Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Mostaganem - Abdelhamid ibn Badis (UMAB)

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle

Thème :

Quelques Estimations Précises De L'hyper Ordre Des Solutions Des Equations Différentielles Linéaires Complexes

Présentée par :
BOUNOUAR Fatima Zohra

Soutenue devant le jury composé de :

Président	:	Dr Belarbi Lakehal	MCA	UMAB
Examinateur	:	Dr Kaid Mohamed	MAA	UMAB
Encadreur	:	Dr Fettouch Houari	MCB	UMAB

juin 2019

Remerciements

Tout d'abord

je remercie Allah pour m'avoir guidé vers le chemin du savoir et de la lumière. Pour m'avoir donné courage et volonté pour pouvoir réaliser ce modeste travail.

Je ne peux exprimer par les mots :

Le sens de mes remerciements pour ma mère et mon père : que serais-je sans leurs permanents soutiens dans ma vie.

Je remercie ensuite

Dr Fettouch Houari pour sa patience et ses conseils pour la réalisation de ce mémoire. Que mes profondes reconnaissances vont vers lui.

Mes gratitudes et mes remerciements

Pour le docteur Belarbi Lakehal , pour avoir accepter de présider le Jury de la soutenance. Aussi, je remercie le docteur Kaid Mohamed le membre de jury qui a accepté d'éxaminer le travail.

Ainsi que pour

L'ensemble des enseignants qui m'ont encadré soutenus et encouragés durant ma formation et par qui j'ai appris à apprécier les mathématiques.

Merci à

Toute personne m'ayant aidé, soutenue, ou encouragé de prés ou de loin.

Table des matières

Introduction **2**

1 Théorie de R.Nevanlinna **3**
1.1 Formule de Poisson-Jensen et Formule de Jensen 3
1.2 Fonction caractéristique de R.Nevalinna 4
1.3 Premier théorème fondamental de R.Nevanlinna 11
1.4 L'ordre et le type de croissance d'une fonction 13
1.5 L'exposant de convergence des zéros 15
1.6 Deuxième théorème fondamental de Nevanlinna 15
1.7 L'éstimation de $S(r, f)$ 16

2 Quelques estimations précises de l'hyper ordre des solutions des équations différentielles linéaires complexes **18**
2.1 Lemmes Requis Pour Prouver Le Théorème 2.1.1 Et Le Théorème 2.1.2 21
2.2 Preuve Du Théorème 2.1.1 Et Du Théorème 2.1.2 22
2.3 Lemmes Nécessaires Pour Prouver Le Théorème 2.1.3 26
2.4 Preuve du Théorème 2.1.3 : 28

Conclusion **34**

Bibliographie **35**

INTRODUCTION

La théorie de Nevanlinna joue un rôle très important dans la théorie des fonctions, en particulier dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes notammenent la croissance et l'oscillation des solutions.

En effet de puis 1925, l'année où R.Nevanlinna a publié les résultats de ses travaux sur la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes, les chercheurs ne cessent de publier dans le même thématique et plusieurs problèmes ont été étudiés et résolus. Des liens étroits avec d'autres domaines sont mis en évidence, en particulier avec la théorie analytique des équations différentielle.

Ce mémoire se compose d'une introduction et de deux chapitres.

Le premier chapitre présente une introduction à la théorie de R.Nevanlinna, dans lequel on donne des notations, définitions et résultats dont on aura besoin dans le deuxième chapitre.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude quelques estimations precises de l'hyper ordre des solutions des équations différentielles linéaires dans le plan complexe

Chapitre 1

Théorie de R.Nevanlinna

Dans ce chapitre, on va présenter les notions de base nécéssaire et donner quelques définitions et résultats dont on aura besoin tout au long de notre travail.

1.1 Formule de Poisson-Jensen et Formule de Jensen

Théorème 1.1.1 ([7, 12], Formule de Poisson-Jensen) *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le domaine $|z| < R$ $(0 < R \leq \infty)$ non identiquement nulle, et $a_\lambda(\lambda = 1, 2, ..., h)$ (respectivement $b_\mu(\mu = 1, 2, ..., k)$) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors dans le disque $|z| < \rho$ on a*

$$\begin{aligned} \ln|f(z)| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(\rho e^{i\theta})\right| \mathrm{Re}\left(\frac{\rho e^{i\theta}+z}{\rho e^{i\theta}-z}\right) d\theta \\ &\quad -\sum_{\lambda=1}^{h} \ln\left|\frac{\rho^2-\overline{a_\lambda}z}{\rho(z-a_\lambda)}\right| + \sum_{\mu=1}^{k} \ln\left|\frac{\rho^2-\overline{b_\mu}z}{\rho(z-b_\mu)}\right|. \end{aligned}$$

Nevanlinna appelé cette formule la formule de Poisson-Jensen.
Le cas où f n'admet ni zéros ni plôes généralement la formule s'appelle la formule de Poisson.
Le cas où $z = 0$ s'appelle la formule de Jensen.

Théorème 1.1.2 ([7, 6], Formule de Jensen) *Soit f une fonction méromorphe telle que $f(z) \not\equiv 0, \infty$ et $a_1, a_2, ..., a_n$ (respectivement $b_1, b_2, ..., b_n$) ses zéros (respectivement ses poles) , chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta + \sum_{|b_j|<r} \log\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r} \log\frac{r}{|a_j|}.$$

Preuve. *. On démontre le théorème dans le cas où f n'admet ni zéros ni pôles sur le cercle $|z| = r$. Considérons la fonction*

$$g(z) = f(z) \prod_{|a_j|<r} \frac{r^2 - \overline{a_j} z}{r(z - a_j)} \left(\prod_{|a_j|<r} \frac{r^2 - \overline{b_j} z}{r(z - b_j)} \right)^{-1}.$$

On a $g \neq 0, \infty$ dans le disque $|z| < r$ et $\ln |g(z)|$ est une fonction harmonique. D'après la formule de la moyenne, on a

$$\ln |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| g\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta.$$

D'autre part,

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{|a_j|<r} \frac{r}{|a_j|} \left(\prod_{|b_j|<r} \frac{r}{|b_j|} \right)^{-1}$$

d'où

$$\ln |g(0)| = \ln |f(0)| + \sum_{|a_j|<r} \ln \frac{r}{|a_j|} - \sum_{|b_j|<r} \ln \frac{r}{|b_j|}.$$

Pour $z = re^{i\theta}$, on a

$$\left| \frac{r^2 - \overline{a_j} z}{r(z - a_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \overline{a_j} re^{i\theta}}{r(re^{i\theta} - a_j)} \right| = \left| \frac{e^{i\theta}(re^{-i\theta} - \overline{a_j})}{re^{i\theta} - a_j} \right| = 1$$

et

$$\left| \frac{r^2 - \overline{b_j} z}{r(z - b_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \overline{b_j} re^{i\theta}}{r(re^{i\theta} - b_j)} \right| = \left| \frac{e^{i\theta}(re^{-i\theta} - \overline{b_j})}{re^{i\theta} - b_j} \right| = 1.$$

D'où $\left| g(re^{i\theta}) \right| = \left| f(re^{i\theta}) \right|$. D'où, on obtient le formule de Jensen. □

1.2 Fonction caractéristique de R.Nevalinna

Fonction a-point

Définition 1.2.1 ([1]) *Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leq t$. Chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité et par $n(t, \infty, f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$. On définit*

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \log r, \qquad a \neq \infty$$

et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r,$$

où $N(r, f)$ est appelée la fonction a-points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$.

Fonction de proximité

Définition 1.2.2 ([1]) *Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe. Alors, on définit la fonction de proximité de la fonction f par*

$$m\left(r,a,f\right)=m(r,\frac{1}{f-a})=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{r}\log^{+}\frac{1}{\left|f\left(re^{i\theta}\right)-a\right|}d\theta,\ a\neq\infty$$

et $m\left(r,f\right)$ est appelée fonction de proximité de la fonction f au point a.

Fonction caractéristique de R.Nevanlinna

Définition 1.2.3 ([1]) *On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction f par*

$$T(r,\infty,f)=T\left(r,f\right)=m\left(r,f\right)+N\left(r,f\right).$$

Exemple 1.2.1 *Pour la fonction $f\left(z\right)=e^{z}/z$, cette fonction admet un pôle simple $z=0$. Alors*

$$\begin{aligned}N(r,f) &= \int_{0}^{r}\frac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t}dt+n(0,\infty,f)\log r\\ &= \int_{0}^{r}\frac{1-1}{t}dt+\log r\\ &= \log r\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}m\left(r,f\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log^{+}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log^{+}\left|\frac{e^{r\cos\theta}}{r}\right|d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{e^{r\cos\theta}}{r}\right)d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r\cos\theta d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log r d\theta\\ &= \frac{r}{\pi}-\frac{1}{2}\log r.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}T\left(r,e^{z}/z\right) &= m(r,e^{z}/z)+N(r,e^{z}/z)\\ &= \frac{r}{\pi}-\frac{1}{2}\log r+\log r\\ &= \frac{r}{\pi}+\frac{1}{2}\log r.\end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 ([7]) *Soit f un fonction méromorphe, f est rationnelle si seulement si*

$$T(r,f) = O(\log r).$$

Proposition 1.2.2 ([7]) *Soit f une fonction méromorphe avec le developpment de Laurent*

$$f(z) = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j, c_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$\log |c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta + N(r,f) - N(r, \frac{1}{f}).$$

Preuve du proposition (1.2.2)**.** On Considère la fonction

$$h(z) = f(z)z^{-m},\ z \in \mathbb{C}$$

il est clair que $m = n(0,0,f) - n(0,\infty,f)$ et $h(0) \neq 0, \infty$. /a fonctions h et f ont les même pôles et zéros dans le disque $0 < |z| \leq r$. Par la formule de Jensen on obtient

$$\begin{aligned}
\log |c_m| &= \log |h(0)| \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| h(re^{i\varphi}) \right| d\varphi + \sum_{|b_k|<r} \log \left(\frac{r}{|b_k|} \right) - \sum_{|a_i|<r} \log \left(\frac{r}{|a_i|} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f(re^{i\varphi}) r^{-m} \right| d\varphi \\
&\quad + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi + -m \log r \\
&\quad + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi + - \left[n(0,0,f) - n(0,\infty,f) \right] \log r \\
&\quad + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f} \right).
\end{aligned}$$

Définition 1.2.4 ([2]) *Pour tout réel $x \geq 0$, on définit*

$$\log^+ x = \max(\log x, 0) = \begin{cases} \log x, & si\ x > 1, \\ 0, & si\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Il est clair que

$$\ln x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}, \;\; x \geq 0.$$

Lemme 1.2.1 ([7]) *On a les propriétés suivantes*
a)

$$\log x \leq \log^+ x$$

b)

$$\log^+ x \leq \log^+ y \; (si\ 0 < x < y).$$

c)

$$\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}.$$

d)

$$|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}.$$

e)

$$\log^+ (\prod_{i=1}^{n} x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i.$$

f)

$$\log^+ (\sum_{i=1}^{n} x_i) \leq \log n + \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i.$$

Preuve du lemme (1.2.1)**.** Montrons $c)$ $d)$ $e)$ et $f)$
$c)$ On a

$$\begin{aligned}
\log^+ x - \ln^+ \frac{1}{x} &= \max(\log x, 0) - \max(\log \frac{1}{x}, 0) \\
&= \max(\log x, 0) - \max(-\log x, 0) \\
&= \max(\log x, 0) + \min(\log x, 0) \\
&= \log x.
\end{aligned}$$

$d)$ On a

$$\begin{aligned}
\log^+ x + \log^+ \frac{1}{x} &= \max(\log x, 0) + \max(-\log x, 0) \\
&= \max(\log x, 0) - \min(\log x, 0) \\
&= |\log x| \, .
\end{aligned}$$

$e)$ Si $\prod_{i=1}^{n} x_i \leq 1$, alors l'inégalité est évidente.

