MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Mohamedi ELHADJA

Contrôlabilité des systèmes linéaires positifs à temps continu de Lyapunov

soutenu publiquement Le Juin 2019 devant le jury composé de :

Président :	Meme Hourya DIALA	MAA	Université de Mostaganem
Examinateur :	Melle Souaad LAZERGUI	MAB	Université de Mostaganem
Encadreur :	Meme Bachaoui KHADIDJA	MAA	Université de Mostaganem

Année Universitaire : 2018 / 2019

MASTER

Dédicaces

Je dédie ce travaille à ,
Mes chères parents, pour tous leurs sacrifices, leurs amour, leurs tendresse, leurs soutien et leurs prières tout au long de mes études
A mes chères soeurs Fatiha et Djamila pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral .
A mes chèrs frères Kaki, Bagdad, Adjal, Mohamed .
A mes amis, Mohamed, Yasmine, Amel et tous mes camarades .
A toute la famille MOHAMEDI et BEROUBA.

Remerciements

Je remercie en premier lieu Dieu tout puissant de m'avoir accordé la puissance et la volonté pour réaliser ce travail .

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur Mme BACHAOUI Khadidja pour tous ces mots d'encouragements, ses précieux conseils, ces critiques, je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé.

Je tiens également à remercier les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance, tout particulièrement :
" Mme Hourya DIALA" , " Melle Souaad LAZERGUI".

Ainsi tous les professeurs que j'ai rencontré à mes côtés durant tout mon cursus sans oublier tout les personnes administratives.

Je remercie mes très chères parents, qui ont toujours été la pour moi ,"vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fière.

Je souhaiterais également remercier mes soeurs Fatiha, Djamila et mes frères Kaki, Bagdad, Ajal , et Mohamed pour leur encouragements sans faille et leurs conseils avisés.

Mes remerciements vout aussi a mon ami Z.mohamed qui m'a consacré énormément de son temps malgré ses nombreuse occupations et responsabilités m'a bien aimé pour tous les sacrifices qu'il a fait pendant les longues heures que j'ai passé à travailler sur ce mémoire. Sa compréhension et ses encouragements, aussi à mes ami :Yassmine, Amel, Meriem, Maria et tous mes camarades.

Enfin, je tiens également à remercie toutes les personnes qui m'ont aidé durant mon cursus.

Table des matières

Index des notations

$\underline{n}$	:	ensemble des n premiers entiers naturels non nuls.
$\mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	:	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}^n$	:	Espace des vecteurs à n entiers réelles.
$\mathbb{R}^{n\times n}$	:	Espace des matrices carées de dimension n.
$\mathbb{R}^{m\times n}$	:	Espace des matrices réelles de dimension $m \times n$.
$\mathbb{R}_+^{m\times n}$	:	Espace des matrices à entrées réelles non négatives.
$A > 0$	:	matrice définie positive.
$A < 0$	:	matrice définie négative.
$[a_{ij}]$	:	Matrice dont le coefficient de la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne est a_{ij}.
A^T	:	Transposée de A.
A^{-1}	:	Matrice inverse de A.
$det(A)$	:	Déterminant de la matrice A.
I_n	:	Matrice identité de dimension n.
$rg(A)$	:	Rang de la matrice A.
$\dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt}$	:	Dérivée temporelle.
e^A	:	Matrice exponentielle de A.
$p_\lambda(A)$	:	Le polynôme caractéristique de A.
$< .,. >$	:	Le produit scalaire.
$\otimes$	:	Produit de kronecker.
$\|\|.\|\|_e$	:	Norme euclidienne.

Introduction

La théorie du contrôle est une branche des mathématiques permettant de contrôler un système sur lequel on a une action, une commande (comme une réaction chimique, un système biologique, un marché financier, etc). Le problème de contrôlabilité consiste alors à déterminer une loi de contrôle permettant d'emmener, de guider ce système vers un certain état final désiré.

L'objectif de ce mémoire est l'étude de la contrôlabilité des systèmes linéaires positifs de Lyapunov à temps continu, la contrôlabilité qui nous intéresse est l'étude des systèmes commandés, c'est à dire des systèmes dynamiques (dépendant du temps noté t) sur lesquels on agit à l'aide d'une commande (ou contrôle).

La notion de la contrôlabilité est d'une grande importance dans la théorie du contrôle, c'est une propriété de base dans l'analyse des systèmes dynamiques. De nombreux problèmes fondamentaux de la théorie du contrôle (stabilité et stabilisation, contrôle optimal) ne peuvent être résolus que sous l'hypothèse que le système soit contrôlable.

Tout au long de ce travail, une analogie entre un système linéaire standard et un système linéaire positif de Lyapunov tous deux à temps continu a été faite pour déduire que tous les résultats sur le contrôle des systèmes linéaires standards sont étendus au cas des systèmes linéaires de Lyapunov.

Notre travail a été structuré en quatre chapitres comme suit :

Dans **le premier chapitre** nous avons introduit les notions mathématiques de base d'algèbre linéaire (le produit de Kronecker, la vectorisation, etc) nécessaire dans notre travail.

Le second chapitre a été consacré à la contrôlabilité des systèmes linéaires standards à temps continu .

Dans **le troisième chapitre** nous caractérisons les systèmes linéaires positifs avec quelques applications .

Le dernier chapitre aborde une étude, sur la contrôlabilité des systèmes linéaires positifs de Lyapunov à temps continu, en appliquant des critères et des résultats obtenues dans les deux premiers chapitres .

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous proposons quelques notions de bases qui sont trés utiles dans notre travail.
Pour ce faire nous nous sommes basés sur les références suivantes : [4], [6], [8], [9], [12], [15], .

1 Matrices Particulières

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et caractérisations des matrices non-négatives, positives, de Metzler et monomiales.
Soit $\mathrm{A} = (a_{ij})$ une matrice à coefficients réels, telle que $i = 1\dots n$, et $j = 1\dots m$.

Définition 1.1 *Soit la matrice* $\mathrm{A} \in \mathbb{M}^{n\times m}$ *:*
On dit que A *est une matrice* ***non-négative*** *si*

$$\forall i \in \underline{n}, \forall j \in \underline{m} : a_{ij} \geq 0$$

Autrement dit toutes ses entrées sont non-négatives. Nous noterons une telle matrice par : $\mathrm{A} \geq 0$ *où encore,* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$*.*

Exemple 1.1 *Soit la matrice* A *:*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

est une matrice non-négative.

Définition 1.2 A *est une matrice* ***strictement positive*** *si*

$$\forall i \in \underline{n}, \forall j \in \underline{m} : a_{ij} > 0$$

C'est à dire toutes ses entrées sont (strictement) positives. Nous noterons une telle matrice par : $\mathrm{A} >> 0$*. Ces définitions et notations seront également valables pour des vecteurs de dimension* n*,* $n \geq 2$*. Cependant, pour les scalaires, la propriété strictement positif* $a >> 0$ *coïncide avec* $a > 0$*.*

Définition 1.3 A *est une matrice de* ***Metzler*** *si*

$$\forall i \in \underline{n}, \forall j \in \underline{m}, i \neq j : a_{ij} \geq 0$$

Autrement dit toutes ses entrées hors diagonales sont non-négatives.

Exemple 1.2 *Soit la matrice* A *:*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

est une matrice de Metzler.

