Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Analyse Fonctionnelle"

présenté par :

Melle Souad Ziane

Sur le Problème de Cauchy Abstrait de Type Parabolique Dans les Espaces des Fonctions Continues

soutenu publiquement le 27 juin 2019 devant le jury composé de :

Président :	Ahmed Medeghrie	Professeur	Université UMAB
Examinateur :	Hafida Bendahmane	M.C.B	Université UMAB
Encadreur :	Kheira Limam	M.C.A.	Université UMAB

Année Universitaire : 2018 / 2019

MASTER

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LAVIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Spécialité : Analyse Fonctionnel

Thème

Sur le Problème de Cauchy abstrait de type parabolique dans les espaces des fonctions continues

Présenté par

Ziane Souad

Soutenu le .. /06/2019

Devant le jury

Mr. Medeghrie Ahmed (Professeur) :	**Président**	**U. MOSTAGANEM.**
Mme. Bendahman Hafid (MCB) :	**Examinatrice**	**U. MOSTAGANEM.**
Mme Limam Kheira (MCA) :	**Encadreur**	**U. MOSTAGANEM.**

Table des matières

INTRODUCTION

Ce mémoire est consacré à l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité de la solution stricte (ou classique) d'un problème de Cauchy abstrait

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \\ u(0) = x \end{cases} \tag{0.0.1}$$

tel que A est un opérateur linéaire fermé dans un espace de Banach E et de domaine $D_A \subset E$; f est une fonction donnée à valeurs dans E et x est un élement de E.
L'hypothése fondamental sur l'opérateur A est

$$(H) \qquad \begin{cases} \text{il existe } \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\text{ et } M > 0 \text{ telle que,} \\ S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leq \theta\} \subset \rho(A) \\ \text{et } \forall \lambda \in \rho(A) : \|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M, \end{cases}$$

Où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de l'opérateur A et la résolvante $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

Le problème abstrait de Cauchy modélise beaucoup de phénomène en physique et en biologie, par exemple, le problème suivant (voir [15])

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v(t,x) = -a \dfrac{\partial}{\partial x} v(t,x) + f(t,x) \quad \text{pour } (t,x) \in]0,1] \times]0,1] \\ v(0,x) = v_0(x) \text{ pour tout } x \in [0,1] \\ v(t,0) = 0 \text{ pour tout } t \in [0,1] \end{cases} \tag{0.0.2}$$

où $f \in C([0,1], L^2(0,1))$. Posons $E := L^2(0,1)$, en utilisant les notations vectorielles usuelles

$$v(t,x) := v(t)(x) \quad \text{et} \quad f(t,x) := f(t)(x),$$

pour écrire le problème (0.0.2) sous la forme opérationnelle suivante

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + f(t), \quad t \in]0,1] \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

où l'opérateur A est défini par

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in W^{1,2}(0,1) : u(0) = 0\} \\ Au = -au'. \end{cases}$$

C'est ce dernier problème qui sera étudié dans ce mémoire mais dans un cadre plus général lorsque A est un opérateur linéaire fermé quelconque, E est un espaces de Banach, $v_0 \in E$ et $f \in C([0,T],E)$.

On donne dans ce manuscrit une synthèse sur l'article [16] de Eugenio Sinestrari intitulé "On the Absract Cauchy Probleme of Parabolic Type in Spaces of Continous Functions".
L'objectif de ce mémoire est de trouver
1. **une solution classique** de (0.0.1) lorsque le second membre f est assez régulier i. e.

$$f \in C^{\beta}(0,T,E); \quad \text{avec } 0 < \beta < 1.$$

c'est à dire, on va chercher une fonction

$$u \in C(0,T,E) \cap C^1\left(0^+,T,E\right) \cap C\left(0^+,T,D_A\right)$$

vérifiant (0.0.1) pour $t \in]0,T]$.
2. **une solution stricte** c'est à dire une fonction

$$u \in C^1(0,T,E) \cap C(0,T,D_A)$$

vérifiant aussi le problème (0.0.1) pour $t \in [0,T]$.

Ce mémoire est composé d'une introduction et trois chapitres

Le premier chapitre est consacré aux rappels fondamentaux pour réaliser ce travail. Ils concernent les opérateurs, les semi-groupes, les espaces d'interpolations et les espaces fonctionnels.

Dans **le second chapitre,** on trouve des conditions nécessaires et suffisantes pour assurer l'existence et la régularité d'une solution classique ou stricte d'un problème de Cauchy abstrait.

Le dernier chapitre est réservé aux exemples concrets pour illustrer la théorie abstraite prouvé dans le deuxième chapitre.

Chapitre 1

Rappels

On donne ici quelques rappels fondamentaux sur la théorie des opérateurs...

1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1 *Soit X un espace vectoriel normé, on dit que c'est un espace de Banach s'il est complet. C'est à dire toute suite de Cauchy dans X est convergente dans X.*

Exemples. Soient $(E, \mathcal{B}(E), \lambda)$ un espace mesuré, Ω un ensemble mesurable et $T > 0$. Alors
1) Tout espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie est un espace de Banach car il est complet pour n'importe quelle norme.
2) $L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} : \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, d\lambda(x) < \infty \right\}$ et

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

sont des espaces de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.
4) $C^1([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que la fonction $x \longmapsto f'(x)$ existe et est continue, muni de la norme

$$\|f\|_{\mathbb{C}^1([0,1])} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} \left| f'(x) \right|,$$

est un espace de Banach.

1.2 Les opérateurs

Soient X et Y deux espaces de Banach réels ou complexes. On note par $\|.\|_X$ la norme dans X ($\|.\|$ s'il n'y a pas confusion).

Définition 1.2.1 (opérateur linéaire) *Un opérateur A de X dans Y est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel (noté $D(A) \subset X$ et appelé domaine de A) à valeur dans Y, i.e pour toute $x, y \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :*

(i) $A(x+y) = Ax + Ay$.

(ii) $A(\lambda x) = \lambda Ax$.

C'est à dire $D(A)$ est le sous espace vectoriel des éléments x de X tels que Ax ait un sens dans Y.

Définition 1.2.2 (Opérateur borné) *Un opérateur A défini de X dans Y est borné si $D(A) = X$ et*

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y < \infty.$$

Dans la suite, on note par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans Y et $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$.

Définition 1.2.3 (Opérateur fermé) *On dit qu'un opérateur A est fermé si et seulement si son graphe*

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$

est un sous espace vectoriel fermé de $X \times Y$.
D'une manière équivalente, un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to Y$ est dit fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \in D(A)$ telle que

$$\begin{cases} x_n \to x \\ Ax_n \to y \end{cases}$$

On a $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

Définition 1.2.4 (opérateur fermable) *On dit qu'un opérateur A est fermable si et seulement si pour tout suite $(x_n)_n \in D(A)$ telle que*

$$\begin{cases} x_n \to 0 \\ Ax_n \to y \end{cases} \Longrightarrow y = 0$$

La plus petite extension fermée de A est notée $\overline{A}$ et s'appelle la fermeture de A et $\overline{G(A)}$ est le graphe de l'opérateur $\overline{A}$.

Théorème 1.2.1 (du graphe fermé) *Soient X, Y deux espaces de Banach. Une application linéaire f de X dans Y est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $X \times Y$.*

Définition 1.2.5 *L'ensemble résolvant d'un opérateur A est*

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) : D(A) \to X \text{ est bijectif et } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \right\}.$$

Si A est fermé, alors

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) : D(A) \to X \text{ est bijectif} \}.$$

par le théorème du graphe fermé.
La résolvante de A est $(\lambda I - A)^{-1}$ et $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ est son spectre.

Propriétés : On donne maintenant quelques propriétés importantes.
Soit A, B deux opérateurs fermés de domaines $D(A) \subseteq X$ et $D(B) \subseteq X$.
i. Si $B \in \mathcal{L}(X, Y)$; alors $A + B$ est fermé de domaine $D(A)$.
ii. Si A est un opérateur fermé et injectif alors A^{-1} est fermé.
iii. Si A est un opérateur fermé a valeurs dans X et $D(A)$ est fermé dans X alors A est continu de $D(A)$ dans X.
v. Si $\rho(A) \neq \emptyset$ alors A est fermé.

Exemple 1.2.1 *Dans l'espace $X = L^2(\mathbb{R})$, l'opérateur*

$$Au = u'' \quad D(A) = H^{2,}(\mathbb{R}),$$

est fermé.

1.3 Les semi-groupes

Définition 1.3.1 *Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ une famille d'opérateur linéaire dans X, on dit que cette famille forme un semi groupe dans X si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $G(0) = I$.
2. $\forall\,(t,s) \geq 0,\ G(t+s) = G(t)\cdot G(s)$.

   Lorsque la famille $\{G(t)\}_t$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que la deuxième propriété est vérifier pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ on dit qu'on a un groupe.

Définition 1.3.2 *On dit qu'un semi groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est fortement continu si et seulement si pour tout $x \in X$, l'application $t \to G(t)x$ de $\mathbb{R}^+$ est continu, c'est-à-dire pour tout $x \in X$*

$$\lim_{t\to 0^+} \|G(t)x - x\|_X = 0.$$

On dit aussi que $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi groupe.

Proposition 1.3.1 *Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi groupe, alors il existe $\omega \geq 0$, $M \geq 1$ tels que*

$$\forall t \geq 0 \ \textit{on a} \ \|G(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$

Définition 1.3.3 *Un semi groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ est appelé semi groupe uniformément continue d'opérateur linéaire borné si*

$$\lim_{t\to 0} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

1.3.1 Théorème de Hille-Yosida

Théorème 1.3.1 *Soit A un opérateur fermé non nécessairement borné a demain dense dans X (i.e $\overline{D(A)} = X$) alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0- semi groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ si, et seulement s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que*

$$\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \lambda_0\} \subset \rho(A) \ \textit{et} \ \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda};\ \lambda > \lambda_0.$$

1.3.2 Les semi-groupes analytiques

Définition 1.3.4 *On appelle semi-groupe analytique de type $\theta \in]\pi/2, \pi[$ toute application G définie sur l'ensemble*

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leq \theta\}$$

à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$ telle que

1. $z \mapsto G(z)$ *est analytique sur* S_θ.

2. $\forall x \in E$, $G(0) = I$ *et*

$$\lim_{z\in S_\theta \quad z\to 0} G(z)\, x = x$$

3. $\forall z_1, z_2 \in S_\theta$, $G(z_1 + z_2) = G(z_1)\, G(z_2)$.