Supposons que $\prod_{i=1}^{n} x_i > 1$. Alors

$$\begin{aligned} \log^+(\prod_{i=1}^{n} x_i) &= \log(\prod_{i=1}^{n} x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \log x_i \,. \end{aligned}$$

$f)$ On a d'après $b)$ et $e)$

$$\begin{aligned} \log^+(\sum_{i=1}^{n} x_i) &\leq \log^+(n \max_{1\leq i\leq n} x_i) \\ &\leq \log n + \log^+ \max_{1\leq i\leq n} x_i \\ &\leq \log n + \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.3 ([7]) *Soient f, f_1, f_2, . . . , f_n des fonctions méromorphes. Alors*

$$\begin{array}{lrcl} a) & m\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \log n. \\ b) & m\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i). \\ c) & N\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i). \\ d) & N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i). \\ e) & T\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \log n, n \geq 1. \\ f) & T\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i), n \geq 1. \\ g) & T(r, f^n) & = & nT(r, f),\ n\epsilon\mathbb{N}^*. \end{array}$$

Preuve. *Montrons e) f) g)* □

e) On a si z_0 est un pôle de degré λ_i pour la fonction f_i, alors il est de degré égale au plus $\max_{1\leq i\leq n} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ pour la fonction $\sum_{i=1}^{n} f_i$. Alors

$$N(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i)$$

et

$$\begin{aligned} m(r,\sum_{i=1}^{n} f_i) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} \log^+ \left|\sum_{i=1}^{n} f_i\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} \log^+ \left|\sum_{i=1}^{n} f_i\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + \log n \\ &= \sum_{i=1}^{n} m(r,f_i) + \log n. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} T(r,\sum_{i=1}^{n} f_i) &= m(r,\sum_{i=1}^{n} f_i) + N(r,\sum_{i=1}^{n} f_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} T(r,f_i) + \log n. \end{aligned}$$

f) On a

$$\begin{aligned} m(r,\prod_{i=1}^{n} f_i) &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \ln^+ \left|\prod_{i=1}^{n} f_i(re^{i\theta})\right| d\theta \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \ln^+ \left|f_i(re^{i\theta})\right| d\theta \\ &= \sum_{i=1}^{n} m(r,f_i). \end{aligned}$$

si z_0 est un pôle de degré λ_i pour la fonction f_i, alors z_0 est un pôle de la fonction $\prod_{i=1}^{n} f_i$ de degré égale au plus $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Donc

$$N(r,\prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r,f_i).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} T(r,\prod_{i=1}^{n} f_i) &= m(r,\prod_{i=1}^{n} f_i) + N(r,\prod_{i=1}^{n} f_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (m(r,f_i) + N(r,f_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} T(r,f_i). \end{aligned}$$

g) On a $|f^n| = |f|^n \leq 1 \iff |f| \leq 1$. Alors si $|f| \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} m(r, f^n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left| f^n\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = 0 \\ N(r, f^n) &= nN(r, f) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} T(r, f^n) &= m(r, f^n) + N(r, f^n) = nN(r, f) \\ &= n(m(r, f) + N(r, f)) = nT(r, f). \end{aligned}$$

Si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned} m(r, f^n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \left| f^n(re^{i\theta})\right| d\theta = n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \left| f(re^{i\theta})\right| d\theta \\ &= nm(r, f) \end{aligned}$$

et

$$N(r, f^n) = nN(r, f).$$

Donc

$$\begin{aligned} T(r, f^n) &= m(r, f^n) + N(r, f^n) = n(m(r, f) + N(r, f)) \\ &= nT(r, f) \end{aligned}$$

Proposition 1.2.4 ([7]) *Si f est une fonction méromorphe non-constante, et si*

$$g = \frac{af + b}{cf + d},$$

tels que a, b, c, et d sont des constantes avec $ad - bc \neq 0$, alors

$$T(r, g) = T(r, f) + O(1).$$

Preuve. Si $c = 0$, alors

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{af + b}{d}\right) &= T\left(r, \frac{a}{d}f + \frac{b}{d}\right) \\ &\leq T(r, \frac{a}{d}) + T(r, f) + T(r, \frac{b}{d}) + \ln 2 \\ &\leq T(r, f) + \ln^+ \left|\frac{a}{d}\right| + \ln^+ \left|\frac{b}{d}\right| + \ln 2 \\ &= T(r, f) + O(1) \end{aligned}$$

Si $c \neq 0$, alors on écrit

$$\begin{aligned}\frac{af+b}{cf+d} &= \frac{a(f+\frac{b}{a})}{c(f+\frac{d}{c})} = \frac{a}{c}\frac{f+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{f+\frac{d}{c}} \\ &= \frac{a}{c}\left[1+\frac{bc-ad}{ac}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right] \\ &= \frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}.\end{aligned}$$

□

D'où

$$\begin{aligned}T\left(r,\frac{af+b}{cf+d}\right) &= T\left(r,\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) \\ &\leq \ln^+\left|\frac{a}{c}\right|+\ln^+\left|\frac{bc-ad}{c^2}\right|+T(r,f+\frac{d}{c})+\ln 2+O(1) \\ &\leq T(r,f)+O(1).\end{aligned}$$

1.3 Premier théorème fondamental de R.Nevanlinna

Avant d'énoncer le premier théorème fondamental de R.Nevanlinna on a besoin d'utiliser les lemmes suivants

Lemme 1.3.1 *Soit f une fonction méromorphe avec a-points ; $\alpha_{1,}\alpha_2,...,\alpha_n$ dans le disque $|z| \leq r$ tels que $0 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq ... \leq |\alpha_n| \leq r$.Alors*

$$\int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t}dt = \int_0^r \frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}dt = \sum_{|\alpha j|\leq r} \log\frac{r}{|\alpha j|}$$

Théorème 1.3.1 ([7], Premier théorème fondamental) *Soit f une fonction méromorphe avec le dévelopement de Laurent de $f-a$ $(a \in \mathbb{C})$ à l'origine,*

$$f(z)-a = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j, \quad c_m \neq 0, \quad m\epsilon\mathbb{Z}, \quad z\epsilon\mathbb{C}.$$

Alors

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - \log|c_m| + \varphi(r,a)$$

où $|\varphi(r,a)| \leq \log^+|a| + \log 2.$

Preuve. Montrons le théorème pour $a = 0$, d'après la proposition 1.2.2 et lemme 1.2.1 *c*) on a □

$$\begin{aligned}
\log|c_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{\left|f(re^{i\theta})\right|} d\theta + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right) \\
&= m(r,f) - m(r,0,f) + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
T\left(r,\frac{1}{f}\right) &= m\left(r,\frac{1}{f}\right) + N\left(r,\frac{1}{f}\right) \qquad (1.1)\\
&= m(r,f) + N(r,f) - \log|c_m| \\
&= T(r,f) - \log|c_m| \qquad (I)
\end{aligned}$$

où $\varphi(r,a) = 0$.
Montrons le théorème dans le cas général $a \neq 0$. Posons $h = f - a$. Dans ce cas

$$\begin{aligned}
N\left(r,\frac{1}{h}\right) &= N\left(r,\frac{1}{f-a}\right) \\
m\left(r,\frac{1}{h}\right) &= m\left(r,\frac{1}{f-a}\right) \\
N(r,h) &= N(r,f-a) = N(r,f).
\end{aligned}$$

On a

$$\log^+|h| = \log^+|f-a| \leq \log^+|f| + \log^+|a| + \log 2. \qquad (1.2)$$

$$\log^+|f| = \log^+|h+a| \leq \log^+|h| + \log^+|a| + \log 2. \qquad (1.3)$$

En intégrant (1.2) et (1.3) on aura

$$m(r,h) \leq m(r,f) + \log^+|a| + \log 2$$

$$m(r,f) \leq m(r,h) + \log^+|a| + \log 2.$$

Posons $\varphi(r,a) = m(r,h) - m(r,f)$, on obtient

$$-(\log^+|a| + \ln 2) \leq \varphi(r,a) \leq \log^+|a| + \log 2 \Leftrightarrow |\varphi(r,a)| \leq \log^+|a| + \log 2.$$

D'après (I), on a

$$\begin{aligned}
T(r,\frac{1}{f-a}) &= T(r,\frac{1}{h}) = m(r,\frac{1}{h}) + N(r,\frac{1}{h}) \\
&= m(r,h) + N(r,h) - \ln|c_m| \\
&= m(r,f) + \varphi(r,a) + N(r,f) - \ln|c_m| \\
&= T(r,f) + \varphi(r,a) - \ln|c_m|.
\end{aligned}$$

Où $\varphi(r,a) \leq \log^+|a| + \log 2$.