Proposition 1.1 *[8]* A *est une matrice de* ***Metzler*** *si et seulement si*

$$\forall t \geq 0; \quad e^{\mathrm{A}t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}.$$

Où de manière équivalente, $\forall t \geq 0$*, l'orthant positif* $\mathbb{R}_+^n$ *est* $e^{\mathrm{A}t}$ *- invariant, c'est à dire :*

$$\forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n \quad e^{\mathrm{A}t} x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Preuve.
Nécessité :

Supposons que A est une matrice de **Metzler**, on peut trouver un réel $\lambda > 0$ tel que $(\mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}_n) > 0$. Où,

$$(\mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}_n) + (-\lambda \mathrm{I}_n) = (-\lambda \mathrm{I}_n) + (\mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}_n).$$

Il s'ensuit que,

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{A}t} &= e^{(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)t + (-\lambda \mathrm{I}_n)t}. \\ &= e^{(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)t} e^{(-\lambda \mathrm{I}_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}. \end{aligned}$$

Du fait que :

$e^{(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ et $e^{(-\lambda \mathrm{I}_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.

suffissante :

Supposons que $t \geq 0$, $e^{\mathrm{A}t} \geq 0$. Ainssi, puisque :

$$\mathrm{A} = \frac{d}{dt}(e^{\mathrm{A}t})_{t=0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{\mathrm{A}t} - \mathrm{I}}{t}.$$

Prenons comme e_j le j^{ime} vecteur de la base canonique, nous obtenons pour $i \neq j$,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{< e^{\mathrm{A}t} e_j - e_j, e_i >}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \left\{ \frac{< e^{\mathrm{A}t} e_j, e_i >}{t} - \frac{e_j, e_i}{t} \right\} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{< e^{\mathrm{A}t} e_j, e_i >}{t} \geq 0, \end{aligned}$$

puisque $< e_j, e_i >= 0$, on a alors $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ et la matrice A est une matrice de **Metzler** alors $e^{At}x \in \mathbb{R}^n_+$.

■

Définition 1.4 ***(Matrice définie positive)***
Une matrice symétrique A *dont les éléments sont des nombres réels, est définie positive si pour tout vecteur* $x \in \mathbb{R}^n$ *non nul on a :*

$$x \neq 0 \Rightarrow x^T A x > 0$$

Exemple 1.3 *Soit la matrice* A *:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

est définie positive. En effet :

Pour tout x un vecteur de $\mathbb{R}^3$ *tel que* $x = (x_1, x_2, x_3)^T$*, On a :*

$$\begin{aligned} x^T A x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0 \end{aligned}$$

Définition 1.5 *Soit* A *une matrice carée réelle d'ordre n .*
On dit que A *est* ***une matrice monomiale*** *ou matrice de permutation généralisée si les entrées de* A *sont toutes nulles sauf une, dans chaque ligne et chaque colonne, qui est strictement positive .*

Exemple 1.4

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est une matrice de permutation généralisée .

En particulier, une matrice de permutation est une matrice monomiale dans la quelle chaque entrée non nulle est égale à 1.

Proposition 1.2 *[12] Une matrice* A *non singulière telle que,* $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$ *si et seulement si,* A *est une matrice monomiale.*

2 Polynôme caractéristique

Définition 1.6 ***(Valeurs et vecteurs propres)***
Soit A *une matrice carée réelle de dimension* n*, et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. On dit que* λ *est une valeur propre de la matrice* A *s'il existe un vecteur non nul* $X \in \mathbb{R}^n$ *vérifiant,*

$$AX = \lambda X. \tag{1.1}$$

et on dit aussi que X *est le vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* λ*.*

Définition 1.7 ***(Polynôme caractéristique)***
On définit le polynôme caractéristique de la matrice carée réelle A *de dimension* n *par :*

$$P_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A) \ \ , \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Les valeurs propres de A *sont les racines de son polynôme caractéristique.*

Exemple 1.5 *soit la matrice* A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A *est :*

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A) &= \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -3 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de A *sont :* $\lambda_1 = 4$ *et* $\lambda_2 = 1$.

3 Exponentielle des matrices

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions , propriétés et techniques existent pour calculer l'exponentielle d'une matrice .

Définition 1.8 *Soit* A *une matrice carée de dimension* n*, l'exponentielle de* A *se définit par son développement en série entière :*

$$exp(A) = e^A = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots , \tag{1.3}$$

.

Quelque propriétés importantes concernant l'exponentielle d'une matrice.

- Pour toutes A et B deux matrices de dimensions n qui commutent, i.e. AB = BA. on a :

$$e^{(A+B)} = e^A e^B.$$

- Pour toute matrice carée A de dimension n, on a :

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

- Pour toute matrice carée A de dimension n, on a :

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}.$$

3.1 Quelque méthode de calcul de l'exponentielle d'une matrice

Le cas d'une matrice niplotente

Si A une matrice carrée nilpotente l'indice m ($A^k = 0$ pour un tout $k \geq m$), alors :

$$e^A = \sum_{i\geq 0}^{m-1} \frac{1}{i!}A^i = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}A^{m-1},$$

Exemple 1.6 *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent :

$$A^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \forall m \geq 2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} e^A = \sum_{i=0}^{1} \frac{A^i}{i!} &= I_1 + A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le cas d'une matrice diagonale

Si D une matrice diagonale, c'est à dire :

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Alors son exponentielle est obtenue par :

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{d_n} \end{bmatrix}$$

Le cas d'une matrice diagonalisable

Soit A une matrice diagonalisable,c'est à dire(il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$), alors son exponentielle est donnée par :

$$e^A = Pe^D P^{-1}$$

Exemple 1.7 *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour calculer les valeurs propres de cette matrice on doit d'abord calculer son polynôme caractéristique.

$$det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - 2)(\lambda_2 - 3).$$

Aprés le calcul des valeurs propres et leurs vecteurs propres associées, on obtient la matrice de passage et son inverse :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Donc,

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{Dt}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^{2t} + 2e^{3t} & 2e^{2t} - 2e^{3t} \\ -e^{2t} + e^{3t} & 2e^{2t} - e^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4 Notions sur le produit de Kronecker

En mathématiques, le produit de Kronecker est une opération importante pour le calcul matricielle. Il est ainsi dénommé du hommage au mathématicien allemand Leopold Kronecker.

Dans cette section, nous définissons le produit de Kronecker et nous citons ces pro-prités.

Définition 1.9 *[9] Le produit de kronecker de deux matrices* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *et* $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{p\times q}$ *est la matrice* $A \otimes B$ *définie par :*

$$A \otimes B = [a_{ij}B]_{i=1,\cdots,m\, j=1,\cdots,n} \in \mathbb{R}^{mp\times nq} \tag{1.4}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n-1}B & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n-1}B & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-11}B & a_{m-12}B & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m-1n-1}B & a_{m-1n}B \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn-1}B & a_{mn}B \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

Exemple 1.8 *Soient les matrices* A *et* B *suivantes :*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & -3 \end{bmatrix} \; et\, \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{A} \otimes \mathsf{B} \quad = \quad \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} 0 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \\ \\ 4\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} 6 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} -3 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{A} \otimes \mathsf{B} \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 8 & 6 & 0 & 0 & 16 & 10 \\ 4 & -8 & 6 & -12 & -3 & 6 \\ 32 & 20 & 64 & 30 & -24 & -15 \end{bmatrix}$$

4.1 Quelques propriétés de produit de Kronecker

[15] Soient $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{c\times d}$, $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{e\times f}$.