Proposition 1.3.2 *Si A génère un semi groupe analytique $G(t)$, alors il est défini par l'intégrale de Dunford*

$$G(t)\, x = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{tz} (zI - A)^{-1} x dz := e^{tA} x.$$

où γ est une courbe simple définie par

$$\gamma = \{z \in C : |z| = 1 \text{ et } |\arg z| \leq \theta\} \cup \left\{z \in C : z = re^{\pm i\theta} \text{ et } r \geq 1\right\}.$$

vérifiant

i. $e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$ *pour* $t, s \geq 0$.

ii. $e^{At} x \in D\left(A^k\right)$ *pour* $t > 0$, $x \in X$, $k \in \mathbb{N}^*$.

iii. *pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe M_k telle que*

$$\left\|t^k A^k e^{At}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_k \qquad \text{pour } t > 0.$$

iv. *pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$ on a (dans $\mathcal{L}(X)$)*

$$\frac{d^k e^{At}}{dt^k} = A^k e^{At}.$$

et $t \to e^{At}$ peut-être prolongé analytiquement dans un secteur contenant la demi- droit positive.

v. $Ae^{At} x = e^{At} Ax$ *pour* $t > 0$ *et* $x \in D_A$.

vi. $R(\lambda, A)\, e^{At} = e^{At} R(\lambda, A)$ *pour* $t > 0$ *et* $\lambda \in \rho(A)$.

Théorème 1.3.2 (de Kato) *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire vérifiant*

(1) *A fermé de domaine $D(A)$ dense dans X.*

(2) *$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$ et $\exists M > 0$ telle que*

$$\forall \lambda > 0 : \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leqslant \frac{M}{1+\lambda}.$$

Alors A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique G vérifiant

(1) *$\exists C > 0$, $\forall t > 0 : \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C$.*

(2) *$\forall t > 0$, $G(t) \in \mathcal{L}(X, D(A))$ et $\|AG(t)\| \leqslant \dfrac{M}{t}$.*

Remarque 1.3.1 *Lorsque $D(A)$ n'est pas dense dans X l'influence de $t \to e^{At}x$ au voisinage de 0 est donné par*

Proposition 1.3.3 *Supposons que A vérifie l'hypothèse (H) suivante*

$$\begin{cases} \text{il existe } \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\text{ et } M > 0 \text{ telle que,} \\ S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leq \theta\} \subset \rho(A) \\ \text{et } \forall \lambda \in \rho(A) : \|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \end{cases} \tag{H}$$

Alors

1. si $x \in \overline{D(A)}$, alors
$$\lim_{t \to 0} e^{At}x = x.$$
Inversement, s'il existe
$$\lim_{t \to 0} e^{At}x = y.$$
alors $x \in \overline{D(A)}$ et $y = x$.

2. pour tout $x \in X$ et $t > 0$, on a $\int_0^t e^{As}xds \in D(A)$ et
$$A \int_0^t e^{As}xds = e^{At}x - x \tag{1.3.1}$$
donc
$$\int_0^t Ae^{As}xds = e^{At}x - x.$$
où $s \longmapsto \left\|Ae^{As}x\right\| \in L^1([0,t], \mathbb{R})$.

3. Si $x \in D(A)$ et $Ax \in \overline{D(A)}$, alors :
$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{At}x - x}{t} = Ax.$$
Inversement si $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^{At}x - x}{t}$ existe et vaut y, alors $x \in D(A)$, $Ax \in \overline{D(A)}$ et $Ax = y$.
4. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{t} \int_0^t e^{As} x ds = y$ existe si et seulement si $y = x \in \overline{D(A)}$.
5. Posons
$$\widehat{D}_A = \left\{ x \in X : \sup_{t>0} \left\| A e^{At} x \right\| < \infty \right\}.$$
et
$$\widetilde{D}_A = \left\{ x \in X : \sup_{t>0} \frac{\left\| A e^{At} x \right\|}{t} < \infty \right\}.$$
On a $D(A) \subset \widehat{D}_A$
6. $\left\{ x \in X : \exists \lim_{t \to 0} A e^{At} x \right\} = \left\{ x \in X : \lim_{t \to 0} A e^{At} x = Ax \right\} = \left\{ x \in D(A) : Ax \in \overline{D(A)} \right\}$.

Preuve. Soit $\lambda \in \rho(A)$.

1. On sait que pour tout $x \in D(A)$, on a $\lim\limits_{t \to 0} e^{At} x = x$ et le résultat reste vrai pour $x \in \overline{D(A)}$ car $\left(e^{At}\right)_{t \geq 0} \in \mathcal{L}(X)$. Pour l'inverse supposons que $\lim\limits_{t \to 0} e^{At} x = y$ alors
$$(\lambda I - A)^{-1} y = \lim_{t \to 0} (\lambda I - A)^{-1} e^{At} x = \lim_{t \to 0} e^{At} (\lambda I - A)^{-1} x$$
de la première partie $(\lambda I - A)^{-1} x \in D(A)$, en on déduit que
$$\lim_{t \to 0} e^{At} (\lambda I - A)^{-1} x = (\lambda I - A)^{-1} x$$
en plus
$$(\lambda I - A)^{-1} y = (\lambda I - A)^{-1} x$$
donne $y = x$. Comme $e^{At} x \in D(A)$ pour $t > 0$, on obtient
$$x = \lim_{t \to 0} e^{At} x \in \overline{D(A)}$$

2. soit $0 < \varepsilon < 1$, d'après la proposition (1.3.3) point (4) et (5) on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{t} e^{As}xds &= \int_{\varepsilon}^{t} (\lambda I - A)\, e^{As} (\lambda I - A)^{-1} xds \\ &= \lambda \int_{0}^{t} e^{As} (\lambda I - A)^{-1} xds - \int_{\varepsilon}^{t} \frac{d}{ds}\left(e^{As} (\lambda I - A)^{-1} x\right) ds \\ &= \lambda \int_{\varepsilon}^{t} e^{As} (\lambda I - A)^{-1} xds - e^{As} (\lambda I - A)^{-1} x + e^{A\varepsilon} (\lambda I - A)^{-1} x\end{aligned}$$

quand $\varepsilon \to 0$, on déduit de 1.

$$\int_{0}^{t} e^{As}xds = \lambda (\lambda I - A)^{-1} \int_{0}^{t} e^{As}xds - (\lambda I - A)^{-1} \left(e^{As}x - x\right) \tag{1.3.2}$$

ceci montre que

$$\int_{0}^{t} e^{As}x \in D(A)$$

en appliquant $(\lambda I - A)$ à la relation (1.3.2) on obtient (1.3.1).

3. Supposons que $x \in D(A)$ et $Ax \in \overline{D(A)}$, alors d'après point 2 de la proposition 1.3.3 on trouve

$$\frac{e^{At}x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_{0}^{t} e^{As}Axds$$

ce dernier tend vers Ax quand $t \to 0$, en vertue de premier point de cette proposition.

Inversement, $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^{At}x - x}{t} = y$ donne $\lim_{t\to 0} e^{At}x = x$ en plus $x \in \overline{D(A)}$ ceci nous permit de déduire que $y \in \overline{D(A)}$. Grace a (1.3.2) on obtient

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)^{-1} y &= \lim_{t\to 0} (\lambda I - A)^{-1} \frac{e^{At}x - x}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \left[\lambda (\lambda I - A)^{-1} \frac{1}{t}\int_{0}^{t} e^{At}xds - \frac{1}{t}\int_{0}^{t} e^{At}xds\right] \\ &= \lambda (\lambda I - A)^{-1} x - x\end{aligned}$$

ceci implique $x \in D(A)$.

4. De (1.3.2) on déduit que $\forall x \in X$ et $t > 0$

$$\left[\lambda (\lambda I - A)^{-1} - I\right] \frac{1}{t}\int_{0}^{t} e^{At}xds = \frac{e^{At} (\lambda I - A)^{-1} x - (\lambda I - A)^{-1} x}{t}$$

par conséquent ; il existe

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\int_0^t e^{As}xds\right)=y$$

alors par (point 3. Proposition 1.3.3) , on obtient

$$A(\lambda I-A)^{-1}x=-x+\lambda(\lambda I-A)^{-1}x\in\overline{D(A)}$$

et donc $x\in\overline{D(A)}$ et selon (point 1. Proposition 1.3.3) on trouve

$$y=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\int_0^t e^{At}xds\right)=x$$

l'inverse est une conséquence de **1**.

5. On suppose que

$$c=\sup_{s>0}\frac{\left\|e^{As}x-x\right\|}{s}<\infty.$$

Soit $t>0$ on a pour tout $s>0$,

$$\left\|\left(\frac{e^{As}-I}{s}\right)e^{At}x\right\|\leq CM_0\left\|x\right\|$$

ou $M_0\in\mathbb{R}_+$ telle que $\left\|e^{At}\right\|\leq CM_0$. Quand $s\to 0$ on déduit de (**3**. Proposition 1.3.3) $\left(\text{car } e^{At}x\in D\left(A^2\right)\right)$ que

$$\left\|Ae^{At}x\right\|\leq CM_0\left\|x\right\|,\qquad t>0.$$

Pour l'inverse, posons

$$C'=\sup_{s>0}\left\|Ae^{At}x\right\|<\infty.$$

Pour tout $t>0$, on obtient de (2. Proposition 1.3.3)

$$\left\|e^{At}x-x\right\|=\left\|\int_0^t Ae^{At}xds\right\|\leq C't.$$

Puisque $x\in D(A)$ alors $\sup\limits_{t>0}\left\|Ae^{At}x\right\|\leq M_0\left\|Ax\right\|$ et donc $x\in\widehat{D}_A$

6. Supposons que

$$\lim_{t\to 0}Ae^{At}x=y.$$

Alors $s \to Ae^{As}x$ est dans $L^{\infty}([0,T],X)$, pour tout $t > 0$ et de (2. Proposition 1.3.3) on obtient

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{At}x-x}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t Ae^{As}xds=y$$

Ainsi, de (3. Proposition 1.3.3) on déduit que

$$x\in D(A),\ Ax\in\overline{D(A)}\ \ et\ \ y=Ax.$$

Inversement, supposons que $x \in D(A)$ et $Ax \in \overline{D(A)}$ alors

$$\lim_{t\to 0}Ae^{At}x=\lim_{t\to 0}e^{At}Ax=Ax$$

en vertu de (1. Proposition 1.3.3).