Remarque 1.3.1 *Le premier théorème fondamental peut être formulé comme suit : Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors pour tout $a \in \mathbb{C}$*

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r,f) + O(1), \quad r \to \infty$$

Exemple 1.3.1 *On a*

$$\begin{aligned}
\tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \\
&= -i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \frac{-ie^{2iz} + i}{e^{2iz} + 1}.
\end{aligned}$$

D'après propositoion (1.2.4) *on a*

$$\begin{aligned}
T(r, \tan z) &= T(r, e^{2iz}) + O(1) \\
&= \frac{2r}{\pi} + O(1)
\end{aligned}$$

1.4 L'ordre et le type de croissance d'une fonction

Définition 1.4.1 ([7]) *Soit f une fonction entière. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par*

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log \log M(r,f)}{\log r},$$

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log \log \log M(r,f)}{\log r},$$

où $M(r,f) = \max\{|f(z)|, |z| = r\}$. *Si f est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis par*

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log \log T(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 1.4.1 *La fonction $g(z) = \exp(z^n)$ est d'ordre $\rho(g) = n$ et d'hyper ordre $\rho_2(g) = 0$.*

Exemple 1.4.2 *Soit $f(z) = \frac{\exp(z)}{z}$, on a $T(r,f) = \frac{r}{\pi} + O(\ln r)$. De plus*

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\exp(z)}{z}\right) &= \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log\left[\frac{r}{\pi} + O(\log r)\right]}{\log r} \\
&= \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log \frac{r}{\pi}\left[1 + O(\frac{\log r}{r})\right]}{\log r} \\
&= \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log r + \log\left(1 + O(\frac{\log r}{r}) - \log \pi\right)}{\log r} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_2\left(\frac{\exp(z)}{z}\right) &= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln T(r,f)}{\ln r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln\left[\frac{r}{\pi}+O(\ln r)\right]}{\ln r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln\frac{r}{\pi}\left[1+O(\frac{\ln r}{r})\right]}{\ln r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\left[\ln r-\ln\pi+\ln\left[1+O(\frac{\ln r}{r})\right]\right]}{\ln r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln r\left[1-\frac{\ln\pi}{\ln r}+\frac{\ln\left[1+O(\frac{\ln r}{r})\right]}{\ln r}\right]}{\ln r} \\
&= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln r+\ln\left[1-\frac{\ln\pi}{\ln r}+\frac{\ln\left[1+O(\frac{\ln r}{r})\right]}{\ln r}\right]}{\ln r} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Remarque 1.4.1 *Si f est d'ordre fini, Alors l'hyper-ordre de cette fonction est nulle.*

Mesure linéaire et logarithmique

Définition 1.4.2 ([7]) *La mesure linéaire d'un ensemble $E\subset[0,+\infty[$ est définie par*

$$m(E)=\int_0^{+\infty}\chi_E(t)dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E et la mesure logarithmique d'un ensemble $F\subset[1,+\infty[$ est définie par

$$L_m(F)=\int_1^{+\infty}\frac{\chi_F(t)}{t}dt.$$

Exemple 1.4.3 *La mesure linéaire de l'ensemble $E=[2,6]\cup[7,8]\subset[0,\infty)$ est*

$$m(E)=\int_0^{\infty}\chi_E(t)\,dt=\int_2^6 dt+\int_7^8 dt=5.$$

Exemple 1.4.4 *La mesure linéaire de l'ensemble $E=\mathbb{N}$ est nulle, de plus la mesure linéaire de chaque ensemble dénombrable est nulle.*

Exemple 1.4.5 *La mesure logarithmique de l'ensemble $F=[1,5]\subset[1,\infty)$ est*

$$L_m(F)=\int_1^{\infty}\chi_F(t)\frac{dt}{t}=\int_1^5\frac{dt}{t}=\ln 5.$$

1.5 L'exposant de convergence des zéros

Définition 1.5.1 ([7]) *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros de la fonction f respectivement par*

$$\lambda(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

$$\lambda_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(r, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

tel que $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq r$.

1.6 Deuxième théorème fondamental de Nevanlinna

Afin de prouver le deuxième théorème fondamentale de R. Nevanlinna, on a besoin d'abord du lemme suivant.

Lemme 1.6.1 ([7]) *Soit f une fonction méromorphe non constante sur $|z| < R$ et a_j $(j = 1, 2, ..., q)$ des des nombres complexes finis distincts. Alors l'égalité*

$$m\left(r, \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{f - a_j}\right) = \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + O(1) \tag{1.4}$$

est vrai pour $0 < r < R$.

Théorème 1.6.1 ([7]) *Soit f une fonction méromporphe non-constante dans le disque $|z| < R$ et a_j $(j = 1, 2, ..., q)$ des nombres complexes finis distincts. Alors pour $0 < r < R$, on a*

$$m(r, f) + \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) \leq 2T(r, f) - N_1(r) + S(r, f), \tag{1.5}$$

où

$$N_1(r) = 2N(r, f) - N(r, f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right), \tag{1.6}$$

et

$$S(r, f) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \sum_{j=1}^{q} \frac{f'}{f - a_j}\right) + O(1). \tag{1.7}$$

Preuve du Thèorème (1.6.1)**.** Soit

$$F(z) = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{f(z) - a_j}$$

D'après le Lemme (1.6.1), on a

$$m(r, F) = \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + O(1), \tag{1.8}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} m(r, F) &\leq m(r, f'F) + m\left(r, \frac{1}{f'}\right) \\ &\leq m(r, f'F) + T\left(r, \frac{1}{f'}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) \\ &\leq m(r, f'F) + T(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + O(1). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Comme

$$\begin{aligned} T(r, f') &= m(r, f') + N(r, f') \\ &\leq m(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N(r, f') \\ &\leq T(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N(r, f') - N(r, f), \end{aligned} \tag{1.10}$$

il resulte de $(1.7) - (1.9)$ que

$$m(r, f) + \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) \leq 2T(r, f) - \left\{2N(r, f) - N(r, f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right\}$$

$$+m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \sum_{j=1}^{q} \frac{f'}{f - a_j}\right) + O(1),$$

ce cqui complète la preuve du Théorème (1.6.1).

1.7 L'éstimation de $S(r, f)$

Nous avons besoin d'éstimer le terme $S(r, f)$, c'est a dire on a besoin d'étudier la croissance du $m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right)$. dans cette section on va introduire un lemme qui s'apelle le lemme des dérivées logarithmiques.

Lemme 1.7.1 ([1]) *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non-constante et pour k un entier positif dans le plan complexe. Si f est d'ordre fini, Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r), \quad (r \to \infty).$$

Si f est d'ordre infini, alors

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log(rT(r, f))), \quad (r \to \infty, \ r \notin E_0),$$

où E_0 est un ensemble de mésure linéaire ne dépasse pas 2.

Définition 1.7.1 ([1]) *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non-constante dans le plan complexe, on définit la quantité $S(r, f)$ par*

$$S(r, f) = o(T(r, f)), \quad (r \to \infty).$$

Si f est d'ordre fini,et

$$S(r, f) = o(T(r, f)), \quad (r \to \infty, \ r \notin E_0),$$

où E_0 est un ensemble de mésure linéaire finie si f est d'ordre infini.

Chapitre 2

Quelques estimations précises de l'hyper ordre des solutions des équations différentielles linéaires complexes

Soit $\rho(f)$ et $\rho_2(f)$ désignent respectivement l'ordre et l'hyper ordre d'une fonction entière f. Dans cet chapitre, nous obtenons des estimations précises de l'hyper ordre des solutions des équations différentielles linéaires non homogène d'ordre supérieur suivantes

$$f^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} A_j(z) e^{P(z)} f^{(j)} = 0$$

et

$$f^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} \left(A_j(z) e^{P(z)} + B_j(z)\right) f^{(j)} = 0$$

où $k \geq 2$, $P_j(z)\,(j = 0, ..., k-1)$ sont des polynômes non constants tels que $\deg P_j = n\ (j = 0, ..., k-1)$ et $A_j(z)\,(\not\equiv 0)$, $B_j(z)\,(\not\equiv 0)\,(j = 0, ..., k-1)$ sont entiers fonctionnent avec $\rho(A_j) < n, \rho(B_j) < n\ (j = 0, ..., k-1)$. Dans certaines conditions. nous prouvons que chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ des équations ci-dessus est d'ordre infini et $\rho_2(f) = n$. Dans [9], Kwon a étudié l'ordre et l'hyper ordre des solutions de l'équation (1.2)

$$f'' + A_1(z) e^{P_1(z)} f' + A_0(z) e^{P_0(z)} f = 0 \tag{1.2}$$

dans le cas où $\deg P_1(z) = \deg P_0(z)$ et a obtenu le résultat suivant.

Théorème (A [9]) Soit $P_1(z)$ et $P_0(z)$ des polynômes non constants, tels que

$$P_1(z) = a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + ... + a_1 z + a_0 \tag{1.3}$$

$$P_0(z) = b_n z^{(n)} + b_{n-1} z^{(n-1)} + ... + b_1 z + b_0 \tag{1.4}$$

où a_i, b_i $(i = 0, 1, ..., n)$ sont des nombres complexes, $a_n \neq 0, b_n \neq 0$. Soient $A_1(z)$ et $A_0(z)\,(\not\equiv 0)$ les deux fonctions entières tel que $\rho(A_j) < n$ $(j = 0, 1)$. et vérifiant aux conditions suivantes :
(i) Si $\arg a_n \neq \arg b_n$ ou $a_n = cb_n$ $(0 < c < 1)$, chaque solution non constante f de (1.2) a un ordre infini avec $\rho_2(f) \geq n$.
(ii) Soit $a_n = b_n$ et $\deg(P_1 - P_0) = m \geq 1$, et $\rho(A_j) < m$, $(j = 0, 1)$. Alors chaque solution non constante f de (1.2) a ordre infini avec $\rho_2(f) \geq m$.
(iii) Soit $a_n = cb_n$ avec $c \geq 1$ et $(P_1 - cP_0) = m \geq 1$. Suppose que $\rho(A_1) < m$ et $A_0(z)$ est une fonction entière avec $0 < \rho(A_0) < 1/2$.Alors chaque solution non constante f de (1.2) a un ordre infini avec $\rho_2(f) \geq \rho(A_0)$.
(iv) Soit $a_n = cb_n$ avec $c \geq 1$ et soit $P_1(z) - cP_0(z)$ est constante. Suppose que $\rho(A_1) < \rho(A_0) < 1/2$. Alors chaque solution non constante f de (1.2) a ordre infini et $\rho_2(f) \geq \rho(A_0)$.
Dans [2], **Chen** améliore les résultats du Théorème **A**(i), du Théorème **A**(iii) pour l'équation différentielle linéaire (1.2) comme suit :
Théorème (B [2]) Soient $P_1(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ et $P_0(z) = \sum_{i=0}^{n} b_i z^i$ deux polynômes non constants où a_i, b_i $(i = 0, 1, ..., n)$ sont des nombres complexes $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$, et soit $A_1(z)$, $A_0(z)\,(\not\equiv 0)$ être fonction entière. Supposons que soit (i) ou (ii) ci-dessous, soit :
(i) $\arg a_n \neq \arg b_n$ ou $a_n = cb_n$ $(0 < c < 1)$, $\rho(A_j) < n$ $(j = 0, 1)$;
(ii) $a_n = cb_n$ $(c > 1)$ et $\deg(P_1 - P_0) = m \geq 1$, $\rho(A_j) < m$ $(j = 0, 1)$.
Alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de (1.2) satisfait $\rho_2(f) = n$.
Récemment, **Chen** et **Shon** ont obtenu le résultat suivant :
Théorème (C [3]) Soient $h_0 \not\equiv 0$, $h_1, ..., h_{k-1}$ des fonctions entières avec $\rho(h_j) < 1$ $(j = 0, ..., k-1)$. Soit $a_0 \neq 0$, $a_1, ..., a_{k-1}$ des nombres complexes tels que pour $j = 1, ..., k-1$
(i) $a_j = 0$,ou
(ii) $\arg a_j = \arg a_0$ et $a_j = c_j a_0$ $(0 < c < 1)$, ou
(iii) $\arg a_j = \arg a_0$.
Alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + h_{k-1}(z)\, e^{a_{k-1}z} f^{(k-1)} + ... + \ h_1(z)\, e^{a_1 z} f' + h_0(z)\, e^{a_0 z} f = 0 \tag{1.5}$$

satisfait $\rho(f) = \infty$ et $\rho_2(f) = 1$.
L'objectif principal de cet chapitre est d'étendre et d'améliorer les résultats du Théorème **B** et Théorème **C** à certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur. En fait, nous allons prouver les résultats suivants.

