REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE

LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMIDE IBN BADIS MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de Master

Option : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Intitulé

=−=−=−=−=−=−=−=−=−*o* ◯ *o*−=−=−=−=−=−=−=−=−=

SUR LES SOULUSTIONS MEROMORPHES DES EQUATIONS NON LINEAIRES AUX DIFFERENCES

=−=−=−=−=−=−=−=−=−*o* ◯ *o*−=−=−=−=−=−=−=−=−=

Présentée par : BOUHADEF Hayat

Soutenue le : , devant le jury composé de :

Président : LATREUCH Zinelâabidine MCB U. MOSTAGANEM.

Examinateurs :FETTOUCH Houari MCB U. MOSTAGANEM.

Encadreur :

ANDASMAS Maamar MCB U. MOSTAGANEM.

Remerciements

Au nom du Dieu Clément et Miséricordieux.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements :

En premier lieu, à Dieu le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné durant ces mois consacrés à la réalisation de ce modeste travail.

Mes remerciements spéciaux vont à Mr ANDASMAS Maamar mon encadreur de mémoire pour son aide, sa gentillesse, ses conseils et de m'avoir guidé pas à pas dans mon travail.

Je tiens à remercier les membres du jury, d'avoir accepté d'examiner ce travail et de participer à ce jury.

J'adresse mes remerciements également à toute l'équipe pédagogique responsable de ma formation au niveau de la Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique.

J'aimerai exprimer ma gratitude à tous mes amis.

Merci à tous et à toutes.

Résumé

La théorie de R. Nevanlinna, parue en 1925, est une théorie moderne permet d'étudier la distribution des valeurs d'une fonction entière ou méromorphe dans le plan complexe, elle est considée parmis des rares événements mathématiques du vingtième siècle, elle a donné des outils trés efficaces pour l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires ou non linéaires dans le plan complexe voir les livres [16], [8], [6], [10].
Ce travail se compose d'une intoduction et deux chapitres.
Le premier chapitre présente les notations standards et les résultats principaux de la théorie de Nevanlinna utilisés dans notre mémoire.
Le deuxième chapitre est consacré pour l'étude de l'équation au différence non linéaire dans le plan complexe, de la forme suivante

$$f(z)^n + p(z)f(z+\eta) = \beta_1 e^{\alpha_1 z} + \beta_2 e^{\alpha_2 z} + ... + \beta_s e^{\alpha_s z},$$

où n, s sont des entiers positifs, $p(z) \neq 0$ est un polynôme et $\eta, \beta_1, ..., \beta_s, \alpha_1, ..., \alpha_s$ sont des constantes avec $\eta\beta_1...\beta_s\alpha_1...\alpha_s \neq 0$. On montre le résultat principale obtenu dans l'article [22] ; que les solutions méromorphes de cette équation ont un hyper ordre au moins un lorsque $n \geqslant 2 + s$.

Table des matières

Introduction

La théorie de la distribution des valeurs de Nevanlinna et ses contreparties est un outil indispensable de plusieurs auteurs pour l'étude des propriétés des solutions entières ou méromorphes, des équations non-linéaires différentielles, ou aux différences, ou différentielles-différences dans des domaines complexes, voir par exemple, [1], [10],[9]-[11],[13],[14] .
Le lemme de la dérivée logarithmique et son analogue la différence logarithmique jouent un rôle clé dans l'étude des équations non linéaires ; Le lemme de la dérivée logarithmique est valable pour toutes les fonctions méromorphes, tandis que son analogue différence logarithmique est valable seulement pour les fonctions méromorphes avec un ordre de croissance fini ou avec un ordre infini tel que son hyper ordre inférieur à un (voir [2], [7]). Donc, pour les équations différentielles non linéaires, il n'est pas nécessaire de restreindre l'ordre de croissance des solutions entières ou méromorphes, voir par exemple, les théorèmes **A** et **B** ci-dessous
Théorème (**A**) *Soit* $n \geq 4$ *un entier et* $P_d(f)$ *un polynôme différentiel de* $f(z)$ *de degré* $d \leq n-3$. *Si* $p_1(z),\ p_2(z)$ *sont deux polynômes non nuls et* $\alpha_1,\ \alpha_2$ *sont deux constantes non nulles tel que* $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ *n'est pas rationnel, l'équation*

$$f(z)^n + P_d(f) = p_1(z)e^{\alpha_1 z} + p_2(z)e^{\alpha_2 z} \tag{0.0.1}$$

n'admet pas de solution entière transcendante.
Théorème (**B**) *Soit* $n \geq 3$ *un entier et* $P_d(f)$ *un polynôme différentiel de* $f(z)$ *de degré* $d \leq n-2$. *Si* $p_1(z),\ p_2(z)$ *sont deux polynômes non nuls et* $\alpha_1,\ \alpha_2$ *sont deux constantes non nulles tels que* $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq (\frac{d}{n})^{\pm 1},\ 1$. *Alors, toute solution entière transcendente* $f(z)$ *de l'équation* (0.0.1) *vérifie que* $\Theta(0,f)=0$.
Pour les équations non linéaires aux différences ou différentielles-différences, seule les solutions entières ou méromorphes d'ordre fini ou d'hyper ordre inférieur à un ont été discutées, voir par exemple, les théorèmes C, D et E ci-dessous :
Théorème (**C**) *Soit* $p(z),\ q(z)$ *des polynômes. Alors, l'équation non linéaire aux différences*

$$f(z)^2 + q(z)f(z+1) = p(z)$$

n'admet pas de solution entière transcendante d'ordre fini.

Théorème (**D**) *L'équation non linéaire aux différences*

$$f(z)^3 + q(z)f(z+1) = c\sin bz,$$

où $q(z)$ est un polynôme non constant et $b,\ c \in \mathbb{C}$ sont des constantes non nulles, n'admet pas des solutions entières d'ordre fini. Si $q(z) = q$ est une constante non nulle, alors cette équation possède trois solutions entières distinctes d'ordre fini, à condition que $b = 3\pi n$ et $q^3 = (-1)^{n+1}\frac{27}{4}c^2$ pour un entier non nul n.

Théorème (**E**) *Soit $n \geq 4$ un entier et soit $P_d(f)$ un polynôme différentiel-différence de $f(z)$ de degré $d \leq n-3$. Si $p_1(z),\ p_2(z)$ sont deux polynômes non nuls et $\alpha_1,\ \alpha_2$ sont deux constantes non nulles avec $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq (\frac{d}{n})^{\pm 1},\ 1$, alors l'équation (0.0.1) n'admet pas de solution entière transcendante d'ordre fini.*

Dans les théorèmes A, B et E, le côté droit de la Eq. (0.0.1) a seulement deux termes. Ainsi, une question naturelle est : Que peut-on dire si le côté droit de (0.0.1) est remplacé par s (≥ 1) termes ? Pour l'Eq. (0.0.1), L'idée de base est d'éliminer $e^{\alpha_1 z}$ et $e^{\alpha_2 z}$ en différenciant les deux côtés de (0.0.1). Quand $p_1(z)e^{\alpha_1 z}$ et $p_2(z)e^{\alpha_2 z}$ sont remplacés par $\beta_1 e^{\alpha_1 z}$, $\beta_2 e^{\alpha_2 z}, ..., \beta_s e^{\alpha_s z}$, si on veut utiliser la même idée, nous serons confrontés à des calculs compliqués.

Dans ce mémoire, on traite le problème posé, c'est des résultats de R.R. Zhang et Z.B. Huang dans [22], ils ont étudié le problème en combinant la théorie de la distribution des valeurs de Nevanlinna avec la théorie de l'algèbre linéaire, ils ont étudié les solutions méromorphes à la place des solutions entières de l'équations

$$f(z)^n + p(z)f(z+\eta) = \beta_1 e^{\alpha_1 z} + \beta_2 e^{\alpha_2 z} + \cdots + \beta_S e^{\alpha_S z}.$$

Sous certaines conditions on donne des estimations sur l'ordre et l'hyper ordre des solutions. Notre mémoire est composé de deux chapitres ;

Le premier chapitre présente les notations standards et les résultats principaux de la théorie de Nevanlinna utilisés dans notre mémoire.

Le deuxième chapitre est consacré pour l'étude de l'équation au différence non linéaire dans le plan complexe, de la forme suivante

$$f(z)^n + p(z)f(z+\eta) = \beta_1 e^{\alpha_1 z} + \beta_2 e^{\alpha_2 z} + ... + \beta_s e^{\alpha_s z},$$

où n, s sont des entiers positifs, $p(z) \not\equiv 0$ est un polynôme et $\eta, \beta_1, ..., \beta_s, \alpha_1, ..., \alpha_s$ sont des constantes avec $\eta\beta_1...\beta_s\alpha_1...\alpha_s \neq 0$. On montre le résultat principal obtenu dans l'article [22] ; que les solutions méromorphes de cette équation sont d'hyper ordre au moins un lorsque $n \geqslant 2 + s$; ce résultat est le théorème suivant :

Théorème *Soient $n \geq 2+s$ un entier, $p(z) \not\equiv 0$ un polynôme, η une constante, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$ des constantes non nulles et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ des constantes distinctes non nulles. On suppose* *que* $\frac{\alpha_i}{\alpha_j} \neq n$ *pour tous* $i,\ j \in \{1, 2, ..., s\}$. *De plus quand* $s \geq 5$, *on suppose que* $n\alpha_k \neq l_{k1}\alpha_1 + l_{k2}\alpha_2 + ... + l_{ks}\alpha_s$ *pour* $k = 5, 6, ..., s$, *où* $l_{k1}, l_{k2}, ..., l_{ks} \in \{0, 1, ..., n-1\}$ *et* $l_{k1} + l_{k2} + ... + l_{ks} = n$. *Alors, toute solution méromorphe* $f(z)$*de l'équation*

$$f(z)^n + p(z)f(z+\eta) = \beta_1 e^{\alpha_1 z} + \beta_2 e^{\alpha_2 z} + \cdots + \beta_S e^{\alpha_S z}$$

est d'hyper ordre $\sigma_2(f) \geq 1$.