Remarque 1.3.2 *Si $D(A)$ n'est pas dense dans X et A vérifie l'hypothèse (H) alors $\left(e^{At}\right)_{t\geq 0}$ génère un semi groupe analytique non fortement continue en 0. mais la restriction (de l'image) de A sur $\overline{D(A)}$ génère un semi groupe analytique fortement continue.*

Proposition 1.3.4 *Soit A verifie (H) et définie par :*

$E_0 = \overline{D(A)}$ (avec la norme dans X)
$D(A_0) = \left\{x \in D(A) : Ax \in \overline{D(A)}\right\}$
$A_0 : D(A_0) \subset E_0 \longrightarrow E_0$
$A_0x = Ax$ pour $x \in D(A_0)$
Alors A_0 est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique ($t \to e^{A_0t}$ dans E_0) fortement continue pour $t \geq 0$. En plus, on a $e^{A_0t}x = e^{At}x$ pour $t > 0$ et $x \in \overline{D(A)}$.

1.4 Les espaces d'interpolation

On désigne par E_0 et E_1 deux espaces de Banach contenus avec injection continue dans un espace topologique séparé E (c'est à dire $E_0 \hookrightarrow E$, $E_1 \hookrightarrow E$). Considérons les espaces de Banach

$$E_0\cap E_1\ \ \text{et}\ \ E_0+E_1$$

munis des normes

$$\|x\|_{E_0\cap E_1} = \|x\|_{E_0} + \|x\|_{E_1}\,,$$

et

$$\|x\|_{E_0+E_1} = \inf_{x=x_0+x_1,\quad x_i\in E_i} \left(\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1}\right).$$

Le couple $\{E_0, E_1\}$ est dit couple d'interpolation.

Définition 1.4.1 *Soit $\{E_0, E_1\}$ un couple d'interpolation. On appelle espace intermédiaire entre E_0 et E_1 tout espace de Banach E tel que*

$$E_0 \cap E_1 \subset E \subset E_0 + E_1.$$

Les espaces $E_i, i = 0, 1$ sont des espaces intermédiaires.

Définition 1.4.2 *Soient $\theta \in \left]0,1\right[$ et $p \in [1, +\infty]$. On appelle espace d'interpolation entre E_0, E_1 l'espace $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ tel que $x \in (E_0, E_1)_{\theta,p}$ si et seulement si*

$$\begin{cases} i)\ \forall t > 0, \exists u_i(t) \in E_i \quad (i = 0, 1) : x = u_0(t) + u_1(t) \\ ii)\ t^{-\theta} u_0 \in L^p_*(R_+, E_0)\,, \quad t^{1-\theta} u_1 \in L^p_*(R_+, E_1) \end{cases}$$

où

$$L^p_*(E) = \left\{ f : \left]0, \infty\right[\to E : \int_0^{+\infty} \|f(t)\|^p_E \frac{dt}{t} < \infty \right\}.$$

Propriétés

On donne maintenant quelques propriétés fondamentales de ces espaces, pour tout ω, θ, $t \in \left]0,1\right[$ et $p, q, r \in [1, +\infty]$:

1) Si $0 < \theta \leqslant \omega < 1$ alors

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} \subset (E_0, E_1)_{\omega,q}\,.$$

2) Si $p \leqslant q$ alors

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} \subset (E_0, E_1)_{\theta,q}\,.$$

3) Si $E_0 = E_1$ alors

$$(X_0, X_1)_{\theta,p} = X_0 = X_1.$$

4) Si $0 < \omega < \theta < 1$, alors on a

$$((E_0, E_1)_{\theta,p}, (E_0, E_1)_{\omega,q})_{t,r} = (E_0, E_1)_{\alpha,r},$$

avec

$$\alpha = (1-t)\,\theta + t\omega \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \frac{1-t}{p} + \frac{t}{q}.$$

Cas Particulier $(D(A), E)_{\theta,p}$

Soient E un espace de Banach, A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ inclus dans E. Posons

$$E_0 = D(A) \text{ et } E_1 = E,$$

alors

$$E_0 \cap E_1 = D(A) \text{ et } E_0 + E_1 = E,$$

donc, pour tout $\theta \in \left]0,1\right[$ et $p \in [1, +\infty]$ on a

$$D(A) \subset (D(A), E)_{\theta,p} \subset E.$$

Si $\rho\,(A) \supset \mathbb{R}_+$ et s'il existe une constante $C_A > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0 : \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \frac{C_A}{\lambda},$$

alors

$$\begin{aligned} (D\,(A)\,, E)_{\theta,p} &= D_A\,(1-\theta, p) \\ &= \left\{ x \in E : \left\| t^{1-\theta} A\,(A-t)^{-1}\, x \right\|_E \in L_*^p \right\}. \end{aligned}$$

Définition 1.4.3 *Pour tout* $\theta \in \left]0,1\right[$, $p \in [1, +\infty]$ *et* $k \in \mathbb{N}$, *on a*

$$D_A\,(\theta + k, p) = \left\{ x \in D(A^k) : A^k x \in D_A\,(\theta, p) \right\},$$

avec la norme

$$\|x\|_{D_A(\theta+k,p)} = \|x\|_E + \left\| A^k x \right\|_{D_A(\theta,p)}.$$

Théorème 1.4.1 (de Lions) *Si* A *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continue* $(G\,(t))_{t \geqslant 0}$, *alors pour tout* $p \in [1, +\infty]$ *et* $\theta \in \left]0,1\right[$

$$(D(A), E)_{\theta,p} = \left\{ x \in E : \left\| t^{\theta-1}\,(G\,(t) - I)\, x \right\|_E \in L_*^p \right\}$$

muni de la norme

$$\|x\|_{(D(A),E)_{\theta,p}} = \|x\|_E + \left(\int_0^{+\infty} \left\| t^{\theta-1}(G(t) - I)\, x \right\|_E^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}.$$

avec les modifications usuelles si $p = \infty$*.*

Définition 1.4.4 *Pour tout* $\theta \in \left]0,1\right[$ *; on définie l'espace*

$$D_A(\theta,\infty) = \left\{ x \in E, \|x\|_\theta = \sup_{t>0} \left\| t^{1-\theta} A e^{At} x \right\| < \infty \right\}$$

avec la norme

$$\|x\|_{D_A(\theta,\infty)} = \|x\| + \|x\|_\theta .$$

le sous espace $D_A(\theta)$ *de* $D_A(\theta,\infty)$ *défini par*

$$D_A(\theta) = \left\{ x \in E, \lim_{t\to 0} t^{1-\theta} A e^{At} x = 0 \right\}.$$

muni de la norme de $D_A(\theta,\infty)$ *est un espace de Banach.*

On a les propriétés suivantes

1. Pour tout $\theta \in \left]0,1\right[$

$$D(A) \subset D_A(\theta) \subset D_A(\theta,\infty) \subset \overline{D(A)}.$$

2. $D_{A_0}(\theta,\infty) = D_A(\theta,\infty)$ et $D_{A_0}(\theta) = D_A(\theta)$ où A_0 est l'opérateur définit précédemment (voir Proposition 1.3.4).

3. Si $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ alors

$$D_A(\theta_2) \subset D_A(\theta_2,\infty) \hookrightarrow D_A(\theta_1) \subset D_A(\theta_1,\infty)$$

et

$$\|x\|_{D_A(\theta_1,\infty)} \leq (1 + M_1)\, \|x\|_{D_A(\theta_2,\infty)} \tag{1.4.1}$$

pour $x \in D_A(\theta_2,\infty)$ d'autre part on a

$$D_A \hookrightarrow D_A(\theta,\infty) \subset E$$

et

$$\|x\|_{D_A(\theta,\infty)} \leq (M_0 + M_1)\, \|x\|_{D_A}$$

pour $x \in D_A$ et $\theta \in \left]0,1\right[$.

1.5 Les espaces fonctionnels

Dans toute la suite, on désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (non nécessairement borné) et on pose $a = (a_1, a_2, ..., \alpha_{an})$ un multi-indice, avec $|a| = \sum_{i=1}^{n} a_i$ et on utilise la notation

$$\partial^a = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{a_1} .... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{a_n}.$$

Les espaces de Sobolev et de Besov

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$:

On note $W^{m,p}(\Omega, E)$ l'espace de Sobolev des fonctions $f : \Omega \to E$ telles que $\partial^\alpha f \in L^p(\Omega, E)$ pour tout $|\alpha| \leqslant m$. C'est un espace de Banach avec la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega,E)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega,E)}\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leqslant p < \infty \\ \max_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega,E)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $s \in \,]0, 1[$ et $1 \leqslant p < \infty$:

On définit l'espace fractionnaire de Sobolev

$$W^{s,p}(\Omega, E) = \left\{ f \in L^p(\Omega, E) : \int_\Omega \int_\Omega \frac{\|f(x) - f(y)\|^p_E}{|x-y|^{sp+n}} dx dy < \infty \right\}.$$

Les espaces de Sobolev ne sont pas stables complètement par interpolation, on est amené à définir les espaces de Besov $B^m_{p,q}(\Omega, E)$. Pour $s \in \,]0, 1[$ et $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, on définit

$$B^s_{p,q}(\Omega, E) = \left\{ f \in L^p(\Omega, E) : \int_\Omega \left(\int_\Omega \frac{\|f(x) - f(y)\|^p_E}{|x-y|^{sq+n}} dx \right)^{q/p} dy < \infty \right\}.$$

avec la modification classique quand $p = \infty$ et $q = \infty$.

Dans le cas où $p = q$ on a

$$B^s_{p,p}(\Omega, E) = W^{s,p}(\Omega, E).$$

Les espaces de Hölder

Soit $m \in \mathbb{N}$:

L'ensemble $C^m(\Omega, E)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions $f : \Omega \to E$ telles que la fonction $x \longmapsto \partial^\alpha f(x)$ existe et est continue pour tout $|\alpha| \leqslant m$.

L'ensemble $C_b^m(\Omega, E)$ est un sous espace vectoriel de $C^m(\Omega, E)$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre m sont bornées sur Ω. C'est un espace de Banach avec la norme

$$\|f\|_{C_b^m(\Omega,E)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x\in\Omega} \|\partial^\alpha f(x)\|_E .$$

Soit $\alpha \in]0,1[$:

L'ensemble $C^\alpha(\Omega, E)$ est l'espace de Hölder d'exposant α des fonctions $f : \Omega \to E$ telles que

$$\begin{cases} \sup_{x\in\Omega} \|f(x)\|_E < \infty, \\ \exists C > 0, \forall x, y \in \Omega : \|f(x) - f(y)\|_E \leqslant C\,|x-y|^\alpha . \end{cases}$$

Muni de la norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^\alpha(\Omega,E)} &= \sup_{x\in\Omega} \|f(x)\|_E + \sup_{x\neq y} \frac{\|f(x)-f(y)\|_E}{|x-y|^\alpha} \\ &= \|f\|_\infty + [f]_{C^\alpha(\Omega,E)} , \end{aligned}$$

$C^\alpha(\Omega, E)$ est un espace de Banach.