Théorème 2.0.1 *Soit* $P_j(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} z^i$ $(j = 0, ..., k-1)$ *sont des polynômes non constants où* $a_{0,j}, ..., a_{n,j}$ $(j = 1, ..., k-1)$ *sont des nombres complexes tels que :*
$a_{n,j}a_{n,0} \neq 0$ $(j = 1, ..., k-1)$ *et que* $A_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j = 1, ..., k-1)$ *soient des fonctions entières. Supposons que* $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}$ *ou* $a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ $(0 < c_j < 1)$ $(j = 1, ..., k-1)$ *et* $\rho(A_j) < n$ $(j = 0, ..., k-1)$*. Alors chaque solution* $f(z) \not\equiv 0$ *de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)\, e^{P_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + ... + \ A_1(z)\, e^{P_1(z)} f' + A_0(z)\, e^{P_0(z)} f = 0 \tag{1.6}$$

où $k \geq 2$, est d'ordre infini et $\rho_2(f) = n$.

Exemple 2.0.1 *on considèr l'équation differentielle*

$$f" + \cos z e^{iz^2+5} f' + \sin z e^{4z^2+2z} f = 0 \tag{2.0.1}$$

On a : $n = 2$; $a_{12} = i$; $a_{02} = 4$; et $\arg a_{12} \neq \arg a_{02}$;
$A_1(z) = \cos z$ et $A_0(z) = \sin z$ on a $\rho(A_j) < 2$ $(j = 0, 1)$

Alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation 2.0.1 est d'ordre infini et $\rho_2(f) = 2$.

Théorème 2.0.2 *Soit $P_j(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} z^i$ $(j = 0, ..., k-1)$ sont des polynômes non constants où $a_{0,j}, ..., a_{n,j}$ $(j = 1, ..., k-1)$ sont des nombres complexes tels que $a_{n,j} a_{n,0} \neq 0$ $(j = 1, ..., k-1)$ et que $A_j(z)$ $(\not\equiv 0)$, $B_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j = 1, ..., k-1)$ soient des fonctions entières. Supposons que $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}$ ou $a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ $(0 < c_j < 1)$ $(j = 1, ..., k-1)$ et $\rho(A_j) < n$, $\rho(B_j) < n$ $(j = 0, ..., k-1)$. Alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + (A_{k-1}(z)\ e^{P_{k-1}(z)} + B_{k-1}(z))\ f^{(k-1)} + ... + (A_1(z)\ e^{P_1(z)} + B_1(z))\ f' + (A_0(z)\ e^{P_0(z)} + B_0(z))\ f = 0 \tag{1.7}$$

où $k \geq 2$, est d'ordre infini et $\rho_2(f) = n$.

Exemple 2.0.2 *on considèr l'équation differentielle*

$$f" + \left(\cos z e^{2iz^3+5} + (1 - z^2)\right) f' + \left(\sin z e^{-4iz^3+2z} + 1 - e^{-z}\right) f = 0 \tag{2.0.2}$$

On a : $a_{13} = 2i$; $a_{03} = -4i$; $n = 3$ et $\arg a_{13} \neq \arg a_{03}$;
$A_1(z) = \cos z$ et $A_0(z) = \sin z$,$B_1(z) = 1 - z^2$ et $B_0(z) = 1 - e^{-z}$ on a $\rho(A_j) < 3$, $\rho(B_j) < 3$ $(j = 0, 1)$
Alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation 2.0.2 est d'ordre infini et $\rho_2(f) = 3$.

Théorème 2.0.3 *Soit $P_j(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} z^i$ $(j = 0, ..., k-1)$ sont des polynômes non constants où $a_{0,j}, ..., a_{n,j}$ $(j = 1, ..., k-1)$ sont des nombres complexes tels que $a_{n,j} a_{n,0} \neq 0$ $(j = 1, ..., k-1)$ et que $A_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j = 1, ..., k-1)$ soient des fonctions entières. Supposons que $a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ $(c > 1)$ et $\deg(P_j - cP_0) = m \geq 1$ $(j = 0, ..., k-1)$, $\rho(A_j) < m$ $(j = 0, ..., k-1)$. Alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation (1.6) est d'ordre infini et $\rho_2(f) = n$.*

Exemple 2.0.3 *on considèr l'équation differentielle :*

$$f" + 2ze^{3iz^4+5} f' + e^{iz^4+2z} f = 0 \tag{2.0.3}$$

On a : $a_{14} = 3i$; $a_{04} = i$; $n = 4$ et $a_{14} = ca_{04}$; $c = 3 > 1$
et

$$\begin{aligned} P_2(z) - cP_0(z) &= 3iz^4 + 5 - \frac{1}{3}\left(iz^4 + 2z\right) \\ &= \left(\frac{8}{3}i - 6\right) z^4 + 5. \end{aligned}$$

donc

$$\deg(P_2(z) - 3P_0(z)) = 4 \geq 1.$$

Alors chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation 2.0.3 est d'ordre infini et $\rho_2(f) = 4$.

2.1 Lemmes Requis Pour Prouver Le Théorème 2.1.1 Et Le Théorème 2.1.2

Nous avons besoin des lemmes suivants dans les preuves du Théorème (2.1.1) et du Théorème (2.1.2).

Lemme 2.1.1 *([5]). Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendantale, et donnons des constantes $\alpha > 1$ et $\varepsilon > 0$. Ensuite, les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) Il existe une constante $A > 0$ et un ensemble $E_1 \subset [0, \infty)$ ayant une mesure linéaire finie telle que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_1$, on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq A \left[T(\alpha r, f) \ r^{\varepsilon} \log T(\alpha r, f) \right]^j \qquad (j \in \mathbf{N}). \tag{2.1}$$

(ii) Il existe une constante $B > 0$ et un ensemble $E_2 \subset [0, 2\pi)$ qui a la mesure linéaire zéro, telle que si $\theta \in [0, 2\pi) \backslash E_2$, alors il existe une constante $R_1 = R_1(\theta) > 1$ telle que pour tout z satisfaisant $\arg z = \theta$ et $|z| = r \geq R_1$, on a

Lemme 2.1.2

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq B \left[\frac{T(\alpha r, f)}{r} (\log^{\alpha} r) \log T(\alpha r, f) \right]^j \qquad (j \in \mathbf{N}). \tag{2.2}$$

Lemme 2.1.3 ([3]) *Soit $P(z) = a_n z^n + ... + a_0$, $(a_n = \alpha + i\beta \neq 0)$ un polynôme de degré $n \geq 1$ et $A(z)$ $(\not\equiv 0)$ une fonction entière avec $\sigma(A) < n$. Définissez $f(z) = A(z)\ e^{P(z)}$, $z = re^{i\theta}$, $\delta\ (P, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$. Ensuite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_3 \subset [0, 2\pi)$ qui a la mesure linéaire zéro, tel que pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_3 \cup E_4)$, où $E_4 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta\ (P, \theta) = 0\}$ est un ensemble fini, il existe $R_2 > 0$ tel que pour $|z| = r > R_2$, les instructions suivantes sont vérifiées :*

(i) si $\delta\ (P, \theta) > 0$, donc

$$\exp\{(1-\varepsilon)\ \delta\ (P, \theta)\ r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\ \delta\ (P, \theta)\ r^n\} \tag{2.3}$$

(ii) si $\delta\ (P, \theta) < 0$, donc

$$\exp\{(1+\varepsilon)\ \delta\ (P, \theta)\ r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\ \delta\ (P, \theta)\ r^n\} \tag{2.4}$$

Lemme 2.1.4 ([3]) *Soit $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ des fonctions entières d'ordre fini. Si f est une solution de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)\ f^{(k-1)} + ... + A_1(z)\ f' + A_0(z)\ f = 0, \tag{2.5}$$

puis

$$\rho_2(f) \leq \max\{\rho(A_0), ..., \rho(A_{k-1})\}.$$

Lemme 2.1.5 *Soit* $P(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ...b_1 z + b_0$ *avec* $b_m \neq 0$ *un polynôme.*

Alors pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $R_3 > 0$ tel que pour tout $|z| = r > R_3$ les inégalités

$$(1-\varepsilon)|b_m| r^m \leq |P(z)| \leq (1+\varepsilon)|b_m| r^m \tag{2.6}$$

vérifiée.
Preuve : Clairement,

$$|P(z)| = |a_m| |z|^m \left| 1 + \frac{a_{m-1}}{a_m}\frac{1}{z} + ... + \frac{a_0}{a_m}\frac{1}{z^m} \right|.$$

on note

$$R_m(z) = \frac{a_{m-1}}{a_m}\frac{1}{z} + ... + \frac{a_0}{a_m}\frac{1}{z^m}.$$

Évidemment, $|R_m(z)| < \varepsilon$, si $|z| > R_3$ pour quelque $\varepsilon > 0$. Cela signifie que

$$\begin{aligned}
(1-\varepsilon)|a_m| r^m &\leq (1 - |R_m(z)|)|a_m| r^m \\
&\leq |1 + R_m(z)| |a_m| r^m \\
&= |P(z)| \\
&\leq (1 + |R_m(z)|)|a_m| r^m \\
&\leq (1+\varepsilon)|a_m| r^m.
\end{aligned}$$

2.2 Preuve Du Théorème 2.1.1 Et Du Théorème 2.1.2

1. Preuve du Théorème 2.1.1 :
Supposons que $f(z) \not\equiv 0$ soit une solution complète transcendante de (1.6).Par le Lemme (2.2.1) (ii),il existe un ensemble $E_2 \subset [0, 2\pi)$ avec mesure linéaire zéro, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \backslash E_2$, et $R_1 = R_1(\theta) > 1$ tel que pour toute z vérifier $\arg z = \theta$ et $|z| \geq R_1$,alors