Chapitre 1

La théorie de R. Nevanlinna.

Notre objectif dans ce chapitre est de donner les définitions de base de la théorie de Nevanlinna sur les fonctions méromorphes, et de rappeler quelques propriétés sur la croissance des fonctions méromorphes.

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna.

1.1.1 La formule de Jensen.

Théorème 1.1.1 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0, +\infty$ et soient a_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ (respectivement $b_k\,(k = 1, 2, \ldots, n)$) les zéros (respectivement les pôles) de $f(z)$ dans le disque $|z| < R$ $(0 < R < +\infty)$, chaque zéro et pôle est pris selon sa multiplicité. Alors,*

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(Re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \sum_{j=1}^{m} \log\frac{|a_j|}{R} - \sum_{k=1}^{n} \log\frac{|b_k|}{R}. \tag{1.1.1}$$

On donne la preuve pour le cas où f n'a aucun zéro ou pôle sur le cercle $|z| = R$, (Si les zéros ou les pôles de la fonction f apparaissent sur le cercle $|z| = R$, on se réfère à [8, p. 2 deuxième cas.], [17, p. 43-47]).

Preuve. On pose

$$F(z) = f(z)\frac{\prod_{k=1}^{n} \frac{R(z-b_k)}{R^2-\bar{b}_k z}}{\prod_{j=1}^{m} \frac{R(z-a_j)}{R^2-\bar{a}_j z}}. \tag{1.1.2}$$

La fonction F n'admet pas de zéros et de pôles dans $|z| \leq R$, donc $\log F(z)$ est analytique dans $|z| \leq R$. Alors, par le théorème de la valeur moyenne des fonctions analytiques [**?**, p. 165], nous obtenons

$$\log F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log F\left(R\, e^{i\varphi}\right) d\varphi.$$

Prenant les parties réelles, en utilisant $\operatorname{Re}(\log F(z)) = \log|F(z)|$, nous obtenons

$$\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|F\left(R\, e^{i\varphi}\right)\right| d\varphi. \tag{1.1.3}$$

De (1.1.2), on trouve

$$F(0) = f(0)\,\frac{\prod_{k=1}^{n}\frac{b_k}{R}}{\prod_{j=1}^{m}\frac{a_j}{R}}. \tag{1.1.4}$$

Pour tout $z = R.e^{i\varphi}$ et pour tout $j = 1,\ 2,\ ...,\ m,\ k = 1,\ 2,\ ...,\ n$, on a

$$\left|\frac{R(z-b_k)}{R^2-\overline{b}_k z}\right| = \left|\frac{R(z-a_j)}{R^2-\overline{a}_j z}\right| = 1. \tag{1.1.5}$$

De (1.1.2) et (1.1.5), on trouve

$$\left|F\left(Re^{i\varphi}\right)\right| = \left|f\left(Re^{i\varphi}\right)\right|. \tag{1.1.6}$$

En combinant (1.1.6) avec (1.1.3) et (1.1.4), nous obtenons l'affirmation

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(Re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \sum_{j=1}^{m}\log\frac{|a_j|}{R} - \sum_{k=1}^{n}\log\frac{|b_k|}{R}. \tag{1.1.7}$$

L'équation (1.1.7) est appelée formule de Jensen, elle donne une idée sur le lien entre les zéros et les pôles situés à l'intérieur d'un disque $|z| < R$ avec la valeur moyenne de $\log|f(z)|$ sur la frontière $|z| = R$. □

Proposition 1.1.1 *Soit f une fonction méromorphe représentée par sa série de Laurent*

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} C_k z^k,\ C_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z},$$

à l'origine. Alors,

$$\log|C_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(Re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \sum_{j=1}^{m}\log\frac{|a_j|}{R} - \sum_{k=1}^{n}\log\frac{|b_k|}{R} - m\log R. \tag{1.1.8}$$

où les $a_j\,(j = 1, 2, \ldots, m)$ (respectivement $b_k\,(k = 1, 2, \ldots, n)$) sont les zéros (respectivement les pôles) de $f(z)$ dans le disque $|z| < R$.

1.1.2 Reformulation de la formule de Jensen.

Définition 1.1.1 *Pour tout nombre réel $x > 0$, on définit $\log^+ x$ par*

$$\log^+ x = \max\{0,\ \log x\}. \tag{1.1.9}$$

Lemme 1.1.1

(1) $\log x \leqslant \log^+ x$. (2) $\log^+ x \leqslant \log^+ y$ *pour* $x \leqslant y$.

(3) $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$. (4) $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}$.

(5) $\log^+ \left(\prod_{k=1}^n x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^n \log^+ x_k$. (6) $\log^+ \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \leqslant \log n + \sum_{k=1}^n \log^+ x_k$.

Preuve. (1), (2), (3) et (4) sont des conséquences immédiates de la définition 1.1.1 et la monotonie de la fonction logarithme ordinaire.

(5) Si $\prod_{k=1}^n x_k \leq 1$, alors l'affirmation est triviale. D'autre part, si $\prod_{k=1}^n x_k > 1$, alors

$$\log^+ \left(\prod_{k=1}^n x_k\right) = \log \left(\prod_{k=1}^n x_k\right) = \sum_{k=1}^n \log x_k \leq \sum_{k=1}^n \log^+ x_k.$$

(6) Par (2) et (5) ci-dessus, on a

$$\log^+ \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \log^+ \left(n \max_{1\leq k\leq n} \{x_k\}\right) \leq \log n + \log^+ \left(\max_{1\leq k\leq n} \{x_k\}\right) \leq \log n + \sum_{k=1}^n \log^+ x_k.$$

□

Définition 1.1.2 *Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe ou $a = +\infty$. Alors, on définit $m(r, a, f)$ la fonction de proximité de la fonction f au point a par*

$$m(r, a, f) = m(r, \frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta \quad si \quad a \neq +\infty \tag{1.1.10}$$

et par

$$m(r, +\infty\ , f) = m(r,\ f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \quad si \quad a = +\infty. \tag{1.1.11}$$

Corollaire 1.1.1 *Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors,*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = m(r,\ f) - m(r, \frac{1}{f}). \tag{1.1.12}$$

Preuve. En utilisant la troisième propriété du $\log^+$, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})|} d\theta,$$

par les définitions (1.1.10), (1.1.11), nous constatons que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = m(r,\ f) - m(r, \frac{1}{f}).$$

□

Définition 1.1.3 *Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe ou $a = +\infty$. On définit $N(r, a, f)$ (respectivement $\overline{N}(r, a, f)$) la fonction a-points (respectivement a-points distincts) de la fonction f dans le disque $|z| \leqslant r$ par*

$$N(r, a, f) = N(r, \frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \log r \quad si\ a \neq +\infty, \tag{1.1.13}$$

$$N(r, +\infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, +\infty, f) - n(0, +\infty, f)}{t} dt + n(0, +\infty, f) \log r \quad si\ a = +\infty \tag{1.1.14}$$

et

$$\overline{N}(r, a, f) = \overline{N}(r, \frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t, a, f) - \overline{n}(0, a, f)}{t} dt + \overline{n}(0, a, f) \log r \quad si\ a \neq +\infty, \tag{1.1.15}$$

$$\overline{N}(r, +\infty, f) = \overline{N}(r, f) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t, +\infty, f) - \overline{n}(0, +\infty, f)}{t} dt + \overline{n}(0, +\infty, f) \log r \quad si\ a = +\infty, \tag{1.1.16}$$

où

$n(t, a, f)$ (a un nombre complexe) désigne le nombre des zéros de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leqslant t$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.

$n(t, +\infty, f)$ désigne le nombre des pôles de la fonction $f(z)$ dans le disque $|z| \leqslant t$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité.

$\overline{n}(t, a, f)$ (a un nombre complexe) désigne le nombre des zéros distincts de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leqslant t$.

$\overline{n}(t, +\infty, f)$ désigne le nombre des pôles distincts de la fonction $f(z)$ dans le disque $|z| \leqslant t$.

Lemme 1.1.2 *Soit f une fonction méromorphe avec les a-points a_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ dans le disque $|z| \leqslant R$ telle que $0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \cdots \leqslant |a_n| \leqslant R$, chacune est comptée selon sa multiplicité. Alors,*

$$\int_0^R \log \frac{n(t, a, f)}{t} dt = \int_0^R \log \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt = \sum_{j=1}^n \log \frac{R}{|a_j|}. \tag{1.1.17}$$

Corollaire 1.1.2 *Soit f une fonction méromorphe représentée par sa série de Laurent*

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} C_k z^k, \ C_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}$$

à l'origine. Alors,

$$\log |C_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(Re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi + N(R, f) - N\left(R, \frac{1}{f}\right). \tag{1.1.18}$$

Corollaire 1.1.3 *Soit f une fonction méromorphe représentée par sa série de Laurent*

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} C_k z^k, \; C_m \neq 0, \; m \in \mathbb{Z}$$

à l'origine. Alors,

$$\log|C_m| = m(r, \; f) - m(r, \frac{1}{f}) + N(R, f) - N\left(R, \frac{1}{f}\right). \tag{1.1.19}$$

1.1.3 La fonction caractéristique de R. Nevanlinna.

Définition 1.1.4 *Soit f une fonction méromorphe non constante. On définit la fonction caractéristique $T(r, f)$ de la fonction f par*

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f). \tag{1.1.20}$$

Exemple 1.1.1 *Soit $f(z) = e^z$. Nous avons $n(t, +\infty, f) = 0$ car f n'admet pas de pôles, par conséquent $N(r, f) = 0$.*
De plus on a

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|e^{re^{i\theta}}\right| d\theta,$$

d'où

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|e^{r\cos\theta}\right| d\theta.$$

Donc

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\theta)\, d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (r\cos\theta)\, d\theta\right),$$

alors

$$m(r, f) = \frac{r}{\pi}.$$

Par conséquent

$$T(r, f) = \frac{r}{\pi}. \tag{1.1.21}$$

Exemple 1.1.2 *Soit* $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ *un polynôme non constant de degré* $n \geqslant 1$ *tel que* $a_j\,(j = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ *sont des nombres complexes avec* $a_n \neq 0$*, et soit* $f(z) = e^{P(z)}$*. On veut calculer* $T\left(r, e^{P(z)}\right)$*.*

