut supposer que les coefficients $d_{ju}(u = 1, ..., p)$ respectivement $d_{jv}(v = 1, ...q)$ sont distincts et étant donné que $\theta_s \neq \theta_l$ et $\theta_s, \theta_l \in [0, 2\pi)$, on peut conclure que $d_{ju} p_l(z) - d_{jv} p_s(z)$ sont des polynômes de degré n. En effet, si $d_{ju} a_{lm} = d_{jv} a_{sn}$, on a

$$0 < \frac{d_{ju}}{d_{jv}} \left|\frac{a_{lm}}{a_{sn}}\right| = e^{i(\theta_s + \theta_l)}. \tag{2.3.24}$$

ce qui est impossible.
De même, $p_l(z) - p_s(z), p_l(z) - d_{jv}p_s(z)$ et $p_s(z) - d_{ju}pl(z)$ sont également des polynômes de degré n. Par conséquent, en appliquant le Lemme (2.2.1) à (2.3.23), on déduit que
$f^{(l)}h_l \equiv f^{(s)}h_s \equiv 0$. comme $h_sh_l \not\equiv 0$, alors f doit etre un polynôme de degré inférieur à s. Donc $H \equiv 0$. c'est une contradiction.
Par conséquent, on peut supposer que $f^{(k)} \not\equiv H$. D'après le Lemme (2.2.2), si $f^{(k)} \neq H$, alors $n \leq \rho$ puisque les fonctions exponetielles e^{p_l}, e^{p_s}, $e^{d_{ju}p_l}$ $(u = 1, 2, ..., p)$ et $e^{d_{jv}p_s}$
$(v = 1, 2, ..., q)$ sont linéairement indépendantes.
comme $\theta_s \neq \theta_l$, d'après les Lemmes (2.2.3) et (2.2.4), il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que pour tout $\theta \in E \backslash [0, 2\pi)$, les $A_j(re^{i\theta})$ vérifient (2.2.6) ou (2.2.7), (2.3.1) est vérifiée et

$$\delta(p_s, \theta) \neq \delta(p_l, \theta),\ \ \delta_2 = \max\{\delta(p_s, \theta), \delta(p_l, \theta)\} \neq 0. \tag{2.3.25}$$

on applique aussi les notations δ, δ_1 se trouvant dans la démonstation du Théorème (2.1.5).
Cas 1. Tout d'abord supposons que $\delta_2 > 0$. On peut supposer que $\delta_2 = \delta(p_s, \theta)$. De l'hypothèse sur a_{jn}, on sait que $\delta_1 < \delta_2 < \delta$. donc (2.3.5) est vérifiée d'après le Lemme (2.2.3). En utilisant le même raisonnement que dans le **cas 1** dans la démonstration du Théorème (2.1.3), on obtient l'inégalité (2.3.22) sur le rayon $\arg z = \theta$.

Cas 2 Enfin supposons que $\delta_2 < 0$. Encos une fois par la condition sur a_{jn}, on voit que $\delta < 0$. Par le même argument utilisé dans le **cas 2** dans la démonstration du Théorème (2.1.3), on obtient à nouveau (2.3.22). Par conséquent, par le Lemme (2.2.6), on obtient une contradiction. Donc $\rho(f) = \infty$.

Preuves des Théorème 2.1.5
supposons que f est une solution transcendante de (2.1.5) d'ordre fini. si $\rho < n$, alors il résulte de (2.1.5)que

$$f^{(l)}h_le^{p_l(z)} + f^{(s)}h_se^{p_s(z)} + \sum_{u=1}^{p} B_u(z)e^{d_{ju}p_l(z)} + \sum_{v=1}^{q} C_v(z)e^{d_{jv}p_s(z)} = F(z), \tag{2.3.26}$$

où $B_u(u = 1, ..., p)$, $C_v(v = 1, ..., q)$ et $F(z)$ sont des fonctions entières d'ordre strictemet inférieur à n, $d_{ju} \neq 0$ $(u = 1, ..., p)$ sont distincts et $d_{jv} \neq 0$ $(v = 1, ..., q)$ sont aussi distincts. De façon similaire à la preuve du Théorème (2.1.4). on peut supposer que $n \leq \rho$.
comme

$$\sigma = \max\{\rho(g_j)\ (j = 0, ...k - 1)\} < n, \tag{2.3.27}$$

on a

$$\max\{|g_j(z)|\ (j = 0, ...k - 1),\ |H(z)|\} \leq \exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\} \tag{2.3.28}$$

pour tout ε avec $0 < 3\varepsilon < n - \sigma$ et pour tout $|z|$ suffisamment grande. Puisque d_s et d_l dans $a_{sn} = d_se^{i\varphi}$ et $a_{lm} = -d_le^{i\varphi}$ sont strictement positifs, l'ensemble
$\{\theta \in [0, 2\pi), \delta(P_s, \theta) = \delta(P_l, \theta)\}$ est de mesure linéaire nulle. Par conséquent, encore une fois d'après les deux Lemmes (2.2.3) et (2.2.4), il existe un ensemble

