Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Master Académique

pour obtenir le diplôme de Master délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Analyse Fonctionnelle"

présenté et soutenu publiquement par

Mlle SALAA Bouchra

le 23 Juin 2019

Surfaces minimales de translation dans l'espace de Lorentz-Heisenberg

Encadeur : **Mr BELARBI Lakehal MCA (Université de Mostaganem, Algérie)**

Jury
Mr ANDASMAS Maamar , MCB Président (Université de Mostaganem, Algérie)
Mr FETTOUCH Houari , MCB Examinateur (Université de Mostaganem, Algérie)

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique (FSEI)
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie

MASTER

Dédicaces

Je dédie ce mémoire :

A mon **Dieu** de m'avoir donné la capacité d'écrire. A ma mère et mon père `Abdelkader` pour leurs encouragements.

A tous mes frères et ma sœur, ainsi que leurs enfants et toute la famille.

A Mon encadreur **Mr BELARBI LAKEHAL.**

A mes amies (**Djemia, Aicha)** et tous mes camarades qui étudient à la promotion 2 année master mathématique branche **AF** 2018/2019.

A tous les enseignants et les étudiants de la faculté de science exacte et de l'informatique.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie **Allah** le tout puissant pour m'avoir guidé vers le chemin du savoir et de la lumière. Pour m'avoir donné le courage et la volonté d'avoir réaliser ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur **BELARBI LAKEHAL**. Son encadrement a été exceptionnel. Je le remercie chaleureusement pour son écoute, sa patience pour ses conseils toujours avisés et ses remarques pertinentes, ainsi qu'a l'intérêt qu'il a porté à toutes mes questions.

Je voudrais aussi remercier chacun des membres du jury d'avoir accepter d'évaluer ce modeste travail.

J'exprime également toute ma profonde gratitude à Monsieur **ANDASMAS MAAMAR** qui me fait l'honneur de bien vouloire présider le jury de ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à Monsieur **FETTOUCH HOUARI** pour sa disponibilité.

J'adresse également mes remerciements à tous les enseignants qui nous ont donné les bases de la science.

Je voudrais remercier mon père **Abdelkader** et ma mère pour leur soutien et ses encouragements. Je tiens à remercier mes frères et ma sœur Amina, sans oublier mon grand père, ma grande mère et toute la famille.

Pour terminer, je tiens aussi à remercier tous mes camarades qui m'ont encouragé.

Merci à toute personne qui a participé de près ou de loin pour l'accomplissement de ce travail.

Table des matières

1 Résumé

Dans le présent, nous étudions certains types de surfaces minimales de translation paramétrisées par $X(x, y) = \alpha(x) * \beta(y)$ ou $X(x, y) = \beta(y) * \alpha(x)$, obtenues comme produit de deux courbes α et β lisses, qui ne sont pas orthogonales , où $*$ désigne l'opération interne dans le groupe Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ muni d'une métrique plate

$$g_3 = dx^2 + (xdy + dz)^2 - [(1 - x)dy - dz]^2.$$

2 Introduction

L'objet de ce travail est la classification des surfaces minimales de translation dans le groupe de Lorentz-Heisenberg muni d'une métrique plate (i.e de tenseur de courbure nulle).

Dans [11] S.Rahmani a classifié les métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois.

Dans [8] R.López et M.I.Munteanu donnent une classification de toutes les surfaces minimales de translation dans l'espace Sol_3.

Dans [7] J.Inoguchi, R.López et M.I.Munteanu ont définié six types des surfaces de translation dans le groupe de Heisenberg Nil_3 de dimention 3 obtenu sous la forme de deux courbes situées dans des planes qui ne sont pas orthogonales et ils ont étudié la condition de minimalité pour chaque type.

Dans [17], D.W.Yoon, C.W.Lee et M.K.Karacan ont étudié les surfaces minimales de translation dans l'espace de Heisenberg $\mathbb{H}^3$ de dimention 3 muni d'une métrique Riemannienne.

Dans [9] et [10], ils ont montrer que modulo d'un automorphisme de l'algèbre de Lie du groupe de Heisenberg existent trois classes de métriques lorentziennes invariantes sur le groupe de Heisenberg dont l'un est plate.

M.Bekkar et Z.Hanifi ont montré dans leur document [1] que les surfaces planes, hélicoidales, paraboloides, hyperboliques et certaines surfaces de translation sont définies par des intégrales elliptiques vérifiant l'équation des surfaces minimales dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ doté d'une métrique lorentzienne invariante à gauche g_3 qui est donnée par :

$$g_3 = dx^2 + dy^2 - (dz + \xi(ydx - xdy))^2.$$

Dans notre travail précédent [3] nous avons classé trois types de surfaces minimales de translation dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ de dimension 3 doté d'une métrique lorentzienne g_3 invariante à gauche donné ci-dessus. Notre but dans ce travail est de classifier certains types de surfaces minimales de translation de $\mathbb{H}_3$ dotées d'une métrique de Lorentz flat invariante à gauche g_3.

Ce mémoire se compose d'une introduction et de trois chapitres.

Le premier chapitre est réservé aux rappelles et définitions des outiles mathématiques de géomètrie euclidienne, Riemannienne et semi-Riemannienne. On rappelle la définition d'une variété topologique, variété différentielle, l'espace tangent, variété Riemannienne, métrique Riemannienne, variété pseudo-Riemannienne et métrique pseudo-Riemannienne. On donne la définition de la connexion linéaire, connexion de **Levi-Civita**, symboles de Christoffel (la formule de Koszul), et la courbure (tenseur de courbure, courbure sectionnelle, courbure de Ricci et la courbure scalaire). On rappelle la définition de la première et la deuxième forme fondamentale, la courbure moyenne et la courbure de Gauss.

Le deuxième chapitre est entièrement consacré à l'espace de Lorentz-Heisenberg, on commence d'abord par la métrique de Lorentz-Heisenberg muni d'une métrique plate. On donne la base orthonormé de $\mathbb{H}_3$ et on calcule les crochets de Lie. On cacule la connexion linéaire et la connexion de Levi-Civita, le tenseur de Ricci, la courbure de Ricci et la courbure scalaire. On cherche l'équation des surfaces minimales telles que, on calcule les coefficients de la première et deuxiéme formes fondamentales puis on remplace dans la relation de la courbure moyenne qui l'on pose égale à zéro on obtient à la fin l'équation des surfaces minimales.

Le derniér chapitre contient et concerne les surfaces minimales de translation dans l'espace de Lorentz-Heisenberg.

L'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ peut être vu comme l'espace $\mathbb{R}^3$ doué avec une métrique plate Lotrentzienne invariante à gauche g_3 est donnée par :

$$\begin{aligned} g_3 &= dx^2 + (xdy + dz)^2 - [(1-x)dy - dz]^2 \\ &= (dx, dy, dz)(g_{ij}) \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où (dx, dy, dz) est un champ de vecteurs et $(g_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ est la matrice donnée par :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous rappelons que le produit de $\mathbb{H}_3$ est donné par :

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) * (x, y, z) = (\overline{x} + x, \overline{y} + y, \overline{z} + z - \overline{x}y + x\overline{y}).$$

Où $*$ désigne l'opération de groupe dans le groupe Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$.
$\mathbb{H}_3$ est un groupe de Lie tridimensionnel, connecté et simplement connecté.

3 Chapitre 1 : Préliminaires

3.1 Variétés topologiques :

Définition 3.1. *On dit que Ω est un espace topologique séparé si et seulement si :*
$\forall (x;y) \in \Omega^2 : \exists v_x$ *et* v_y *voisinage de* x *et* y *(respectivement) tels que :* $v_x \cap v_y = \emptyset$.

Définition 3.2. *Une variété topologique M de dimension n est un espace topologique séparé non vide et à chaque point $x \in M$ admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Exemple 3.1. *$\mathbb{R}$ est une variété topologique car $\mathbb{R}$ est séparé.*

Exemple 3.2.

1. *$\mathbb{R}^n$ est une variété topologique de dimension n.*
2. *La sphère $S^n = \left\{ (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} {x_i}^2 = 1 \right\}$ est une variété topologique de dimension n muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^n$.*
   Les ouverts sont : $U_i = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, x_i > 0\}$ et $U_j = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, x_j < 0\}$.
   Les applications sont :

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \end{aligned}$$

   Les φ_i sont des homéomorphismes car pour tout point $(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in \varphi_i(U_i)$ il ne corréspond qu'un seul point $x_i = \sqrt{1 - \sum_{i \neq j} {x_j}^2}$.

   φ_i^{-1} est continue ; $\varphi_i(U_i)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$.

   $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (x_1, ..., \hat{x_i}, ..., x_{n+1}) \to (x_1, ..., \sqrt{1 - \sum_{i \neq j} {x_j}^2}, ..., \hat{x_j}, ..., x_{n+1})$.

3.1.1 Carte :

Définition 3.3. *Soit M une variété topologique, et $U \subset M$. On dit que le couple (U, φ) est une carte si et seulement si :*

1. *U ouvert de M.*
2. *$\varphi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
3. *$\varphi : U \to \varphi(U)$ est une application homéomorphisme.*

Exemple 3.3. $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$.

Définition 3.4. *Soit M un espace topologique, et U un ouvert de M. Une application*

$$\varphi : U \to \varphi(U)$$

est homéomorphisme si φ est bijective, continue et l'application

$$\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$$

est continue.