D'abord on calcule $T(r,f)$ *lorsque* $P(z) = a_n z^n$*. Soient* $a_n = |a_n| e^{i\varphi}$*,* $z = re^{i\theta}$*. Alors,*

$$|f(z)| = e^{|a_n| r^n \cos(n\theta+\varphi)}.$$

Par conséquent

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(n\theta+\varphi)} d\theta.$$

Par changement de variable, on a

$$m(r,f) = \frac{1}{2n\pi}\int_{\varphi}^{2n\pi+\varphi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(\tau)} d\tau.$$

Puisque $2n\pi$ *est une période de la fonction* $\cos$*, alors*

$$m(r,f) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2n\pi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(\tau)} d\tau,$$

d'où

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(\tau)} d\tau = \frac{|a_n|\, r^n}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\tau)\, d\tau = \frac{|a_n|\, r^n}{\pi}.$$

Comme f *est entière, donc*

$$T(r,f) = m(r,f) = \frac{|a_n|\, r^n}{\pi}. \tag{1.1.22}$$

Généralement, pour $f(z) = e^{P(z)}$ *et* $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ *on a*

$$|f(z)| = e^{|a_n| r^n \cos(n\theta+\varphi)(1+o(1))} \text{ pour } r \to +\infty.$$

Par conséquent, pour r *suffisamment grand on obtient*

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(n\theta+\varphi)(1+o(1))} d\theta = \frac{|a_n|\, r^n}{\pi}\left(1 + o(1)\right).$$

D'où

$$T(r,f) = m(r,f) \sim \frac{|a_n|\, r^n}{\pi} \quad r \to +\infty. \tag{1.1.23}$$

Exemple 1.1.3 ***(Pratique)*** *Soit* $P(z) = 3iz^4$ *un polynôme non constant de degré* 4 *et soit* $f(z) = e^{3iz^4}$*. On veut calculer* $T\left(r, e^{3iz^4}\right)$.
on a pour $z = re^{i\theta}$,

$$|f(z)| = e^{3r^4\cos\left(4\theta+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Par conséquent

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ e^{3r^4\cos\left(4\theta+\frac{\pi}{2}\right)} d\theta.$$

Par changement de variable, on trouve

$$\tau = 4\theta + \frac{\pi}{2} \Longrightarrow d\tau = 4d\theta$$

Alors

$$m(r,f) = \frac{1}{8\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+8\pi} \log^+ e^{3r^4\cos(\tau)} d\tau.$$

Puisque $2n\pi$ *est une période de la fonction* cos*, alors*

$$m(r,f) = \frac{1}{8\pi}\int_0^{8\pi} \log^+ e^{3r^4\cos(\tau)} d\tau,$$

d'où

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ e^{3r^4\cos(\tau)} d\tau = \frac{3r^4}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\tau)\, d\tau = \frac{3r^4}{\pi}.$$

Comme f *est entière, donc*

$$T(r,f) = m(r,f) = \frac{3r^4}{\pi}. \tag{1.1.24}$$

Généralement, pour $f(z) = e^{3iz^4}$ *et* $P(z) = 3iz^4$ *on a*

$$|f(z)| = e^{3r^4\cos\left(4\theta+\frac{\pi}{2}\right)(1+o(1))} \text{ pour } r \to +\infty.$$

Par conséquent, pour r *suffisamment grand on obtient*

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ e^{3r^4\cos\left(4\theta+\frac{\pi}{2}\right)(1+o(1))} d\theta = \frac{3r^4}{\pi}(1+o(1)).$$

D'où

$$T(r,f) = m(r,f) \sim \frac{3r^4}{\pi}\ r \to +\infty. \tag{1.1.25}$$

Exemple 1.1.4 *Soit f une fonction rationnelle*

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0},$$

telle que les a_j $(j = 0,\ 1, \cdots,\ n)$, b_i $(i = 0,\ 1, \cdots,\ m)$ sont des nombres complexes avec $a_n b_m \neq 0$ et $m \geqslant n$. On a $\deg(Q(z)) = m$. Il existe donc un nombre réel positif $r_0 \geqslant 0$ tel que $n(r, +\infty, f) = m$ pour tout $r \geqslant r_0$. Alors,

$$N(r,f) = \int_0^{r_0} \frac{n(t, +\infty, f) - n(0, +\infty, f)}{t} dt + \int_{r_0}^{r} \frac{m - n(0, +\infty, f)}{t} dt + n(0, +\infty, f) \log r,$$

d'où

$$N(r,f) = O(1) + (m - n(0, +\infty, f))(\log r - \log r_0) + n(0, +\infty, f) \log r.$$

Par conséquent

$$N(r,f) = m \log r + O(1). \tag{1.1.26}$$

Par les propriétés des polynômes complexes (voir [11, Lemme 1.3.1 p. 9]). Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r_1 > 0$ tel que pour tout $|z| = r > r_1$, on a

$$|P(z)| = |a_n| r^n (1 + o(1)) \quad et \ \ |Q(z)| = |b_m| r^m (1 + o(1)).$$

Par conséquent

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left(\frac{|a_n|}{|b_m|} r^{n-m} (1 + o(1)) \right) d\theta,$$

d'où

$$m(r,f) = O(1). \tag{1.1.27}$$

En combinant entre (1.1.26) *et* (1.1.27), *on obtient*

$$T(r,f) = m \log r + O(1) = O(\log r).$$

1.2 Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna.

Théorème 1.2.1 *Soit f une fonction méromorphe non constante et soit*

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{+\infty} C_i z^i, \quad C_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}$$

la série de Laurent de $(f - a)$ à l'origine. Alors, pour tout nombre complexe a, on a

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - \log|C_m| + \varphi(r,a), \tag{1.2.1}$$

où $|\varphi(r,a)| \leqslant \log 2 + \log^+ |a|$.

Remarque 1.2.1 *Le premier théorème principal peut être exprimé sous la forme :*

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1) \tag{1.2.2}$$

pour tout $a \in \mathbb{C}$. On note que le terme d'erreur $O(1)$ dépend de a.

Exemple 1.2.1 *Dans l'exemple précédent, on a calculé la fonction $T(r,f)$ pour la fonction rationnelle*

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_0},$$

telle que les a_j $(j = 0,\ 1, \cdots,\ n)$, b_i $(i = 0,\ 1, \cdots,\ m)$ sont des nombres complexes où $a_n b_m \neq 0$ et $m \geqslant n$. Maintenant on va calculer le $T(r,f)$ de la fonction f mais pour le cas $m < n$.
On a la fonction $\frac{1}{f}$ est une fonction rationnelle qui vérifie les conditions de l'exemple précédent.
En appliquant le premier théorème fondamental (1.2.2), *on obtient*

$$T(r,f) = T\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(1),$$

nous pouvons appliquer la même méthode de l'exemple précédent pour obtenir

$$T(r,f) = n \log r + O(1) = O(\log r).$$

Remarque 1.2.2 *Nous constatons que la fonction caractéristique d'une foncton rationnelle est toujours donnée par*

$$T(r,f) = O(\log r). \tag{1.2.3}$$

En outre, l'inverse de cet assertion est vrai. Autrement dit, si f est une fonction méromorphe avec $T(r,f) = O(\log r)$, alors f est une fonction rationnelle (voir [10, Théorème 2.2.3 p. 26]).

Proposition 1.2.1 *Soient $f, f_1, \ldots, f_n$ des fonctions méromorphes et $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, telles que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Alors*
(a) $T\left(r, \prod_{k=1}^{n} f_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} T(r, f_k), \quad n \geqslant 1,$
(b) $T(r, f^n) = nT(r,f),\ n \in \mathbb{N},$

(c) $T\left(r, \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \log n, \quad n \geqslant 1,$

(d) $T\left(r, \frac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\delta}\right) = T(r, f) + O(1)$, *en supposant que* $f \not\equiv -\delta/\gamma$.

Preuve. (a) et (c), en utilisant les propriétés (5) et (6) de $\log^+$ on peut facilement déduire que si $f_k\,(k = 1, \ldots, n)$ sont des fonctions méromorphes, alors

$$m\left(r, \textstyle\prod_{k=1}^{n} f_k\right) \leq \textstyle\sum_{k=1}^{n} m(r, f_k) \tag{1.2.4}$$

et

$$m\left(r, \textstyle\sum_{k=1}^{n} f_k\right) \leq \textstyle\sum_{k=1}^{n} m(r, f_k) + \log n. \tag{1.2.5}$$

En outre, puisque l'ordre du pôle de $\sum_{k=1}^{n} f_k$ en z_0 ne dépasse pas la somme des ordres des pôles des f_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ en z_0, alors

$$N\left(r, \textstyle\sum_{k=1}^{n} f_k\right) \leq \textstyle\sum_{k=1}^{n} N(r, f_k). \tag{1.2.6}$$

De même, on a

$$N\left(r, \textstyle\prod_{k=1}^{n} f_k\right) \leq \textstyle\sum_{k=1}^{n} N(r, f_k). \tag{1.2.7}$$

En combinant (1.2.6) (resp. (1.2.7)) avec (1.2.5) (resp. (1.2.4)), on trouve

$$T\left(r, \textstyle\sum_{k=1}^{n} f_k\right) \leq \textstyle\sum_{k=1}^{n} T(r, f_k) + \log n$$

et

$$T\left(r, \textstyle\prod_{k=1}^{n} f_k\right) \leq \textstyle\sum_{k=1}^{n} T(r, f_k).$$

(b) Il suffit d'observer que $|f^n| = |f|^n \leq 1$ si et seulement si $|f| \leq 1$.

(d) On suppose que $\gamma \neq 0$. On pose $f_1 = f + \delta/\gamma,\ \ f_2 = \gamma f_1,\ \ f_3 = 1/f_2,\ \ f_4 = \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta) f_3}{\gamma}$, alors $\frac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\delta} = f_4 + \alpha/\gamma$.