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq B\left[T(2r, f)\right]^{k+1} \qquad (j = 1, ..., k), (B > 0). \tag{3.1}$$

Soit $P_0(z) = a_{n,0} z^n + ... + a_{0,0}$ $(a_{n,0} = \alpha + i\beta \neq 0)$, $\delta(P_0, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$.Supposons d'abord que $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}$ $(j = 1, ..., k-1)$.Par Le Lemme (2.2.2), pour tout ε $(0 < \varepsilon < 1)$,il y a un ensemble E_3 une mesure linéaire et un rayon $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \backslash (E_3 \cup E_4)$, où $E_4 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_0, \theta) = 0 \text{ ou } \delta(P_j, 0) = 0 \ (j = 1, ..., k-1)\}$ (E_4 est un ensemble fini), tel que $\delta(P_0, \theta) > 0$, $\delta(P_j, 0) < 0$ $(j = 1, ..., k-1)$ et pour $|z| = r$ suffisamment grand, on a

$$\left| A_0(z) e^{P_0(z)} \right| \geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_0, \theta) r^n\}. \tag{3.2}$$

et

$$\left| A_j(z) e^{P_j(z)} \right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_j, \theta) r^n\} < 1 \qquad (j = 1, ..., k-1). \tag{3.3}$$

D'après (1.6) on a

$$\left|A_0(z)\,e^{P_0(z)}\right| \leq \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \left|A_{k-1}(z)\,e^{P_{k-1}(z)}\right| \left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| + ... + \left|A_1(z)\,e^{P_1(z)}\right| \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|. \quad (3.4)$$

Maintenant, prenons un rayon $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_2 \cup E_3 \cup E_4)$. Par conséquent, par (3.1) – (3.3) et (3.4), nous obtenons suffisamment grand $|z| = r$

$$\exp\{(1-\varepsilon)\,\delta(P_0,\theta)\,r^n\} \leq \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta(P_j,\theta)\,r^n\}\right) B[T(2r,f)]^{k+1} \leq kB[T(2r,f)]^{k+1}. \quad (3.5)$$

Par $0 < \varepsilon < 1$ et (3.5) on obtient que $\rho(f) = +\infty$ et

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r} \geq n. \quad (3.6)$$

Par le lemme (2.2.3), nous avons $\rho_2(f) = n$.
supposons maintenant $a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ $(0 < c_j < 1)$ $(j = 1, ..., k-1)$.
Alors $\delta(P_j,\theta) = c_j \delta(P_0,\theta)$ $(j = 1, ..., k-1)$ .Mettez $c = \max\{c_j : j = 1, ..., k-1\}$.
Alors $0 < c < 1$. En utilisant le même raisonnement que ci-dessus, pour tout $\varepsilon \left(0 < 2\varepsilon < \frac{1-c}{1+c}\right)$ donné un rayon $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_5 \cup E_6)$, où E_5 et E_6 sont définis comme dans le lemme 2.2.2, $E_5 \cup E_6$ est de mesure linéaire zéro, satisfaisant $\delta(P_j,\theta) = c_j\delta(P_0,\theta) > 0$ $(j = 1, ..., k-1)$ et pour $|z| = r$ suffisamment grand, nous avons

$$\left|A_0(z)\,e^{P_0(z)}\right| \geq \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta(P_0,\theta)\,r^n\} \quad (3.7)$$

et

$$\begin{aligned} \left|A_j(z)\,e^{P_j(z)}\right| &\leq \exp\{(1+\varepsilon)\,\delta(P_j,\theta)\,r^n\} \\ &\leq \exp\{(1+\varepsilon)\,c\delta(P_0,\theta)\,r^n\} \;\; (j = 1, ..., k-1). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Maintenant, prenez un rayon $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_2 \cup E_5 \cup E_6)$. En substituant (3.1), (3.7) et (3.8) en (3.4), on obtient pour $|z| = r$ suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta(P_0,\theta)\,r^n\} &\leq (1 + (k-1)\exp\{(1+\varepsilon)\,c\delta(P_0,\theta)\,r^n\})\,B\,[T(2r,f)]^{k+1} \\ &\leq kB\exp\{(1+\varepsilon)\,c\delta(P_0,\theta)\,r^n\}\,[T(2r,f)]^{k+1}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Par $0 < 2\varepsilon < \frac{1-c}{1+c}$ et $(3, 9)$ nous avons

$$\exp\left\{\frac{(1-c)}{2}\delta(P_0,\theta)\,r^n\right\} \leq kB\,[T(2r,f)]^{k+1}. \quad (3.10)$$

Ainsi, (3.10) implique $\rho(f) = +\infty$ et

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r} \geq n. \tag{3.11}$$

D'après le lemme (2.2.3), nous avons $\rho(f) = n$.
On montre maintenant que l'équation (1.6) ne peut avoir une solution polynomiale non nulle. Supposons d'abord que $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}$ $(j = 1, ..., k-1)$. Supposons que $f(z) \not\equiv 0$ est une solution polynomiale de (1.6). D'après le lemme (2.2.2), pour tout $\varepsilon\,(0 < \varepsilon < 1)$ donné $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_3 \cup E_4)$ satisfaisant $\delta(P_0, \theta) > 0, \delta(P_j, \theta) < 0$ $(j = 1, ..., k-1)$ et pour $|z| = r$ suffisamment grand, les inégalités (3.2), (3.3) sont valables. Par (1.6) nous pouvons écrire

$$A_0(z)\, e^{P_0(z)} f = f^{(k)} + A_{k-1}(z)\; e^{P_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + ... + \; A_1(z)\; e^{P_1(z)} f'. \tag{3.12}$$

En utilisant (3.2), (3.3), (3.12) et le lemme (2.2.4), on obtient pour assez grand $|z| = r$

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)\,|b_m|\, r^m \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta(P_0,\theta)\, r^n\} &\leq \left|A_0(z)\, e^{P_0(z)} f\right| \\ &= \left|f^{(k)} + A_{k-1}(z)\; e^{P_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + ... + \; A_1(z)\; e^{P_1(z)} f'\right| \\ &\leq k\,(1+\varepsilon)\, m\, |b_m|\, r^{m-1},\end{aligned} \tag{3.13}$$

où $f(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_1 z + b_0$ avec $b_m \neq 0$. De (3.13) on obtient pour $|z| = r$ suffisamment grand

$$\exp\{(1-\varepsilon)\,\delta(P_0,\theta)\, r^n\} \leq k \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} m \frac{1}{r}. \tag{3.14}$$

C'est absurde depuis $0 < \varepsilon < 1$. En utilisant le même raisonnement que ci-dessus, nous pouvons prouver que si $a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ $(0 < c_j < 1)$, alors l'équation (1.6) ne peux pas de solution polynomiale non nulle. Par conséquent, toute solution $f(z) \not\equiv 0$ sur (1.6) est d'ordre infini et $\rho(f) = n$.

2. Preuve du Théorème 2.1.2 :

Supposons que $f(z) \not\equiv 0$ soit une solution de $(1, 7)$. En utilisant un raisonnement similaire à celui de la démonstration du Théorème (2.1.1), il s'ensuit que $f(z)$ doit être une solution transcendant. Supposons d'abord que $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}\,(j = 1, ..., k-1)$. D'après le lemme (2.2.2), pour tout $\varepsilon\,(0 < 2\varepsilon < \min\{1, n-\alpha\})$ donné, où $\alpha = \max\{\rho(B_j) : j = 0, ..., k-1\}$, il existe un rayon $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_3 \cup E_4)$, où E_3 et E_4 sont définis comme dans le lemme (2.2.2), $E_3 \cup E_4$ est de mesure linéaire zéro et $\delta(P_0, \theta) > 0, \delta(P_j, \theta) < 0$ $(j = 1, ..., k-1)$ et pour $|z| = r$ suffisamment grand, nous avons

$$\left|A_0(z)\, e^{P_0(z)} + B_0(z)\right| \geq (1 - \circ(1)) \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta(P_0,\theta)\, r^n\} \tag{4.1}$$

et

$$\begin{aligned}\left|A_j(z)\, e^{P_j(z)} + B_j(z)\right| &\leq \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta(P_0,\theta)\, r^n\} + \exp\left\{r^{\rho(B_j)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\} \\ &\leq \exp\left\{r^{\rho\left(B_j\right)+\varepsilon}\right\} \\ &\leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\} \qquad (j = 1, ..., k-1).\end{aligned} \tag{4.2}$$

Il résulte de (1.7) que

$$\begin{aligned}\left|A_0(z)e^{P_0(z)}+B_0(z)\right| \leq & \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \left|A_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}+B_{k-1}(z)\right|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| \\ & +...+\left|A_1(z)e^{P_1(z)}+B_1(z)\right|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Maintenant, prenez un rayon $\theta \in [0,2\pi)\setminus(E_2 \cup E_3 \cup E4)$. Donc par (3.1) et (4.1) – (4.3), on obtient pour $|z| = r$ suffisamment grand

$$\begin{aligned} & (1-\circ(1))\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_0,\theta)r^n\} \\ \leq & \left(1+(k-1)\exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}\right)B\left[T(2r,f)\right]^{k+1} \\ \leq & kB\exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Ainsi, $0 < 2\varepsilon < \min\{1, n-\alpha\}0$ <n implique $\rho(f) = +\infty$ et

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log\log T(r,f)}{\log r} \geq n. \tag{4.5}$$

Par le lemme (2.2.3), nous avons $\rho(f) = n$.
Supposons maintenant que $a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ $(0 < c_j < 1)$ $(j = 1, ..., k-1)$.
Alors $\delta(P_j,\theta) = c_j\delta(P_0,\theta)\,(j = 1,...,k-1)$. Mettez $c = \max\{c_j : j = 1,...,k-1\}$. Alors $0 < c < 1$. En utilisant le même raisonnement que ci-dessus, pour tout $\varepsilon\left(0 < 2\varepsilon < \frac{1-c}{1+c}\right)$ donné, il existe un rayon $\arg z = \theta \in [0,2\pi)\setminus(E_5 \cup E_6)$, $E_5 \cup E_6$, est de mesure linéaire zéro, satisfaisant $\delta(P_j,\theta) = c_j\delta(P_0,\theta) > 0$ $(j = 1,...,k-1)$ et pour $|z| = r$ suffisamment grand, on a

$$\left|A_0(z)e^{P_0(z)}+B_0(z)\right| \geq (1-\circ(1))\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_0,\theta)r^n\} \tag{4.6}$$

et

$$\left|A_j(z)e^{P_j(z)}+B_0(z)\right| \leq (1+\circ(1))\exp\{(1+\varepsilon)c\delta(P_0,\theta)r^n\} \quad (j=1,...,k-1). \tag{4.7}$$

Maintenant, prenez un rayon $\theta \in [0,2\pi)\setminus(E_2 \cup E_5 \cup E_6)$. En substituant (3.1), (4.6) et (4.7) en (4.3), on obtient pour $|z| = r$ suffisamment grand,

$$\begin{aligned} & (1-\circ(1))\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_0,\theta)r^n\} \\ \leq & (1+(k-1)(1+\circ(1))\exp\{(1+\varepsilon)c\delta(P_0,\theta)r^n\})B\left[T(2r,f)\right]^{k+1} \\ \leq & kB(1+\circ(1))\exp\{(1+\varepsilon)c\delta(P_0,\theta)r^n\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1},\end{aligned} \tag{4.8}$$

Par $\left(0 < 2\varepsilon < \frac{1-c}{1+c}\right)$ <0 et (4.8) nous avons

$$\exp\left\{\frac{1-c}{2}\delta\left(P_0,\theta\right)r^n\right\} \leq kBd\left[T\left(2r,f\right)\right]^{k+1}, \tag{4.9}$$

où $d > 0$ est une constante. Ainsi, (4.9) implique $\rho\left(f\right) = +\infty$ et

$$\rho_2\left(f\right) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T\left(r,f\right)}{\log r} \geq n. \tag{4.10}$$

D'après le lemme (2.2.3), nous avons $\rho_2\left(f\right) = n$.