1. Le produit de Kronecker est associatif c'est à dire,
$$(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}) \otimes \mathrm{C} = \mathrm{A} \otimes (\mathrm{B} \otimes \mathrm{C}). \tag{1.6}$$
2. Le produit de Kronecker n'est pas commutatif :
$$\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \otimes \mathrm{A}. \tag{1.7}$$
3. Le produit de Kronecker est distributif par rapport à l'addition,
$$(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \otimes (\mathrm{C}+\mathrm{D}) = (\mathrm{A} \otimes \mathrm{C}) + (\mathrm{A} \otimes \mathrm{D}) + (\mathrm{B} \otimes \mathrm{C}) + (\mathrm{B} \otimes \mathrm{D}). \tag{1.8}$$
4. Le produit de kronecker est également distributif par rapport au produit,
$$(\mathrm{A} \otimes \mathrm{C})(\mathrm{B} \otimes \mathrm{D}) = (\mathrm{AB} \otimes \mathrm{CD}). \tag{1.9}$$
5. Pour toute matrice A et B , on a :
$$(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{B}^{\mathrm{T}}. \tag{1.10}$$
6. Si Aet B sont des matrices de dimensions résepectivement m, n ,
$$det(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}) = (det(\mathrm{A}))^{m}(det(\mathrm{B}))^{n}. \tag{1.11}$$
7. Si A et B sont inversibles alors,
$$(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^{-1}. \tag{1.12}$$
8. On a aussi :
$$\mathrm{I}_n \otimes \mathrm{I}_p = \mathrm{I}_{np}. \tag{1.13}$$

5 Vectorisation d'une matrice

La vectorisation d'une matrice est une transformation qui convertit la matrice dans un vecteur de colonne.

Définition 1.10 *[15] Soit* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *une matrice d'ordre* $m \times n$*, on associe à* A *le vecteur* mn *lignes qu'on note par* $vec(\mathrm{A})$ *et qui est définit par :*

$$\mathsf{vec}(\mathsf{A}) = \left[a_{11}, a_{21}, \cdots, \cdots, a_{m1}, a_{12}, \cdots, \cdots a_{m2}, \cdots, \cdots, a_{1n}, \cdots, \cdots, a_{mn}\right]^{\mathrm{T}} \tag{1.14}$$

Exemple 1.9 *Soit la matrice* A *suivante :*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Donc,

$$\mathsf{vec}(\mathsf{A}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

5.1 Quelque Propriétés

1. *L'opérateur* vec *est linéaire, pour tout* A, B *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *:*

$$vec(\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B}) = \alpha vec(\mathrm{A}) + \beta vec(\mathrm{B}). \tag{1.15}$$

2. *Soient* A, B *et* X *des matrices de dimensions* $n \times m$*,* $m \times l$ *et* $l \times k$ *respectivement, on a alors,*

$$vec(\mathrm{AXB}) = (\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{A})\, vec(\mathrm{X}). \tag{1.16}$$

3. *On a aussi deux autres formules :*

$$vec(\mathrm{AX}) = (\mathrm{I} \otimes \mathrm{A})\, vec(\mathrm{X}). \tag{1.17}$$

$$vec(\mathrm{XA}) = (\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{I})\, vec(\mathrm{X}). \tag{1.18}$$

Tel que I *est la matrice identité de dimension appropriée.*

Exemple 1.10 *Application aux équations matricielles :*

1. $\mathrm{AX} = \mathrm{B} \Leftrightarrow (\mathrm{I} \otimes \mathrm{A})Vec(\mathrm{X}) = Vec(\mathrm{B}).$
2. $\mathrm{AX} + \mathrm{XB} = \mathrm{C} \Leftrightarrow ((\mathrm{I} \otimes \mathrm{A})(\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{I}))Vec(\mathrm{X}) = Vec(\mathrm{C}).$
3. $\mathrm{AX} + \mathrm{YB} = \mathrm{C} \Leftrightarrow (\mathrm{I} \otimes \mathrm{A})Vec(\mathrm{X}) + (\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{I})Vec(\mathrm{Y}) = Vec(\mathrm{C}).$
4. $\mathrm{AXB} = \mathrm{C} \Leftrightarrow (\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{A})Vec(\mathrm{X}) = Vec(\mathrm{C}).$

Définition 1.11 *Une norme $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{E}$ est une application de $\mathbb{E}\, dans\, \mathbb{R}_+$ vérifiant les 3 propriétés suivantes :*

1. $\mathbb{N}(x) = 0$ *ssi* $x = 0_{\mathbb{E}}$.

2. $\mathbb{N}(\lambda x) = |\lambda|\mathbb{N}(x)\ \forall\lambda \in \mathbb{R}\, et\, \forall x \in \mathbb{E}$

3. $\mathbb{N}(x + y) \leq \mathbb{N}(x) + \mathbb{N}(y)\ \forall x, y \in \mathbb{E}$.

6 Notions des systèmes

Définition 1.12 *Un système est un ensemble de pièces ou objets qui réalise une opération spécifique, il y a donc une notion d'action sur l'environnement en fonction d'excitation extérieure.*

Un système est ainsi défini par ses entrées et ses sorties qui le relient à l'environnement extérieur.

Chapitre 2

Contrôlabilité des Systèmes Linéaires Standards en Temps Continu

Dans ce chapitre, nous intéressons à la contrôlabilité des systèmes linéaires en temps continu .
Pour ce faire nous nous sommes basés sur les références suivantes : [2], [3], [5].

1 Déscription d'un système linéaire standard en temps continu

Dans cette section, nous présentons la description d'un système linéaire en temps continu : La représentation d'état permet de modéliser un système dynamique sous forme matricielle en utilisant des variables d'état. On se place alors dans un espace d'état. Cette représentation qui peut être linéaire ou non-linéaire.

Dans notre cas, nous nous intéressons à la classe des systèmes linéaires en temps continu.

Définition 2.1 *La représentation d'état d'un système linéaire en temps continu est représentée par :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t). \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{cases} \tag{2.1}$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ le controle (la commande) du système appelé aussi entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie de système,
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ sont des matrices de dimensions appropiées telles que :

- *A : matrice d'état,*
- *B : matrice de commande (d'entrée),*
- *C : matrice de mesure (sortie),*
- *D : matrice de transfert direct,*

- *x(t) : vecteur d'état,*
- *u(t) : vecteur d'entrée,*
- *y(t) : vecteur de sortie.*

1.1 Solution d'un système linéaire en temps continu

Théorème 2.1 *La solution de système (2.1) est donnée par :*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

et la sortie définie par :

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + C\int_{t_0}^{t} e^{-A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(\tau).$$

Preuve.

- **Trajectoire d'état :**Nous cherchons à résoudre l'équation d'état précédemment introduite et qui s'écrit dans le cas général :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t).$$

Le cas des équations différentielles matricielles se traite de manière similaire au cas scalaire. L'équation homogène associée s'écrit :

$$\begin{array}{rrcl} & \dot{x}(t) & = & Ax(t). \\ \Longrightarrow & \dfrac{dx}{dt} & = & Ax(t). \\ \Longrightarrow & \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{1}{x(t)}dx & = & \displaystyle\int_{t_0}^{t} Ad\tau. \end{array}$$

Sa solution est :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0).$$

Où $t = t_0$ est l'instant initial.
La résolution avec second membre s'effectue comme dans le cas scalaire :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax(t) + Bu(t). \\ e^{-At}\frac{dx}{dt} &= e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t). \\ &= Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Bu(t). \end{aligned}$$

D'où

$$e^{-\mathrm{A}t}\frac{dx}{dt}-\mathrm{A}e^{-\mathrm{A}t}x(t)=e^{-\mathrm{A}t}\mathrm{B}u(t).$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}(e^{-\mathrm{A}t}x(t)) = \quad e^{-\mathrm{A}t}\mathrm{B}u(t).$$

$$\Longrightarrow \quad e^{-\mathrm{A}t}x(t) = \quad e^{-\mathrm{A}t_0}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{-\mathrm{A}\tau}\mathrm{B}u(\tau)d\tau.$$