Maintenant, en utilisant les inégalités (a) et (c) dans la proposition précédente, nous trouvons

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\delta}\right) &= T(r, f_4) + O(1) \\ &= T(r, f_3) + O(1) \\ &= T(r, f_2) + O(1) \\ &= T(r, f_1) + O(1) \\ &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

Le cas où $\gamma = 0\ \ (\delta \neq 0)$. On pose $f_1 = f + \frac{\beta}{\alpha}$ (avec $\alpha \neq 0$) donc $\frac{\alpha f+\beta}{\delta} = \frac{\alpha}{\delta} f_1$. Alors,

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{\alpha f+\beta}{\delta}\right) &= T\left(r, \frac{\alpha}{\delta} f_1\right) + O(1) \\ &= T(r, f_1) + O(1) \\ &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

□

Théorème 1.2.2 *Soit f une fonction méromorphe. Alors, pour tout $R > 0$, on a*

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, e^{i\theta}\right) d\theta + \log^+ |f(0)| \quad \textit{avec} \quad 0 < r < R. \tag{1.2.8}$$

$\cdot)$ *$T(r,f)$ est une fonction croissante de r.*

Remarque 1.2.3 *L'équation* (1.2.8) *est appelée l'Identité de Henri Cartan, c'est une autre représentation de $T(r,f)$. Puisque $N\left(r, \frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)$ est une fonction croissante de r. À l'aide de cette identité* (1.2.8), *on peut dire que la fonction $T(r,f)$ est une fonction croissante de r.*

1.3 La croissance et la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe.

1.3.1 L'ordre et l'hyper-ordre d'une fonction

Définition 1.3.1 *Soit f une fonction méromorphe. $\rho(f)$ l'ordre de f est défini par*

$$\rho(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

et on définit l'hyper ordre $\rho_2(f)$ de la fonction f par

$$\rho_2(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 1.3.1 *Soit f une fonction rationnelle non constante*

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_0},$$

telle que les a_j $(j = 0,\ 1, \cdots,\ n)$, b_i $(i = 0,\ 1, \cdots,\ m)$ sont des nombres complexes avec $a_n b_m \neq 0$ et $n,\ m$ sont des entiers positifs. Alors, de (1.2.3) *on a*

$$T(r,f) = O(\log r),$$

d'où

$$\rho(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log O(\log r)}{\log r} = 0.$$

Exemple 1.3.2 *Soit* $f(z) = e^z$. *De* (1.1.21) *on a*

$$T(r,f) = \frac{r}{\pi}.$$

D'où

$$\rho(e^z) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \frac{r}{\pi}}{\log r} = 1.$$

Exemple 1.3.3 *Soit* $f(z) = e^{3iz^4}$. *D'après* (1.1.24), *on obtient*

$$T(r,f) = \frac{3r^4}{\pi}.$$

D'où

$$\rho(e^{z^2}) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \frac{3r^4}{\pi}}{\log r} = 4.$$

On peut constater ces résultats

$$\rho\left(e^{z^3}\right) = 3, \quad \rho\left(e^{iz^5+1}\right) = 5, \quad \rho_2\left(e^{z^3}\right) = 0, \quad \rho_2\left(e^{iz^5+1}\right) = 0.$$

1.3.2 L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros et des points fixes.

Définition 1.3.2 *Soit* f *une fonction méromorphe. Alors, l'exposant (respectivement hyper exposant) de convergence des zéros de la fonction* f *est noté par* $\lambda(f)$ *(respectivement* $\lambda_2(f)$*) tel que*

$$\lambda(f) = \limsup_{r\longrightarrow+\infty} \frac{\log N\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r} \quad et \quad \lambda_2(f) = \limsup_{r\longrightarrow+\infty} \frac{\log\log N\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

On note respectivement par

$$\overline{\lambda}(f) = \limsup_{r\longrightarrow+\infty} \frac{\log \overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r} \text{ et par } \overline{\lambda}_2(f) = \limsup_{r\longrightarrow+\infty} \frac{\log\log \overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

à l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f .

Exemple 1.3.4 *Comme la fonction* $f(z) = \exp(e^z)$ *n'a pas de zéros, alors*

$$\lambda(\exp(e^z)) = 0 = \overline{\lambda}(\exp(e^z)).$$

1.3.3 La mesure linéaire et la mesure logarithmique.

Définition 1.3.3 *On définit la mesure linéaire d'un ensemble* $E \subset [0, +\infty)$ *par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt,$$

où $\chi_E(t)$ *est la fonction indicatrice de l'ensemble* E.
La mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty)$ *est définie par*

$$lm(F) = \int_0^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt.$$

Exemple 1.3.5 *1) La mesure linéaire de l'ensemble* $E = [1, 6] \cup [7, 8.5] \subset [0, +\infty)$ *est*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt = \int_1^6 dt + \int_7^{8.5} dt = 6.5.$$

2) La mesure logarithmique de l'ensemble $F = [e, e^2] \subset [1, +\infty)$ *est*

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \chi_F(t) \frac{dt}{t} = \int_e^{e^2} \frac{dt}{t} = 1.$$

1.4 La fonction élémentaire symétrique.

Définition 1.4.1 *Soient* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *des constantes complexes,* n *un entier strictement positif. La fonction symétrique élémentaire* E_i *de* n *variables* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *est définie par :*

$$E_i(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \sum_i \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_i = \sum_{1 \leq j_1 \lneqq j_2 \lneqq \cdots \lneqq j_i \leq n} \alpha_{j_1} \ldots \alpha_{j_2} ... \alpha_{j_i}$$

$$\begin{aligned} = \; & \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_i + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_{i-1}\alpha_{i+1} + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_{i-1}\alpha_{i+2} + \cdots + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_{i-1}\alpha_n \\ & + \alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_{i+1} + \alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_{i-1}\alpha_{i+2} + \cdots + \alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_i\alpha_n \\ & + \cdots + \alpha_{n-i+1}\alpha_{n-i+2} \cdots \alpha_n \end{aligned}$$

Exemple 1.4.1

$$\begin{aligned} E_1(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \\ E_2(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \cdots + \alpha_1\alpha_n \\ & \quad + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_5 + \cdots + \alpha_2\alpha_n \\ & \quad + \alpha_3\alpha_4 + \cdots + \alpha_3\alpha_n + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n \\ & \quad \vdots \\ E_n(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 \cdots \alpha_{n-1}\alpha_n \end{aligned}$$

Exemple 1.4.2

$$\begin{aligned} E_1(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3) &= \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \\ E_2(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3) &= \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3 \\ E_3(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3) &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{aligned}$$

Remarque 1.4.1 *La fonction élémentaire est symétrique car elle est invariante par permutation des variables.*

1.5 Déterminant de vandermonde :

Définition 1.5.1 *Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ des constantes complexes tel que n un entier strictement positif. Le déterminant de vandermonde de n variables est défini par*

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}, \tag{1.5.1}$$

et egal à

$$V = \prod_{1\leq j<i\leq n} (\alpha_i - \alpha_j).$$

Définition 1.5.2 *On définit le déterminant secondaire de vandermonde noté V_{nk}, tel que $k = 1, 2, ..., n \quad (n \geq 1)$, par*

$$V_{nk} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{n-k-1} & \alpha_2^{n-k-1} & \cdots & \alpha_n^{n-k-1} \\ \alpha_1^{n-k+1} & \alpha_2^{n-k+1} & \cdots & \alpha_n^{n-k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{n} & \alpha_2^{n} & \cdots & \alpha_n^{n} \end{vmatrix}$$

En enlevant la ligne où les puissances des α_i est $[n-k]$; d'ordre $(k+1)$ dans le sens inverse (du bas vers le haut) ; la ligne enlevée est : $(\alpha_1^{n-k},\ \alpha_2^{n-k},\ \alpha_3^{n-k},\ \ldots,\ \alpha_n^{n-k})$. On remarque que le déterminant V_{n0} est le déterminant de Vandermonde (1.5.1), c'est le déterminant principal de Vandermonde.

Remarque 1.5.1 *La relation entre V_{n0} et V_{nk}, est donnée dans le Lemme (2.1.4).*

Chapitre 2

Sur les soulustions méromorphes des équations non linéaire aux différences

Dans ce chapitre, on traite les résultats de R.R. Zhang et Z.B. Huang dans [22], c'est l'étude de l'équation au différence non linéaire dans le plan complexe suivante :

$$f(z)^n + p(z)f(z+\eta) = \beta_1 e^{\alpha_1 z} + \beta_2 e^{\alpha_2 z} + ... + \beta_s e^{\alpha_s z},$$

où n, s sont des entiers positifs, $p(z) \not\equiv 0$ est un polynôme et $\eta, \beta_1, ..., \beta_s, \alpha_1, ..., \alpha_s$ sont des constantes avec $\eta\beta_1...\beta_s\alpha_1...\alpha_s \neq 0$. On montre le résultat principal obtenu dans l'article [22] ; que les solutions méromorphes de cette équation sont d'hyper ordre au moins un lorsque $n \geqslant 2+s$; en combinant la théorie de la distribution des valeurs de Nevanlinna avec la théorie de l'algèbre linéaire on a le théorème suivant :

Théorème 2.0.1 *Soient $n \geq 2+s$ un entier, $p(z) \not\equiv 0$ un polynôme, η une constante, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$ des constantes non nulles et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ des constantes distinctes non nulles. On suppose que $\frac{\alpha_i}{\alpha_j} \neq n$ pour tous $i,\ j \in \{1, 2, ..., s\}$. De plus quand $s \geq 5$, on suppose que $n\alpha_k \neq l_{k1}\alpha_1 + l_{k2}\alpha_2 + ... + l_{ks}\alpha_s$ pour $k = 5, 6, ..., s$, où $l_{k1}, l_{k2}, ..., l_{ks} \in \{0, 1, ..., n-1\}$ et $l_{k1} + l_{k2} + ... + l_{ks} = n$. Alors, toute solution méromorphe $f(z)$de l'équation*

$$f(z)^n + p(z)f(z+\eta) = \beta_1 e^{\alpha_1 z} + \beta_2 e^{\alpha_2 z} + \cdots + \beta_S e^{\alpha_S z} \tag{2.0.1}$$

est d'hyper ordre $\sigma_2(f) \geq 1$.