3.1.2 Atlas :

Définition 3.5. *Un atlas sur M est un ensemble des cartes $\{(U_i, \varphi_i)\}$ telle que :* $\bigcup_{i\in I} U_i = M$ *et les cartes sont compatibles deux à deux.*

Définition 3.6. *(Deux cartes compatibles)*

Soit M une variété topologique et soient (U, φ) et (V, ψ) deux cartes de M. On dit que les deux cartes sont compatibles si et seulement si :

1. *$U \cap V = \varnothing$ ou bien*
2. *$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to U \cap V \to \psi(U \cap V)$ est un difféomorphisme.*

Définition 3.7. *Un difféomorphisme est une application bijective de classe C^k et dont l'inverse de classe $C^k (k \geq 1)$.*

Exemple 3.4. *Soit la sphère $S^2 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,*

$U_1 = S^2 - \{(0,0,1)\}, U_2 = S^2 - \{(0,0,-1)\}$ et on définit les homéomorphismes φ_1 et φ_2 comme :

$$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \to \varphi_1(x, y, z) = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$$

et

$$\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \to \varphi_2(x, y, z) = (\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z})$$

donc $A = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ est un atlas différentielle .

3.2 Variété Différentielle :

Définition 3.8. *Soit M une variété topologique et A un atlas sur M, on dit que le couple (M, A) est une variété différentielle.*

Exemple 3.5. *Soit la sphère $S^2 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$*

et dans l'exemple 3.4 on a :

$A = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ est un atlas différentielle de la sphère.

alors $(S^2; A)$ est une variété différentielle de dimension 2.

3.2.1 Espace Tangent

Soit M une variété différentielle de classe C^∞.

Définition 3.9. *On définit une courbe différentielle sur M de classe C^∞ comme une application*

$$\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\subset \mathbb{R} \to M$$

est de classe C^∞.

Définition 3.10. *On appelle vecteur tangent à γ en m si $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\subset \mathbb{R} \to M$ une courbe sur M tel que $\gamma(0) = m$ et la fonction $\gamma'(0) : D \subset \mathcal{F}(m) \to \mathbb{R}$ définit par*

$$\gamma'(0)(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}/_{t=0}$$

où $\mathcal{F}(m) = \{f : v_m \to \mathbb{R}^n, f \in C^\infty\}$ l'algèbre des fonctions différentiables sur le voisinage v_m d'un point m.

Définition 3.11. *Sur les courbes différentielles* $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\subset \mathbb{R} \to M$, *on définit une relation d'équivalence*

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Longleftrightarrow \gamma_1'(0)(f) = \gamma_2'(0)(f) \quad \textit{pour tout } f \textit{ de } D \subset \mathcal{F}.$$

Cette relation signifié qu'on considére deux courbes γ_1 *et* γ_2 *comme équivalentes si elles ont le même vecteur tangent en* 0 *dans* $\mathbb{R}^n$, *sur n'importe quelle carte locale.*

Définition 3.12. *L'ensemble des vecteurs tangents à* M *en* m *forme un sous-espace vectoriel de dimension* n *de* $\mathbb{R}^{n+k}$, *notée* T_mM *l'espace tangent de* M *au point* m.

Exemple 3.6. *Soit* $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z - x^2 - y^2 = 0_{\mathbb{R}^3}\} = f^{-1}(0_{\mathbb{R}})$ *telle que :*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \to z - x^2 - y^2$$

M *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^3$ *de dimension* 2 *car :* $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *: la matrice Jacobienne de* f *notée :* $M_{Jac}f = (-2x; -2y; 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ *et* f *est un submersion car rang de* f *égale à* 1.

l'espace tangent T_mM *est :*

$$\begin{aligned}
T_mM &= \ker df_m \\
&= \{(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3 / df_m \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0\} \\
&= \{(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3 / -2xh_1 - 2yh_2 + h_3 = 0\} \\
&= \{(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3 / h_3 = 2xh_1 + 2yh_2\} \\
&= \{h_1(1; 0; 2x) + h_2(0; 1; 2y) / h_1, h_2 \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

avec dimension de T_mM *est égale à* 2.

3.2.2 Champ de vecteurs :

Définition 3.13. *Un champ de vecteurs sur* M *est une application* X

$$X : M \to TM$$

de classe C^∞, *tel que* $X(m) \in T_mM$.

Exemple 3.7. $M = \mathbb{R}^3$, *et* $X = x\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - 1)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$

X *est un champ de vecteurs de* $\mathbb{R}^3$.

Définition 3.14. *On définit la somme de deux champs de vecteurs comme étant le champ de vecteurs*

$$(X + Y)(m) = X(m) + Y(m).$$

Et la multiplication par une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ *comme*

$$(f.X)(m) = f(m)X(m).$$

Définition 3.15. *(Crochet de Lie)*

Soient X, Y *deux champs de vecteurs (différentielles) sur* M, *et soit* $f : M \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable. On définit le crochet* $[X, Y]$ *(appelé Crochet de Lie noté* $\mathcal{L}_XY$*) par la relation suivante :*

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

Remarquons que $[X, Y]$ *est aussi un champ de vecteurs sur* M *(aussi appelé dérivée de Lie* $\mathcal{L}_XY$ *de* Y *dans la direction de* X*).*

En terme de coordonnées locales

$$\begin{cases} X &= \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ Y &= \sum_{i=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} \end{cases}$$

Définition 3.16. *(Groupe de Lie)*
Un groupe de lie G est une variété différentielle au même temp est un groupe telle que les applications :

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(x, y) \longrightarrow xy$$

et

$$G \longrightarrow G$$
$$x \longrightarrow x^{-1}$$

sont différentiables.

Exemple 3.8. $G = M(n, \mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices carrées réelles est un groupe de Lie de dimension* n^2.

Exemple 3.9. *Les groupes matricielles réels :*

Groupe linéaire réel :
$GL(n, \mathbb{R}) = \{M \in M(n, \mathbb{R}) / \det M \neq 0\}$ *est un groupe de Lie de dimension* n^2.
Groupe spécial linéaire :
$SL(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) / \det M = 1\}$ *est un groupe de Lie de dimension* $n^2 - 1$.

3.3 Variété Riemannienne

3.3.1 Métrique Riemannienne

Soit M une variété différentielle, T_mM l'espace tangent de M en m.

Définition 3.17. *Une métrique Riemannienne dans* T_mM *est un produit scalaire qui est une forme bilinéaire symétrique définie positive, on note* g *ou* g_m *telle que :*

$$g : T_mM \times T_mM \to C^\infty(M)$$

$$(X, Y) \to g(X, Y)$$

C^∞ *: L'ensemble des applications définies sur* M *et à valeur dans* $\mathbb{R}$ *de classe* C^∞.

Définition 3.18. *On appelle Variété Riemannienne toute variété différentielle muni d'une métrique Riemannienne, noté* (M, g).

Exemple 3.10. $(\mathbb{R}^3, g)$ *est une variété Riemannienne.*

Exemple 3.11. *$M = \mathbb{R}^3$, g_0 : la métrique euclidienne (définie sur $\mathbb{R}^3$)*

$$\begin{aligned} g_0 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\ &= (dx_1, dx_2, dx_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$g = g_0 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit M une variété différentielle et $m \in M, g$ est la métrique définie sur T_mM. $\forall m \in M$, on dit que (M, g) est une Variété Riemannienne.

3.3.2 La connexion linéaire

Soit (M, g) une variété Riemannienne et $\chi(M)$: l'ensemble des champs de vecteurs sur M.

Définition 3.19. *Soit M une variété différentielle et ∇ une application telle que :*

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y) &\to \nabla_X Y, \end{aligned}$$

On dit que ∇ est une connexion si elle vérifie les conditions suivantes :

1. *∇ est $\mathbb{R}$-bilinéaire.*
2. *pour tout $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ on a $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ et $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.*

Expression en coordonnés locales : $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i Y_k X_j \right] \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où Γ_{jk}^i est la i-éme composante de $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k}$.

3.3.3 La connexion de Levi-Civita :

Définition 3.20. *Il existe une seule application ∇ telle que :*

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y) &\to \nabla_X Y, \end{aligned}$$

vérifiant :

1. *$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$*
2. *$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ tels que X, Y et $Z \in \chi(M)$*

3.3.4 Symboles de Christoffel d'une variété Riemannienne :

La formule de Koszul :

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y,Z)+Yg(X,Z)-Zg(X,Y)+g([X,Y],Z)+g([X,Z],Y)-g([Y,Z],X) \quad (1)$$

tel que : $X, Y, Z \in \chi(M)$,
On utilisant la formule (1) pour : $X = \frac{\partial}{\partial x_j}, Y = \frac{\partial}{\partial x_i}, Z = \frac{\partial}{\partial x_l}$
on obtient :

$$\begin{aligned}
2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) &= \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \\
\Leftrightarrow 2g\left(\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) &= \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \\
\Leftrightarrow 2\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^k g\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) &= \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \\
\Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right).
\end{aligned}$$

Définition 3.21. *On définit sur (M, g) les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k par :*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right)$$

Exemple 3.12. *Dans la carte $(\mathbb{R}^3, Id_{\mathbb{R}^3})$ on a*

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

les symboles de Christoffel $\Gamma_{ij}^k = 0$ pour tout (i, j, k).

3.3.5 Géodésiques :

Les géodésiques sont des courbes particulières dans un espace Riemannien qui réalisent le minimum de distance entre deux points.

Définition 3.22. *Soit (M, g) une variété Riemannienne muni d'une connexion de Levi-Civita ∇.*

Soit $C : I \subset \mathbb{R} \to M$ une courbe de classe C^∞, alors on dit que la courbe C est une géodésique si et seulement si elle vérifiant $\nabla_{C'} C' = 0$, où C' est le vecteur dérivé de la courbe C.