Donc

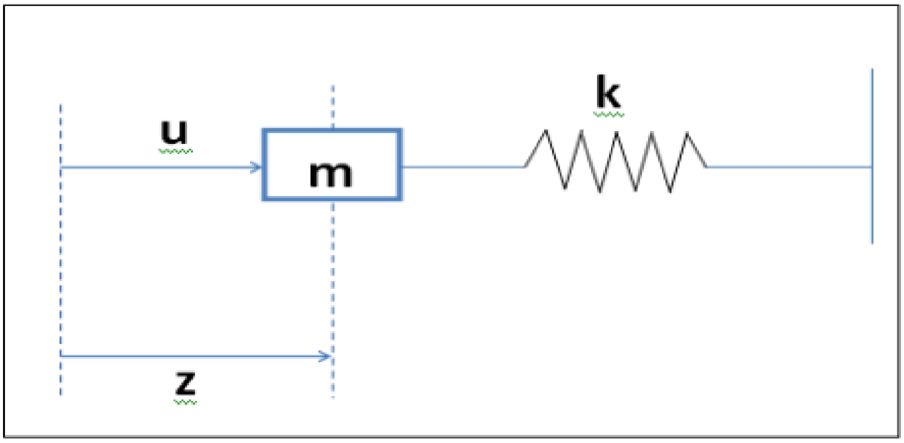
$$x(t)=e^{\mathrm{A}(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{-\mathrm{A}(t-\tau)}\mathrm{B}u(\tau)d\tau.$$

- **Réponse du système :**

$$y(t)=\mathrm{C}e^{\mathrm{A}(t-t_0)}x(t_0)+\mathrm{C}\int_{t_0}^{t}e^{-\mathrm{A}(t-\tau)}\mathrm{B}u(\tau)d\tau+\mathrm{D}u(\tau).$$

■

Exemple 2.1 *On considère le système formé d'une masse m liée à un ressort de raideur k et soumise à l'action d'une force u.*



Oscillateur harmonique commandé

Si z désigne l'écart à la position d'équilibre du centre de gravité de la masse (z = 0 est l'abscisse du système au repos, ressort non tendus), alors le principe fondamental de la dynamique fournit l'équation :

$$m\ddot{z}=-kz+u$$

Soit le vecteur $\mathrm{X}=[x_1,x_2]^{\mathrm{T}}$, *est appellé vecteur l'état du système.*

On pose :

$$\begin{cases} x_1 &= z \\ x_2 &= \dot{z} \end{cases}$$

Aprés dérivation, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & \dot{z} = x_2 \\ \dot{x}_2 & = & \ddot{z} = \dfrac{-k}{m} z + \dfrac{1}{m} u \end{cases}$$

Ce qui peut s'écrire :

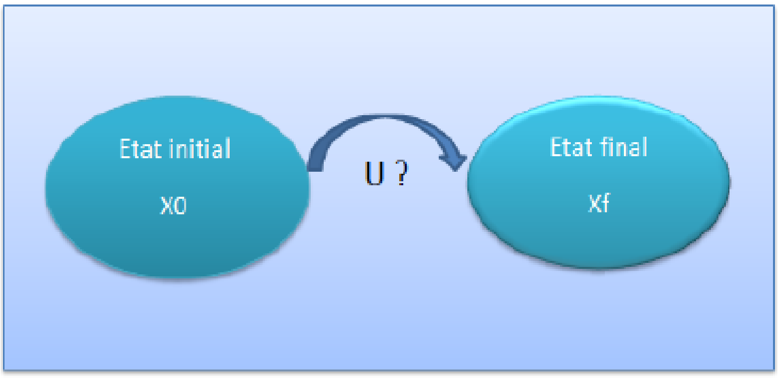
$$\dot{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-k}{m} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{pmatrix} u.$$

Remarque 2.1 *La représentation d'état n'est pas unique pour le même système physique.*

2 Notions de contrôlabilité

Dans cette section, on va définir quelques concepts de contrôlabilités du système (2.1) et son caractérisation algbrique.

Définition 2.2 *Un système est contrôlable si on peut l'amener, en un temps fini, d'un état initial $x(t_0) = x_0$ vers un état final $x(t_f) = x_f$ désiré au moyen d'un contrôle.*
Autrement dit, pour tout $x_0, x_f \in \mathbb{R}^n$, il existe un contôle u telque la trajectoire associée relie x_0 à x_f en temps t, c'est à dire, $x_f = x(t, x_0, u)$.



2.1 Critères de la contrôlabilité

Théorème 2.2 *Le système (2.1) est contrôlable si et seulement si la matrice de Kalman* C *définie par :*

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{AB} & \mathrm{A}^2\mathrm{B} & \cdots & \cdots & \mathrm{A}^{n-1}\mathrm{B} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

est de rang plein.

Exemple 2.2 *On considère le système suivant :*

$$\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u.$$

Où,

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

la matrice de Kalman C corespondante est

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

C'est clair que $rg\mathrm{C} \neq 2$, *donc le système n'est pas contrôlable.*

Exemple 2.3

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de kalman C corespondante est ,

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{AB} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est clair que $rg\mathrm{C} = 2$, *donc le système contrôlable.*

Définition 2.3 *Le Grammien de contrôlabilité est la matrice symétrique définie positive noté* $\mathrm{W}_c \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *définie par :*

$$\mathrm{W}_c = \int_0^{t_f} e^{-\mathrm{A}\tau}\mathrm{B}\mathrm{B}^{\mathrm{T}} e^{-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\tau} d\tau.$$

Le contrôle qui transfère x_0 *en* $x_1 = x(t, x_0, u)$ *est simplement donné par :*

$$\mathrm{U}(t) = -\mathrm{B}^{\mathrm{T}} e^{-\mathrm{A}^{\mathrm{T}} t}\mathrm{W}_c^{-1} x_0. \tag{2.3}$$

Proposition 2.1 *La paire* (A, B) *est dit contrôlable si et seulement si le grammien de contrôlabilité défini par :*

$$\mathrm{W}_c = \int_0^{t_f} e^{-\mathrm{A}\tau}\mathrm{B}\mathrm{B}^{\mathrm{T}} e^{-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\tau} d\tau.$$

est inversible.

Preuve.

Supposons que W_c *est inversible, alors le contrôle défini par la formule* (2.3) *existe. donc,*

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\Big(-B^T e^{-A^T\tau}W_c^{-1}x_0\Big)d\tau. \\ &= e^{At}x_0 - \int_0^t e^{At}e^{-A\tau}BB^T e^{-A^T\tau}W_c^{-1}x_0 d\tau. \\ &= e^{At}\Big(x_0 - W_c W_c^{-1}x_0\Big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc la paire (A, B) *est contrôlable.*

Inversement, supposons que le système (2.1) *est contrôlable, alors nous devons montrer que* W_c *est inversible.*

Si on suppose que W_c *n'est pas inversible c'est à dire ,* $\exists Z \neq 0$ *tq* $W_c Z = 0$
Donc,

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad Z^T W_c Z = 0 \\ &\Longrightarrow \quad Z^T\Big(\int_0^{t_f} e^{-A\tau}BB^T e^{-A^T\tau}d\tau\Big)Z = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \int_0^{t_f} Z^T e^{-A\tau}BB^T e^{-A^T\tau}Z d\tau = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \int_0^{t_f} \|Z^T e^{-A\tau}B\|^2 d\tau = 0 \\ &\Longrightarrow \quad ||Z^T e^{-A\tau}B||^2 = 0 \end{aligned}$$

Alors

$$Z^T e^{-A\tau}B = 0 \tag{2.4}$$

D'autre parts, on a

la paire (A, B) *est contrôlable* $\Longleftrightarrow \forall x_0 \, \exists u$ *tq* $x(t) = 0$

$$\begin{aligned} x(t) \quad = \quad & e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & e^{At}\Big[x_0 + \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\Big] = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau = -x_0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \int_0^t x_0^T e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau = -x_0^T x_0 \end{aligned}$$

Si on pose : $x_0 = Z$*, alors*

$$\int_0^{t_f} Z^T e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau = -Z^T Z$$

d'aprés (2.4) *,*

$$-Z^T Z = 0$$

Ceci est vrai si $Z = 0$ *(contradiction aves la supposition) donc, le grammien* W_c *est inversible.*

■

Exemple 2.4 *On considère le système linéaire en temps continu décrit par l'équation suivante :*

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

où,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que A est une matrice nilpotente d'indice de nilpotence égal 2, donc

$$\begin{aligned} e^{A(t_f-\tau)} &= I_2 + A(t_f-\tau) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t_f-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} W_c(0,t_f) &= \int_0^{t_f} \begin{pmatrix} 1 & t_f-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_f-\tau & 1 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \int_0^{t_f} \begin{pmatrix} t_f-\tau \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_f-\tau & 1 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \int_0^{t_f} \begin{pmatrix} (t_f-\tau)^2 & t_f-\tau \\ t_f-\tau & 1 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t_f^3 & \frac{1}{2}t_f^2 \\ \frac{1}{2}t_f^2 & t_f \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} det(W_c(0,t_f)) &= \tfrac{1}{12}t_f^4 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

D'où, le système est contrôlable.