$E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que pour tout $\theta \in [0, 2\pi)\backslash E$ donné, le coefficient $h_j e^{P_j}$ vérifie (2.2.5) ou (2.2.6) et (2.3.1) est vérifiée. De plus, $\delta(P_s, \theta) \neq \delta(P_l, \theta)$. on peut supposer que $\delta_2 = \max\{\delta(P_s, \theta) = \delta(P_l, \theta)\} = \delta(P_l, \theta) = -d_l \cos(\varphi + n\theta)$, où $\cos(\varphi + n\theta) < 0$. Alors par (2.2.5) et (2.3.28), pour tout ε vérifiant $0 < 3\varepsilon < (d_l - d)\backslash d_l$, on obtient pour $|z|$ suffisamment grand que

$$|A_l(re^{i\theta})| \ \geq \exp\{-(1-\varepsilon)d_l \cos(\varphi + n\theta)r^n\}.$$

pour tous les autres coefficients $A_j (j \neq s)$, en considérant les hypothèses sur a_{jn}, on a

$$|Aj(re^{i\theta})| \leq \exp\{-(1+\varepsilon)d \cos(\varphi + n\theta)r^n\}. \tag{2.3.29}$$

quand r est assez grand. Il résulte de (2.1.5) que .

$$-A_l = \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} + A_{l+1}\frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}} + A_{l-1}\frac{f^{(l-1)}}{f^{(l)}} + ... + A_0\frac{f}{f^{(l)}} - \frac{H}{f^{(l)}}. \tag{2.3.30}$$

De façon similaire que celle dans le **cas 1** dans la preuve du Théorème (2.1.4) et en utilisant le Lemme (2.2.5), on peut prouver que

$$\frac{\log^+ |f^{(l)}(z)|}{|z|^{\rho(H)+\varepsilon}} \tag{2.3.31}$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Par conséquent, l'inégalité (2.3.22) est toujours vérifiée sur le rayon $\arg z = \theta$. En utilisant le lemme (2.2.6), on trouve contradiction. Ainsi $\rho(f) = \infty$.

CONCLUSION

Certaines chercheurs ([10],[11]) se sont intréressés à l'étude des propriétés de croissance des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes dont les coefficients sont des fonctions entières. on sait que ces solutions sont des fonctions entières et elles sont souvent d'ordre infini.

Dans ce mémoire, on a étudié la croissance de certaines de ces équations. On a étudié les résultats obtenus par Wang et Laine [11]. En imposant des conditions sur ces coefficients, il ont démontré que chaque solution est d'ordre infini.

Bibliographie

[1] **E. Borel**, *Sur les zéros des fonctions entière*, Acta Mathematica. December 1897, 20 :1964.

[2] **Z.X.Chen**, *On the hyper-order of solutions of somme second order linear differential equations,* Acta Math.Sinica Engl.Ser.18(1), pp.79-88, 2002.

[3] **Z.X.Chen**, *The growth of solutions of* $f" + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$*, where the order* $(Q) = 1$, Sci. China Ser.A 45, pp.290-300, 2002 ;

[4] **G.G.Gundersen,** "*Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function,plus similar estimates*," Journal of the London Mathematical Society, vol.s2-37, no.121, pp.88-104, 1998.

[5] **G.G.Gundersen**, "*Finite order solutions of second order linear differential equations*," Transactions of the American Mathematical Society, Vol.305, no.1, pp.415-429, 1988.

[6] **A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskii**, *The distribution of values of meromorphic functions*, Transl. Math. Monogr., vol. 236, Amer. Math. Soc., Providence RI, 2008.

[7] **W. K. Hayman**, *Meromorphic functions*, Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford 1964.

[8] **I.Laine and R.Yang,** "*Finite order solutions of complex linear differential equations*," Electronic Journal of Differentail Equations, vol.2004, no.65, pp.1-8, 2004.

[9] **A.Markushevich**, *Theory of Functions of a complex Variable*, vol.2, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1965.

[10] **J.Wang and I.Laine**, "*Growth of solutions of second order linear differential equations,*" Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.342, no.1, pp.39-51, 2008.

[11] **J.Wang and I.Laine**, "*Growth of solutions of nonhomogeneous linear differential equations*, Abstr.Appl.Anal.(2009), Art.ID 363927, 1-11.

[12] **C.C.Yang and H.-X.Yi**, *Uniqueness Theory of Meromorphic Functions*, vol.557 of Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2003.