Écrire en coordonnées locales $C(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, les geodésiques $C(t)$ se lisent comme les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0.$$

3.4 La courbure :

3.4.1 Tenseur de courbure :

Définition 3.23. *Le tenseur de courbure de (M, g) est noté R et donnée par :*

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)W, Z)$$

tel que :

$$\begin{aligned} R(X,Y)W &= [\nabla_X, \nabla_Y]W - \nabla_{[X,Y]}W \\ &= \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X,Y]}W \end{aligned}$$

3.4.2 La torsion :

$$T : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(X, Y) \to T(X, Y)$$

$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$.
Si ∇ est la connexion du **Levi-Civita**, Alors $T = 0$ (torsion libre).

3.4.3 La courbure sectionnelle :

Définition 3.24. *On définit sur (M, g) la fonction K biquadratique de courbure comme suit :*

$$\begin{aligned} K(X,Y) &= R(X,Y,X,Y) \\ &= g(R(X,Y)Y,X) \end{aligned}$$

pour tout $(X, Y) \in \chi(M) \times \chi(M)$.

Si $\{X, Y\}$ est une base orthonormée d'un plan P, on définit alors sa courbure sectionnelle par :

$$K(P) = K(X, Y)$$

Si $\{X, Y\}$ n'est pas orthonormée, alors :

$$K(X, Y) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g^2(X, Y)}.$$

3.4.4 La courbure de Ricci :

Définition 3.25. *C'est un 2-tenseur symétrique en point m, on note :$Ric(X; Y)$: la trace de l'endomorphisme*

$$T_m M \to T_m M$$
$$V \to Ric(V; X)Y$$

Si $\{e_i\}$ est une base orthonormée de $T_m M$ alors :

$$Ric_m(X; Y) = \sum_{i=1}^{n} R(X; e_i; Y; e_i) = \sum_{i=1}^{n} g(R(X; e_i)e_i; Y)$$

Si $\{e_i\}$ est une base n'est pas orthonormée alors :

$$Ric(X, Y) = R_{ij} = \sum_{m=1}^{n} R^m_{mij}.$$

telque : R^m_{mij} sont des tenseurs.

3.4.5 La courbure scalaire :

Définition 3.26. *C'est une fonction $M \to \mathbb{R}$ noté k tel que $k(m)$ est la trace de l'endomorphisme symétrique associée à Ric_m.*

$k(m) = \sum_{i,j=1}^{n} R(e_i; e_j; e_i; e_j)$

$= \sum_{i,j=1}^{n} g(R(e_i; e_j)e_j; e_i)$

$= \sum_{i,j=1}^{n} K(e_i; e_j)$

$= 2\,Trace(l)$.

Exemple 3.13. *Soit $(\mathbb{R}^3(x,y,z); g)$ l'espace noté l'espace symétrique généralisé de dimension 3 tel que :*

$$g = \epsilon(e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2) + \mu dz^2.$$

où $\epsilon = \pm 1$ et $\mu \neq 0$

1. *Déterminer la connexion de Levi-Civita.*
2. *Déterminer les $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k$.*
3. *Déterminer les courbures sectionnelles : $K(\partial_1, \partial_2), K(\partial_1, \partial_3), K(\partial_2, \partial_3)$.*
4. *Déterminer la courbure de Ricci et la courbure scalaire.*

Solution

1. Déterminons la connexion de Levi-Civita (en utilisant la formule de Koszul (1)) :
   on a :

$$g = \begin{pmatrix} \epsilon e^{2z} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon e^{-2z} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{\partial}{\partial x} = \partial_1; \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} = \partial_2; \quad Z = \frac{\partial}{\partial_z} = \partial_3.$$

$$\begin{cases} 2g(\nabla_{\partial_1}\partial_1, \partial_1) = 0 \\ 2g(\nabla_{\partial_1}\partial_1, \partial_2) = 0 \\ 2g(\nabla_{\partial_1}\partial_1, \partial_3) = -2\epsilon e^{2z} = g(f\partial_3, \partial_3) = fg(\partial_3, \partial_3) = \mu f \end{cases} \Rightarrow \nabla_{\partial_1}\partial_1 = -\frac{\epsilon}{\mu}e^{2z}\partial_3$$

$$\begin{cases} 2g(\nabla_{\partial_1}\partial_2, \partial_1) = 0 \\ 2g(\nabla_{\partial_1}\partial_2, \partial_2) = 0 \\ 2g(\nabla_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \nabla_{\partial_1}\partial_2 = 0$$

$$\begin{cases} 2g(\nabla_{\partial_1}\partial_3, \partial_1) = 2\epsilon e^{2z} \\ 2g(\nabla_{\partial_1}\partial_3, \partial_2) = 0 \\ 2g(\nabla_{\partial_1}\partial_3, \partial_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \nabla_{\partial_1}\partial_3 = \partial_1$$

$$\begin{cases} 2g(\nabla_{\partial_2}\partial_1, \partial_1) = 0 \\ 2g(\nabla_{\partial_2}\partial_1, \partial_2) = 0 \\ 2g(\nabla_{\partial_2}\partial_1, \partial_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \nabla_{\partial_2}\partial_1 = 0$$

$$\begin{cases} 2g(\nabla_{\partial_2}\partial_2, \partial_1) = 0 \\ 2g(\nabla_{\partial_2}\partial_2, \partial_2) = 0 \\ 2g(\nabla_{\partial_2}\partial_2, \partial_3) = 2\epsilon e^{-2z} \end{cases} \Rightarrow \nabla_{\partial_2}\partial_2 = \frac{\epsilon}{\mu}e^{-2z}\partial_3$$

$$\begin{cases} 2g(\nabla_{\partial_2}\partial_3, \partial_1) = 0 \\ 2g(\nabla_{\partial_2}\partial_3, \partial_2) = 2\epsilon e^{-2z} \\ 2g(\nabla_{\partial_2}\partial_3, \partial_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \nabla_{\partial_2}\partial_3 = -\partial_2$$

$$\begin{cases} 2g(\nabla_{\partial_3}\partial_1, \partial_1) = 0 \\ 2g(\nabla_{\partial_3}\partial_1, \partial_2) = 0 \\ 2g(\nabla_{\partial_3}\partial_1, \partial_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \nabla_{\partial_3}\partial_1 = 0$$

$\nabla_{\partial_3}\partial_2 = 0, \nabla_{\partial_3}\partial_3 = 0.$

2. Déterminons les $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k$:

$$R(\partial_1, \partial_1)\partial_1 = 0, \quad R(\partial_1, \partial_2)\partial_1 = -\frac{\epsilon}{\mu}e^{2z}\partial_2,$$

$$R(\partial_1, \partial_2)\partial_2 = \nabla_{\partial_1}\nabla_{\partial_2}\partial_2 - \nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_1}\partial_2 = \frac{\epsilon}{\mu}e^{-2z}\nabla_{\partial_1}\partial_2 = \frac{\epsilon}{\mu}e^{-2z}\partial_1,$$

$$R(\partial_1, \partial_2)\partial_3 = \nabla_{\partial_1}\nabla_{\partial_2}\partial_3 - \nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_1}\partial_3 = 0,$$

$$R(\partial_1, \partial_3)\partial_1 = \nabla_{\partial_1}\nabla_{\partial_3}\partial_1 - \nabla_{\partial_3}\nabla_{\partial_1}\partial_1 = -\frac{\epsilon}{\mu}e^{2z}\partial_3 + \frac{\epsilon}{\mu}\nabla_{\partial_3}e^{2z}\partial_3 = -\frac{\epsilon}{\mu}e^{2z}\partial_3 + \frac{2\epsilon}{\mu}e^{2z}\partial_3 = \frac{\epsilon}{\mu}e^{2z}\partial_3 = R^3_{131},$$

$$R(\partial_1, \partial_3)\partial_2 = \nabla_{\partial_1}\nabla_{\partial_3}\partial_2 - \nabla_{\partial_3}\nabla_{\partial_1}\partial_2 = 0,$$

$$R(\partial_1, \partial_3)\partial_3 = \nabla_{\partial_1}\nabla_{\partial_3}\partial_3 - \nabla_{\partial_3}\nabla_{\partial_1}\partial_3 = -\partial_1 = R^1_{133}\partial_1,$$

$$R(\partial_2, \partial_3)\partial_1 = \nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_3}\partial_1 - \nabla_{\partial_3}\nabla_{\partial_2}\partial_1 = 0,$$

$$R(\partial_2, \partial_3)\partial_2 = \nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_3}\partial_2 - \nabla_{\partial_3}\nabla_{\partial_2}\partial_2 = \frac{\epsilon}{\mu}e^{-2z}\partial_3 = R^3_{232}\partial_3,$$

$$R(\partial_2, \partial_3)\partial_3 = \nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_3}\partial_3 - \nabla_{\partial_3}\nabla_{\partial_2}\partial_3 = -\partial_2 = R^2_{233}.$$

3. Déterminons les courbures sectionnelles :

$$\begin{aligned} K(\partial_1, \partial_2) &= \frac{g(R(\partial_1, \partial_2)\partial_2, \partial_1)}{g(\partial_1, \partial_1)g(\partial_2, \partial_2) - g^2(\partial_1, \partial_2)} \\ &= -\frac{1}{\mu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(\partial_1, \partial_3) &= \frac{g(R(\partial_1, \partial_3)\partial_3, \partial_1)}{g(\partial_1, \partial_1)g(\partial_3, \partial_3) - g^2(\partial_1, \partial_3)} \\ &= -\frac{1}{\mu}, \end{aligned}$$

$$K(\partial_2, \partial_3) = \frac{1}{\mu}.$$

4. Déterminons la courbure de Ricci :

$$R_{ij} = \sum_{m=1}^{3} R^m_{mij}$$

$$R_{11} = \sum_{m=1}^{3} R^m_{m11} = R^1_{111} + R^2_{211} + R^3_{311} = -R^2_{131} - R^3_{131} = 0$$

$$R_{12} = \sum_{m=1}^{3} R^m_{m12} = R^1_{112} + R^2_{212} + R^3_{312} = -R^2_{122} - R^2_{132} = 0$$

$$R_{13} = \sum_{m=1}^{3} R^m_{m13} = R^1_{113} + R^2_{213} + R^3_{313} = -R^3_{133} = 0$$

$$R_{21} = R^1_{121} + R^2_{221} + R^3_{321} = 0$$

$$R_{22} = R^1_{122} + R^2_{222} + R^3_{322} = 0$$

$$R_{23} = R^1_{123} + R^2_{223} + R^3_{323} = 0$$

$$R_{33} = R^1_{133} + R^2_{233} + R^3_{333} = -2.$$

5. Déterminons la courbure scalaire :

$k = \sum g^{ij} R_{ij} = g^{33} R_{33} = \frac{-2}{\mu}$.