2.3 Lemmes Nécessaires Pour Prouver Le Théorème 2.1.3

nous avons besoin des lemmes suivants dans la preuve du Théorème (2.1.3).

Lemme 2.3.1 *([10, pp. 253-255]). Soit $P_0(z) = \sum_{i=0}^{n} b_i z^i$, où n est un entier positif et $b_n = \alpha_n e^{i\theta_n}$, $\alpha_n > 0$, $\theta_n \in [0, 2\pi)$. Pour tout $\varepsilon\left(0 < \varepsilon < \pi/4n\right)$, nous introduisons $2n$ angles fermés*

$$S_j : -\frac{\theta_n}{n} + (2j-1)\frac{\pi}{2n} + \varepsilon \leq \theta \leq -\frac{\theta_n}{n} + (2j+1)\frac{\pi}{2n} - \varepsilon \qquad \left(j = 0, 1, ..., 2n-1\right). \tag{5.1}$$

Il existe alors un nombre positif $R_4 = R_4\left(\varepsilon\right)$ tel que pour $|z| = r > R_4$,

$$\operatorname{Re} P_0\left(z\right) > \alpha_n r^n \left(1-\varepsilon\right)\sin\left(n\varepsilon\right), \tag{5.2}$$

si $z = re^{i\theta} \in S_j$, quand j est pair ; alors que

$$\operatorname{Re} P_0\left(z\right) < -\alpha_n r^n \left(1-\varepsilon\right)\sin\left(n\varepsilon\right), \tag{5.3}$$

si $z = re^{i\theta} \in S_j$, quand j est impair.
Maintenant pour tout $\theta \in [0, 2\pi)$, si $\theta \neq -\frac{\theta_n}{n} + (2j-1)\frac{\pi}{2n}$ $\left(j = 0, 1, ..., 2n-1\right)$, alors nous prenons ε suffisamment petit et il y a quelques $S_j\left(j = 0, 1, ..., 2n-1\right)$ tels que $z = re^{i\theta} \in S_j$.

Lemme 2.3.2 *([2]). Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre $\rho\left(f\right) = \alpha < +\infty$. Ensuite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_7 \subset [1, +\infty)$ qui a une mesure linéaire finie et une mesure logarithmique finie, telles que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_7$, nous avons*

$$\exp\left\{-r^{\alpha+\varepsilon}\right\} \leq |f(z)| \leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}. \tag{5.4}$$

Lemme 2.3.3 *([2]). Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière d'ordre infini avec l'hyper ordre $\rho\left(f\right) = \sigma$, $\mu(r)$ le terme maximal, i.e., $\mu\left(r\right) = \max\left\{|a_n| r^n; n = 0, 1, ...\right\}$ et $v(r)$, l'indice central de f, i.e., $\nu_f\left(r\right) = \left\{\max m, \mu(r) = |a_m| r^m\right\}$. Puis*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log\log\nu_f(r)}{\log r}=\sigma. \tag{5.5}$$

Lemme 2.3.4 *(Wiman-Valiron, [8, 12]). Soit $f(z)$ une fonction entière transcendantale et z un point avec $|z|=r$ au quel $|f(z)|=M(r,f)$. Puis pour tout $|z|$ en dehors d'un ensemble E_8 de r de mesure logarithmique finie, on a*

$$\frac{f^{(J)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\nu_f(r)}{z}\right)(1+\circ(1)) \qquad (j \text{ est un entier}, r\notin E_8). \tag{5.6}$$

Lemme 2.3.5 *([2]). Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\rho(f)=+\infty$ et $\rho_2(f)=\alpha<+\infty$, donnons à un ensemble $E_9\subset[1,+\infty)$ une mesure logarithmique finie. Ensuite, il existe $\{z_p=r_pe^{i\theta_p}\}$ tel que $|f(z_p)|=M(r,f)$, $\lim_{p\to+\infty}\theta_p=\theta_0\in[0,2\pi)$, $r_p\notin E_9, r_p\to+\infty$, et pour tout $\varepsilon>0$, pour r_p suffisamment grand, nous avons*

$$\overline{\lim_{p\to+\infty}}\frac{\log\log\nu_f(r_p)}{\log r_p}=+\infty. \tag{5.7}$$

$$\exp\left\{r_p^{\alpha-\varepsilon}\right\}\le\nu_f(r_p)\le\exp\left\{r_p^{\alpha+\varepsilon}\right\}. \tag{5.8}$$

Lemme 2.3.6 *Soit $P_j(z)=\sum_{i=0}^{n}a_{i,j}z^i$ $(j=0,...,k-1)$ des polynômes non constants $a_{0,j},...,a_{n,j}$ $(j=0,...,k-1)$ sont des nombres complexes tels que $a_{n,j},a_{n,0}$ $(j=0,...,k-1)$.*
soit $A_j(z)(\not\equiv0)$ $(j=0,...,k-1)$ des fonctions entières. Supposons que $a_{n,j}=ca_{n,0}$ $(c>1)$ et $\deg(P_j-cP_0)=m\ge1$ $(j=0,...,k-1)$, $\rho(A_j)<m$ $(j=0,...,k-1)$. Alors chaque solution $f(z)\not\equiv0$ de l'équation (1.6) soit d'ordre infini et que $\rho_2(f)<m$.

Preuve. $\square$

$$\begin{aligned}\left|A_0(z)e^{(1-c)P_0(z)}\right| &\le \left|e^{-cP_0(z)}\right|\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right|+\left|A_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)-cP_0(z)}\right|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| \\ &\quad +...+\left|A_1(z)e^{P_1(z)-cP_0(z)}\right|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|.\end{aligned} \tag{5.9}$$

D'après le lemme (2.2.1) (i), il existe une constante $A>0$ et un ensemble $E_1\subset[0,\infty)$ ayant une mesure linéaire finie telle que pour tout z satisfaisant $|z|=r\notin E_1$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|\le Ar\left[T(2r,f)\right]^{k+1} \qquad (j=0,...,k-1). \tag{5.10}$$

Par (5.9) et (5.10), on a pour tout z satisfaisant $|z|=r\notin E_1$

$$\left|A_0(z)e^{(1-c)P_0(z)}\right|\le\left[\left|e^{-cP_0(z)}\right|+\left|A_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)-cP_0(z)}\right|+...+\left|A_1(z)e^{P_1(z)-cP_0(z)}\right|\right]Ar\left[T(2r,f)\right]^{k+1}. \tag{5.11}$$

Comme $\deg(P_j - cP_0) = m < \deg P_0 = n$ $(j = 0, ..., k-1)$, d'après le lemme (2.3.1) (voir aussi [9, p.385]), il existe un nombre reél positif b et une courbe Γ tend vers l'infini tel que pour tout $z \in \Gamma$ avec $|z| = r$, on a

$$\operatorname{Re} P_0(z) = 0, \qquad \operatorname{Re}(P_j(z) - cP_0(z)) \leq -br^m \qquad (j = 0, ..., k-1). \tag{5.12}$$

Soit $\max\{\rho(A_j) \ (j = 0, ..., k-1)\} = \beta < m$. Ensuite, par le lemme (2.3.2), il existe un ensemble $E_7 \subset [1, +\infty)$ qui a une mesure linéaire finie, telle que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_7$, nous avons

$$\exp\left\{-r^{\beta+\varepsilon}\right\} \leq |A_j(z)| \leq \exp\left\{r^{\beta+\varepsilon}\right\} \qquad (j = 0, ..., k-1). \tag{5.13}$$

Donc par (5.11) _ (5.13), on obtient pour tout $z \in \Gamma$ avec $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_7$

$$\exp\left\{-r^{\beta+\varepsilon}\right\} \leq \left(1 + (k-1)\exp\left\{r^{\beta+\varepsilon}\right\}\exp\{-br^m\}\right) Ar\,[T(2r, f)]^{k+1}. \tag{5.14}$$

Ainsi, $\beta + \varepsilon < m$ implique $\rho(f) = +\infty$ et

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r} \geq m.$$

2.4 Preuve du Théorème 2.1.3 :

Supposons que $f(z) \not\equiv 0$ soit une solution de (1.6). Ensuite, par les lemmes (2.3.6) et (2.2.3), nous avons $\rho(f) = +\infty$ et $m \leq \rho_2(f) \leq n$. nous montrons que $\rho_2(f) = n$. Nous supposons que $\rho_2(f) = \lambda$ $(m \leq \lambda < n)$, et nous prouvons que $\rho_2(f) = \lambda$ échoue. Selon la théorie de Wiman-Valiron, il existe un ensemble $E_8 \subset [1, +\infty)$ avec la mesure logarithmique $lm(E_8) < +\infty$ et nous pouvons choisir z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_8$ et $|f(z)| = M(r, f)$, tel que (5.6) soit vrai. Définissez $\max\{\rho(A_j) \ (j = 0, ..., k-1)\} = \beta < m$. D'après le lemme (2.3.2), pour tout $\varepsilon\,(0 < 3\varepsilon < \min(m - \beta, n - \lambda))$ donné, il existe un ensemble $E_7 \subset [1, +\infty)$ qui a une mesure logarithmique finie, telle que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_7$, les inégalités (5.13) tiennent et

$$\exp\left\{-r^{m+\varepsilon}\right\} \leq |\exp\{P_j(z) - cP_0(z)\}| \leq \exp\left\{r^{m+\varepsilon}\right\} \qquad (j = 0, ..., k-1). \tag{6.1}$$