Chapitre 3

Systèmes Positifs

Dans ce chapitre, nous diffinissons les systèmes linéaires positifs en temps continu. Ainsi nous présentons les conditions nécessaires et suffisante pour qu'un système linéaires soit positif. Pour ce faire nous nous sommes basés sur les références suivantes [1], [7], [8], [11], [14].

1 Quelques applications

Les applications sont nombreuses, on cite quelques exemples :

- Des systèmes à variables physiques positives par nature (niveaux, débits,ect) .
- Modèles à compartiments : Applications en médecine , cinétique chimique,ect.
- Modèles économiques.
- Circuits RLC.
- Sciences de la communication et de l'information.
- Processus industriels impliquant des réacteurs chimiques.
- Modèles de dynamiques de population.

2 Principales Propriétés

Si l'états initial est positif (ou au moins non-négatif), alors la trajectoired'état se situe entièrement dans l'orthant non- négative.
Notons que les systèmes linéaires standards positifs sont définis dans des cônes et non pas dans des espaces linéaires.

3 Positivité des systèmes linéaires en temps continu

Considérons le système linéaire en temps continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \mathrm{A}x(t)+\mathrm{B}u(t). \\ y(t) &= \mathrm{C}x(t)+\mathrm{D}u(t). \end{cases} \tag{3.1}$$

Définition 3.1 *Un système est dit positive si à toute entrée positive et condition initiale positive, correspond un état positive et une sortie positive.*

Alors le système (3.1) est par définition dit positif si et seulement si

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+ \forall u \in \mathbb{R}_+ \Longleftrightarrow x(t) \in \mathbb{R}_+ et\, y(t) \in \mathbb{R}_+. \tag{3.2}$$

Considérons à présent les définitions et quelques résultats de positivité en temps continu.

3.1 Positivité externe

Définition 3.2 *Un système linéaire est dit **externement positif** si la sortie correspondante à l'état initial nul est non-négative pour chaque entrée non -négative, i.e. pour $x_0 = x(0) = 0$ et pour tout $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$, on a $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$, pour $t \geq 0$.*

3.2 Positivité interne

Définition 3.3 *Un système linéaire est dit **internement positif** si pour $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et tout contrôle $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ pour $t \geq 0$ on a $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ pour $t \geq 0$.*

Cette définition indique que toutes les trajectoires émanant de n'importe quel point dans l'orthant non-négative $\mathbb{R}_+^n$(frontière incluse) de l'espace d'état $\mathbb{R}$, obtenues en appliquant une entrée non-négative au système, demeurent dans l'orthant non-négatif et mènent à une sortie non-négative .

Remarque 3.1 *La positivité interne implique la positivité externe mais l'inverse n'est pas vrai.*

4 Condition de positivité

Dans cette section, Nous nous plaçons dans la classe des systèmes linéaires standards à temps continu, pour caractériser la positivité des conditions nécessaires et suffisantes serait cependant établies.

Théorème 3.1 *Le système est dit **internement positif** si et seulement si A est une matrice de Metzler et $\mathrm{B} \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$, $\mathrm{D} \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$.*
Preuve.
<u>Nécessité :</u>
Si le système est internement positif, alors,

$$x(t) \in \mathbb{R}_+^n \; et \; y(t) \in \mathbb{R}_+^p$$

pour

$$x_0 \in \mathbb{R}_+^n \; et \; u(t) \in \mathbb{R}_+^n$$

tel que,

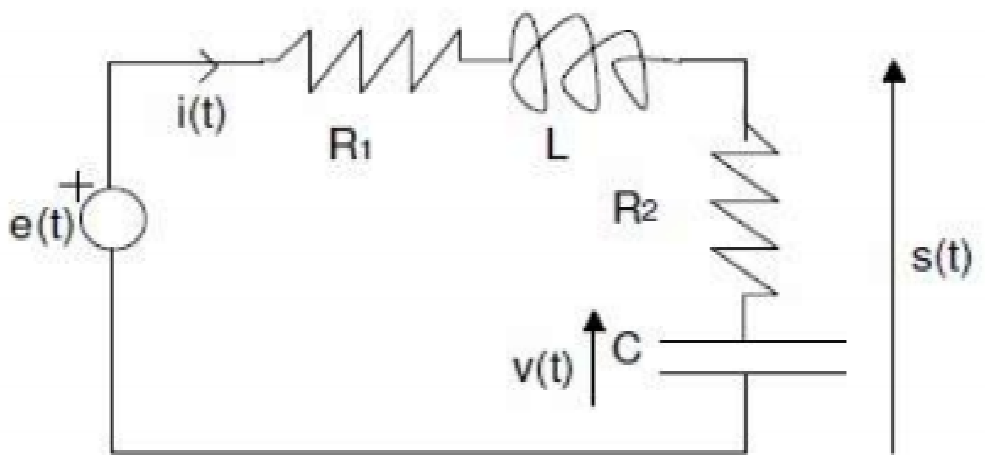
$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t).$$

L'idée est de considérer la i^{eme} composante de la matrice A,B et C respectivement et faire étendre pour toutes les composentes. Pour cela, on se réfère à [14] et [7], d'où le résultat.
Suffisance :
*Si on suppose que la matrice A est de **Metzler** et les matrices B, C et D sont positives, alors e^{At} est positive d'aprés la proposition (1.1) et cela montre que $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$, $\forall t \geq 0$,*
■

Théorème 3.2 *Un système linéaire à temps continu (A, B, C) est positif si et seulement si la matrice A est une matrice de Metzler et $B \geq 0$, $C \geq 0$.*

Exemple 3.1 *On considère le système RLC*



L'équation physique de ce système éléctronique est comme suit :

$$\begin{cases} e(t) & = & (R_1 + R_2)i(t) + L\dfrac{di}{dt} + v(t) \\ i(t) & = & C\dfrac{dv}{dt}. \\ s(t) & = & R_2 i(t) + v(t). \end{cases}$$

Avec $R_1, R_2 > 0$ *et* $L, C > 0$.

Suite à l'application des lois physiques notamment lois de Kirchhoff on obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &=& -\dfrac{R_1+R_2}{L}x_1(t)+\dfrac{1}{L}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &=& \dfrac{1}{C}x_1(t) \end{cases}$$

On pose : $x_1(t) = i(t)$ *et* $x_2(t) = v(t)$. *Et aprés modélisation, il s'écrit le modèle :*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &=& \begin{bmatrix} -\dfrac{(R_1+R_2)}{L} & \dfrac{1}{L} \\ \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ \\ 0 \end{bmatrix} u. \\ \\ y(t) &=& \begin{bmatrix} R_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &=& Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) &=& Cx(t)+Du(t) \end{cases}$$

avec

$$\mathsf{x(t)} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \mathsf{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{-(R_1+R_2)}{L} & \dfrac{1}{L} \\ \\ C & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ \\ 0 \end{bmatrix}, \mathsf{C} = \begin{bmatrix} R_2 & 0 \end{bmatrix} \textit{ et } D = 0.$$

Le système (3.1) *est positif car* A *est une matrice de* ***Metzler*** *et* B, C *et* D *sont des matrices non-négatives.*

Chapitre 4

Système linéaire de Lyapunov

Ce chapitre sera consacré à l'étude de contrôlabilité des systèmes linéaires positifs de Lyapunov en temps continu .
Pour ce faire nous nous sommes basés sur les références suivantes : [9], [10], [13].