Exemple 3.14. *Soit H_3 l'espace de Heisenberg muni de la métrique :*

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (\frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy + dz)^2.$$

et muni de sa base orthonormé : $e_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}, e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}, e_3 = \frac{\partial}{\partial z}$.

1. *Calculons les crochet* $[e_i, e_j]$ *tel que* $[e_i, e_j] = e_i e_j - e_j e_i$.
   on a $[e_i, e_j] = 0$ *sauf* $[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = e_3$.
2. *Déterminons* (g_{ij}) *et* (g^{ij}) *:*

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + (\tfrac{y}{2}dx - \tfrac{x}{2}dy + dz)^2 \\ &= (dx, dy, dz) \begin{pmatrix} 1+\frac{y^2}{4} & -\frac{xy}{4} & \frac{y}{2} \\ -\frac{xy}{4} & 1+\frac{x^2}{4} & -\frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors

$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+\frac{y^2}{4} & -\frac{xy}{4} & \frac{y}{2} \\ -\frac{xy}{4} & 1+\frac{x^2}{4} & -\frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix}.$

et $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{y}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{x}{2} \\ -\frac{y}{2} & -\frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix}.$

3. *Calculons les* Γ_{ij}^k *telque :*

$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right).$
$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{33}^1 = 0, \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{y}{4}, \Gamma_{22}^1 = -x, \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2}$
$\Gamma_{11}^2 = -\frac{y}{2}, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{y}{4}, \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = -\frac{1}{2}, \Gamma_{22}^2 = 0, \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = 0, \Gamma_{33}^2 = 0.$

4. *Calculons les* $\nabla_{e_i}e_j$ *tel que :*$\nabla_{e_i}e_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k e_k$.

$\nabla_{e_1}e_1 = \nabla_{e_2}e_2 = \nabla_{e_3}e_3 = 0, \nabla_{e_1}e_2 = \nabla_{e_2}e_1 = -\frac{1}{2}e_3,$
$\nabla_{e_1}e_3 = \nabla_{e_3}e_1 = -\frac{1}{2}e_2, \nabla_{e_2}e_3 = \nabla_{e_3}e_2 = \frac{1}{2}e_1.$

5. *Calculons les courbures sectionnelles* K *telque :*

$K(u,v) = R(u;v,u,v) = \langle R(u,v)v,u\rangle = g(R(u,v)v,u).$

Pour calculer les courbures sectionnelles il faut calculer premièrement les tenseures R *tel que :*
$R(X,Y)W = \nabla_X\nabla_Y W - \nabla_Y\nabla_X W - \nabla_{[X,Y]}W.$
$R(e_1,e_1)e_1 = 0.$
$R(e_1,e_2)e_2 = \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_2 - \nabla_{[e_1,e_2]}e_2 = -\frac{3}{4}e_1$
$R(e_1,e_3)e_3 = \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_3 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_3 - \nabla_{[e_1,e_3]}e_3 = -\frac{1}{4}e_1$
$R(e_2,e_3)e_3 = \nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_2 - \nabla_{[e_3,e_2]}e_2 = \frac{1}{4}e_2.$

Puis on calcule les courbures sectionnelles K *:*
$K(e_1,e_2) = g(R(e_1,e_2)e_2,e_1) = g(-\frac{3}{4}e_1,e_1) = -\frac{3}{4},$
$K(e_1,e_3) = g(R(e_1,e_3)e_3,e_1) = g(-\frac{1}{4}e_1,e_1) = -\frac{1}{4},$
$K(e_2,e_3) = g(R(e_2,e_3)e_3,e_2) = g(\frac{1}{4}e_2,e_2) = \frac{1}{4}.$

6. *Calculons les courbures de Ricci Ric tel que :*

$$Ric(e_i,e_j) = R_{ij} = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,e_k)e_k,e_j)$$

$Ric(e_1,e_1) = R_{11}$
$= g(R(e_1,e_1)e_1,e_1) + g(R(e_1,e_2)e_2,e_1) + g(R(e_1,e_3)e_3,e_1)$
$= K(e_1,e_2) + K(e_1,e_3) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -1$

$Ric(e_1,e_2) = R_{12} = g(R(e_1,e_1)e_1,e_2) + g(R(e_1,e_2)e_2,e_2) + g(R(e_1,e_3)e_3,e_2) = -\frac{3}{4}$
$Ric(e_2,e_2) = R_{22} = g(R(e_2,e_1)e_1,e_2) + g(R(e_2,e_2)e_2,e_2) + g(R(e_2,e_3)e_3,e_2) = -\frac{1}{2}$
$Ric(e_1,e_3) = R_{13} = g(R(e_1,e_1)e_1,e_3) + g(R(e_1,e_2)e_2,e_3) + g(R(e_1,e_3)e_3,e_3) = -\frac{1}{4}$
$Ric(e_2,e_3) = R_{23} = g(R(e_2,e_1)e_1,e_3) + g(R(e_2,e_2)e_2,e_3) + g(R(e_2,e_3)e_3,e_3) = 0$
$Ric(e_3,e_3) = R_{33} = g(R(e_3,e_1)e_1,e_3) + g(R(e_3,e_2)e_2,e_3) + g(R(e_3,e_3)e_3,e_3) = -\frac{1}{4}.$

7. *Calculons la courbure scalaire* k *:*

$$k(m) = \sum_{i,j} R(e_i,e_j,e_i,e_j) = \sum_{i,j} K(e_i,e_j) = 2Trace(p) = \sum_{i,j} R_{ij}$$
$$= K(e_1,e_2) + K(e_2,e_3) + K(e_1,e_3) = -\frac{3}{4}$$

3.5 Première et deuxième formes fondamentales

Définition 3.27. *On appelle* première forme fondamentale *de la surface Σ paramétrisé par*

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\to f(u,v) \end{aligned}$$

la forme quadratique induite par Σ^2 sur Σ qu'on note I et qui s'écrit par la matrice symétrique définie positive suivante :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(\partial_u f, \partial_u f) & I(\partial_u f, \partial_v f) \\ I(\partial_v f, \partial_u f) & I(\partial_v f, \partial_v f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \rangle \\ \langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \rangle \end{pmatrix}$$

où les quantités E, F et G sont appelées les coefficients de la première forme fondamentale. On peut écrire la première forme fondamentale sous la forme quadratique comme suit :

$$I(du, dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

La matrice (g_{ij}) est appelée aussi le tenseur de mesure.

Définition 3.28. *On appelle deuxième forme fondamentale la forme quadratique II qui s'écrit :*

$$II(du, dv) = ldu^2 + 2mdudv + ndv^2$$

où l, m et n sont appelés les coefficients de la deuxième forme fondamentale, et sont exprimés par

$$\begin{cases} l &= \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} N \\ m &= \dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} N \\ n &= \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} N. \end{cases}$$

tel que N : le vecteur normal unitaire qui donné par :

$$N = \frac{(\frac{\partial f}{\partial u} \bigwedge \frac{\partial f}{\partial v})}{\| \frac{\partial f}{\partial u} \bigwedge \frac{\partial f}{\partial v} \|}$$

3.5.1 La courbure moyenne :

Définition 3.29. *On appelle courbure moyenne : la moyenne entre les courbures principales noté H, tel que :*

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}$$

Si $H = 0$, on dit que la surface est minimale.

3.5.2 La courbure de Gauss :

Définition 3.30. *On appelle* courbure de Gauss *le produit des courbures principales noté K_G, tel que :*

$$\begin{aligned} K_G = k_1 k_2 &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{\det(II)}{\det(I)} \end{aligned}$$

3.6 Variété Semi-Riemannienne

3.6.1 Rappels sur les formes bilinéaires symétriques

Soit E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.31. *Une forme bilinéaire sur $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application*

$g : E \times E \to \mathbb{K}$, linéaire par rapport à chaque argument, c'est-à-dire :

1. *$g(\lambda x, y) = g(x, \lambda y) = \lambda g(x, y), \forall x, y \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.*
2. *$g(x + y, z) = g(x, z) + g(y, z)$ et $g(x, y + z) = g(x, y) + g(x, z), \forall x, y, z \in E$.*

Définition 3.32. *On dit qu'une forme bilinéaire g est symétrique si $g(x, y) = g(y, x)$.*

Si E est de dimension finie n, et si $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base de E.