Chapitre 2

Problème de Cauchy

2.1 Position du problème et représentation de la solution

On considère le problème de Cauchy abstrait suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & t \in [0,T], \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

L'objectif de ce chapitre est l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité de la solution (stricte ou classique) du problème (2.1.1) lorsque $f \in C\left([0,T]\,;E\right)$, $x \in E$ sous l'hypothèse

$$(H) \qquad \begin{cases} \text{il existe } \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\text{ et } M > 0 \text{ telle que,} \\ S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leq \theta\} \subset \rho\left(A\right) \\ \text{et } \forall \lambda \in \rho\left(A\right) : \left\|\lambda R\left(\lambda, A\right)\right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M, \end{cases}$$

et $D\left(A\right) \neq E$

Conséquences.

1. Si u est une solution classique de (2.1.1), alors

$$u\left(0\right) \in \overline{D\left(A\right)}, \quad u'\left(t\right) \in \overline{D\left(A\right)} \qquad\qquad 0 < t \leq T. \tag{2.1.2}$$

2. Si u est une solution stricte de (2.1.1) , on a également

$$u\left(0\right) \in D\left(A\right) \text{ et } u'\left(0\right) = Au\left(0\right) + f\left(0\right) \in \overline{D\left(A\right)}. \tag{2.1.3}$$

Représentation de la solution

Proposition 2.1.1 *Si u est une solution classique de* (2.1.1) *alors pour tout $t \in [0,T]$ on a*

$$u(t) = e^{At}x + \left(e^{At} * f\right)(t) \tag{2.1.4}$$

où

$$\left(e^{At} * f\right)(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\, ds = \int_0^t e^{As} f(t-s)\, ds \tag{2.1.5}$$

en plus la solution classique de (2.1.1) *est unique et*

$$\|u\|_{C([0,T],E)} \leq M_0 T \|f\|_{C([0,T],E)} + M_0 \|x\|.$$

Preuve. Soient u une solution classique de (2.1.1) dans $[0,T]$ et $t \in \left]0,T\right]$ fixé.
Comme $u(t) \in D(A)$ on déduit de la Proposition (1.3.2) que la fonction

$$v(s) = e^{A(t-s)} u(s) \qquad 0 \leq s \leq t.$$

appartient à $C(0,t;E)$ et que pour tout $s \in \left]0,t\right[$ il existe

$$v'(s) = e^{A(t-s)} u'(s) - Ae^{A(t-s)} u(s) = e^{A(t-s)} f(s)$$

d'autre part si $0 < 2\epsilon < t$ on obtient

$$v(t-\epsilon) - v(\epsilon) = \int_\epsilon^{t-\epsilon} e^{A(t-s)} f(s)\, ds.$$

et quand $\epsilon \to 0$

$$v(t) = v(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\, ds.$$

où $v(t) = u(t)$ et $v(0) = e^{At} u(0)$ donc

$$u(t) = e^{At} u(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\, ds.$$

En plus ; d'après la Proposition (1.3.2)

$$\|u\|_{C([0,T],E)} = \max_{t \in [0;T]} \|u(t)\|_E \leq M_0 T \|f\|_{C([0,T],E)} + M_0 \|x\|$$

Définition 2.1.1 *Soit $f \in C([0,T];E)$ et $x \in \overline{D(A)}$. On dit que la fonction définie par* (2.1.3) *est une solution faible de* (2.1.1).

Remarque. La condition $x \in \overline{D(A)}$ est donnée pour garantir la continuité de la solution faible en $t=0$.

Par la suite, l'espace des fonctions bornées, de $[0,T]$ à valeurs dans $D_A(\gamma,\infty)$, est noté

$$\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty)).$$

Les propriétés de la solution faible seront données dans la proposition suivante.

Proposition 2.1.2 *Soit $T>0$ et $\gamma \in]0,1[$; on a pour tout $\epsilon \in]0,\gamma[$*

$$C^{\gamma}([0,T];E) \cap \mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty)) \hookrightarrow C^{\epsilon}([0,T];D_A(\gamma-\epsilon)). \tag{2.1.6}$$

et pour chaque $u \in C^{\gamma}([0,T];E) \cap \mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty))$, il existe K une constante dépendante de $(M_1;T^{\gamma-\epsilon})$ telle que

$$\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)\cap\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty))} \leq K \max\left\{\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}, \|u\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty))}\right\}$$

Preuve. Soit $u \in C^{\gamma}([0,T];E) \cap \mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty))$ alors ; selon les propriétés des espaces d'interpolation ; $u(t) \in D_A(\gamma-\epsilon)$ pour $t \in [0,T]$ et $\epsilon \in]0,\gamma[$ d'autre part quand $0 \leq t \leq t+h \leq T$ nous avons

$$\begin{aligned}
& \|u(t+h)-u(t)\|_{D_A(\gamma-\epsilon)} \\
= \ & \|u(t+h)-u(t)\| + \sup_{s>0}\left\|s^{1-\gamma+\epsilon}Ae^{As}[u(t+h)-u(t)]\right\| \\
\leq \ & \|u(t+h)-u(t)\| \\
& + \max\left\{\sup_{s<h}\left\|s^{1-\gamma+\epsilon}Ae^{As}[u(t+h)-u(t)]\right\|, \sup_{s\geq h}\left\|s^{1-\gamma+\epsilon}Ae^{As}[u(t+h)-u(t)]\right\|\right\} \\
\leq \ & \|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}.h^{\gamma} \\
& + \max\left\{h^{\epsilon}\sup_{s<h}\left\|s^{1-\gamma}Ae^{As}[u(t+h)-u(t)]\right\|, h^{\epsilon-\gamma}\sup_{s\geq h}\left\|sAe^{As}[u(t+h)-u(t)]\right\|\right\} \\
\leq \ & \|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}.h^{\gamma-\epsilon}.h^{\epsilon} \\
& + \max\left\{h^{\epsilon}\sup_{s<h}\left\|s^{1-\gamma}Ae^{As}[u(t+h)-u(t)]\right\|, h^{\epsilon-\gamma}M_1.\|u(t+h)-u(t)\|\right\} \\
\leq \ & \|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}.T^{\gamma-\epsilon}.h^{\epsilon} + \max\left\{h^{\epsilon}\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{\gamma}, h^{\epsilon-\gamma}M_1.\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}.h^{\gamma}\right\}
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\|u(t+h)-u(t)\|_{D_A(\gamma-\epsilon)} \leq h^{\epsilon}\left(\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}.T^{\gamma-\epsilon}+\max\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{\gamma}, M_1.\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}.\right\}\right)$$

d'où $u \in C^{\epsilon}([0,T];D_A(\gamma-\epsilon))$. En utilisant (1.4.1) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|u\|_{C^{\epsilon}([0,T];D_A(\gamma-\epsilon))} &= \sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{D_A(\gamma-\epsilon)}+\sup_{t,t+h\in[0,T]}\frac{\|u(t+h)-u(t)\|_{D_A(\gamma-\epsilon)}}{h^{\epsilon}} \\
&\leq (1+M_1)\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{D_A(\gamma)}+\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}T^{\gamma-\epsilon} \\
&\quad +\max\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{\gamma}, M_1\|u\|_{\gamma}\right\} \\
&\leq (1+M_1)\|u\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma))}+\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}T^{\gamma-\epsilon} \\
&\quad +\max\left\{\|u\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma))}, M_1\|u\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma))}\right\} \\
&\leq \left(1+M_1+T^{\gamma-\epsilon}\right)\max\left(\|u\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma))};\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}\right) \\
&\quad +\max\{1,M_1\}.\|u\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma))}
\end{aligned}$$

si $M_1 \geq 1$ on trouve

$$\|u\|_{C^{\epsilon}([0,T];D_A(\gamma-\epsilon))} \leq \left(1+2M_1+T^{\gamma-\epsilon}\right)\max\left(\|u\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma))};\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}\right)$$

et pour $M_1 < 1$;on trouve

$$\|u\|_{C^{\epsilon}([0,T];D_A(\gamma-\epsilon))} \leq \left(2+M_1+T^{\gamma-\epsilon}\right)\max\left(\|u\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma))};\|u\|_{C^{\gamma}([0,T];E)}\right).$$

Proposition 2.1.3 *Soit $T>0$ et $0<\theta_1<\theta_2$. Si $u \in C([0,T];E)\cap\mathcal{B}([0,T];D_A(\theta_2,\infty))$, alors*

$$u \in C([0,T];D_A(\theta_1))$$

Preuve. Soit $\epsilon > 0$ et $\delta = \delta(\epsilon)$ telle que

$$2\delta^{\theta_2-\theta_1}\|u\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\theta_2,\infty))} < \epsilon$$

donc pour $0 \leq t; t+h \leq T$ nous avons $u(t) \in D_A(\theta_1)$ et

$$\begin{aligned}
& \|u(t+h)-u(t)\|_{D_A(\theta_1)} \\
= & \|u(t+h)-u(t)\| + \sup_{0<s<\delta} s^{\theta_2-\theta_1}\left\|s^{1-\theta_2}Ae^{As}[u(t+h)-u(t)]\right\| \\
& + \sup_{\delta<s<T}\left\|s^{1-\theta_1}Ae^{As}[u(t+h)-u(t)]\right\| \\
\leq & \|u(t+h)-u(t)\| + \sup_{0<s<\delta} s^{\theta_2-\theta_1}\left\|s^{1-\theta_2}Ae^{As}[u(t+h)-u(t)]\right\| \\
& + \frac{M_1}{\delta^{\theta_1}}\|u(t+h)-u(t)\| \\
\leq & \left(1+\frac{M_1}{\delta^{\theta_1}}\right)\|u(t+h)-u(t)\| + \delta^{\theta_2-\theta_1}\|u(t+h)-u(t)\|_{\theta_2} \\
\leq & \left(1+\frac{M_1}{\delta^{\theta_1}}\right)\|u\|_{C(0;T;E)} + \delta^{\theta_2-\theta_1}\|u\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\theta_2,\infty))}
\end{aligned}$$

donc $u \in C([0,T]; D_A(\theta_1))$

2.2 Problèmes auxiliares et solutions (stricte ou classique)

On suppose toujours que $f \in C([0,T]; E)$. Il est connu que si $x \in \overline{D(A)}$ alors la solution faible donnée par (2.1.4) appartient à $u \in C([0,T]; E)$. On montre que cette solution est en fait plus régulière, pour cela on va étudie séparément les deux problèmes auxiliares suivants

$$(P_{aux1}) \quad \begin{cases} u_0'(t) = Au_0(t) \\ u_0(0) = x; \end{cases} \quad \text{et} \quad (P_{aux2}) \quad \begin{cases} u_1'(t) = Au_1(t) + g(t) \\ u_1(0) = 0; \end{cases}$$