1 Introduction

Un système décrit par les équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & \mathrm{A}x(t) + x(t)\mathrm{B} + \mathrm{F}u(t). \\ y(t) & = & \mathrm{C}x(t) + \mathrm{D}u(t). \end{array}\right. \tag{4.1}$$

est appelé un système linèaire de Lyapunov à temps continu, où :
$x(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ représente l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ le contrôle (la commande) du système appelé aussi entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^{p\times n}$ la sortie de système, $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{F} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ sont des matrices de dimensions appropiées .

Théorème 4.1 *La solution de l'équation :*

$$\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t) + x(t)\mathrm{B} + \mathrm{F}u(t).$$

avec la condition $x(t_0) = x_0$ est donnée par :

$$x(t) = e^{\mathrm{A}(t-t_0)}x_0 e^{\mathrm{B}(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{\mathrm{A}(t-\tau)}\mathrm{F}u(\tau)e^{\mathrm{B}(t-\tau)}\tau. \tag{4.2}$$

Preuve.
Voir la référence [10].
■

2 La positivité des systèmes linéaires de Lyapunov

Définition 4.1 *Le système (4.1) est dit internnement positif si seulement si $x(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $y(t) \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ et tout $u(t) \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$, avec $t \geq t_0$.*

Théorème 4.2 *[9] Le système (4.1) est positif si et seulement si* A *et* B *sont des marices de metzler et* $\mathrm{F} \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$, $\mathrm{D} \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$.

Preuve.

Dans un premier temps nous allons transformé le système linéaire de Lyapunov en temps continu à un système linéaire standard à temps continu. La technique utilisée est la vectorisation moyennant le produit de kronecker. En effet,

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \mathrm{A}x(t) + x(t)\mathrm{B} + \mathrm{F}u(t). \\
\Longrightarrow vec\big(\dot{x}(t)\big) &= vec\big(\mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}x(t) + \mathrm{F}u(t)\big). \\
&= vec\big(\mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}x(t)\big) + vec\big(\mathrm{F}u(t)\big). \\
&= \big((\mathrm{I}_n \otimes \mathrm{A}) + (\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{I}_n)\big) vec\big(x(t)\big) + \big(\mathrm{I}_n \otimes \mathrm{F}\big) vec\big(u(t)\big). \\
&= \tilde{\mathrm{A}}\tilde{x}(t) + \tilde{\mathrm{B}}\tilde{x}(t).
\end{aligned}$$

De même on trouve :

$$\tilde{y}(t) = \tilde{\mathrm{C}}\tilde{x}(t) + \tilde{\mathrm{D}}\tilde{u}(t).$$

Donc le système (4.1) est un système équivalent à un système (4.3) qui est :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{\mathrm{A}}\tilde{x}(t) + \tilde{\mathrm{B}}\tilde{u}(t). \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{\mathrm{C}}\tilde{x}(t) + \tilde{\mathrm{D}}\tilde{u}(t). \end{aligned} \right. \tag{4.3}$$

Avec $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$.
Où :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{A}} &= \big(\mathrm{I}_n \otimes \mathrm{A}\big) + \big(\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{I}_n\big) \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}. \\
\tilde{\mathrm{B}} &= (\mathrm{I}_n \otimes \mathrm{F}) \in \mathbb{R}^{n^2 \times nm}. \\
\tilde{\mathrm{C}} &= \big(\mathrm{I}_n \otimes \mathrm{C}\big) \in \mathbb{R}^{pn \times n^2}. \\
\tilde{\mathrm{D}} &= \big(\mathrm{I}_n \otimes \mathrm{D}\big) \in \mathbb{R}^{pn \times nm}. \\
\tilde{u} &= vec\big(u(t)\big) \in \mathbb{R}^{nm}. \\
\tilde{x}(t) &= vec\big(x(t)\big) \in \mathbb{R}^{n^2}. \\
\dot{\tilde{x}}(t) &= vec\big(\dot{x}(t)\big) \in \mathbb{R}^{n^2}. \\
\tilde{y}(t) &= vec(y(t)) \in \mathbb{R}^{pn}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Donc le système linéaire à temps continu de Lyapunov (4.1) est positif si et seulement si, le système standard équivalent (4.3) est positif. D'aprés le thèoreme de la positivité d'un système linéaire standard (3.1), $\tilde{\mathrm{A}}$ est de Metzler et $\tilde{\mathrm{B}}$, $\tilde{\mathrm{C}}$, $\tilde{\mathrm{D}}$ sont des matrices non négatives. De (4.4) suit l'hypothése du théoreme (4.2).

■

3 Contrôlabilité des systèmes linèaires positifs de Lyapunov

Définition 4.2 *Le système positif* (4.1) *est dit contrôlable sur l'intervalle fini* $[t_0, t_f]$ *si et seulement si pour tout état de départ* $x(t_0) = x_0$*, et tout état d'arrivée* $x(t_f) = x_f$ *et tous temps fini non nul* T *il existe une fonction commande* $u(t) : [t_0, \mathrm{T}] \longrightarrow \mathbb{R}_+^{m\times n}$*, telle que la trajectoire associée relie* x_0 *à* x_f *en tamps t .*

caractérisation

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^{n^2}, \forall x_f \in \mathbb{R}_+^{n^2}, \forall \mathrm{T} > 0 : u(t) : [t_0, \mathrm{T}] \longrightarrow \mathbb{R}_+^{m\times n} / x(\mathrm{T}, x_0, u) = x_f.$$

Définition 4.3 *Le système positif* (4.1) *est dit complètement contrôlable si et seulement si tout les états sont contrôlables .*

3.1 Critères de contrôlabilité

Théorème 4.3 *[9] le système positif* (4.1) *est contrôlable si et seulement si la matrice :*

$$\mathrm{R}_f = \int_{t_0}^{t_f} e^{\mathrm{A}(t_f-\tau)}\mathrm{F}\mathrm{F}^{\mathrm{T}} e^{\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(t_f-\tau)} d\tau$$

est une matrice monomiale .

Dans ce cas, Le contrôle qui transfère x_0 *en* x_f *est simplement donné par :*

$$u(t) = \mathrm{F}^{\mathrm{T}} e^{\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(t_f-\tau)}\mathrm{R}_f^{-1} x_f e^{\mathrm{B}(t-t_f)}, \forall t \in [t_0, t_f] \tag{4.5}$$

Preuve.

Si R_f est une matrice monomiale, alors $\mathrm{R}_f^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ existe et le contrôle défini par (4.5) existe. En utilisant (4.2) et (4.5) avec $x_0 = 0$, donc,

$$\begin{aligned} x(t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} e^{\mathrm{A}(t_f-\tau)}\mathrm{F}\mathrm{F}^{\mathrm{T}} e^{\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(t_f-\tau)}\mathrm{R}_f^{-1} x_f e^{\mathrm{B}(\tau-t_f)} e^{\mathrm{B}(t_f-\tau)} d\tau. \\ &= \int_{t_0}^{t_f} e^{\mathrm{A}(t_f-\tau)}\mathrm{F}\mathrm{F}^{\mathrm{T}} e^{\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(t_f-\tau)} d\tau \mathrm{R}_f^{-1} x_f. \\ &= \mathrm{R}_f \mathrm{R}_f^{-1} x_f = x_f \end{aligned}$$

Avec : $e^{\mathrm{B}(\tau-t_f)} e^{\mathrm{B}(t_f-\tau)} = \mathrm{I}_n$.