Désignons les composantes des vecteurs x et y dans cette base respectivement par $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n)$, alors d'aprés la définition

$$g(x, y) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i g\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j g(e_i, e_j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j$$

où on a posé $g(e_i, e_j) = b_{ij}$.

On appelle la matrice carrée $A = (b_{ij})$ d'ordre n la matrice de la forme bilinéaire g dans la base $\{e_1, ..., e_n\}$. A l'aide de cette matrice, on peut écrire aussi

$$g(x, y) = {}^t XAY, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \mathit{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

-Une forme bilinéaire symétrique $g : E \times E \to \mathbb{R}$ est dite non-dégénérée si :

$$g(v, w) = 0, \forall w \in E \Longrightarrow v = 0.$$

-Une forme bilinéaire symétrique g sur $E \times E$ est non-dégénérée si et seulement si sa matrice (g_{ij}) dans une base $\{e_i\}$ de E est inversible, où $g_{ij} = g(e_i, e_j)$.

-Soit F un sous-espace vectoriel de E, l'orthogonal de F pour g est le sous-espace de E défini par $F^{\perp} = \{v \in E \mid g(v, w) = 0, \forall w \in F\}$. Ainsi, une forme bilinéaire symétrique g sur $E \times E$ est donc non-dégénérée si et seulement si l'orthogonal de E est $\{0\}$.

Un sous-espace F de E s'appelle non-dégénéré si $g \mid F$ est non-dégénérée, où :

$$g \mid F : F \times F \to \mathbb{R}, g \mid_F (x, y) = g(x, y).$$

Définition 3.33. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle forme quadratique sur E, toute application $Q : E \to \mathbb{K}$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

** $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$.*

**L'application $(x, y) \to g(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(y))$ est bilinéaire sur E (nécessairement symétrique).*

De plus, on a $g(x, x) = Q(x)$.

Définition 3.34. *Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire $g : E \times E \to \mathbb{R}$, symétrique et non-dégénérée.*

Définition 3.35. *Étant donné un produit scalaire g sur E, on définit la norme de $v \in E$ par rapport à g de la manière suivante $||v|| = \sqrt{|g(v, v)|}$.*

Proposition 3.1. *Soit g un produit scalaire sur E. Alors E admet une base orthonormée $\{e_i\}$, telle que $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}\xi_j$ et $\xi_j = g(e_j, e_j) = \pm 1$. De plus,*

$$v = \sum_i \xi_i g(v, e_i)e_i, \forall v \in E$$

Le nombre de signes négatifs dans $\{e_i\}$ est appelé l'indice de E, et noté $IndE$.

3.6.2 Métriques Semi-Riemanniennes

Soit M une variété différentielle de dimension n.

Définition 3.36. *Un tenseur métrique ou métrique semi-Riemannienne sur M, est une famille des applications $g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}(x \in M)$, telle que :*

1. *Pour tout $x \in M, g_x$ est une forme bilinéaire symétrique et non-dégénérée.*
2. *Si $X, Y \in \Gamma(TM)$, la fonction $g(X, Y)(x) = g_x(X_x, Y_x)$ est différentiable.*
3. *L'indice de g est constant, et noté $IndM$, c'est-à-dire :*

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall x \in M, Ind(T_xM) = p(\text{par rapport à } g_x).$$

Définition 3.37. *Une variété* **Semi-Riemannienne** *est un couple (M, g), où M est une variété différentielle de dimension n, et g est un tenseur métrique sur M.*

Remarque 1. *Soit (M, g) une variété semi-Riemannienne, alors :*
•$0 \leq IndM \leq \dim M$,
• *Si $IndM = 0, (M, g)$ est dite variété Riemannienne,*
• *Si $p = 1$ et $\dim M \geq 2, (M, g)$ est dite variété de Lorentz ou variété Lorentzienne.*

Exemple 3.15. *L'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique :*

$$g = -dx_1^2 - dx_2^2 - ... - dx_p^2 + dx_{p+1}^2 + ... + dx_n^2.$$

noté $\mathbb{R}^n_p$, est une variété semi-Riemannienne, et $Ind\mathbb{R}^n_p = p$. Soit $\xi_i = g(\partial_i, \partial_i)$, alors :

$$\xi_i = \begin{cases} -1 & si \quad i = 1, ..., p \\ +1 & si \quad i = p + 1, ..., n \end{cases}$$

Pour $n \geq 2$, l'espace $\mathbb{R}^n_1$ est appelé espace de Minkowski, et
Les composantes de la métrique g est données par $g_{ij} = \delta_{ij}\xi_j$, c'est-à-dire :

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}\xi_i dx_i \otimes dx_j.$$

Exemple 3.16.
1. *L'espace Résoluble de dimension trois muni d'une métrique Lorentzienne :*

$$ds^2 = e^{2z}dx^2 - e^{-2z}dy^2 + dz^2.$$

2. *L'espace symétrique généralisé de dimension 4 :*

$$g = \mu(dx^2 + dy^2 + dxdy) + e^{-y}(2dx + dy)dv + e^{-x}(dx + 2dy)du, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

C'est une métrique semi-Riemannienne de signature $(2; 2)$.

4 Chapitre 2 : L'espace de Lorentz-Heisenberg

Soit $\mathbb{H}_3$ le groupe de Lorentz-Heisenberg doté d'une métrique lorentzienne invariante à gauche est donnée par :

$$\begin{aligned} g_3 &= dx^2 + (xdy + dz)^2 - [(1-x)dy - dz]^2 \\ &= (dx, dy, dz)(g_{ij}) \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

où (dx, dy, dz) est un champ de vecteurs et $(g_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ est la matrice donnée par

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous rappelons que le produit de $\mathbb{H}_3$ est donné par :

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) * (x, y, z) = (\overline{x} + x, \overline{y} + y, \overline{z} + z - \overline{x}y + x\overline{y}).$$

Où $*$ désigne l'opération de groupe dans le groupe Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$.
$\mathbb{H}_3$ est un groupe de Lie tridimensionnel.
L'algèbre de Lie de $\mathbb{H}_3$ a une base pseudo-orthonormée $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ telle que :

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + (1-x)\frac{\partial}{\partial z}, e_3 = \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}.$$

qui vérifient :

$$g_3(e_1, e_1) = g_3(e_2, e_2) = 1, g_3(e_3, e_3) = -1.$$

Nous avons les crochets de Lie :

$$[e_2; e_3] = 0; [e_3; e_1] = [e_2; e_1] = e_2 - e_3$$

La connexion de Levi-Civita ∇ de g_3 satisfait

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{3} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Où $(\Gamma_{ij}^k)_{1\leq i,j\leq 3}$ sont les symboles de Christoffel de g_3.
et est explicitement donné comme suit :

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= 0, \nabla_{e_1} e_2 = 0, \nabla_{e_1} e_3 = 0 \\ \nabla_{e_2} e_1 &= e_2 - e_3, \nabla_{e_2} e_2 = -e_1, \nabla_{e_2} e_3 = -e_1 \\ \nabla_{e_3} e_1 &= e_2 - e_3, \nabla_{e_3} e_2 = e_1, \nabla_{e_3} e_3 = -e_1. \end{aligned} \right.$$

Le tenseur de Ricci est défini par :

$$Ricc(X, Y) = \sum_{i=1}^{3} \epsilon_i g_3(R(X, e_i)Y, e_i).$$

Où X, Y sont deux champs de vecteurs sur $\mathcal{H}_3, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ et $\epsilon_3 = -1$.
Ainsi les composantes sont :

$$R_{11} = R_{33} = \frac{1}{2}, R_{22} = -\frac{1}{2}, R_{ij} = 0 \quad \text{pour tout } i \neq j\ .$$

Equation des surfaces minimales :

Soit Σ une surface dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ qui est donnée comme un graphe de la fonction $z = f(x, y)$, il est paramétrisé par

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{H}_3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, f(x, y)) \end{aligned}$$

Le vecteur de position $X(x, y)$ de Σ est exprimé sous la forme d'un vecteur fonctionel évaluée $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

Les vecteurs tangents

$$X_x = \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial z}$$

et

$$X_y = \frac{\partial}{\partial y} + f_y \frac{\partial}{\partial z}$$

sont décrits par

$$\begin{cases} X_x(x, y) &= e_1 + f_x e_2 - f_x e_3 \\ X_y(x, y) &= (f_y + x)e_2 + (1 - f_y - x)e_3. \end{cases}$$

La première forme fondamentale I de la surface Σ est définie par :

$$I = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$$

avec

$$E = g_3(X_x, X_x) = 1$$

$$F = g_3(X_x, X_y) = f_x$$

$$G = g_3(X_y, X_y) = 2(x + f_y) - 1.$$

La deuxième forme fondamentale II de la surface Σ est

$$II = ldx^2 + 2mdxdy + ndy^2$$

où $l = g_3(\nabla_{X_x} X_x, N), m = g_3(\nabla_{X_x} X_y, N), n = g_3(\nabla_{X_y} X_y, N)$.

$$\begin{cases} \nabla_{X_x} X_x &= f_{xx}(x, y)e_2 - f_{xx}(x, y)e_3 \\ \nabla_{X_x} X_y &= [f_{xy}(x, y) + 1]e_2 - [f_{xy}(x, y) + 1]e_3 \\ \nabla_{X_y} X_y &= -e_1 + f_{yy}(x, y)e_2 - f_{yy}(x, y)e_3. \end{cases}$$

et N est le vecteur normal unitaire à Σ, il satisfait donc le système suivant :

$$\begin{cases} g_3(X_x, N) &= 0 \\ g_3(X_y, N) &= 0 \\ g_3(N, N) &= 1 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} N &= \frac{-f_x e_1 + (1 - f_y - x)e_2 + (f_y + x)e_3}{\sqrt{f_x^2 + 1 - 2(f_y + x)}} \\ &= \frac{1}{W}[-f_x e_1 + (1 - f_y - x)e_2 + (f_y + x)e_3] \end{aligned}$$

où $W = \sqrt{f_x^2 + 1 - 2(f_y + x)}$.