Théorème 2.2.1 *Soit $x \in E$ et $t \geq 0$; alors*

$$u_0(t) = e^{At}x.$$

Pour chaque $T > 0$ et $k \in \mathbb{N}$; on a

$$u_0 \in \mathcal{B}([0,T]; E) \cap C^k([0,T]; D_{A^k}).$$

En plus

1. Si $x \in \overline{D(A)}$; alors $u_0 \in C([0,T]; E)$ et u_0 est une solution classique du problème $(P_{aux}1)$.

2. Si $x \in D_A(\gamma,\infty)$ alors

$$u_0 \in C^\gamma([0,T]; E) \cap \mathcal{B}([0,T]; D_A(\gamma,\infty)) \cap C^\epsilon([0,T]; D_A(\gamma-\epsilon))$$

pour tout $\epsilon \in]0, \gamma[$ *avec*

$$\|u_0\|_{C^\gamma([0,T];E)} \leq \max\left(M_0, \frac{1}{\gamma}\right) \|x\|_{D_A(\gamma,\infty)}$$

$$\|u_0\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty))} \leq M_0 \|x\|_{D_A(\gamma,\infty)}$$

Preuve.

1. En utilisant les propriétés des semi-groupes (Proposition (1.3.2)), on montre que u_0 est une solution du problème auxiliare (P_{aux1}), en suite grâce à la Proposition (1.3.3) premier point, on montre que u_0 est continue si $x \in \overline{D(A)}$.

En on déduit que u_0 est une solution classique c'est à dire :

$$u_0 \in C([0,T];E) \cap C^1\left(\left[0^+,T\right];E\right) \cap C\left(\left[0^+,T\right];D(A)\right)$$

Si $x \in D(A)$.

2. Supposons que $x \in D_A(\gamma,\infty)$, d'après la relation

$$A\int_0^t e^{As}xds = e^{At}x - x$$

et pour tout $0 \leq t \leq t+h \leq T$, on trouve

$$\left\|e^{A(t+h)}x - e^{At}x\right\| = \left\|\int_t^{t+h} Ae^{As}xds\right\| \leq \|x\|_\gamma \int_t^{t+h} s^{\gamma-1}ds \leq \|x\|_\gamma \frac{h^\gamma}{\gamma},$$

par conséquent $u_0 \in C^\gamma([0,T];E)$ et

$$\|u_0\|_{C^\gamma([0,T];E)} \leq \max\left(M_0, \frac{1}{\gamma}\right) \|x\|_{D_A(\gamma,\infty)}.$$

D'autre part, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$

$$\left\|A^n e^{At}\right\|_{\mathcal{L}(D_A(\gamma,\infty))} \leq \left\|A^n e^{At}\right\|_{\mathcal{L}(E)}$$

on en déduit que

$$u_0 \in \mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty))$$

et

$$\|u_0\|_{\mathcal{B}([0,T];D_A(\gamma,\infty))} \leq M_0 \|x\|_{D_A(\gamma,\infty)}.$$

Finalement grâce à l'injection (2.1.6) on a

$$u_0 \in C^{\epsilon}\left([0,T]\,; D_A\left(\gamma-\epsilon\right)\right), \qquad \forall \epsilon \in \left]0,\gamma\right[$$

Remarque. Le sens inverse du Théorème 2.2.1) est vraie c'est à dire on a les implications suivantes

1. Si $u_0 \in C^{\gamma}\left([0,T]\,;E\right)$ alors $x \in D_A\left(\gamma,\infty\right)$
2. Si $u_0 \in C'\left([0,T]\,;E\right)$ ou $u_0 \in C\left([0,T]\,;D\left(A\right)\right)$ alors $\left(x \in D\left(A\right) \text{ et } Ax \in \overline{D\left(A\right)}.\right)$

grâce a la Propostion $(1.3.3,\ 3.)$.

Théorème 2.2.2 *Soient* $f \in C\left([0,T]\,;E\right)$ *et*

$$u_1\left(t\right) = \int_0^t e^{A(t-s)} f\left(s\right) ds \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Alors

$$u_1 \in C^{1-\theta}\left([0,T]\,;D_A\left(\theta\right)\right) \qquad \forall \theta \in \left]0,1\right[$$

et

$$\begin{aligned} \left\|u_1\right\|_{C^{1-\theta}([0,T];D_A(\theta))} &\leq C_1.\left\|f\right\|_{C([0,T];E)} \\ \left\|u_1\right\|_{C([0,T];D_A(\theta))} &\leq C_2.\left\|f\right\|_{C([0,T];E)} \end{aligned}$$

où $C_1; C_2$ sont des constante dépend de $\theta; T; M_0$ et M_1.

Théorème 2.2.3 *Soient* $f \in C\left([0,T]\,;E\right)$ *,*$x \in \overline{D\left(A\right)}$ *et* u *est une solution faible de* (2.1.1). *Alors*

$$u \in C^{1-\theta}\left(0^+,T;D_A\left(\theta\right)\right) \qquad \forall \theta \in \left]0,1\right[$$

en plus

1. Si $x \in D_A\left(\gamma,\infty\right)$ alors

$$u \in C^{\gamma}\left([0,T]\,;E\right) \cap \mathcal{B}\left([0,T]\,;D_A\left(\gamma,\infty\right)\right) \cap C^{\epsilon}\left([0,T]\,;D_A\left(\gamma-\epsilon\right)\right) \qquad \forall \epsilon \in \left]0,\gamma\right[$$

2. Si $x \in D\left(A\right)$ alors

$$u \in C^{1-\theta}\left([0,T]\,;D_A\left(\theta\right)\right) \qquad \forall \theta \in \left]0,1\right[$$

Preuve. Conséquence directe des deux théorèmes $(2.2.1; 2.2.2)$ et le fait que $u = u_0 + u_1$.

2.3 La régularité

On commence par le cas particulier $x = 0 = f(0)$.

Théorème 2.3.1 *Soit* $\beta \in]0,1[$ *si* $f \in C_0^\beta([0,T];E)$; *alors pour tout* $t \in [0,T]$

$$A\left(e^A * f\right)(t) = \int_0^t Ae^{A(t-s)}\left[f(s) - f(t)\right]ds + e^{At}f(t) - f(t) \tag{2.3.1}$$

$$\left(e^A * f\right)'(t) = \int_0^t Ae^{A(t-s)}\left[f(s) - f(t)\right]ds + e^{At}f(t) \tag{2.3.2}$$

et $e^A * f$ vérifiée(2.1.1) (si $x = 0$) pour tout $t \in [0,T]$. De plus

$$\left(e^A * f\right)'; A\left(e^A * f\right) \in C_0^\beta([0,T];E) \tag{2.3.3}$$

$$\left\|\left(e^A * f\right)'\right\|_{C^\beta([0,T];E)} \leq C\left\|f\right\|_\beta \tag{2.3.4}$$

$$\left\|A\left(e^A * f\right)\right\|_{C^\beta([0,T];E)} \leq \left(C + T^\beta + 1\right)\left\|f\right\|_\beta \tag{2.3.5}$$

où C dépendent de β,T, M_0, M_1 et M_2.

Preuve. Posons pour $t \in [0,T]$

$$w(t) = \left(e^A * f\right)(t) = w_1(t) + w_2(t)$$

où

$$\begin{aligned} w_1(t) &= \int_0^t e^{A(t-s)}\left[f(s) - f(t)\right]ds \\ w_2(t) &= \int_0^t e^{A(t-s)}f(t)\,ds = \int_0^t e^{As}f(t)\,ds \end{aligned}$$

On va montrer que $w_1(t)$, $w_2(t) \in D(A)$, c'est évident lorsque $t = 0$ (car $f(0) = 0$).

Or, pour $0 \leq s < t$ on a

$$\begin{aligned} \left\|Ae^{A(t-s)}\left[f(s) - f(t)\right]\right\| &= \left\|(t-s)\,Ae^{A(t-s)}\frac{\left[f(s) - f(t)\right]}{(t-s)}\right\| \\ &\leq \left\|(t-s)\,Ae^{A(t-s)}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \cdot \sup_{t;s\in[0;T]}\left\|\frac{\left[f(s) - f(t)\right]}{(t-s)^\beta}\right\|_E \cdot (t-s)^{\beta-1} \\ &\leq M_1\left\|f\right\|_\beta(t-s)^{\beta-1} \end{aligned}$$

On en déduit $w_1(t) \in D(A)$, pour tout $t \in]0,T]$ et

$$Aw_1(t) = \int_0^t Ae^{A(t-s)}[f(s) - f(t)]\, ds \qquad (2.3.6)$$

donc

$$\|Aw_1(t)\| \leq M_1 \|f\|_\beta \int_0^t (t-s)^{\beta-1}\, ds \leq M_1\beta^{-1}T^\beta \|f\|_\beta \qquad (2.3.7)$$

De (2) de la Proposition (1.3.3), on sait que $w_2(t) \in D(A)$ et

$$Aw_2(t) = e^{At}f(t) - f(t)\,. \qquad (2.3.8)$$

En utilisant ensuite (2.3.6), on trouve la première égalité. Grâce à l'hypothèse $f(0) = 0$ et (2.3.8), on déduit que

$$\begin{aligned}\|Aw_2(t)\| &\leq \left\|e^{At}(f(t) - f(0))\right\| + \|f(t) - f(0)\| \\ &\leq M_0.\|f\|_\beta t^\beta + \|f\|_\beta t^\beta \\ &\leq (M_0+1)\|f\|_\beta T^\beta\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sup \left\|A\left(e^A * f\right)(t)\right\| \leq \left(1 + M_0 + M_1\beta^{-1}\right)T^\beta \|f\|_\beta \qquad (2.3.9)$$