■

Exemple 4.1 *On considère le système linéaire positif de Lyapunov en temps continu décrit par l'équation suivante :*

$$\dot{x} = \mathrm{A}x + x\mathrm{B} + \mathrm{F}u$$

Où

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On remarque que A est une matrice diagonale, donc

$$e^{A(t_f-\tau)} = \begin{bmatrix} e^{(t_f-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{2(t_f-\tau)} \end{bmatrix}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
R_f &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{pmatrix} e^{(t_f-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{2(t_f-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(t_f-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{2(t_f-\tau)} \end{pmatrix} d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \begin{pmatrix} e^{(t_f-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{2(t_f-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(t_f-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{2(t_f-\tau)} \end{pmatrix} d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \begin{pmatrix} e^{2(t_f-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{4(t_f-\tau)} \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{2(t_f-t_0)}-1\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\left(e^{4(t_f-t_0)}-1\right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc, R_f *est une matrice monomiale et d'aprés le theorème* (4.3) *le système est contrôlable.*

Théorème 4.4 ***(Le critère de Kalman)*** *Le système positif* (4.3) *est contrôlable si et seulement si la matrice* ϕ *définie par :*

$$\phi = \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \tilde{A}^2\tilde{B} & \cdots & \cdots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \end{bmatrix}.$$

est de rang plein c'est à dire $rg(\phi) = n^2$ *avec :*

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= (I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_n). \\
\tilde{B} &= (I_n \otimes F).
\end{aligned}$$

La matrice ϕ *est appelée la matrice de contrôlabilité, dans ce cas , la paire* $(\tilde{A}, \tilde{B})$ *est dite contrôlable.*

Exemple 4.2 *On considère le système linéaire de lyapunov suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + x(t)B + Fu(t). \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases} \tag{4.6}$$

Avec :

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathsf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathsf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{C}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\mathsf{D}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathsf{A}}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}-1&2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3&1\\0&-2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&2&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-3&2\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathsf{B}}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathsf{C}}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathsf{D}}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

La matrice de contrôlabilité ϕ *corespandante est :*

$$\phi=\begin{bmatrix}\tilde{\mathrm{B}} & \tilde{\mathrm{A}}\tilde{\mathrm{B}} & \tilde{\mathrm{A}}^2\tilde{\mathrm{B}} & \tilde{\mathrm{A}}^3\tilde{\mathrm{B}}\end{bmatrix}.$$

$$\phi=\begin{bmatrix}1&0&0&0&-4&2&0&0&16&-12&0&0&-64&56&0&0\\0&1&0&0&0&-2&0&0&0&4&0&0&0&-8&0&0\\0&0&1&0&0&0&-3&2&0&0&9&-8&0&0&-27&26\\0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&1&0&0&0&-1\end{bmatrix}.$$

Le rang de la matrice ϕ *est :*

$$rg(\phi)=4$$

Par conséquent, le système de Lyapunov (4.3) *est contrôlable. Et puisque la matrice* $\tilde{\mathrm{A}}$ *est de* ***Metzler*** *et* $\tilde{\mathrm{B}}$, $\tilde{\mathrm{C}}$, $\tilde{\mathrm{D}}$ *sont des matrices non négative alors le système de Lyapunov* (4.3) *est positif.*

Proposition 4.1 *Le système positif* (4.3) *est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité de dimenssion* $n^2\times n^2$

$$\mathrm{W}(t_0,t_f)=\int_{t_0}^{t_f}\phi(t_0,\tau)(\mathrm{I}_n\otimes\mathrm{F})(\mathrm{I}_n\otimes\mathrm{F})^{\mathrm{T}}\phi(t_0,\tau)^{\mathrm{T}}d\tau. \tag{4.7}$$

est inversible.

Où : $\phi(t,t_0)=\phi_1(t,t_0)\phi_2(t,t_0)$ *est la matrice de transition définie par :*

$$\begin{aligned} \phi_1(t,t_0) &= exp((I_n \otimes A)(t-t_0)) \\ &et \\ \phi_2(t,t_0) &= exp((B^T \otimes I_n)(t-t_0)) \end{aligned}$$

Dans ce cas, le contrôle est défini par :

$$\tilde{u}(t) = -(I_n \otimes F)^T \phi(t_0,t)^T W^{-1}(t_0,t_f)\tilde{x}_0 - \phi(t_0,t_f)\tilde{x}_f. \tag{4.8}$$

sur $t_0 \leq t \leq t_f$, et transférant $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ en $\tilde{x}(t_f) = \tilde{x}_f$.

Preuve.
Pour la preuve on a besoin de theorème suivant :

Théorème 4.5 *La solution du système (4.3) est donnée par :*

$$\tilde{x}(t) = \phi(t_0,t)\left[\tilde{x}(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t_0,\tau)\tilde{B}\tilde{u}(\tau)d\tau\right] \tag{4.9}$$

Voir la référence [13].

Donc, on supposons que $W(t_0,t_f)$ est inversible, alors le contrôle définie par (4.8) existe . Donc en remplaçant (4.8) dans (4.9) avec $t = t_f$, nous obtenons,

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \phi(t_f,t_0)\left[\tilde{x}(t_0) - \int_{t_0}^{t} \phi(t_0,\tau)(I_n \otimes F)(I_n \otimes F)^T \phi(t_0,t)^T W^{-1}(t_0,t_f)\tilde{x}_0 - \phi(t_0,t_f)\tilde{x}_f d\tau\right]. \\ &= \phi(t_f,t_0)\phi(t_0,t_f)\tilde{x}_f \\ &= \tilde{x}_f. \end{aligned}$$

Donc, (4.3) est contrôlable.

Inversement, supposons que le système est contrôlable, alors nous devons montrER que $W(t_0,t_f)$ est inversible. On a W est symétrique, car ,

$$\begin{aligned} W^T &= \left[\int_{t_0}^{t_f} \phi(t_0,\tau)(I_n \otimes F)(I_n \otimes F)^T \phi(t_0,\tau)^T d\tau\right]^T. \\ &= \int_{t_0}^{t_f} (\phi^T(t_0,\tau))^T((I_n \otimes F)^T)^T(I_n \otimes F)^T \phi^T(t_0,\tau)d\tau. \\ &= W. \end{aligned}$$

Puisque W est symétrique nous pouvons construire la forme quadratique

$$\alpha^T W \alpha = \int_{t_0}^{t_f} \theta^T(\tau,t_0)\theta(\tau,t_0)d\tau. \tag{4.10}$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} ||\theta||_e^2 d\tau \geq 0. \tag{4.11}$$

Où α est un vecteur colonne constant arbitraire de dimenssion n^2 et

$$\theta(\tau, t_0) = (\mathrm{I}_n \otimes \mathrm{F})^{\mathrm{T}} \phi^{\mathrm{T}}(t_0, \tau)\alpha, \tag{4.12}$$

De (4.10) , $\mathrm{W}(t_0, t_f)$ est semi définie positive.