On a :

$$l = \frac{1}{W} f_{xx}, m = \frac{1}{W}(1 + f_{xy}), n = \frac{1}{W}(f_x + f_{yy})$$

Définition 4.1. *Dans l'espace de Lorentz-Heisenberg* $\mathbb{H}_3$ *de dimension* 3*, les surfaces qui minimisent localement les aires sont appelées surfaces minimales.*

Ces surfaces Σ *satisfont à la condition* $H = 0$*, où* H *est le champ de vecteurs de courbure moyenne donné par la formule :*

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{En} + \mathbf{Gl} - \mathbf{2Fm}}{\mathbf{2(EG} - \mathbf{F^2)}} \tag{2}$$

Proposition 4.1. *La surface* Σ *définie ci-dessus est une surface minimale dans l'espace de Lorentz-Heisenberg* $\mathbb{H}_3$ *de dimension* 3 *si et seulement si sa courbure moyenne* H *satisfait à la condition suivante :*

$$H = \frac{1}{2W^3}[f_{yy} + [-1 + 2(f_y + x)]f_{xx} - 2f_x f_{xy} - f_x] = 0. \tag{3}$$

Exemple 4.1. *Il est clair que si* $f(x, y) = ay + b$ *ou* $f(x, y) = -\frac{1}{2}xy + cx + dy + e$ *avec* a, b, c, d *et* e *sont des constantes réelles, alors la condition (3) est satisfait. Par conséquent les surfaces paramétrisées par* $X(x, y) = (x, y, ay + b)$ *et* $X(x, y) = (x, y, -\frac{1}{2}xy + cx + dy + e)$ *sont des surfaces minimales dans l'espace* $\mathbb{H}_3$.

5 Chapitre 3 : Les surfaces minimales de translation dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$

Maintenant, nous classons toutes les types de surfaces de translation dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ de dimension 3.

Obtenus comme produit de deux courbes génératrices non orthogonales.

Type 1 : Considérons d'abord une surface de translation Σ paramétrisé par :

$$X(x,y) = (x,0,g(x)) * (0,y,h(y)) = (x,y,g(x)+h(y)-xy)$$

Où g et h sont deux surfaces arbitraires. La condition de minimalité est donnée par le paramètre d'équation (3) devient

$$h''(y) + (-1+2h'(y))g''(x) + (g'(x)-y) = 0 \tag{4}$$

En prenant la dérivé par rapport à x de l'équation (4), on obtient :

$$(-1+2h'(y))g'''(x) + g''(x) = 0 \tag{5}$$

Nous remarquons que si g est affine, satisfaire l'équation (4).

Pour résoudre l'équation (4), on distingue deux cas :

Première cas :

Si $g''(x) = 0$, nous avons $g(x) = ax + x_0$ où a et x_0 sont deux constantes réelles.

En remplaçant g dans l'équation (4), on obtient $h(y) = \frac{1}{6}y^3 - \frac{a}{2} + y_1y + y_0$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$

Deuxième cas :

Si $g''(x) \neq 0$, nous avons :

$$\frac{g'''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{1-2h'(y)} = \xi, \xi \in \mathbb{R}$$

et nous obtenons :

$$g(x) = \frac{k}{\xi^2}e^{\xi x} + c_1x + c_2,$$

et

$$h(y) = \frac{\xi - 1}{2\xi}y + \delta,$$

Où $\delta, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Théorème 5.1. *Les surfaces minimales de translation Σ de type 1 dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ de dimension 3 sont paramétrisées par : $X(x,y) = (x,y,g(x)+h(y)-xy)$ où $g(x)$ et $h(y)$ sont données par :*

$$g(x) = ax + x_0$$

et

$$h(y) = \frac{1}{6}y^3 - \frac{a}{2}y^2 + y_1y + y_0.$$

Où a, x_0, y_0, y_1 sont des constantes réelles.
Ou

$$g(x) = \frac{k}{\xi^2}e^{\xi x} + c_1x + c_2,$$

et

$$h(y) = \frac{\xi - 1}{2\xi}y + \delta$$

où $\delta, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}_+^*$.

Type 2 : Maintenant, la surface de translation Σ est paramétrisée par :

$$X(x, y) = (0, y, h(y)) * (x, 0, g(x)) = (x, y, g(x) + h(y) + xy)$$

Où g et h sont deux surfaces arbitraires.
La condition de minimalité donnée par l'équation (3) devient :

$$h''(y) + [2(h'(y) + 2x) - 1]g''(x) - 3(g'(x) + y) = 0 \tag{6}$$

Nous prenons la dérivé de l'équation (6) par rapport à x (à y) (respectivement), nous trouvons

$$2h''(y)g'''(x) = 0 \tag{7}$$

ce qui implique $h''(y) = 0$ ou $g'''(x) = 0$.
Si $h''(y) = 0$ alors $h(y) = ay + y_0$ où a et y_0 sont deux constantes réelles.
En remplaçant dans (6), on obtient :

$$[-1 + 2(a + 2x)]g''(x) - 3g'(x) = 3y. \tag{8}$$

Le côté droit de l'égalité (8) ne dépend que de x et le côté gauche de l'égalité ne dépend que de y c'est une contradiction, et l'équation (7) est satisfait si et seulement si : $g'''(x) = 0$.

Si $g'''(x) = 0$ alors $g(x) = ax^2 + bx + c$ telle que a, b et c sont trois constantes réelles.

En remplaçant cette résultat dans (6) on obtient :

$$h''(y) + 4ah'(y) - 3y = -2ax + 2a + 3b. \tag{9}$$

Cette derniére équation est vérifié si et seulement si $a = 0$, ce qui donne :

$$h(y) = \frac{1}{2}y^3 + \frac{3}{2}by^2 + y_1y + y_0. \tag{10}$$

où y_1, y_0 sont des constantes réelles.
Donc nous établissons le résultat suivant :

Théorème 5.2. *Les surfaces minimales de translation Σ de type 2 dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ de dimension 3 sont paramétrisées par :*

$$X(x, y) = (0, y, h(y)) * (x, 0, g(x)) = (x, y, g(x) + h(y) + xy)$$

Où $g(x)$ et $h(y)$ sont données par :

$$g(x) = bx + c$$

et

$$h(y) = \frac{1}{2}y^3 + \frac{3}{2}by^2 + y_1 y + y_0$$

Où b, c, y_1 et y_0 sont des constantes réelles.

Type 3 : Nous supposons maintenant que la surface de translation Σ est donnée par le produit :

$$X(x,y) = (x, 0, g(x)) * (h(y), y, 0) = (x + h(y), y, g(x) - xy)$$

donc il est paramétrisé par :

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{H}_3 \\ (x,y) &\mapsto (x + h(y), y, g(x) - xy) \end{aligned}$$

où $X(x,y) = (x+h(y), y, g(x)-xy)$ est le vecteur de position et les composantes du vecteur tangent sont donnés par :

$$\begin{cases} X_x(x,y) &= e_1 + (g'(x) - y)e_2 - (g'(x) - y)e_3 \\ X_y(x,y) &= h'(y)e_1 + e_3. \end{cases}$$

Les coefficients du première forme fondamentale sont :
$E = g_3(X_x, X_x) = 1, F = g_3(X_x, X_y) = h'(y) + g'(x) - y, G = g_3(X_y, X_y) = (h'(y))^2 - 1.$
avec

$$\begin{cases} \nabla_{X_x} X_x &= g''(x)e_2 - g''(x)e_3 \\ \nabla_{X_x} X_y &= 0 \\ \nabla_{X_y} X_y &= [h''(y) - 1]e_1 + h'(y)e_2 - h'(y)e_3. \end{cases}$$

et le vecteur normal unitaire N de la surface Σ est donnée par :

$$N = \frac{1}{W}[(g'(x) - y)e_1 - (1 + h'(y)(g'(x) - y))e_2 + (h'(y)(g'(x) - y))e_3]$$

où

$$W = \sqrt{[g'(x) - y]^2 + 2h'(y)(g'(x) - y) + 1}$$

et les coefficients de la deuxième forme fondamentale de Σ sont :

$$l = -\frac{1}{W}g''(x), m = 0, n = \frac{1}{W}[(h''(y) - 1)(g'(x) - y) - h'(y)]$$

Nous suivons les mêmes étapes que les types précédents pour calculer la courbure principale de la surface de translation Σ, nous cédont :

$$H = \frac{1}{2W^3}[(g'(x) - y)[h''(y) - 1] - h'(y) - g''(x)(h'^2(y) - 1)] \tag{11}$$

La condition de minimalité $H = 0$ implique l'équation :

$$(g'(x) - y)[h''(y) - 1] - h'(y) - g''(x)(h'^2(y) - 1) = 0 \tag{12}$$

On dérive par rapport à x et par rapport à y (respectivement), on obtient le système différentiel suivant :

$$\frac{g'''(x)}{g''(x)} = \frac{h''(y) - 1}{h'^2(y) - 1} \tag{13}$$

le côté gauche de l'égalité (13) ne dépend que de y et le côté droit ne dépend que de x pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{g'''(x)}{g''(x)} = \frac{h''(y) - 1}{h'^2(y) - 1} = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