2.1 Lemmes préliminaires

On a besoin des lemmes suivants. Le premier de ces lemmes aux différences est une version analogue du lemme de la dérivée logarithmique.

Lemme 2.1.1 *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe non constante et $c \in \mathbb{C}$. Si $\sigma_2(f) < 1$ et $\varepsilon > 0$, alors*

$$m\left(r, \frac{f(z+c)}{f(c)}\right) = o\left(\frac{T(r,f)}{r^{1-\sigma_2(f)-\varepsilon}}\right)$$

pour tout r en dehors d'un exceptionnel ensemble de mesure logarithmique finie.

Laine-Yang [8] a cité un lemme aux différences analogue à celui du lemme de Clunie comme suit :

Lemme 2.1.2 *Soit $f(z)$ une solution méromorphe transcendante d'ordre fini ρ, d'une équation aux différences de la forme*

$$U(z,f)P(z,f) = Q(z,f),$$

où $U(z,f)$, $P(z,f)$ et $Q(z,f)$ sont des polynômes aux différences tels que le degré total de $U(z,f)$ dans $f(z)$ et ses déplacements est n, et que le degré total de $Q(z,f)$ est au plus n. De plus, on suppose que $U(z,f)$ contient seulement un terme de degré total maximal en $f(z)$ et ses déplacements.
Alorts, pour chaque $\varepsilon > 0$,

$$m(r, P(z,f)) = O(r^{\rho-1+\varepsilon}) + o(T(r,f)),$$

pour tout r en dehors d'un exceptionnel ensemble de mesure logarithmique finie.

Lemme 2.1.3 *([3, pp. 69–70], [12, p. 82]) Soient $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$ des fonctions méromorphes et $g_1(z)$, $g_2(z)$, ..., $g_n(z)$ des fonctions entières satisfaisant les conditions suivantes.*
(1) $\sum_{i=1}^{n} f_i(z)\, e^{g_i(z)} \equiv 0$;
(2) $g_j(z) - g_k(z)$ ne sont pas des constantes pour $1 \leq j < k \leq n$;
(3) pour $1 \leq j \leq n$, $1 \leq h < k \leq n$,

$$T(r, f_j) = o\{T(r, e^{g_h - g_k})\} \qquad (r \to \infty, r \notin E),$$

où $E \subset (1,\infty)$ est un ensemble de mesure linéaire finie ou de mesure logarithmique finie.

Alors $f_j(z) \equiv 0$ $(j = 1, 2, ..., n)$.
Le lemme suivant donne la relation entre V_{n0} et V_{nk}.

Lemme 2.1.4 *([6]) Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ des constantes complexes tel que n un entier strictement positif. La fonction symétrique* (1.4.1) *élémentaire*

$$E_i\left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\right) \equiv \sum \alpha_1\alpha_2...\alpha_i$$

de n variables $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ est le quotient du determinant secondaire de vandermonde noté V_{ni} par le determinant principal de vandermonde V_{n0} où $V_{n0} \neq 0$.

preuve :
On a, dans $\mathbb{C}$, tout polynôme de degré n admet n solution $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$; d'où pour $p_0 \neq 0$ on a

$$p_0 \prod_{j=1}^{n} (x - \alpha_j) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + ... + p_{n-1}x + p_n,$$

tel que

$$\frac{p_i}{p_0} = (-1)^i E_i\left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\right) \; ; \; i = 1, \cdots, n \; , \tag{2.1.1}$$

car le dévelopement du polynôme $p_0 \prod_{j=1}^{n} (x - \alpha_j)$ donne

$$p_0 \prod_{j=1}^{n} (x - \alpha_j) = \begin{array}{c} p_0 \left[x^n - E_1\left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\right) x + \; E_2\left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\right) x^2 \right. \\ \left. + \ldots + (-1)^i E_i\left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\right) x^i + ... + \; (-1)^n E_n\left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\right)\right] \end{array}$$

et on a

$$(s) \begin{cases} p_0\alpha_1^n + p_1\alpha_1^{n-1} + ... + p_{n-1}\alpha_1 + p_n = 0, \\ p_0\alpha_2^n + p_1\alpha_2^{n-1} + ... + p_{n-1}\alpha_2 + p_n = 0, \\ \vdots \\ p_0\alpha_n^n + p_1\alpha_n^{n-1} + ... + p_{n-1}\alpha_n + p_n = 0, \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1^n = \frac{p_1}{p_0}\alpha_1^{n-1} + \frac{p_2}{p_0}\alpha_1^{n-2} + ... + \frac{p_{n-1}}{p_0}\alpha_1 + \frac{p_n}{p_0}, \\ -\alpha_1^n = \frac{p_1}{p_0}\alpha_2^{n-1} + \frac{p_2}{p_0}\alpha_2^{n-2} + ... + \frac{p_{n-1}}{p_0}\alpha_2 + \frac{p_n}{p_0}, \\ \vdots \\ -\alpha_1^n = \frac{p_1}{p_0}\alpha_n^{n-1} + \frac{p_2}{p_0}\alpha_n^{n-2} + ... + \frac{p_{n-1}}{p_0}\alpha_n + \frac{p_n}{p_0}. \end{cases}$$

Le déterminant du système est

$$det\,(s) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = V_{n0} \; ,$$

d'ou

$$\frac{p_i}{p_0} = (-1)^i \frac{V_{ni}}{V_{n0}}.$$

Alors de (2.1.1), on trouve

$$E_i(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \frac{V_{ni}}{V_{n0}}, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Dans le lemme suivant, on a besoin des transformations élémentaires sur les lignes d'un déterminant, qui sont les suivantes :
(i) Permutation de deu lignes.
(ii) Multiplier une ligne par un nombre non nul.
(iii) Remplacer une ligne par la même ligne en lui ajoutant une somme linéaires des autres lignes.

Lemme 2.1.5 *Soient $n \geq 2$, $s \geq 1$ deux entiers, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ des constantes non nulles, $d_1, d_2, ..., d_s$ des constantes et c_1, c_2, c_3, c_4 des fonctions rationnelles. Pour tous $i = 1, 2, 3, 4$, on suppose que $\alpha_i \neq \alpha_j$ $(i \neq j \in \{1, 2, ..., s\})$ et que $n\alpha_i \neq \alpha_p$ $(p = 1, 2, ..., s)$. Si*

$$(c_1 e^{\alpha_1 z} + c_2 e^{\alpha_2 z} + c_3 e^{\alpha 3 z} + c_4 e^{\alpha_4 z})^n = d_1 e^{\alpha_1 z} + d_2 e^{\alpha_2 z} + \cdots + d_s e^{\alpha_s z}, \tag{2.1.2}$$

alors $c_1 \equiv c_2 \equiv c_3 \equiv c_4 \equiv 0$.

Preuve. De (2.1.2), on en déduit que

$$\begin{aligned} & d_1 e^{a_1 z} + d_2 e^{a_2 z} + \cdots + d_s e^{a_s z} \\ = \; & c_1^n e^{na_1 z} + c_2^n e^{na_2 z} + c_3^n e^{na3z} + c_4^n e^{na_4 z} \\ & + \sum_{(m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4)} c_{m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4} e^{(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3 + m_4\alpha_4)z} \end{aligned}$$

où $c_{m_1 m_2 m_3 m_4}$ sont des fonctions rationnelles et la somme $\sum_{(c_{m_1 m_2 m_3 m_4})}$ est réalisée telle que $m_j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ et $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = n$.
Supposons qu'il existe $b_{ij} \in \{0, 1, ..., n-1\}$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ avec $b_{i1} + b_{i2} + b_{i3} + b_{i4} = n$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, tel que

$$\begin{cases} n\alpha_1 = b_{11}\alpha_1 + b_{12}\alpha_2 + b_{13}\alpha_3 + b_{14}\alpha_4, \\ n\alpha_2 = b_{21}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + b_{23}\alpha_3 + b_{24}\alpha_4, \\ n\alpha_3 = b_{31}\alpha_1 + b_{32}\alpha_2 + b_{33}\alpha_3 + b_{34}\alpha_4, \\ n\alpha_4 = b_{41}\alpha_1 + b_{42}\alpha_2 + b_{43}\alpha_3 + b_{44}\alpha_4, \end{cases} \tag{2.1.3}$$

(2.1.3) peut être vu comme un système d'équations linéaires de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Nous en déduirons une contradiction.

Evidemment $b_{ij} \geq 0$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$. Pour $i = 1, 2, 3, 4$, si seulement un des b_{ij} $(j = 1, 2, 3, 4$ avec $j \neq i)$ est supérieur à zéro, on en déduit immédiatement une contradiction ; en effet, sans perte de généralité, on peut supposer que $b_{21} > 0$ et $b_{23} = b_{24} = 0$. Puis par la deuxième équation du système (2.1.3), on a $(n - b_{22})\alpha_2 = b_{21}\alpha_1$. Puisque $b_{21} + b_{22} = n$ et $b_{21} \neq 0$, on a $\alpha_1 = \alpha_2$, une contradiction.

Maintenant, nous supposons que, pour tous $i = 1, 2, 3, 4$, au moins deux des b_{ij} $(j = 1, 2, 3, 4$ avec $j \neq i)$ sont supérieurs à zéro. Pour tous $i = 1, 2, 3, 4$, on a $bij < n - b_{ii}$ $(j \neq i)$. Le système (2.1.3) peut être écrit comme suit

$$\begin{cases} (b_{11} - n)\,\alpha_1 + b_{12}\alpha_2 + b_{13}\alpha_3 + b_{14}\alpha_4 = 0, \\ b_{21}\alpha_1 + (b_{22} - n)\,\alpha_2 + b_{23}\alpha_3 + b_{24}\alpha_4 = 0, \\ b_{31}\alpha_1 + b_{32}\alpha_2 + (b_{33} - n)\,\alpha_3 + b_{34}\alpha_4 = 0, \\ b_{41}\alpha_1 + b_{42}\alpha_2 + b_{43}\alpha_3 + (b_{44} - n)\,\alpha_4 = 0. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Noter la matrice correspondante au système (2.1.4) est

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} - n & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} - n & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - n & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} - n \end{pmatrix}.$$

On discute le rang de la matrice A. Puisque $b_{i1} + b_{i2} + b_{i3} + b_{i4} = n$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, l'ajout des colonnes 2, 3 et 4 à la colonne 1, donne $det(A) = 0$.