Supposons qu'il existe un certain $\beta \neq 0$ tel que , $\beta^{\mathrm{T}}\mathrm{W}(t_0, t_f)\beta = 0$, puis à partir de l'équation (4.10) avec $\theta = \eta$ quand $\alpha = \beta$, ceci implique

$$\int_{t_0}^{t_f} ||\eta||_e^2 d\tau \geq 0. \tag{4.13}$$

En utilisant les propriétés des normes , nous aurons,

$$\eta(\tau, t_0) = 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t_f. \tag{4.14}$$

Comme (4.3) est contrôlable donc il existe un contrôle $\tilde{u}(t)$ rendant $\tilde{x}(t_f) = 0$ si $\tilde{x}(t_0) = \beta$. Par conséquent, à partir de (4.9) nous aurons,

$$\beta = -\int_{t_0}^{t_f} \phi(t_0, \tau)(\mathrm{I}_n \otimes \mathrm{F})\tilde{u}(\tau)d\tau. \tag{4.15}$$

On obtient par suite,

$$\begin{aligned} ||\beta||_e^2 &= \beta^{\mathrm{T}}\beta = -\int_{t_0}^{t_f} \tilde{u}^{\mathrm{T}}(\tau)(\mathrm{I}_n \otimes \mathrm{F})^{\mathrm{T}}\phi^{\mathrm{T}}(t_0, \tau)\beta d\tau. \\ &= -\int_{t_0}^{t_f} \tilde{u}^{\mathrm{T}}(\tau)\eta(\tau, t_0)d\tau = 0. \end{aligned}$$

D'où $\beta = 0$, qui est une contradiction aves notre supposition, donc $\mathrm{W}(t_0, t_f)$ est symétrique et définie positive et elle est par conséquent inversible.

■

Exemple 4.3 *On considère le système linéaire positif de Lyapunov en temps continu décrit par l'équation suivante :*

$$\dot{x} = \mathrm{A}x + x\mathrm{B} + \mathrm{F}u$$

où,

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avec,

$$\left(\mathsf{I}_{\mathsf{n}} \otimes \mathsf{A}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(\mathsf{B}^{\mathsf{T}} \otimes \mathsf{I}_{\mathsf{n}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(\mathsf{I}_{\mathsf{n}} \otimes \mathsf{F}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\left(\mathrm{I}_n \otimes \mathrm{A}\right)$ *et* $\left(\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{I}_n\right)$ *sont des matrices diagonales, donc*

$$e^{\left(\mathsf{I}_{\mathsf{n}} \otimes \mathsf{A}\right)\left(\mathsf{t}_0 - \tau\right)} = \begin{bmatrix} e^{2(t_0-\tau)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(t_0-\tau)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2(t_0-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{(t_0-\tau)} \end{bmatrix},$$

$$e^{\left(\mathsf{B}^{\mathsf{T}} \otimes \mathsf{I}_{\mathsf{n}}\right)\left(\mathsf{t}_0 - \tau\right)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 00 \\ 0 & 0 & e^{(t_0-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{(t_0-\tau)} \end{bmatrix}.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \phi(t_0, \tau) &= \phi_1(t_0, \tau)\phi_2(t_0, \tau) \\ &= e^{\left(\mathsf{I}_{\mathsf{n}} \otimes \mathsf{A}\right)\left(\mathsf{t}_0, \tau\right)} e^{\left(\mathsf{B}^{\mathsf{T}} \otimes \mathsf{I}_{\mathsf{n}}\right)\left(\mathsf{t}_0, \tau\right)} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3(t_0-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2(t_0-\tau)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On a $\phi(t_0, \tau)^{\mathrm{T}} = \phi(t_0, \tau)$ *(car* ϕ *est une matrice symétrique).*

Donc,

$$\begin{aligned}
W(t_0,t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3(t_0-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2(t_0-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3(t_0-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2(t_0-\tau)} \end{pmatrix} d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3(t_0-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2(t_0-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3(t_0-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2(t_0-\tau)} \end{pmatrix} d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{6(t_0-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{4(t_0-\tau)} \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}(e^{6(t_0-t_f)}-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(e^{4(t_0-t_f)}-1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$det(W(0,t_f)) = 0$$

D'où, le système n'est pas contrôlable.

Conclusion

Dans notre mémoire, nous avons étudié la contrôlabilité des systèmes linéaires positifs de Lyapunov à temps continu. Pour ce faire, nous avons introduit la notion de contrôlabilité pour un système linéaire standard à temps continu , on basons sur deux critères importants : critère de kalman et le gramien de contrôlabilité , ainssi, nous avons cité des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tel système soit positif.

Afin d'étudier la contrôlabilité des systèmes linéaires positifs de Lyapunov à temps continu , nous avons transformé cette classe des systèmes à des systèmes standards

Tout on long de ce travail, des examples d'applications ont été introduits pour mieu illustré cette étude .

Bibliographie

[1] **Amirreza,O.** (2015), *Positive control with maximum stability radius for continuous time dynamic systems*, XX-SPETIO, 21 – 24. 18

[2] **Yves,G** (2001), *AUTOMATIQUE Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état*, 2^{eme} édition, Paris. 11

[3] **Bachelier, O.** (28 juin 2017), *Cours d'Automatique représentations d'états linéaires des système monovariables* 11

[4] **Bouagada, D.** (2007), *Système Différentiels Singulièrs Positifs et LMIs*, Université d'Oran. 2

[5] **Bouagada, D.** (2016-2017), *Théorie de Contrôle* 11

[6] **Broxom, B and Rghavan, T.** (2006), *Nonnégative Matrices and Applications*, XX-SPETIO, 33 – 41. 2

[7] **Hespanha,J and XU,Y** (2007), *A survey of recent result in networked control systems Pocceding of the IEEE*, 95(1), 138 –162. 18, 20

[8] **Kaczorek, T.** (1997), *Positive linéair Systems and Their relationship with electrical circuits*, XX-SPETO, 33 – 41. 2, 3, 18

[9] **Kaczorek, T.** (2007), *Prezemyslaw PRZYBOROWSKI, Positive Continuous -Time Linear Lyapunov Systems* ,The International Coference on"Computer as a Tool" Warsaw, September 9-12, 731– 733. 2, 7, 22, 24

[10] **Kaczorek, T.** (1998), *"Vestors and Matrices in Automation and Electrotechimics"*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa. 22

[11] **Kaczorek, T.** (2002), *Positive 1D and 2D systèms, springer verlag, Berlin, Academy*, , 431–431. 18

[12] **Mink, H.** (1986), *Non negative matricess, Wiley Interxience Series in Dixrete Time Mathematices and Optimisation*, John wiley and Sons,, 206 – 206. 2, 4

[13] **MSN. Murty, B.App Rao, V and Suresh Kumar, G.** (2006), *ContrÙlability, Observability, and realizability of matrix Lyapunov systems, Bull Koream Math soc.*,Bull Koream Math soc.43/pp 149-159. 22, 27

[14] **Senamer,O.** (1994), *Sur la commandabilité et le décupage des systèmes linèaires à retards*. Thèse de doctorat, Labratire d'Automatique. 18, 20

[15] **XU.D and Yang.X.** (2016), *Controllability of Fractional Descriptor Linear System*, Advances in Theoretical and Applies Mathemtics, **Volume 11, Numéro 4**, 373 – 382. 2, 8, 9

La contrôlabilité des système linéaires positif de Lyapunov à temps continu

Résumé : L'étude du problème de contrôlabilité est une notion imporatante pour l'analyse des systèmes. Nous considérons dans ce contexte la classe des systèmes linéaires positif de Lyapunov à temps continu pour dériver des conditions et des tests de contrôlabilité.

Dans un premier temps, nous fournissons des conditions nécessaires et suffisantes pour la contrôlabilité et positivité des systèmes linéaires standars. Dans un second temps, nous présentons une classe des systèmes de Lyapunov, ensuite nous étudions la contrôlabilité et la positivité de cette classe de système à l'aide des systèmes linéaires standards.

The controlanility of Lyapunov positive linear systems at continuous time

Abstract : The study of the problem of the controlability is an important notion for systems analysis. We consider in this context the class of Lyapunov positif linear systems at continuous time to drive conditions and controlability tests.

Firstly, We provide necessary and sufficient conditions for the controlability and the positivity of standard linear systems. In a second, time we present a class of lyapunov systems,then we study the controlability and positivity of this class of system using standard linear systems.