D'après le lemme (2.3.5), on peut choisir des points $\left\{z_p = r_p e^{i\theta_p}\right\}$ telle que $|f(z_p)| = M(r_p, f)$, $\theta_p \in [0, 2\pi)$, $\lim_{p\to+\infty} \theta_p = \theta_0 \in [0, 2\pi)$, $r_p \notin [0,1] \cup E_7 \cup E_8$, $r_p \to +\infty$, et pour le $\varepsilon > 0$, précédent, pour un r_p suffisamment grand, on a

$$\exp\left\{r_p^{\lambda-\varepsilon}\right\} \leq \nu(r_p) \leq \exp\left\{r_p^{\lambda+\varepsilon}\right\}, \tag{6.2}$$

$$\overline{\lim_{p\to+\infty}} \frac{\log\log \nu_f(r_p)}{\log r_p} = +\infty. \tag{6.3}$$

Soit $P_0(z) = \sum_{i=0}^{n} b_i z^i$ où n est un entier positif et $b_n = \alpha_n e^{i\theta_n}$, $\alpha_n > 0$. Par le lemme (2.3.1), pour tout $\varepsilon\,(0 < 3\varepsilon < \min(m - \beta, n - \lambda, \pi/4n))$, donné, il y a $2n$ angles fermés
$S_j : -\frac{\theta_n}{n} + (2j-1)\frac{\pi}{2n} + \varepsilon \leq \theta \leq -\frac{\theta_n}{n} + (2j+1)\frac{\pi}{2n} - \varepsilon \qquad (j = 0, ..., 2n-1).$

Pour θ_0 et $0 < 3\varepsilon < \min(m-\beta, n-\lambda, \pi/4n)$ ci-dessus, il y a trois cas :
(1) $r_p e^{i\theta_0} \in S_j$ où j est impair ;
(2) $r_p e^{i\theta_0} \in S_j$ où j est pair ;
(3) $\theta_0 = -\frac{\theta_n}{n} + (2j-1)\frac{\pi}{2n}$ pour une certaine $j = 0, ..., 2n-1$.
Nous avons maintenant trois cas pour prouver le Théorème (2.2.3).
Cas (1) : $r_p e^{i\theta_0} \in S_j$ où j est impair. Depuis $\lim_{p\to+\infty} \theta_p = \theta_0$, il existe un $N > 0$ tel que $r_p e^{i\theta_p} \in S_j$ lorsque $p > N$. D'aprés Lemme (2.3.1), nous avons

$$\operatorname{Re}\left\{P_0\left(r_p e^{i\theta_p}\right)\right\} < -\delta r_p^n \quad (\delta > 0), \qquad \text{i.e.,} \qquad \operatorname{Re}\left\{-P_0\left(r_p e^{i\theta_p}\right)\right\} > \delta r_p^n. \tag{6.4}$$

De (6.1) et (6.4), on obtient pour p suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{P_j\left(r_p e^{i\theta_p}\right) - P_0\left(r_p e^{i\theta_p}\right)\right\} &= \operatorname{Re}\left\{(c-1)P_0 + (P_j - cP_0)\right\} \\ &< r_p^{m+\varepsilon} - (c-1)\delta r_p^n \quad (j = 0, ..., k-1). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Par (1.6), nous avons

$$-e^{-P_0(z)}\frac{f^{(k)}}{f} = A_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)-P_0(z)}\frac{f^{(k-1)}}{f} + ... + A_1(z)e^{P_1(z)-P_0(z)}\frac{f'}{f} + A_0(z). \tag{6.6}$$

En substituant (5.6) en (6.6), on obtient pour $z_p = r_p e^{i\theta_p}$

$$\begin{aligned} & -\nu_f^k(r_p)(1+\circ(1))\exp\{-P_0(z_p)\} \\ = \; & A_{k-1}(z_p)\exp\{P_{k-1}(z_p) - P_0(z_p)\} z_p \nu_f^{k-1}(r_p)(1+\circ(1)) + ... \\ & + A_1(z_p)\exp\{P_1(z_p) - P_0(z_p)\} z_p \nu_f^{k-1}(r_p)(1+\circ(1)) + z_p^k A_0(z_p). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Nous avons donc, de (6.2) et (6.4)

$$\left|-\nu_f^k(r_p)(1+\circ(1))\exp\{-P_0(z_p)\}\right| \geq \frac{1}{2}\exp\left\{\delta r_p^n\right\}\exp\left\{k r_p^{\lambda-\varepsilon}\right\} > \exp\left\{\delta r_p^n\right\}. \tag{6.8}$$

Et par (5.13), (6.5) et (6.2), nous avons

$$\begin{aligned} & \left|A_{k-1}(z_p)\exp\{P_{k-1}(z_p) - P_0(z_p)\} z_p \nu_f^{k-1}(r_p)(1+\circ(1)) + \right. \\ & \left. ... + A_1(z_p)\exp\{P_1(z_p) - P_0(z_p)\} z_p \nu_f^{k-1}(r_p)(1+\circ(1)) + z_p^k A_0(z_p)\right| \\ \leq \; & 2(k-1) r_p^{k-1}\exp\left\{r_p^{\beta+\varepsilon}\right\}\exp\left\{r_p^{m+\varepsilon} - (c-1)\delta r_p^n\right\} \\ & \times\exp\left\{(k-1) r_p^{\lambda+\varepsilon}\right\} + r_p^k\exp\left\{r_p^{\beta+\varepsilon}\right\} \\ \leq \; & \exp\left\{(k-1) r_p^{\lambda+2\varepsilon}\right\}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

De (6.7) nous voyons que (6.8) on trouve (6.9).
Cas (2) : $r_p e^{i\theta_0} \in S_j$ où j est pair. Depuis $\lim_{p\to+\infty} \theta_p = \theta_0$, il existe un $N > 0$ tel que $r_p e^{i\theta_p} \in S_j$ lorsque $p > N$. D'aprés Lemme (2.3.1), nous avons

$$\operatorname{Re}\left\{P_0\left(r_pe^{i\theta_p}\right)\right\} > \delta r_p^n \quad (\delta > 0), \quad \operatorname{Re}\left\{-cP_0\left(r_pe^{i\theta_p}\right)\right\} < -c\delta r_p^n, \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left\{(1-c)\,P_0\left(r_pe^{i\theta_p}\right)\right\} &< (1-c)\,\delta r_p^n, \operatorname{Re}\left\{P_j\left(r_pe^{i\theta_p}\right) - cP_0\left(r_pe^{i\theta_p}\right)\right\} \\ &< -c\delta r_p^n \quad (j = 2, ..., k-1).\end{aligned} \tag{6.11}$$

Par (1.6), nous avons

$$\begin{aligned}-A_1(z)\,e^{P_1(z)-cP_0(z)}\frac{f'}{f} &= e^{-cP_0(z)}\frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}(z)\,e^{P_{k-1}(z)-cP_0(z)}\frac{f^{(k-1)}}{f} \\ &\quad +... + A_2(z)\,e^{P_2(z)-cP_0(z)}\frac{f''}{f} + A_0(z)\,e^{(1-c)P_0(z)}.\end{aligned} \tag{6.12}$$

En substituant (5.6) en (6.12) on obtient pour $z_p = r_pe^{i\theta_p}$

$$\begin{aligned}& -A_1(z_p)\exp\{P_1(z_p) - cP_0(z_p)\}\, z_p^{k-1}\nu_f(r_p)(1+\circ(1)) \\ = \ & \nu_f^k(r_p)(1+\circ(1))\exp\{-cP_0(z_p)\} + \nu_f^{k-1}(r_p)(1+\circ(1)) \\ & \times z_pA_{k-1}(z_p)\exp\{P_{k-1}(z_p) - cP_0(z_p)\} \\ & +... + z_p^{k-2}\nu_f^2(r_p)(1+\circ(1)) \times A_2(z_p)\exp\{P_2(z_p) - cP_0(z_p)\} + z_p^kA_0(z_p)\exp\{(1-c)\,P_0(z_p)\}.\end{aligned} \tag{6.13}$$

On obtient donc de (5.13), (6.1) et (6.2)

$$\begin{aligned}& \left|-A_1(z_p)\exp\{P_1(z_p) - cP_0(z_p)\}\, z_p^{k-1}\nu_f(r_p)(1+\circ(1))\right| \\ \geq \ & 1/2r_p^{k-1}\exp\left\{-r_p^{\beta+\varepsilon}\right\}\exp\left\{-r_p^{m+\varepsilon}\right\}\exp\left\{-r_p^{\lambda-\varepsilon}\right\} > \exp\left\{-r_p^{m+\varepsilon}\right\}.\end{aligned} \tag{6.14}$$

Et de (5.13), (6.2) et (6.10), (6.11) nous avons pour p suffisamment grand

$$\begin{aligned}& \left|\nu_f^k(r_p)(1+\circ(1))\exp\{-cP_0(z_p)\} + \nu_f^{k-1}(r_p)(1+\circ(1))\right. \\ & \times z_pA_{k-1}(z_p)\exp\{P_{k-1}(z_p) - cP_0(z_p)\} + ... + z_p^{k-2}\nu_f^2(r_p)(1+\circ(1)) \\ & \left.\times A_2(z_p)\exp\{P_2(z_p) - cP_0(z_p)\} + z_p^kA_0(z_p)\exp\{(1-c)\,P_0(z_p)\}\right| \\ \leq \ & 2\exp\left\{kr_p^{\lambda+\varepsilon}\right\}\exp\left\{-cr_p^n\right\} + 2(k-2)\,r_p^{k-2}\exp\left\{(k-1)\,r_p^{\lambda+\varepsilon}\right\} \\ & \times\exp\left\{r_p^{\beta+\varepsilon}\right\}\exp\left\{-c\delta r_p^n\right\} + r_p^k\exp\left\{r_p^{\beta+\varepsilon}\right\}\exp\left\{(1-c)\,\delta r_p^n\right\} \\ < \ & \exp\left\{\frac{(1-c)}{2}\delta r_p^n\right\}.\end{aligned} \tag{6.15}$$

Ainsi (6.13) – (6.15) implique une contradiction.
Cas (3) : $\theta_0 = -\frac{\theta_n}{n} + (2j-1)\frac{\pi}{2n}$ pour une certaine $(j = 0, 1, ..., 2n-1)$. Puisque $\operatorname{Re}\left\{P_0\left(r_pe^{i\theta_p}\right)\right\} = 0$ lorsque r_p est suffisamment grand et qu'une droite $\arg z = \theta_0$ est une droite asymptotique de $\left\{r_pe^{i\theta_p}\right\}$, il existe un $N > 0$ tel que lorsque $p > N$, on a

$$-1<\operatorname{Re}\left\{P_0\left(r_pe^{i\theta_p}\right)\right\}<1,\qquad -c<\operatorname{Re}\left\{P_j\left(r_pe^{i\theta_p}\right)\right\}<c\qquad (j=1,...,k-1)\,. \tag{6.16}$$