On discute maintenant, en deux cas, les déterminants des sous-matrices 3×3 de la matrice A.

__**Cas 1.**__ $b_{13} = b_{23} = b_{43} = 0$.

On Note que pour tous $i = 1, 2, 3, 4$, au moins deux des b_{ij} ($j = 1, 2, 3, 4$ avec $j \neq i$) sont supérieurs à zéro, on a $b_{12} > 0,\ b_{14} > 0,\ b_{21} > 0,\ b_{24} > 0,\ b_{41} > 0,\ b_{42} > 0$.

Pour la sous-matrice 3×3

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_{11} - n & b_{12} & b_{14} \\ b_{31} & b_{32} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{44} - n \end{pmatrix} = A_{23}$$

de la matrice A, on a

$$\begin{aligned} \det(A_1) \;=\; & (b_{11} - n)b_{32}(b_{44} - n) + b_{12}b_{34}b_{41} + b_{14}b_{31}b_{42} \\ & - b_{14}b_{32}b_{41} - b_{12}b_{31}(b_{44} - n) - (b_{11} - n)b_{34}b_{42}. \end{aligned}$$

Puisque pour tous $i = 1, 2, 3, 4$, $b_{ij} < n - b_{ii}$ ($j \neq i$), on a $b_{12} < n - b_{11}$ et $b_{41} < n - b_{44}$. Si $b_{32} > 0$, alors $b_{14}b_{32}b_{41} < (n - b_{11})(n - b_{44})b_{32}$. Donc

$$\det(A_1) > b_{12}b_{34}b_{41} + b_{14}b_{31}b_{42} - b_{12}b_{31}(b_{44} - n) - (b_{11} - n)b_{34}b_{42} \geq 0.$$

Si $b_{32} = 0$, alors $b_{31} > 0$, $b_{34} > 0$ et donc

$$\det(A_1) = b_{12}b_{34}b_{41} + b_{14}b_{31}b_{42} - b_{12}b_{31}(b_{44} - n) - (b_{11} - n)b_{34}b_{42} > 0.$$

Ainsi dans ce cas, on a prouvé $\det(A_1) > 0$.
<u>**Cas 2**.</u> Au moins un des b_{13}, b_{23}, b_{43} est supérieur à zéro. Pour la sous-matrice 3×3

$$A_2 = \begin{pmatrix} b_{11} - n & b_{12} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} - n & b_{24} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix}$$

de la matrice A, on a

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= (b_{11} - n)(b_{22} - n) b_{43} + b_{12}b_{23}b_{41} + b_{13}b_{21}b_{42} \\ &\quad - b_{13}(b_{22} - n) b_{41} - b_{12}b_{21}b_{43} - (b_{11} - n)b_{23}b_{42}. \end{aligned}$$

Si $b_{43} > 0$, alors par $b_{12} < n - b_{11}$ et $b_{21} < n - b_{22}$, on a $b_{12}b_{21}b_{43} < (n - b_{11})(n - b_{22})b_{43}$. Donc

$$\det(A_2) > b_{12}b_{23}b_{41} + b_{13}b_{21}b_{42} - b_{13}(b_{22} - n)b_{41} - (b_{11} - n)b_{23}b_{42} \geq 0.$$

Si $b_{43} = 0$, alors $b_{41} > 0$, $b_{42} > 0$ et au moins un des b_{13}, b_{23} est supérieur à zéro. Donc

$$\det(A_2) = b_{12}b_{23}b_{41} + b_{13}b_{21}b_{42} - b_{13}(b_{22} - n)b_{41} - (b_{11} - n)b_{23}b_{42} > 0.$$

Ainsi dans ce cas, on a prouvé $\det(A_2) > 0$.
Puisque $\det(A) = 0$ et il existe une sous-matrice 3×3 de la matrice A avec déterminant non nul, donc le rang de la matrice A est 3.
Par transformations élémentaire des lignes, on déduit que la matrice du système (2.1.4) devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1.5}$$

De (2.1.4) et (2.1.5), on trouve

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4,$$

une contradiction avec les hypothèses du Lemme. Alors (2.1.3) ne tient pas.

Sans perte de généralité, on peut supposer (La négation de (2.1.4)) que

$$n\alpha_4 \neq m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3 + m_4\alpha_4$$

pour tous $m_1, m_2, m_3, m_4 \in \{0, 1, ..., n-1\}$ tel que $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = n$.
Puisque

$$n\alpha_4 \neq \alpha_p \qquad (p = 1, 2, ..., s)$$

et

$$n\alpha_4 \neq \alpha_q \qquad\qquad (q = 1, 2, 3),$$

par (2.1.3) et lemma 2.3, on a $c_4 \equiv 0$.
Donc l'Eq. (2.1.2) devient

$$(c_1e^{\alpha_1 z} + c_2e^{\alpha_2 z} + c_3e^{\alpha_3 z})^n = d_1e^{\alpha_1 z} + d_2e^{\alpha_2 z} + \cdots + d_se^{\alpha_s z}.$$

En utilisant une preuve similaire à celle de (2.1.2)∼(2.1.5), on a $c_3 \equiv 0$ et l'équation (**??**) devient

$$(c_1e^{\alpha_1 z} + c_2e^{\alpha_2 z})^n = d_1e^{\alpha_1 z} + d_2e^{\alpha_2 z} + \cdots + d_se^{\alpha_s z}. \tag{2.1.6}$$

Par (2.1.6), on a

$$\begin{aligned} d_1e^{\alpha_1 z} + d_2e^{\alpha_2 z} + \cdots + d_se^{\alpha_s z} &= c_1e^{n\alpha_1 z} + c_2e^{n\alpha_2 z} \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} c_1^j c_2^{n-j} e^{(j\alpha_1 + (n-j)\alpha_2)z} \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

où $\binom{n}{j}$ sont les coefficients binomiaux.
Puisque $\alpha_1 \neq \alpha_2$, on a pour tout $j = 1, 2, ..., n-1$,

$$n\alpha_1 \neq j\alpha_1 + (n-j)\alpha_2, \quad n\alpha_2 \neq j\alpha_1 + (n-j)\alpha_2.$$

Donc par (2.1.7) et lemma 2.3, on a $c_1 \equiv c_2 \equiv 0$.

□

2.2 Preuve du théorème

Preuve. [Preuve du Théorème 1.1] Supposons que l'Eq. (2.0.1) a une solution méromorphe $f(z)$ avec $\sigma_2(f) < 1$. On déduit une contradiction pour le cas $f(z)$ a au moins un pôle et le cas où $f(z)$ est une fonction entière.

<u>Cas 1.</u> $f(z)$ a au moins un pôle.

Dans ce cas, si $\eta = 0$, en comparant le nombre des pôles des deux côtés de (2.0.1), nous obtenons immédiatement une contradiction.

Si $\eta \neq 0$, on suppose que z_0 soit un pôle de $f(z)$ d'ordre q.

De (2.0.1), on a

$$p(z)f(z+\eta) = -f(z)^n + \beta_1 e^{\alpha_1 z} + \beta_2 e^{\alpha 2z} + \cdots + \beta_t e^{\alpha_t z}$$

on déduit que $z_0+ \eta$ est un pôle de $f(z)$ avec ordre au moins nq.

En remplaçant z par $z+ \eta$ dans (2.0.1), on obtient

$$\begin{aligned} f(z+\eta)^n + p(z+\eta)f(z+2\eta) &= \beta_1 e^{\alpha_1(z+\eta)} + \beta_2 e^{\alpha_2(z+\eta)} \\ &\quad + \cdots + \beta_s e^{\alpha_s(z+\eta)}. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

puisque $z_0 + \eta$ est un pôle de $f(z)^n$ avec ordre au moins $n^2 q$, de (2.2.1), on déduit que $z_0 + 2\eta$ est un pôle de $f(z)$ with order at least $n^2 q$.

En suivant les étapes ci-dessus, on trouve une séquence $\{z_0 + j\eta\}_{j=0}^{\infty}$ de pôles de $f(z)$ avec ordre au moins $n^j q$.

Donc pour $m = 1, 2, ...,$ on a

$$n\left(m\left|\eta\right| + \left|z_0\right| + 1,\ f(z)\right) \geq q + nq + \cdots + n^m q.$$

En outre, $n \geq 2 + s \geq 3$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \lambda_2\left(\frac{1}{f(z)}\right) &= \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log n\left(r, f(z)\right)}{\log r} \\ &\geq \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\log\log n\left(m\left|\eta\right| + \left|z_0\right| + 1,\ f(z)\right)}{\log\left(m\left|\eta\right| + \left|z_0\right| + 1\right)} \\ &\geq \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\log\log n^m}{\log m} = 1. \end{aligned}$$

Cela contredit $\sigma_2(f) < 1$.

Donc l'eq. (2.0.1) n'a aucune solution méromorphe avec au moins un pôle, d'hyper-ordre inférieure à un.

<u>Cas 2</u>. $f(z)$ est une fonction entière. Si $f(z)$est un polynôme, puis en comparant les deux côtés de l'équation (2.0.1), on obtient que l'ordre de croissance du côté gauche est 0, alors que l'ordre de croissance du côté droit est 1. C'est impossible. Alors $f(z)$ est transcendentale.

Puisque $s \geq 1$, nous divisons notre discussion en deux sous-cas : $s = 1$ et $s > 1$.