Montrons maintenant que w vérifie l'équation

$$w'(t) = Aw(t) + f(t) \qquad 0 \leq t < T \qquad (2.3.10)$$

Soit $\delta \in]0,T[$ fixé. On définit sur l'intervalle $[\delta, T]$ une famille de fonctions w_ϵ, dépendente du paramètre $\epsilon \in]0,\delta[$:

$$w_\epsilon(t) = \int_0^{t-\epsilon} e^{A(t-s)}f(s)\, ds = \int_\epsilon^t e^{As}f(t-s)\, ds \qquad \delta \leq t < T. \qquad (2.3.11)$$

Il est facile de voir que

$$\lim_{\epsilon\to 0} w_\epsilon(t) = w(t) \qquad \delta \leq t < T$$

et que $w_\epsilon \in C^1\left([\delta, T]; E\right)$ avec

$$\begin{aligned}
w'_\epsilon(t) &= e^{A\epsilon} f(t-\epsilon) + \int_0^{t-\epsilon} A e^{A(t-s)} f(s)\, ds \\
&= e^{A\epsilon} f(t-\epsilon) + \int_0^{t-\epsilon} A e^{A(t-s)} \left[f(s) - f(t)\right] ds + \int_0^{t-\epsilon} A e^{A(t-s)} f(s)\, ds \\
&= e^{A\epsilon} f(t-\epsilon) + \int_0^{t-\epsilon} A e^{A(t-s)} \left[f(s) - f(t)\right] ds - e^{A\epsilon} f(t) + e^{At} f(t)
\end{aligned}$$

en utilisant (2.3.1), on obtient pour $t \in [\delta, T]$

$$\left\|w'_\epsilon(t) - Aw(t) - f(t)\right\| \leq \left\|e^{A\epsilon}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \left\|f(t-\epsilon) - f(t)\right\| + M_1 \left\|f\right\|_\beta \int_{t-\epsilon}^{t} (t-s)^{\beta-1}\, ds$$

ce qui implique que

$$\lim_{\epsilon \to 0} w'_\epsilon(t) = Aw(t) + f(t)$$

uniformément pour $t \in [\delta, T]$. Ce qui signifie que $w'; Aw \in C\left(0^+, T; E\right)$ et w vérifie l'équation (2.3.10) sur $]0, T]$, mais grâce à l'hypothèse $f(0) = 0$ en déduit facilement que Aw est continue en 0 et donc (2.3.10) est vérifie pour $t \in \left]0, T\right]$. évidemment on trouve (2.3.1); (2.3.10) et (2.3.2).

Montrons maintenant que Aw_1, $Aw_2 \in C^\beta(0, T; E)$. Pour Aw_1, on pose pour $0 < t < t+h \leq T$

$$w_1(t+h) - w_1(t) = v_1(t,h) + v_2(t,h) + v_3(t,h), \tag{2.3.12}$$

où

$$\begin{aligned}
v_1(t,h) &= \int_0^t \left[e^{A(t-s+h)} - e^{A(t-s)}\right] \left[f(s) - f(t)\right] ds \\
v_2(t,h) &= \int_0^t e^{A(t-s+h)} \left[f(t) - f(t+h)\right] ds \\
v_3(t,h) &= \int_t^{t+h} e^{A(t-s+h)} \left[f(s) - f(t+h)\right] ds.
\end{aligned}$$

Pour $0 \leq s < t$, on a

$$\begin{aligned}\left\|A\left[e^{A(t-s+h)}-e^{A(t-s)}\right][f(s)-f(t)]\right\| &\leq \left\|\int_{t-s}^{t-s+h} A^2 e^{Ar} dr\right\|_{\mathcal{L}(E)} \|f\|_\beta (t-s)^\beta \\ &\leq M_2 \|f\|_\beta (t-s)^{\beta-1} (t-s+h)^{-1} h.\end{aligned}$$

donc $v_1(t,h) \in D(A)$ et

$$\|Av_1(t,h)\| \leq M_2 \|f\|_\beta h^\beta \int_0^{+\infty} (s+1)^{-1} s^{\beta-1} ds.$$

En plus, d'après (2) de la Proposition (1.3.3), on trouve que $v_2(t,h) \in D(A)$ et

$$Av_2(t,h) = e^{A(t+h)}[f(t)-f(t+h)] - e^{Ah}[f(t)-f(t+h)]$$

ceci implique

$$\|Av_2(t,h)\| \leq M_0 \|f\|_\beta h^\beta. \tag{2.3.13}$$

Finalement, comme $s \in [t, t+h]$, alors

$$\left\|Ae^{A(t-s+h)}[f(s)-f(t+h)]\right\| \leq \frac{M_1}{(t-s+h)^{1-\beta}} \|f\|_\beta$$

on obtient donc $v_3(t,h) \in D(A)$ et

$$\|Av_3(t,h)\| \leq M_1 \|f\|_\beta \beta^{-1} h^\beta. \tag{2.3.14}$$

De (2.3.12) $\sim$ (2.3.14) on déduit que $Aw_1 \in C^\beta(0,T;E)$ et

$$\|Aw_1(t+h) - Aw_1(t)\| \leq \left(M_2 \int_0^{+\infty} (s+1)^{-1} s^{\beta-1} ds + 2M_0 + M_1\beta^{-1}\right) \|f\|_\beta h^\beta \tag{2.3.15}$$

pour $0 \leq t, t+h \leq T$.

On examine maintenant $w_2(t) = \int_0^t e^{As} f(t) ds$. On déduit ; de la Proposition (1.3.3) point (2) ; que $Aw_2 \in D(A)$ et

$$Aw_2(t) = e^{At} f(t) - f(t). \tag{2.3.16}$$

Ce qui implique que $Aw_2 \in C(0,T;E)$ car $f(0) = 0$; en utilisant une autre fois cette hypothèse on trouve que pour $0 \leq t < t+h \leq T$

$$\begin{aligned}
\left\|e^{A(t+h)} f(t+h) - e^{At} f(t)\right\| &\leq \left\|e^{A(t+h)} [f(t+h) - f(t)]\right\| + \left\|\left(e^{A(t+h)} - e^{At}\right) f(t)\right\| \\
&\leq M_0 \|f\|_\beta h^\beta + \left\| \int\limits_{t-s}^{t-s+h} Ae^{As} ds \right\|_{\mathcal{L}(E)} \|f\|_\beta t^\beta \\
&\leq \|f\|_\beta \left(M_0 h^\beta + M_1 t^\beta \int_t^{t+h} s^{-1} ds \right) \\
&\leq \|f\|_\beta \left(M_0 h^\beta + M_1 \int_t^{t+h} s^{\beta-1} ds \right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\left\|e^{A(t+h)} f(t+h) - e^{At} f(t)\right\| \leq \|f\|_\beta \left(M_0 + M_1 \beta^{-1}\right) h^\beta. \tag{2.3.17}$$

Ainsi (2.3.16) et (2.3.17) implique, pour $0 \leq t < t+h \leq T$, que

$$\begin{aligned}
\|Aw_1(t+h) - Aw_1(t)\| &\leq \left\|e^{A(t+h)} f(t+h) - e^{At} f(t)\right\| + \|f(t+h) - f(t)\| \\
&\leq \|f\|_\beta \left(M_0 + M_1\beta^{-1} + 1\right) h^\beta
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

et $Aw_2 \in C^\beta(0,T;E)$.

En conclusion $A\left(e^A * f\right) \in C^\beta(0,T;E)$ et

$$\left\|A\left(e^A * f\right)\right\|_\beta \leq \left(1 + 3M_0 + 2M_1\beta^{-1} + M_2 \int\limits_0^{+\infty} (s+1)^{-1} s^{\beta-1} ds \right) \|f\|_\beta. \tag{2.3.19}$$

En vertu de (2.3.11); on déduit aussi que $\left(e^A * f\right)' \in C^\beta(0,T;E)$. De (2.3.2) et (2.3.7) il vient que

$$\left(e^A * f\right)'(t) = Aw_1(t) + e^{At} f(t) \qquad 0 \leq t \leq T$$

et (2.3.8), (2.3.15) et (2.3.17) implique

$$\left\|\left(e^A * f\right)'\right\|_{C^\beta(0,T;E)} \leq \left(M_1\beta^{-1}T^\beta + M_0T^\beta + M_2 \int\limits_0^{+\infty} (s+1)^{-1} s^{\beta-1} ds \right) \|f\|_\beta.$$

En conclusion; l'inégalité (2.3.4) est vérifiée. D'après (2.3.10), (2.3.19) on trouve (2.3.5) avec la constante

$$C = M_0\left(3 + T^\beta\right) + M_1\beta^{-1}\left(T^\beta + 2\right) + M_2 \int\limits_0^{+\infty} (s+1)^{-1} s^{\beta-1} ds.$$

Théorème 2.3.2 *Soit $f \in C^{\beta}([0,T];E)$ et $x \in D(A)$. Alors le problème* (0.0.1) *admet une solution classique u telle que :*

$$u' \in C^{\beta}\left(\left[0^{+},T\right];E\right) \cap \mathcal{B}\left(\left[0^{+},T\right];D_{A}(\beta,\infty)\right) \cap C^{\epsilon}\left(\left[0^{+},T\right];D_{A}(\beta-\epsilon)\right)$$

pour tout $\epsilon \in]0,\beta[$,

$$Au \in C^{\beta}\left(\left[0^{+},T\right];E\right),$$

et pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$u'(t) = Ae^{At}x + e^{At}f(t) + \int_{0}^{t} Ae^{A(t-s)}\left[f(s)-f(t)\right]ds.$$

En plus on a la propriété suivant :

$$x \in D_{A}(\gamma,\infty) \Rightarrow u \in C^{\gamma}([0,T];E) \cap \mathcal{B}([0,T];D_{A}(\gamma,\infty)) \cap C^{\epsilon}([0,T];D_{A}(\gamma-\epsilon)) \quad (2.3.20)$$

pour tout $\epsilon \in]0,\gamma[$.