Ce qui implique le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g'''(x) & = & \lambda g''(x) \\ h''(y) - 1 & = & \lambda[h'^2(y) - 1] \end{array} \right.$$

En résolvant ce système, on obtient d'abord dans le cas particulier $\lambda = 0$:
$g'''(x) = 0$, alors $g(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c sont des constantes réelles.
En remplaçant g dans la condition de minimalité (12), on obtient :

$$(2ax + b–y)(h''(y) - 1) - h'(y) = 2a[(h'(y))^2 - 1] \tag{14}$$

L'équation (12) est satisfait si $h''(y) - 1 = 0$ ou $a = 0$.
De plus, si $h''(y) - 1 = 0$ alors on a $h'(y) = y + y_0$ où $y_0 \in \mathbb{R}$ et $2a[(h'(y))^2 - 1] + h'(y) = 0$, ce qui implique :

$$2a[(y + y_0)^2 - 1] + (y + y_0) = 0 \tag{15}$$

Cette dernière équation n'est pas vraie pour tout $y \in \mathbb{R}$, donc nous conclurons que $h''(y) - 1 \neq 0$.
Par conséquent, nous avons $a = 0$ et l'équation (14) devient :

$$(b - y)h''(y) - h'(y) = b - y,$$

qui a la solution :

$$h(y) = \frac{1}{4}(b - y)^2 - c_1 \ln |b - y| + c_0$$

où $c_1, c_0 \in \mathbb{R}$.
On suppose maintenant que $\lambda \neq 0$ alors

$$g(x) = C(x + \frac{1}{\lambda}) + C_1 \exp(\lambda x) + C_0$$

Où $C_0, C_1, C \in \mathbb{R}$. En remplaçant g dans l'équation (12), on obtient :

$$(C - y)(h''(y) - 1) - h'(y) = C_1 \lambda \exp(\lambda x)[1 - h''(y) + \lambda((h'(y))^2 - 1)]$$

Puisque le côté droit de cette égalité ne dépend que de y et que le côté gauche dépend de x et y alors la condition de minimalité est satisfait si et seulement si $C_1 = 0$ alors nous obtenons :

$$(C - y)h''(y) - h'(y) = C - y$$

qui est déjà résolu ci-dessus. Enfin, nous annonçons le théorème suivant résumant cette résultat.

Théorème 5.3. *Les surfaces minimales de translation Σ de type 3 dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ de dimension 3 sont paramétrisées par $X(x,y) = (x + h(y), y, g(x) - xy)$ Où g et h sont données par :*

$$g(x) = bx + c$$

et

$$h(y) = \frac{1}{4}(b-y)^2 - c_1 \ln|b-y| + c_0,$$

où b, c, c_1 et c_0 sont des constantes réelles.

Type 4 : On suppose maintenant que la surface de translation Σ de type 4 est donnée par le produit

$$X(x,y) = (x, 0, g(x)) * (h(y), y, 0) = (x + h(y), y, g(x) + xy)$$

donc il est paramétrisé par :

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{H}_3 \\ (x,y) &\mapsto (x + h(y), y, g(x) + xy) \end{aligned}$$

où $X(x,y) = (x+h(y), y, g(x)+xy)$ est le vecteur de position et les composantes de vecteur tangent sont donnés par :

$$\begin{cases} X_x(x,y) &= e_1 + (g'(x) - y)e_2 - (g'(x) + y)e_3 \\ X_y(x,y) &= h'(y)e_1 + 2xe_2 + (1-2x)e_3 \end{cases}$$

les coefficients du première forme fondamentale de la surface Σ sont :

$$\begin{aligned} E &= g_3(X_x, X_x) = 1, \\ F &= g_3(X_x, X_y) = h'(y) + g'(x) + y, \\ G &= g_3(X_y, X_y) = (h'(y))^2 + 4x - 1. \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{cases} \nabla_{X_x} X_x &= g''(x)e_2 - g''(x)e_3 \\ \nabla_{X_x} X_y &= 2e_2 - 2e_3 \\ \nabla_{X_y} X_y &= [h''(y) - 1]e_1 + h'(y)e_2 - h'(y)e_3 \end{cases}$$

et le vecteur normal unitaire N de Σ est donné par :

$$N = \frac{1}{W}[-(g'(x)+y)e_1 + (1 - 2x + h'(y)(g'(x)+y))e_2 + (2x - h'(y)(g'(x)+y))e_3]$$

où

$$W = \sqrt{[g'(x)+y]^2 + 2h'(y)(g'(x)+y) + 1 - 4x},$$

et les coefficients de la deuxième forme fondamentale de Σ sont :

$$l = \frac{1}{W} g''(x),$$

$$m = \frac{2}{W},$$

$$n = \frac{1}{W}[(1 - h''(y))(g'(x) + y) + h'(y)].$$

La courbure principale de la surface de translation Σ de type 4 :

$$H = \frac{1}{2W^3}[(1 - h''(y)(g'(x) + y) + h'(y) + (h'^2(y) + 4x - 1)g''(x) - 4(h'(y) + g'(x) + y)] \quad (16)$$

avec

$$W = \sqrt{[g'(x) + y]^2 + 2h'(y)(g'(x) + y) + 1 - 4x}$$

<u>La condition de minimalité</u> $H = 0$ céde l'équation :

$$[1 - h''(y)](g'(x) + y) + (h'^2(y) + 4x - 1)g''(x) - 3h'(y) - 4(g'(x) + y) = 0. \quad (17)$$

En dérivant par rapport à x puis par rapport à y, on obtient :

$$\frac{-g'''(x)}{g''(x)} = \frac{h'''(y)}{2h'(y)h''(y)} \quad (18)$$

Le côté gauche de l'égalité (18) ne dépend que de y et le côté droit ne dépend que de x pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{-g'''(x)}{g''(x)} = \frac{h'''(y)}{2h''(y)h'(y)} = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

ce qui implique le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} g'''(x) & = & -\lambda g''(x) \\ h'''(y) & = & 2\lambda h''(y)h'(y). \end{cases}$$

En résolvant ce système, on distingue deux cas :

1. $\lambda = 0$: on a

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

avec a, b et c sont des constantes réelles.
En remplaçant g dans la condition de minimalité (17), on obtient :

$$[1 - h''(y)](b + y) + 2a(h'^2(y) - 1) - 3h'(y) - 4(b + y) = -2ax(1 - h''(y)).$$

cette équation est vérifié si $a = 0$ ou $(1 - h''(y)) = 0$.
De plus, si $(1 - h''(y)) = 0$ alors on a la fonction $h'(y) = y + y_0$ où $y_0 \in \mathbb{R}$ est la solution de l'équation $2a[(h'(y))^2 - 1] - 3h'(y) - 4(b + y) = 0$ n'est pas vraie pour tout $y \in \mathbb{R}$.
Si $a = 0$ alors

$$(b + y)h''(y) + 3h'(y) = -3(b + y),$$

qui a la solution

$$h(y) = -\frac{3}{8}(b + y)^2 - \frac{c_0}{2}(b + y)^{-2} + c_1,$$

où c_1, c_0 sont des constantes réelles.

2. $\lambda \neq 0$: en résoudre l'équation

$$g(x) = \frac{1}{\lambda}(b_1 x + b_0) - \frac{b_1}{\lambda^2} + b_1 \exp(-\lambda x),$$

Où b_0, b_1 et b_2 sont des constantes réelles. En remplaçant cette résultat dans la condition de minimalité dans (17), on obtient :

$$[1-h''(y)](\frac{b_1}{\lambda}+y)-3h'(y)-4(\frac{b_1}{\lambda}+y) = \lambda b_2 \exp(-\lambda x)[1-h''(y)-\lambda((h'(y))^2+4x-1)-4] \tag{19}$$

et $b_2 = 0$, par conséquent, $g(x) = \frac{1}{\lambda}(b_1 x + b_0) - \frac{b_1}{\lambda^2} = bx + c$ où $b, c \in \mathbb{R}$. dans l'addition, l'équation (19) devient :

$$(b+y)h''(y) + 3h'(y) = -3(b+y),$$

qui a la solution

$$h(y) = -\frac{3}{8}(b+y)^2 - \frac{c_0}{2}(b+y)^{-2} + c_1,$$

où c_0 et c_1 sont des constantes réelles.

Nous résumons par le théorème suivant :

Théorème 5.4. *Les surfaces minimales de translation Σ de type 4 dans l'espaces de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ de dimension 3 sont paramétrisées par $X(x, y) = (x + h(y), y, g(x) + xy)$ Où g et h sont données par :*

$$g(x) = bx + c$$

et

$$h(y) = -\frac{3}{8}(b+y)^2 - \frac{c_0}{2}(b+y)^{-2} + c_1,$$

où b, c, c_1 et c_0 sont des constantes réelles.