<u>Sous-cas 2.1</u>. $s = 1$. L'eq. (2.0.1) devient

$$f(z)^n + p(z)f(z+\eta) = \beta_1 e^{\alpha_1 z}. \tag{2.2.2}$$

Différencier les deux côtés de (2.2.2), on a

$$nf(z)^{n-1}f'(z) + (p(z)f(z+\eta))' = \alpha_1\beta_1 e^{\alpha_1 z}.$$

Combinant cette équation avec (2.2.2), on a

$$f(z)^{n-1}(nf'(z) - \alpha_1 f(z)) = \alpha_1 p(z)f(z+\eta) - (p(z)f(z+\eta))'. \tag{2.2.3}$$

Si $nf'(z) - \alpha_1 f(z) \not\equiv 0$, alors on déduit de (2.2.3), $n \geq 2 + s = 3$ et le Lemme (2.1.2),

$$T(r, nf'(z) - \alpha_1 f(z)) = m(r, nf'(z) - \alpha_1 f(z)) = S(r, f), \tag{2.2.4}$$

$$T(r, f(z)(nf'(z) - \alpha_1 f(z))) = m(r, f(z)(nf'(z) - \alpha_1 f(z))) = S(r, f). \tag{2.2.5}$$

La combinaison de (2.2.4) avec (2.2.5), donne

$$T(r,\ f(z)) \leq T(r,\ f(z)(nf'(z) - \alpha_1 f(z))) + T\left(r,\ \frac{1}{nf'(z) - \alpha_1 f(z)}\right) = S\left(r,\ f\right),$$

une contradiction.

Si $nf'(z) - \alpha_1 f(z) \equiv 0$, alors $f(z) = ce^{\frac{\alpha_1}{n}z}$, où c est une constante. En remplaçant $f(z) = ce^{\frac{\alpha_1}{n}z}$ dans l'équation (2.0.1), on trouve

$$c^n e^{\alpha_1 z} + p(z)ce^{\frac{\alpha_1}{z}\eta}e^{\frac{\alpha_1}{n}z} = \beta_1 e^{\frac{\alpha_1}{n}z} \tag{2.2.6}$$

Par (2.2.6) et lemma 2.3, on a $p(z)ce^{\frac{\alpha_1}{z}\eta} \equiv 0$. Alors $c = 0$ et donc $f(z) \equiv 0$, une contradiction. Donc, nous avons prouvé que l'Eq. (2.0.1) n'a pas de solution entière d'hyper-ordre inférieure à un lorsque $s = 1$.

<u>Sous-cas 2.2.</u> $s > 1$. Soit

$$F = f(z)^n + p(z)f(z+\eta).$$

Alors l'équation (2.0.1) devient

$$F = \beta_1 e^{\alpha_1 z} + \beta_2 e^{\alpha_2 z} + \cdots + \beta_s e^{\alpha_s z}. \tag{2.2.7}$$

Différencier les deux côtés de l'équation (2.2.7) $(s-1)$ fois, on a

$$\begin{cases} F' = \alpha_1\beta_1 e^{\alpha_1 z} + \alpha_2\beta_2 e^{\alpha_2 z} + \cdots + \alpha_s\beta_s e^{\alpha_s z} \\ F^{(2)} = \alpha_1^2\beta_1 e^{\alpha_1 z} + \alpha_2^2\beta_2 e^{\alpha_2 z} + \cdots + \alpha_s^2\beta_s e^{\alpha_s z} \\ \cdots \\ F^{(s-1)} = \alpha_1^{s-1}\beta_1 e^{\alpha_1 z} + \alpha_2^{s-1}\beta_2 e^{\alpha_2 z} + \cdots + \alpha_s^{s-1}\beta_s e^{\alpha_s z}. \end{cases}$$

En combinant ces équations avec (2.2.7) et en utilisant la règle de Cramer, on a

$$\beta_1 e^{\alpha_1 z} = \frac{D_1}{D}.$$

Où

$$D_1 = \begin{pmatrix} F & 1 & \cdots & 1 \\ F' & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \\ F" & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_s^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F^{(s-1)} & \alpha_2^{s-1} & \cdots & \alpha_s^{s-1} \end{pmatrix} \tag{2.2.8}$$

et

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_s^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{s-1} & \alpha_2^{s-1} & \cdots & \alpha_s^{s-1} \end{pmatrix}$$

evidemment, D est un déterminant vandermondien principal d'ordre s. Puisque $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ sont des constantes distinctes, nous obtenons

$$D = \prod_{1 \leq i < j \leq s} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0. \tag{2.2.9}$$

En développant le déterminant D_1 (2.2.8) le long de la première colonne, on trouve

$$\beta_1 e^{\alpha_1 z} = \frac{1}{D}\Big((-1)^{s+1} M_{s,1} F^{(s-1)} + \cdots + (-1)^{s-j+1} M_{s-j,1} F^{(s-j-1)} + \cdots + M_{1,1} F\Big), \tag{2.2.10}$$

où $M_{s-j,1}(j = 0, 1, ..., s-1)$ est le déterminant formé en iliminant la colonne 1 et la rangée $s-j$ du déterminant (2.2.8), i.e.,

$$M_{s,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_s \\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \cdots & \alpha_s^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_2^{s-2} & \alpha_3^{s-2} & \cdots & \alpha_s^{s-2} \end{pmatrix}, \tag{2.2.11}$$

$$M_{s-j,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_S \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_2^{s-j-2} & \alpha_3^{s-j-2} & \cdots & \alpha_s^{s-j-2} \\ \alpha_2^{s-j} & \alpha_3^{s-j} & \cdots & \alpha_s^{s-j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_2^{s-1} & \alpha_3^{s-1} & \cdots & \alpha_s^{s-1} \end{pmatrix}, \ (j = 1, \cdots, s-1). \tag{2.2.12}$$

De (2.2.11) et (2.2.12), on voit que $M_{s,1}$ est un déterminant principal de Vandermonde avec les variables $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_S$, et $M_{s-j,1}(j = 1, 2, ..., s-1)$ est un vandermondien secondaire avec les variables $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_S$. soient

$$\sigma_j \equiv \sum \alpha_2 \alpha_3 ... \alpha_{j+1} \ \text{ Pour } \ j = 1, 2, ..., s-1, \tag{2.2.13}$$

être la fonction élémentaire symétrique de $s-1$ variables $\alpha_2,\ \alpha_3,\ .\ .\ .\ ,\ \alpha_S$. Par (2.2.11), (2.2.12) et lemma 2.4, on a

$$\sigma_j = \frac{M_{s-j,1}}{M_{s,1}},\ \ (j = 1, 2, ..., s-1)\,. \tag{2.2.14}$$

Différencier les deux côtés de (2.2.10), on trouve

$$\alpha_1\beta_1 e^{\alpha_1 z} = \frac{1}{D}\left((-1)^{s+1} M_{s,1}F^{(s)} + \cdots + (-1)^{s-j+1} M_{s-j,1}F^{(s-j)} + \cdots + M_{1,1}F'\right). \tag{2.2.15}$$

En éliminant $e^{\alpha_1 z}$de (2.2.10) et (2.2.15), on a

$$\begin{aligned} & (-1)^{s+1} M_{s,1}F^{(s)} + \cdots + \left((-1)^{s} M_{s-1,1} - (-1)^{s+1} \alpha_1 M_{s,1}\right) F^{(s-1)} \\ & + \cdots + \left((-1)^{s-j+1} M_{s-j,1} - (-1)^{s-j} \alpha_1 M_{s-j+1,1}\right) F^{(s-j)} + \cdots - \alpha_1 M_{1,1} F \\ = \ & 0. \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Soit

$$\begin{aligned} L(w) \ = \ & w^{(s)} + \frac{(-1)^{s} M_{s-1,1} - (-1)^{s+1} \alpha_1 M_{s,1}}{(-1)^{s+1} M_{s1}} w^{(s-1)} + \\ & \cdots + \frac{(-1)^{s-j+1} M_{s-j,1} - (-1)^{s-j} \alpha_1 M_{s-j+1,1}}{(-1)^{s+1} M_{s1}} w^{(s-j)} + \cdots \\ & - \frac{\alpha_1 M_{11} F}{(-1)^{s+1} M_{s,1}} w \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

L est un opérateur différentiel linéaire. Puisque $F = f(z)^n + p(z)f(z+\eta)$, de (2.2.16) et (2.2.17), on déduit que

$$L(f(z)^n) = -L(p(z)f(z+\eta)). \tag{2.2.18}$$

Pour $j = 1, 2, ..., s$, on pose

$$\tau_j \equiv \sum \alpha_1\alpha_2...\alpha_j \tag{2.2.19}$$

la fonction symétrique élémentaire de s variables $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$. De (2.2.13), (2.2.14) et (2.2.19), on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{s} M_{s-1,1} - (-1)^{s+1} \alpha_1 M_{s,1}}{(-1)^{s+1} M_{s,1}} \ &= \ -\sigma_1 - \alpha_1 \\ &= \ -(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_s) = -\tau_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{s-j+1} M_{s-j,1} - (-1)^{s-j} \alpha_1 M_{s-j+1,1}}{(-1)^{s+1} M_{s1}} \ &= \ (-1)^{j} \sigma_j + (-1)^{j} \alpha_1 \sigma_{j-1} \\ &= \ (-1)^{j} \tau_j,\ \ (j = 2, 3, ..., s-1), \end{aligned}$$

et

$$-\frac{\alpha_1 M_{11}}{(-1)^{s+1} M_{s1}} = (-1)^s \alpha_1 \sigma_{s-1} = (-1)^s (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s) = (-1)^s \tau_s.$$

Alors $L(w)$ devient

$$L(w) = w^{(s)} - \tau_1 w^{(s-1)} + \cdots + (-1)^j \tau_j w^{(s-j)} + \cdots + (-1)^s \tau_s w. \tag{2.2.20}$$