Preuve. la solution du (0.0.1) est la somme des deux fonctions u_1 et u_2 solutions des deux problèmes

$$\begin{cases} u_1'(t) = Au_1(t) + f(t) - f(0), & t \in [0,T], \\ u_1(0) = 0 \end{cases} \quad (2.3.21)$$

et

$$\begin{cases} u_2'(t) = Au_2(t) + f(0), & t \in [0,T], \\ u_2(0) = x \end{cases} \quad (2.3.22)$$

On sait d'après le Théorème (2.3.1) et (2.3.3) que $u_1 = e^{A} * (f(\cdot) - f(0))$ est une solution stricte du (2.3.21) vérifiant

$$u_1' \in C^{\beta}([0,T];E) \cap \mathcal{B}([0,T];D_{A}(\beta,\infty))$$

$$Au_1 \in C^{\beta}([0,T];E)$$

de (2.3.2) on déduit que pour $0 \leq t \leq T$

$$u_1'(t) = \int_{0}^{t} Ae^{A(t-s)}\left[f(s)-f(t)\right]ds + e^{At}f(t) - e^{At}f(0)$$

d'autre part, il est facile de vérifier que

$$u_2(t) = e^{At}x + \int_{0}^{t} e^{As}f(0)\,ds$$

est une solution classique de (2.3.22) et pour tout $0 \leq t \leq T$

$$u_2'(t) = Ae^{At}x + e^{At}f(0) \tag{2.3.23}$$

En conclusion

$$u = u_1 + u_2$$

est une solution classique de $(0.0.1)$.

Or, puisque $x \in D_A(\gamma, \infty)$ alors $t \to e^{tA}x$ appartient a $C^\gamma(0, T; E) \cap \mathcal{B}(0, T; D_A(\gamma, \infty))$ et en vertu du théorème 2.2.1, et le fait que

$$u_1 \in C^\gamma(0, T; E) \cap C(0, T; D(A)),$$

on déduit donc (2.3.20).

Théorème 2.3.3 *Si* $f \in C^\beta([0, T]; E)$ $(0 < \beta < 1)$ *et* $x \in D(A)$, *et* $Ax + f(0) \in \overline{D(A)}$, *alors le problème* $(0.0.1)$ *admet une solution stricte* u *pour tout* $t \in [0, T]$

$$u'(t) = e^{At}(Ax + f(t)) + \int_0^t e^{A(t-s)}[f(s) - f(t)]\,ds. \tag{2.3.24}$$

de plus

$$x \in D(A) \text{ et } Ax + f(0) \in D_A(\beta, \infty) \tag{2.3.25}$$

et pour tout $\epsilon \in]0, \beta[$

$$\begin{aligned} u' &\in C^\beta([0, T]; E) \cap \mathcal{B}([0, T]; D_A(\beta, \infty)) \cap C^\epsilon([0, T]; D_A(\beta - \epsilon)) && (2.3.26)\\ Au &\in C^\beta([0, T]; E) && (2.3.27) \end{aligned}$$

et

$$\|u'\|_{C^\beta([0,T];E)} \leq C_1 \|f\|_\beta + \max\left(M_0 + \beta^{-1}\right) \|Ax + f(0)\|_{D_A(\beta,\infty)} \tag{2.3.28}$$

$$\begin{aligned} \|Au\|_{C^\beta([0,T];E)} \leq{} & \left(C_1 + T^\beta + 1\right) \|f\|_\beta + \|f(0)\| && (2.3.29)\\ & + \max\left(M_0 + \beta^{-1}\right) \|Ax + f(0)\|_{D_A(\beta,\infty)} \end{aligned}$$

où

$$C_1 = M_0\left(3+T^{\beta}\right)+M_1\beta^{-1}\left(2+T^{\beta}\right)+M_2\int\limits_0^{+\infty}(s+1)^{-1}s^{\beta-1}ds$$

$$C_2 = M_0T^{\beta}+M_1\left(1+\beta^{-1}T^{\beta}\right)+M_2\int\limits_0^{+\infty}\frac{s^{\beta}}{(1+s)^2}ds$$

Preuve.

Soit u_1, u_2 deux fonctions définies par (2.3.21) et (2.3.22). Si $x \in D(A)$ et $Ax+f(0) \in \overline{D(A)}$, on déduit de l'égalité (2.3.23) que u_2 est une solution stricte et pour $0 \leq t \leq T$

$$u_2'(t) = e^{At}(Ax+f(0)). \tag{2.3.30}$$

En utilisant (2.3.2) , on montre que u_1 vérifie

$$u_1'(t) = \int\limits_0^t Ae^{A(t-s)}[f(s)-f(t)]\,ds + e^{At}f(t) - e^{At}f(0).$$

or u_1 est une solution stricte car le second membre$g(t) := f(t)-f(0)$ de (2.3.21) est nul en $t=0$.

Par conséquent u est une solution stricte de (2.1.1) et

$$\begin{aligned} u'(t) &= u_1'(t)+u_2'(t) \\ &= \int\limits_0^t Ae^{A(t-s)}[f(s)-f(t)]\,ds + e^{At}f(t) - e^{At}f(0) \\ &\quad + e^{At}(Ax+f(0)) \\ &= \left(e^{A} * g\right)'(t) + e^{At}(Ax+f(0)). \end{aligned}$$

en plus

$$\begin{aligned} u_1' &\in C^{\beta}([0,T];E)\cap\mathcal{B}([0,T];D_A(\beta,\infty)) \\ Au_1 &\in C^{\beta}([0,T];E) \end{aligned}$$

comme

$$C^{\beta}([0,T];E)\cap\mathcal{B}([0,T];D_A(\beta,\infty)) \hookrightarrow C^{\epsilon}(0,T;D_A(\beta-\epsilon))$$

pour tout $\epsilon \in]0, \beta[$, alors

$$u_1' \in C^{\beta}\left([0,T]\,;E\right) \cap \mathcal{B}\left([0,T]\,;D_A\left(\beta,\infty\right)\right) \cap C^{\epsilon}\left(0,T;D_A(\beta-\epsilon)\right)$$

Pour u_2, on applique le Théorème 2.2.1 :

Si $Ax + f\left(0\right) \in \overline{D(A)}$, alors

$$u_2' \in C\left(0,T;E\right) \cap C\left(0^+,T;E\right) \cap C\left(0^+,T;D(A)\right)$$

et si $Ax + f\left(0\right) \in D_A(\beta,\infty)$, alors

$$u_2' \in C^{\beta}\left(0,T;E\right) \cap \mathcal{B}\left(0,T;D_A(\beta,\infty)\right) \cap C^{\epsilon}\left(0,T;D_A(\beta-\epsilon)\right)$$

Par conséquent

$$u' \in C^{\beta}\left(0,T;E\right) \cap \mathcal{B}\left(0,T;D_A(\beta,\infty)\right) \cap C^{\epsilon}\left(0,T;D_A(\beta-\epsilon)\right)$$

pour tout $\epsilon \in]0, \beta[$, et $Au \in C^{\beta}\left([0,T]\,;E\right)$.

Pour prouver les estimations (2.3.28) et (2.3.29) , on utilise le Théorème 2.2.1, on trouve

$$\begin{aligned} \|u_2'\|_{C^{\beta}(0,T;E)} &\leq \max\left(M_0, \tfrac{1}{\beta}\right) \|Ax + f\left(0\right)\|_{D_A(\beta,\infty)} \\ \|u_2'\|_{\mathcal{B}(0,T;D_A(\beta,\infty))} &\leq M_0 \|Ax + f\left(0\right)\|_{D_A(\beta,\infty)} , \end{aligned}$$

et par le Théorème 2.3.1, on trouve

$$\left\|\left(e^{A} * g\right)'(t)\right\|_{C^{\beta}(0,T;E)} \leq C\,\|g\|_{\beta} = C\,\|f\|_{\beta}$$

ainsi

$$\|u_2\|_{C^{\beta}(0,T;E)} \leq C\,\|f\|_{\beta} + \max\left(M_0, \frac{1}{\beta}\right) \|Ax + f\left(0\right)\|_{D_A(\beta,\infty)} .$$

Puisque

$$u_2'\left(t\right) = Au_2\left(t\right) + f(0) = e^{At}\left(Ax + f\left(0\right)\right)$$

alors

$$Au_2\left(t\right) = e^{At}\left(Ax + f\left(0\right)\right) - f\left(0\right),$$

donc

$$\|Au_2\left(t\right)\|_{C^{\beta}(0,T;E)} \leq \left\|e^{At}\left(Ax + f\left(0\right)\right)\right\|_{C^{\beta}(0,T;E)} + \|f\left(0\right)\|_{E}$$

et par le Théorème 2.3.1, on a

$$\left\|A\left(e^{A}*g\right)(t)\right\|_{C^{\beta}(0,T;E)}\leq\left(C+T^{\beta}+1\right)\|f\|_{\beta},$$

ensuite

$$\|Au\|_{C^{\beta}(0,T;E)}\leq\left(C+T^{\beta}+1\right)\|f\|_{\beta}+C\|f\|_{\beta}+\max\left(M_{0},\frac{1}{\beta}\right)\|Ax+f(0)\|_{D_{A}(\beta,\infty)}+\|f(0)\|_{E}.$$

Chapitre 3

Exemples

Exemple 3.0.1 *On considère le problème suivant*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) + g(t,x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, 0 < t < T \\ u(0,x) = \Phi(x) \ \text{ pour } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.0.1}$$

lorsque $g \in C\left([0,T]; L^2(\mathbb{R})\right)$.