En considérant $\operatorname{Re}\left\{P_0\left(r_pe^{i\theta_p}\right)-cP_0\left(r_pe^{i\theta_p}\right)\right\}$, nous divisons encore ceci en trois cas.
Cas (i) :

$$\operatorname{Re}\left\{P_j\left(r_pe^{i\theta_p}\right)-cP_0\left(r_pe^{i\theta_p}\right)\right\}<-dr_p^m\quad (j=1,...,k-1) \tag{6.17}$$

($d>0$ est une constante) lorsque p est suffisamment grand. Nous avons légèrement modifié à partir de (6.7)

$$\begin{aligned} & -\nu_f^k\left(r_p\right)\left(1+\circ(1)\right)\exp\left\{-cP_0\left(z_p\right)\right\} \qquad (6.18)\\ = \; & A_{k-1}\left(z_p\right)\exp\left\{P_{k-1}\left(z_p\right)-cP_0\left(z_p\right)\right\}z_p\nu_f^{k-1}\left(r_p\right)\left(1+\circ(1)\right)+...\\ & +A_1\left(z_p\right)\exp\left\{P_1\left(z_p\right)-cP_0\left(z_p\right)\right\}z_p^{k-1}\nu_f\left(r_p\right)\left(1+\circ(1)\right)\\ & +z_p^kA_0\left(z_p\right)\exp\left\{(1-c)P_0\left(z_p\right)\right\}. \end{aligned}$$

On obtient donc de (5.13) et (6.16) _ (6.18)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nu_f^k\left(r_p\right)\exp\left\{-c\right\} &< \left|-\nu_f^k\left(r_p\right)\left(1+\circ(1)\right)\exp\left\{-cP_0\left(z_p\right)\right\}\right|\\ &\leq \left|A_{k-1}\left(z_p\right)\exp\left\{P_{k-1}\left(z_p\right)-cP_0\left(z_p\right)\right\}z_p\nu_f^{k-1}\left(r_p\right)\left(1+\circ(1)\right)\right|\\ &\quad +...+\left|A_1\left(z_p\right)\exp\left\{P_1\left(z_p\right)-cP_0\left(z_p\right)\right\}z_p^{k-1}\nu_f\left(r_p\right)\left(1+\circ(1)\right)\right|\\ &\quad +\left|z_p^kA_0\left(z_p\right)\exp\left\{(1-c)P_0\left(z_p\right)\right\}\right|\\ &\leq 2(k-1)\,r_p^{k-1}\nu_f^{k-1}\left(r_p\right)\exp\left\{r_p^{\beta+\varepsilon}-dr_p^m\right\}\\ &\quad +r_p^k\exp\left\{r_p^{\beta+\varepsilon}\right\}\exp\left\{(1-c)\right\}\\ &\leq \nu_f^{k-1}\left(r_p\right)\exp\left\{r_p^{\beta+2\varepsilon}\right\} \end{aligned}$$

i.e.,

$$\frac{1}{2}\nu_f^k\left(r_p\right)<\exp\left\{c\right\}\exp\left\{r_p^{\beta+2\varepsilon}\right\}.$$

Ceci est en contradiction avec $\nu_f\left(r_p\right)\geq\exp\left\{r_p^{\lambda-\varepsilon}\right\}$.
Cas (ii) :

$$\operatorname{Re}\left\{P_j\left(r_pe^{i\theta_p}\right)-cP_0\left(r_pe^{i\theta_p}\right)\right\}>dr_p^m\qquad (j=1,...,k-1)\,,$$

i.e.,

$$\operatorname{Re}\left\{P_0\left(r_pe^{i\theta_p}\right)-\frac{1}{c}P_j\left(r_pe^{i\theta_p}\right)\right\}<-\frac{d}{c}r_p^m\qquad (j=1,...,k-1) \tag{6.19}$$

($d>0$ est une constante) lorsque p est suffisamment grand. À partir de (6.16), on obtient pour p suffisamment grand,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left\{P_s\left(r_pe^{i\theta_p}\right)-\frac{1}{c}P_j\left(r_pe^{i\theta_p}\right)\right\} &= \operatorname{Re}\left\{P_s\left(r_pe^{i\theta_p}\right)\right\}-\frac{1}{c}\operatorname{Re}\left\{P_j\left(r_pe^{i\theta_p}\right)\right\} \\ &< c+1 \quad (s=1,...,j-1,j+1,...,k-1)\,.\end{aligned} \tag{6.20}$$

nous avons un légèrement modifié de (6.7)

$$\begin{aligned} & -\nu_f^k(r_p)(1+\circ(1))\exp\left\{-\frac{1}{c}P_j(z_p)\right\} \\ = \; & A_{k-1}(z_p)\exp\left\{P_{k-1}(z_p)-\frac{1}{c}P_j(z_p)\right\}z_p\nu_f^{k-1}(r_p)(1+\circ(1))+... \\ & +A_j(z_p)\exp\left\{\left(1-\frac{1}{c}\right)P_j(z_p)\right\}z_p^{k-j}\nu_f^j(r_p)(1+\circ(1))+... \\ & +A_1(z_p)\exp\left\{P_1(z_p)-\frac{1}{c}P_j(z_p)\right\}z_p^{k-1}\nu_f(r_p)(1+\circ(1)) \\ & +z_p^kA_0(z_p)\exp\left\{P_0(z_p)-\frac{1}{c}P_j(z_p)\right\}.\end{aligned} \tag{6.21}$$

On obtient donc, de (5.13), (6.16) et (6.19) – (6.21)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\nu_f^k(r_p)\exp\{-1\} &< \left|-\nu_f^k(r_p)(1+\circ(1))\exp\left\{-\frac{1}{c}P_j(z_p)\right\}\right| \\ &\leq \left|A_{k-1}(z_p)\exp\left\{P_{k-1}(z_p)-\frac{1}{c}P_j(z_p)\right\}z_p\nu_f^{k-1}(r_p)(1+\circ(1))\right| \\ &\quad +...+\left|A_j(z_p)\exp\left\{\left(1-\frac{1}{c}\right)P_j(z_p)\right\}z_p^{k-j}\nu_f^j(r_p)(1+\circ(1))\right| \\ &\quad +...+\left|A_1(z_p)\exp\left\{P_1(z_p)-\frac{1}{c}P_j(z_p)\right\}z_p^{k-1}\nu_f(r_p)(1+\circ(1))\right| \\ &\quad +\left|z_p^kA_0(z_p)\exp\left\{P_0(z_p)-\frac{1}{c}P_j(z_p)\right\}\right| \\ &\leq 2(k-1)\nu_f^{k-1}(r_p)r_p^{k-1}\exp\left\{r_p^{\beta+\varepsilon}\right\} \\ &\quad \times\exp\{c+1\}+r_p^k\exp\left\{r_p^{\beta+\varepsilon}\right\}\exp\left\{-\frac{d}{c}r_p^m\right\} \\ &\leq \nu_f^{k-1}(r_p)\exp\left\{r_p^{\beta+2\varepsilon}\right\}\end{aligned}$$

i.e.,

$$\nu_f(r_p)\exp\{-1\}<2\exp\left\{r_p^{\beta+2\varepsilon}\right\}.$$

Ceci est en contradiction avec $\nu_f(r_p)\geq\exp\left\{r_p^{\lambda-\varepsilon}\right\}$.
Cas (iii) : lorsque p est suffisamment grand,

$$-1 < \mathrm{Re}\left\{P_j\left(r_p e^{i\theta_p}\right) - cP_0\left(r_p e^{i\theta_p}\right)\right\} < 1 \qquad (j = 1, ..., k-1).$$

En utilisant le même raisonnement que dans le cas (ii), nous obtenons une contradiction. La preuve du Théorème (2.1.3) est terminée.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons obtenu des estimations précises de l'hyper ordre des solutions des équations différentielles linéaires non homogène d'ordre supérieur suivantes

$$f^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} A_j(z) e^{P(z)} f^{(j)} = 0$$

et

$$f^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} \left(A_j(z) e^{P(z)} + B_j(z) \right) f^{(j)} = 0$$

où $k \geq 2$, $P_j(z)\,(j = 0, ..., k-1)$ sont des polynômes non constants tels que
$\deg P_j = n \ (j = 0, ..., k-1)$ et $A_j(z)\,(\not\equiv 0)$, $B_j(z)\,(\not\equiv 0)\,(j = 0, ..., k-1)$ sont entiers fonctionnent avec $\rho(A_j) < n, \rho(\mathrm{B}_j) < n \ (j = 0, ..., k-1)$. Dans certaines conditions. Nous avons démontré que chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ des équations ci-dessus est d'ordre infini et $\rho_2(f) = n$.L'outil principal utilisé dans étude étant la théorie de Nevalinna. Cette théorie est la plus approprié dans l'étude des équations différentielles.

Bibliographie

[1] **E. Borel** ,*Sur les zéros des fonctions entière*,Acta Mathematica.December 1897,20 :1964.

[2] **Z. X. CHEN,** *On the hyper order of solutions of some second order linear differential equations,* Acta Mathematica Sinica Engl.Ser.,**18** (1) (2002),79–88.

[3] **Z. X. CHEN** AND **K.H SHON,** *the growth of solutions of higher order differential equations*,Southeast Asian Bull. Math., **27** (2004), 995–1004.

[4] **G.G.GUNERSEN,** *Finite order solutions of second order linear differential equations,*Trans.Amer.Math. Soc., **305 (**1988), 415–429.

[5] **G.G.GUNERSEN,** *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates, J.* London Math. Soc., (2) **37** (1988),88–104.

[6] **A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskii**, *The distribution of values of meromorphic functions*, Transl. Math. Monogr., vol. 236, Amer. Math. Soc., Providence RI, 2008.

[7] **W.K.HAYMAN,** *Meromorphic functions*, Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford 1964.

[8] **W.K.HAYMAN,** *The local growth of power series : a survey of the Wiman-Valiron method,* Canad.Math. Bull., **17**(1974), 317–358.

[9] **K.H.KWON,** *Nonexistence of finite order solutions of certain second order linear differential equations,* Kodai Math. J., **19** (1996), 378–387.

[10] **A.I. MARKUSHEVICH,***Theory of Functions of a Complex Variable*,Vol. II, translated by R.A. Silverman, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

[11] **R.NEVALINNA,** *Eindeutige Analytische Funktionen,* Zweite auflage. Reprint. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 46. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

[12] **G.VALIRON,***Lectures on the General Theory of Integral Functions,* translated by E.F. Colling-wood, Chelsea, New York, 1949.

[13] **H.X. YI** AND **C.C. YANG,** *The Uniqueness Theory of Meromorphic Functions,* Science Press, Beijing, 1995(in Chinese).