Puisque

$$\begin{aligned} (f(z)^n)' &= nf(z)^{n-1} f'(z), \\ (f(z)^n)'' &= n(n-1) f(z)^{n-2} (f'(z))^2 + nf(z)^{n-1} f''(z), \end{aligned}$$

on déduit par récurrence que, pour tout $m = 1, 2, ..., s$,

$$\begin{aligned} (f(z)^n)^{(m)} &= n(n-1)...(n-(m-1)) f(z)^{n-m} (f'(z))^m \\ &+ \sum_{j=2}^{m-2} \sum_{\lambda} \gamma_{j\lambda} f(z)^{n-j} \left((f'(z))^{\lambda_{j1}} \right) \left((f''(z))^{\lambda_{j2}} \right) \cdots \left(\left(f^{(m-1)}(z) \right)^{\lambda_{j,m-1}} \right) \\ &+ nf(z)^{n-1} f^{(m)}(z). \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

où $\gamma_{j\lambda}$ sont des entiers positifs, λ_{j1}, λ_{j2}, . . . , $\lambda_{j,m-1}$ sont des entiers non négatifs et la somme $\sum_\lambda$ est réalisée de telle sorte que $\lambda_{j1}+\lambda_{j2}+...+\lambda_{j,m-1} = j$ et $\lambda_{j1}+2\lambda_{j2}+...+(m-1)\lambda_{j,m-1} = m$. Par (2.2.20) et (2.2.21), on a

$$L(f(z)^n) = f(z)n^{-s}\varphi, \tag{2.2.22}$$

où φ est un polynôme différentiel en $f(z)$ de degré s avec des coefficients constants. Par (2.2.18), (2.2.20) et (2.2.22), on a

$$f(z)^{n-s}\varphi = -L(p(z)f(z+\eta)), \tag{2.2.23}$$

où $L(p(z)f(z+\eta))$ est un polynôme de différence différentielle en $f(z)$ de degré1 avec des coefficients polynomiaux.

Si $\varphi \not\equiv 0$, alors par (2.2.23), $n \geq s+2$, Lemme (2.1.2), on a

$$\begin{aligned} T(r,\varphi) &= m(r,\varphi) = S(r,f) \\ T(r, f(z)\varphi) &= m(r, f(z)\varphi) = S(r,f). \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

Les deux égalités ci-dessus donnent

$$T(r, f(z)) \leq T(r, f(z)\phi) + T\left(r, \frac{1}{\phi}\right) = S(r,f),$$

une contradiction. Donc nous devons avoir $\varphi \equiv 0$, qui donne $L(f(z)^n) \equiv 0$ et $L(p(z)f(z+\eta)) \equiv 0$.

Par $L(p(z)f(z+\eta)) \equiv 0$ et (2.2.20), on a

$$(p(z)f(z+\eta))^{(s)} - \tau_1(p(z)f(z+\eta))^{(s-1)} + \cdots$$

$$+(-1)^j_j\tau(p(z)f(z+\eta))^{(s-j)} + \cdots + (-1)^s\tau_s p(z)f(z+\eta) \equiv 0.$$

L'équation caractéristique de cette équation est

$$\lambda^s - \tau_1\lambda^{s-1} + \cdots + (-1)^j\tau_j\lambda^{s-j} + \cdots + (-1)^s\tau_s = 0. \tag{2.2.25}$$

Puisque (2.2.25) a s racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, on voit que $p(z)f(z+\eta)$a la forme

$$p(z)f(z+\eta) = \widetilde{c_1}e^{\alpha_1 z} + \widetilde{c_2}e^{\alpha_2 z} + \cdots + \widetilde{c_s}e^{\alpha_s z},$$

où $\widetilde{c_j}$ $(j = 1, 2\cdots, s)$ sont des constantes. Alors

$$f(z) = c_1e^{\alpha_1 z} + c_2e^{\alpha_2 z} + \cdots + c_se^{\alpha_s z}, \tag{2.2.26}$$

où $c_j = \dfrac{\widetilde{c_j}e^{-\alpha_j\eta}}{P(z-\eta)}$ $(j = 1, 2\cdots, s)$ sont des fonctions rationnelles.

De même, de $L(f(z)^n) \equiv 0$ on déduit que

$$f(z)^n = d_1e^{\alpha_1 z} + d_2e^{\alpha_2 z} + \cdots + d_se^{\alpha_s z}, \tag{2.2.27}$$

où d_j $(j = 1, 2\cdots, s)$ sont des constantes. Par (2.2.26) et (2.2.27), on a

$$\begin{aligned} d_1e^{\alpha_1 z} + d_2e^{\alpha_2 z} + \cdots + d_se^{\alpha_s z} &= c_1^ne^{n\alpha_1 z} + c_2^ne^{n\alpha_2 z} + \cdots + c_s^ne^{n\alpha_s z} \\ &\quad + \sum_{(m_1,\cdots,m_s)} c_{m_1,\cdots,m_s}e^{(m_1\alpha_1+\cdots+m_s\alpha_s)z} \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

où $c_{m_1,\cdots,m_s}$ sont les fonctions rationnelles et la somme $\sum_{(m_1,\cdots,m_s)}$ est réalisée de telle sorte que $m_j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ $(j = 1, 2, ..., s)$ et $m_1+m_2+\cdots+m_s = n$. Puisque $\dfrac{\alpha_i}{\alpha_j} \neq n$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \cdots, s\}$ et $n\alpha_k \neq l_{k1}\alpha_1 + l_{k2}\alpha_2+\cdots+l_{ks}\alpha_s$ pour $k = 5, 6, ..., s$, où $l_{k1}, l_{k2}, \cdots, l_{ks} \in \{0, 1, ..., n-1\}$ et $l_{k1} + l_{k2} + \cdots + l_{ks} = n$, par (2.2.28) et le Lemme (2.1.3) , on a

$$c_5 \equiv c_6 \equiv \cdots \equiv c_s \equiv 0.$$

Alors $f(z)$ devient

$$f(z) = c_1e^{\alpha_1 z} + c_2e^{\alpha_2 z} + \cdots + c_4e^{\alpha_4 z}. \tag{2.2.29}$$

Par (2.2.27), (2.2.29) et le lemme (2.1.5), on obtient $c_1 \equiv c_2 \equiv c_3 \equiv c_4 \equiv 0$, qui donne $f(z) \equiv 0$, une contradiction. Donc, nous avons prouvé que l'Eq. (2.0.1) n'a pas de solution entière d'hyper-ordre inférieure à un lorsque $s > 1$. De la discussion ci-dessus, on voit que toute solution méromorphe $f(z)$ de l'équation (1.2) doit satisfaire $\sigma_2(f) \geq 1$. $\square$

Remarque 1.1

(1) Similaire à la preuve du théorème 1.1, en utilisant le lemme de Clunie des polynômes différentiels, on peut facilement montrer que (2.0.1) n'a pas de solutions méromorphes si $\eta = 0$.

(2) L'exemple ci-dessous montre que la condition "$n \geq 2 + s$" est nécessaire.

Exemple L'équation au différence

$$f(z)^5 - 10f(z + 10\pi i) = 5e^{\frac{3}{5}z} + 5e^{-\frac{3}{5}z} + e^z + e^{-z}$$

a une solution entière

$$f(z) = e^{\frac{1}{5}z} + e^{-\frac{1}{5}z}.$$

Bibliographie

[1] Chen, Z.X., Yang, C.C. : *On entire solutions of certain type of differential-difference equations.* Taiwan. J. Math. 18(3), 677–685 (2014)

[2] Chiang, Y.M., Feng, S.J. : *On the Nevanlinna characteristic of* $f(z+\eta)$ *and difference equations in the complex plane.* Ramanujan J. 16, 105–129 (2008)

[3] Gross F., *On factorization of meromorphic functions*, Lectures at the Math. Instt. University of California La Jolla, June 28, 1966.

[4] Gross F., *On the distribution of values of meromorphic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 131 (1968), 199-214.

[5] Gross, F. : *Factorization of Meromorphic Functions.* U. S. Government Printing Office, Washington (1972)

[6] Gundersen G., *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function*, plus similar estimates, J. London Math. Soc.(2)37 (1988),no. 1, 88-104.

[7] Halburd, R.G., Korhonen, R.J., Tohge, K. : *Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preim-ages.* Trans. Am. Math. Soc. 366, 4267–4298 (2014)

[8] Hayman W.K. :*Meromorphic Functions,* Clarendon Press, Oxford, (1964)

[9] Heineman, E.R. : *Generalized Vandermonde determinants.* Trans. Am. Math. Soc. 31(3), 464–476 (1929)

[10] Laine, I. : *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations.* Walter de Gruyter, Berlin (1993)

[11] Laine, I., Yang, C.C. : *Clunie theorems for difference and q-difference polynomials.* J. Lond. Math. Soc. 76, 556–566 (2007)

[12] Latreuch, Z. : *On the existence of entire solutions of certain class of nonlinear difference equations.* Mediterr. J. Math. 14(3), Art. 115, 16 (2017)

[13] Li, B.Q. : *On certain non-linear differential equations in complex domains.* Arch. Math. 91, 344–353 (2008)

[14] Li, P., Yang, C.C. : *On the nonexistence of entire solutions of certain type of nonlinear differential equaions.* J. Math. Anal. Appl. 320, 827–835 (2006)

[15] Markushevich A. I., *Theory of Functions of a Complex Variable* (translated by R. A. Silverman), Vol. II, , Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

[16] Nevanlinna R., *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1929.

[17] Jank G., Volkmann L., *Meromorphe Funktionen und Differentialgleichungen*, Birkhauser, 1985.

[18] Yang, C.C.*, Yi, H.X. : Uniqueness Theory of Meromorphic Functions.* Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht (2003)

[19] Yang, C.C.*,* Laine, I. *: On analogies between nonlinear difference and differential equations.* Proc. Jpn. Acad. 86, 10–14 (2010)

[20] Zhang, J., Liao, L.W*. : On entire solutions of a certain type of nonlinear differential and difference equations.* Taiwan. J. Math. 15, 2145–2157 (2011)

[21] Zhang, R.R., Chen, Z.X*. : Fixed points of meromorphic functions and of their differences,* divided differences and shifts. Acta. Math. Sin. (Engl. Ser.) 32(10), 1189–1202 (2016)

[22] RR Zhang, ZB Huang - *On Meromorphic Solutions of Non-linear Difference Equations,*Computational Methods and Function Theory*,* 2018 - Springer.