On utilise les notations vectorielles

$$u(t,x) = u(t)(x), \ \ g(t,x) = g(t)(x) \ \text{ et } u(0,x) = u(0)(x).$$

Et on introduit l'opérateur A *défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}), v'' \in L^2(\mathbb{R}) \right\} = H^2(\mathbb{R}) \\ Av = v'', \quad v \in D(A), \end{cases} \tag{3.0.2}$$

Cet opérateur est linéaire fermé de domaine dense dans E. *De plus*

$$\begin{cases} \rho(A) \supset [0, \infty[\ \text{ et } \exists C_A > 0 \\ \forall \lambda \geqslant 0 : \left\| (A-\lambda)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(0,1))} \leqslant \dfrac{C_A}{\lambda} \end{cases},$$

On cherche la solution de l'équation spectrale suivante

$$(A-\lambda) v(x) = v''(x) - \lambda v(x) = g(x),$$

en appliquant la transformé de Fourier. Il vient que

$$\mathcal{F}(u(t))(\xi) = \frac{-\mathcal{F}(g(t))(\xi)}{\lambda + 4\pi^2 \xi^2}.$$

D'après la formule de Parseval, la transformée $\mathcal{F}$ est un isomorphisme et $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(E)$, alors on a

$$\begin{aligned} \|v(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\mathcal{F}(v(x))(\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(v(x))(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathcal{F}(g(x))(\xi)|^2}{|\lambda + 4\pi^2\xi^2|^2} d\xi \quad (3.0.3) \\ &\leqslant \frac{K}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(g(x))(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant \frac{K}{\lambda^2} \|g(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

En revanche, on a

$$\begin{cases} \mathcal{F}(v'(x))(\xi) = 2i\pi\xi\mathcal{F}(v(x))(\xi) = -\dfrac{2i\pi\xi\mathcal{F}(g(x))(\xi)}{\lambda + 4\pi^2\xi^2} \\ \mathcal{F}(v''(x))(\xi) = (2i\pi\xi)^2\mathcal{F}(v(x))(\xi) = \dfrac{4\pi^2\xi^2\mathcal{F}(g(x))(\xi)}{\lambda + 4\pi^2\xi^2}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \|v'(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{2\pi\xi}{\lambda + 4\pi^2\xi^2} \right|^2 |\mathcal{F}(g(x))(\xi)|^2 \, d\xi \\ &\leqslant \frac{K}{4\lambda} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(g(t))(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant \frac{K}{\lambda} \|g(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|v''(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{4\pi^2\xi^2}{\lambda + 4\pi^2\xi^2} \right|^2 |\mathcal{F}(g(x))(\xi)|^2 \, d\xi \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(g(x))(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant \|g(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Par conséquent $v(x), v'(x), v''(x)$ sont $L^2(\mathbb{R})$. D'autre part, on a pour $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} v(x) &= \left((A - \lambda)^{-1} g\right)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\xi t} \mathcal{F}(v)(\xi) \, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi\xi t}}{\lambda + 4\pi^2\xi^2} \mathcal{F}(g)(\xi) \, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi\xi(t-s)}}{\lambda + 4\pi^2\xi^2} g(s) \, ds d\xi. \end{aligned}$$

De (3.0.3) et pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\left\|(A - \lambda)^{-1} g\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{K}{\lambda} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

par conséquent l'hypothèse sur A est vérifiée. Il reste donc à caractérisée l'espace d'interpolation. Selon la Proposition 3 page 683 de l'article [10] et pour $p = m = 2$ et $q = \infty$ on trouve

$$D_A(\theta, \infty) = (D_A, E)_{1-\theta,\infty} = \left(H^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})\right)_{1-\theta,\infty} = B^{2\theta}_{2,\infty}(\mathbb{R})$$

Supposons que g est une fonction holdérienne i.e.

$$g \in C^\beta\left([0,T]; L^2(\mathbb{R})\right) \quad \textit{avec } 0 < \beta < 1$$

notre problème admet une solution stricte u ; en plus si

$$\Phi \in H^2(\mathbb{R}) \ \textit{ et } \Phi'' + g(0) \in B^{2\theta}_{2,\infty}(\mathbb{R})$$

alors

$$u', \ Au \in C^\beta\left([0,T]; L^2(\mathbb{R})\right).$$

Exemple 3.0.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$. On considère le problème de la chaleur suivante*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} w(t,x) = \Delta w(t,x) + g(t,x) & \textit{pour } x \in \overline{\Omega}, 0 < t < T \\ w(t,x) = 0 & 0 < t < T, x \in \partial\Omega \\ w(0,x) = \phi(x) & \textit{pour } x \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{3.0.4}$$

lorsque le second membre $f \in C([0,T]; E)$ où $E = C\left(\overline{\Omega}\right)$ muni de la norme sup.
En utilisant les notations vectorielles usuelles

$$w(t,x) = u(t)(x) \quad \textit{et} \quad g(t,x) = f(t)(x)$$

pour écrire ce problème concret sous la forme opérationnelle suivant

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & \textit{pour } 0 < t < T \\ u(0) = \phi \end{cases} \tag{3.0.5}$$

où

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ v \in C_0\left(\overline{\Omega}\right), \ \Delta v \in E \right\} \\ Av &= \Delta v \end{aligned}$$

Stewart, dans [21], a prouvé que le laplacien Δ génère un semi-groupe analytique c'est a dire l'hypothèse sur l'opérateur$A$ est vérifiée.

Dans cet exemple $\overline{D(A)} = C_0\left(\overline{\Omega}\right) \neq E$ *et d'après [13] l'espace intermédiaire est caractérisé par*

$$D_A(\theta, \infty) \simeq C_0^{2\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$$

pour chaque $\theta \in \left]0,1\right[$ *et* $\theta \neq \frac{1}{2}$.

Remarque. *Pour tout* $w : [0,T] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, *on définit*

$$\begin{array}{rcl} u : [0,T] & \to & E \\ t & \mapsto & u(t) \end{array}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $u(t)(x) = w(t,x)$. *On a pour tout* $0 < \beta < 1$

$u \in C^\beta\left(0,T; C\left(\overline{\Omega}\right)\right)$ *si et seulement si* w *est continue dans* $[0,T] \times \overline{\Omega}$ *et* $w(.x) \in C^\beta(0,T)$ *uniformément pour* $x \in \overline{\Omega}$.

Ainsi le résultat pour cet exemple est donné par le corollaire

Corollaire 3.0.1 *Supposons que*

(1) g *est continue dans* $[0,T] \times \overline{\Omega}$ *et* $g(.,x) \in C^\beta(0,T)$ *uniformément pour* $x \in \overline{\Omega}$.

(2) $\phi \in C_0\left(\overline{\Omega}\right)$.

Alors le problème (3.0.5) *admet une solution classique* u *donc il existe une fonction* w *vérifiant le Problème (3.0.4) et*

1) w *est continue dans* $[0,T] \times \overline{\Omega}$.

2) $(t,x) \mapsto \dfrac{\partial}{\partial t} w(t,x)$, $(t,x) \mapsto \Delta w(t,x)$ *sont continues dans* $[0,T] \times \overline{\Omega}$.

3) Pour tout $\epsilon \in \left]0,T\right]$, $t \mapsto \dfrac{\partial}{\partial t} w(t,x)$, $t \mapsto \Delta w(t,x) \in C^\beta(\epsilon,T)$ *uniformément pour* $x \in \overline{\Omega}$.

Si en plus $\beta \neq \frac{1}{2}$ *et* $x \mapsto \dfrac{\partial}{\partial t} w(t,x) \in C_0^{2\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$ *uniformément pour* $t \in [\epsilon, T]$

Bibliographie

[1] S. AGMON, "On the eigenfunctions and the eigenvalues of general elliptic boundary value problems," Comm. Pure Appl. Math. 15 (1962), 119-147.

[2] A. ARDITO and P. RICCIARDI, "Existence and regularity for linear delay partial differential equations," Nonlinear Anal. 4 (1980), 411-414.

[3] L. BERS, F.JOHN, and M. SCHCHTER, "Partial Differential Equations," Interscience, NewYork, 1964.

[4] H. BERENS and P. L.BUTZER, "Approximation theorems for semi-group operators in inter-mediate spaces", Bull. Amer. Math. Soc.(N.S.) 70 (1964), 689-692.

[5] P. L. BUTZER and H.BERENS, "semigroups of Operators and Approximation," Springer, Berlin, 1967.

[6] S. CAMPANATO, Generation of analytic semi-groups by elliptic operators of second order in Holder spaces, Ann. Scula Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 8 (1981), 495-512.

[7] G. DA PRATO and P. GRISVARD, "Equations d'évolution abstraites non linéaires de type parapolique," Ann. Mat. Pura Appl. (4) 120 (1979), 329-396.

[8] G. DA PRATO and E. SINESTRARI, "Holder regularity for non-autonomous abstract parabolic equtions," Israel J Math.42 (1982), 1-19.

[9] P. GRISVARD, "Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles," J. Math. pure Appl.54 (1975), 305-387.

[10] P. GRISVARD, "*Spazi di tracce e applicazioni,*" Rendiconti di Matematica (4). 5 (1972), série VI, pp. 657-729.

[11] T.KATO, "Perturbation Theory for linear Operators," Springer, Berlin, 1966.

[12] G.E. LADAS and V.LAKSHMIKANTHAM, "Differential Equtions in Abstract Spaces," Academic Press, New York, 1972.

[13] A. LUNARDI, "Analyticity of the maximal solution of an nonlinear parabolic eqution," Nonlinear Anal 6 (1982), 503-521.

[14] R. H. MARTIN, "Nonlinear Operators and Differential Equtions in Banach Spaces," Wiley, New York, 1976.

[15] A. MEDEGHRI, Cours Master 1 " Semi-groupes" Année universitaire 2017-2018 ; Université de Mostaganem.

[16] E. SINESTRARI, "*On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions,*" J. Math. Anal. App., 66 (1985), pp. 16-66.

[17] E. SINESTRARI, "On the solutions of the inhomogeneous evolution equations in Banach spaces," Rend.Accad. Naz.Lincei 70 (1981), 12-17.

[18] E. SINESTRARI, "Continuous interpolation spaces and spatial regularity in nonlinear Volterra integrodifferntial equations," J. Equations 5 (1983), 287-308.

[19] E. SINESTRARI, Classical solutions of parabolic equations in Holer spaces, Rend. Accard.Naz.Lincei 73 (1983), 289-297.

[20] E. SINESTRARI and P VERNOLE, semiliear evolution equations in interpolation spaces, Nonlinear Anal.1 (1977),249-261.

[21] B. STEWART, "Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators," Trans. Amer. Math. Soc.199 (1974), 141-162.

[22] B. STEWART, "Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators under general boundary conditions," Trans. Amer. Math. Soc.259 (1980), 299-310.

[23] H.TANABE, "Equations of Evolution," Pitman, London, 1979.

CONCLUSION

Dans ce travail, on a fait une synthèse sur l'article de Eugenio Sinestrari intitulé

"On the Absract Cauchy Probleme of Parabolic Type in Spaces of Continous Functions".

L'auteur a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour assurer l'existence et la régularité d'une solution classique ou stricte d'un problème de Cauchy abstrait

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \text{ avec } u(0) = x$$

tels que

▶ A est un opérateur linéaire fermé quelconque dans un espace de Banach E et de domaine $D_A \subset E$; vérifiant l'hypothése

$$(H) \qquad \begin{cases} \text{il existe } \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\text{ et } M > 0 \text{ telle que,} \\ S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leq \theta\} \subset \rho(A) \\ \text{et } \forall \lambda \in \rho(A) : \left\| \lambda (\lambda I - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M, \end{cases}$$

Où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de l'opérateur A

▶ f est une fonction holdérienne et x est un élement de E.

On termine par des exemples concrets pour illustrer la théorie abstraite prouvé auparavant.