Type 5 :

Soit les courbes $\beta(y) = (0, y, h(y))$ et $\alpha(x) = (x, g(x), 0)$. La surface de translation Σ est donnée par le produit $\Sigma = \beta(y) * \alpha(x)$ est paramétrisé par :

$$X(x, y) = (0, y, h(y)) * (x, g(x), 0) = (x, y + g(x), h(y) + xy)$$

donc on a :

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}_3$$
$$(x, y) \mapsto (x, y + g(x), h(y) + xy)$$

$$\begin{cases} X_x(x, y) &= e_1 + (y + xg'(x))e_2 - (xg'(x) + y - g'(x))e_3 \\ X_y(x, y) &= (h'(y) + 2x)e_2 - [h'(y) + 2x - 1]e_3 \end{cases}$$

les coefficients du première forme fondamentale de la surface Σ sont :

$$E = 1 + (g'(x))^2(2x - 1) + 2yg'(x),$$

$$F = y + g'(x)[h'(y) + 3x - 1],$$
$$G = 2(h'(y) + 2x) - 1.$$

et on a :

$$\begin{cases} \nabla_{X_x} X_x &= -(g'(x))^2 e_1 + (2g'(x) + xg''(x))e_2 - [2g'(x) + xg''(x) - g''(x)]e_3 \\ \nabla_{X_x} X_y &= -g'(x)e_1 + 2e_2 - 2e_3 \\ \nabla_{X_y} X_y &= -e_1 + h''(y)e_2 - h''(y)e_3. \end{cases}$$

et le vecteur normal unitaire N de Σ est donné par :

$$N = \frac{1}{W}([g'(x)(h'(y) + x) - y]e_1 - [h'(y) + 2x - 1]e_2 + [h'(y) + 2x]e_3)$$

où

$$W = \sqrt{[g'(x)(h'(y) + x) - y]^2 - 2(h'(y) + 2x) + 1},$$

et les coefficients de la deuxième forme fondamentale de Σ sont :

$$l = \frac{1}{W}[-(g'(x))^3(h'(y) + x) + y(g'(x))^2 + 2g'(x) - g''(x)(h'(y) + x)],$$
$$m = \frac{1}{W}[-(g'(x))^2(h'(y) + x) + yg'(x) + 2],$$
$$n = \frac{1}{W}[-g'(x)(h'(y) + x) + h''(y) + y]$$

La condition de minimalité donnée dans la définition (2) implique l'équation suivante :

$$(2x - 1)(g'(x))^2 h''(y) + (x + h'(y) + 2yh''(y))g'(x) + g''(x)[(x + h'(y))(1 - 2(2x + h'(y)))] = 3y - h''(y) \tag{20}$$

Le premier côté de l'égalité (20) ne dépend que de y et le dérnier côté droit ne dépend que de x et y alors pour toute surfaces minimales de translation de type 5, on a : $g''(x) = g'(x) = 0$.

Par conséquent, g est une fonction constante et $h(y) = \frac{1}{2}y^3 + y_1 y + y_0$, où y_0, y_1 sont des integrations constantes.

Théorème 5.5. *Les surfaces minimales de translation Σ de type 5 dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ de dimension 3 sont paramétrisées par $X(x, y) = (x, y + g(x), h(y) + xy)$ Où $g(x)$ est une fonction constante et $h(y) = \frac{1}{2}y^3 + y_1 y + y_0$, où $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.*

Type 6 :

Soit les courbes $\alpha(x) = (x, g(x), 0)$ et $\beta(y) = (0, y, h(y))$. La surface de translation Σ donnée par le produit $\Sigma = \alpha(y) * \beta(x)$ est paramétrisé par :

$$X(x, y) = ((x, g(x), 0) * (0, y, h(y)) = (x, y + g(x), h(y) - xy)$$

donc on a :

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}_3$$
$$(x, y) \mapsto (x, y + g(x), h(y) - xy)$$

$$\begin{cases} X_x(x,y) &= e_1 + (xg'(x) - y)e_2 - (xg'(x) - y - g'(x))e_3 \\ X_y(x,y) &= h'(y)e_2 + [1 - h'(y)]e_3 \end{cases}$$

les coefficients du première forme fondamentale de la surface Σ sont données par :

$$\begin{aligned} E &= 1 + (g'(x))^2(2x-1) - 2yg'(x), \\ F &= -y + g'(x)[h'(y) + x - 1], \\ G &= 2h'(y) - 1. \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{cases} \nabla_{X_x}X_x &= -(g'(x))^2e_1 + (2g'(x) + xg''(x))e_2 - [2g'(x) + xg''(x) - g''(x)]e_3 \\ \nabla_{X_x}X_y &= -g'(x)e_1 \\ \nabla_{X_y}X_y &= -e_1 + h''(y)e_2 - h''(y)e_3. \end{cases}$$

et le vecteur normal unitaire N de Σ est donné par :

$$N = \frac{1}{W}([g'(x)(h'(y) - x) + y]e_1 + [1 - h'(y)]e_2 + h'(y)e_3)$$

où

$$W = \sqrt{[g'(x)(h'(y) - x) + y]^2 - 2h'(y) + 1},$$

et les coefficients de la deuxième forme fondamentale de Σ sont :

$$\begin{aligned} l &= \tfrac{1}{W}[-(g'(x))^3(h'(y) - x) - y(g'(x))^2 + 2g'(x) + g''(x)(x - h'(y))], \\ m &= \tfrac{1}{W}[-(g'(x))^2(h'(y) - x)], \\ n &= \tfrac{1}{W}[-g'(x)(h'(y) - x) + h''(y) - y]. \end{aligned}$$

La courbure moyenne de la surface de translation Σ de type 6 est donné par :

$$H = \frac{1}{2W^3}[(g'(x))^2((2x-1)h''(y) - 2y + (x + h'(y) - 1))$$
$$+g'(x)(-2yh''(y) + 3h'(y) + 2y^2 + x - 2) + g''(x)(x - h'(y))(2h'(y) - 1) - y + h''(y)]$$

la condition de minimalité céde :

$$\begin{aligned} (g'(x))^2((2x-1)h''(y) - 2y + (x + h'(y) - 1)) + g'(x)(-2yh''(y) + 3h'(y) \\ +2y^2 + x - 2) + g''(x)(x - h'(y))(2h'(y) - 1) = y - h''(y) \end{aligned} \tag{21}$$

Il est clair que le côté droit de l'égalité (21) dépend de x et de y, et le côté gauche ne dépend que de y. Donc, pour toute surfaces minimales de translation de type 6, on a : $g''(x) = g'(x) = 0$.

Par conséquent, g est une fonction constante et $h(y) = \frac{1}{6}y^3 + y_1 y + y_0$, où y_0, y_1 sont des integrations constantes.

Théorème 5.6. *Les surfaces minimales de translation Σ de type 6 dans l'espaces de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$ de dimension 3 sont paramétrisées par $X(x,y) = (x, y + g(x), h(y) - xy)$ Où $g(x)$ est une fonction constante et $h(y) = \frac{1}{6}y^3 + y_1 y + y_0$, où $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.*

6 Conclusion

Le but de ce travail est de classifier les surfaces minimales de translation, c'est à dire le produit de deux courbes dans l'espace de Lorentz-Heisenberg $\mathbb{H}_3$, de six types de surfaces qu'ont a classifier d'après López et Munteanu.

Références

[1] M. Bekkar, Z.Hanifi, Minimal surfaces of the 3-dimensional Lorentz-Heiesenberg space *Int.Journal of Math.Analysis* , **3** (2009), 473-482.

[2] M.Belkhelfa, *Paralell and minimal surfaces in Heisenberg.* Proceedings of the Summer Scool on Differential Geometry, University of Coimbra, (1999), 67-76.

[3] D.Bensikaddour, L.Belarbi, Minimal translation surfaces in Lorentz-Heiesenberg three-space, Nonlinear Studies 24, 4 (2017), 859-867.

[4] D.Bensikaddour, L.Belarbi, Minimal translation surfaces in Lorentz-Heiesenberg 3- space with flat metric, Differential Geometry-Dynamical Systems 20 (2018), 1-14.

[5] A.Ferrandez, P.Lucas, On surfaces in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space, Pacific Journal of Mathematics, 152, 1 (1992), 93-100.

[6] J.Inoguchi, Flat translation surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group, J. Geom.82 1-2 (2005), 83-90.

[7] J.Inoguchi, R.López and M.I.Munteanu, Minimal translation surfaces in the Heisenberg Group Nil_3. Geom.Dedicata, 161 (1)(2012), 221-231.

[8] R.López, M.I.Munteanu, Minimal translation surfaces in Sol_3, J.Math.Soc. Japan, 64, 3 (2012), 985-1003.

[9] N.Rahmani, S.Rahmani, Lorentzian geometry of the Heisenberg group, Geom. Dedicata, 118 (2006), 133-140.

[10] N.Rahmani, S.Rahmani, Structures Homognes Lorentziennes sur le Groupe de Heisenberg, J.Geom.Phys, 13 (1994), 254-258.

[11] S.Rahmani, Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois, J.Geom.Phys, 9 (1992), 295-302.

[12] H.Rosenberg, Minimal surfaces in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, Illinois J.Math. 46 (2002), 1177-1195.

[13] P.Scott, The geometries of 3-manifolds, Bull.London Math. Soc. 15 (1983), 401-487.

[14] R.Souam and E.Toubiana, On the classification and regularity of umbilic surfaces in homogeneous 3-manifolds, Mat.Contemp. 30 (2006), 201-215.

[15] R.Souam and E.Toubiana, Totally umbic surfaces in homogeneous 3-manifolds, Comm. Math. Helv, 84 (2009), 673-704.

[16] R.Souam, On stable constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$, Trans. Amer. Math .Soc, 362, 6 (2010), 2845-2857.

[17] D.W.Yoon, C.W.Lee, M.K.Karacan, Some translation in the 3-dimensional Heisenberg group, Bull.Korean Math. Soc. 50 (2013), 1329-1343.