

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
FILÈRE : MATHÉMATIQUES



UNIVERSITE  
Abdelhamid Ibn Badis  
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

*présenté par :*

**Wafaa DJEROUROU**

**Décomposition d'une fonction unidimensionnelle par une méthode  
basée sur une quantification semi-classique  
Application aux signaux bruités**

*soutenu publiquement le 26 Juin 2019 devant le jury composé de :*

<b>Présidente :</b>	Naima LAHMAR-ABLAOUI	MCB	UMAB
<b>Examinatrice :</b>	Soumia OULD ALI	MAA	UMAB
<b>Encadreuse :</b>	Zineb KAISSERLI	MCB	UMAB

Année Universitaire : 2018 / 2019

M  
A  
S  
T  
E  
R

# Dédicaces

*Je dédie ce travail à*

*Mes chers parents, que nulle dédicace ne puisse exprimer mes sincères sentiments, pour leur patience illimitée, leur encouragement contenu, leur aide, en témoignage de mon profond amour et respect pour leur grands sacrifices.*

*Mes chers frères Abd Razek, Salah et ma sœur Soutana pour leurs grands amours et leurs soutiens qu'ils trouvent ici l'expression de ma haute gratitude.*

*Mes très chers amies Nacira, Linda, Nesrine et Hafssa que sans leurs encouragements ce travail n'aura jamais vu le jour.*

*Toute ma famille et à tous ceux et celles que j'aime.*

*Wafaa*

# Remerciements

*J*e tiens à remercier tous d'abord **ALLAH** de m'avoir donné le courage, la volonté et la santé pour réaliser ce modeste travail.

*J*e tiens à remercier de tout cœur mon encadreuse Mademoiselle Zineb Kaiserli, MCB à l'université de Mostaganem, pour ces orientations et ces conseils.

*J*e tiens, aussi, à remercier les membres du jury Madame Naima Lahmar-Ablaoui, MCB à l'université de Mostaganem, et Madame Soumia Ould Ali, MAA à l'université de Mostaganem, d'avoir accepté de faire partie de mon Jury et pour l'intérêt qu'elles ont apporté à mon projet de Master.

*M*erci à tous mes enseignants de l'Université Abdelhamid Ibn Badis - Mostaganem de m'avoir donné le goût des sciences. Grâce à eux que j'ai eu le courage de choisir ce chemin.

*U*n grand merci à tous les personnes administratifs.

*U*n très grand remerciement à toutes mes connaissances et mes amies.

*E*n dernier, je remercie toute la famille *Djerourou*.

# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>iv</b>
<b>Liste des abréviations</b>	<b>v</b>
<b>Index des notations</b>	<b>vi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l'art</b>	<b>3</b>
1 Introduction . . . . .	3
2 Méthodes de décomposition de Fourier . . . . .	3
3 Méthode de décomposition en valeur singulière (SVD) . . . . .	5
4 Méthode de décomposition de Deift et Trubowitz . . . . .	6
5 Conclusion . . . . .	7
<b>2 Analyse spectrale semi-classique du signal : SCSA</b>	<b>8</b>
1 Introduction . . . . .	8
2 Un aperçu sur l'analyse semi-classique . . . . .	8
3 Définition de la SCSA . . . . .	9
4 Convergence et comportement du spectre discret en fonction de $h$ . . . . .	10
5 Conclusion . . . . .	12
<b>3 Résolution numérique de la SCSA, interprétation et applications</b>	<b>13</b>
1 Introduction . . . . .	13
2 Résolution numérique de la SCSA . . . . .	13
3 Application à des fonctions académiques . . . . .	15
4 Application à des signaux réels . . . . .	19
5 Conclusion . . . . .	21
<b>4 Extension de l'approche SCSA aux signaux bruités</b>	<b>22</b>
1 Introduction . . . . .	22
2 Quelques notions de base sur le bruit . . . . .	22
3 Approche SCSA et signaux bruités . . . . .	23
4 Application à des fonctions académiques . . . . .	25
5 Application à des signaux réels . . . . .	29
6 Conclusion . . . . .	31
<b>Conclusion</b>	<b>32</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>33</b>
<b>Annexe</b>	<b>35</b>

# Table des figures

2.1	Représentation de l'analyse semi-classique . . . . .	9
3.1	Algorithme de reconstruction d'une fonction unidimensionnelle par l'approche SCSA. . . . .	15
3.2	Variation de l'erreur moyenne quadratique $J(h)$ (Fig. (a)) et du nombre des valeurs propres négatives $N_h$ (Fig. (b)) en fonction de $h$ pour $f(t) = -t^2 + 16$ sur $[-4, 4]$ . . . . .	16
3.3	Variation de quelques valeurs propres de $H_h[I]$ en fonction de $h$ pour $f(t) = -t^2 + 16$ sur $[-4, 4]$ . . . . .	17
3.4	(a). Reconstruction de $f(t) = -t^2 + 16$ sur $[-4, 4]$ ; (b). Erreur relative correspondante pour $h = 0.2$ ( $N_h = 40$ ). . . . .	17
3.5	Les valeurs propres négatives $\mu_{n,h}$ , $n = 1, \dots, N_h$ de $-h^2 \frac{d^2}{dt^2} - f(t)$ , pour $f(t) = -t^2 + 16$ sur $[-4, 4]$ et $h = 0.2$ , sont toutes comprises entre $-\max f$ et 0. . . . .	18
3.6	Allure de la première, deuxième, dixième et dernière fonctions propres $L^2$ -normalisées $\psi_{n,h}^2$ dans le cas où $h = 0.2$ pour $f(t) = -t^2 + 16$ sur $[-4, 4]$ . . . . .	18
3.7	Valeurs propres réelles et estimées dans le cas où $h = 0.2$ pour $f(t) = -t^2 + 16$ sur $[-4, 4]$ . . . . .	19
3.8	Reconstruction de la pression artérielle par la SCSA pour $N_h = 9$ : (a). Pression mesurée et estimée; (b). Erreur relative correspondante [16]. . . . .	20
3.9	(a). Pression systolique mesurée et estimée; (b). Pression diastolique mesurée et estimée [16]. . . . .	20
3.10	Reconstruction du signal turbomachine et ses invariants [14]. . . . .	21
4.1	Représentation d'un signal bruité. . . . .	22
4.2	Quelques types de bruit : (a). Bruit blanc; (b). Bruit rose; (c). Bruit créneaux. . . . .	23
4.3	Valeurs propres estimées et bruitées dans le cas où $h = 0.2$ pour $f(t) = -t^2 + 16$ et $\tilde{f}(t) = -t^2 + 16 + \delta(t)$ avec $t \in [-4, 4]$ . . . . .	26
4.4	Allure du carré de quelques fonctions propres $L^2$ -normalisées dans le cas où $h = 0.2$ pour $f(t) = -t^2 + 16$ et $\tilde{f}(t) = -t^2 + 16 + \delta(t)$ avec $t \in [-4, 4]$ . . . . .	27
4.5	Débruitage de $\tilde{f}(t) = -t^2 + 16 + \delta(t)$ pour $\tilde{h} = 0.2$ sur $[-4, 4]$ : (a). Les fonctions $f$ , $\tilde{f}$ et $\tilde{f}_{\tilde{h}}$ ; (b). Zoom sur la figure (a); (c). Erreur relative correspondante. . . . .	27
4.6	Débruitage de $\tilde{f}(t) = -t^2 + 16 + \delta(t)$ pour $\tilde{h} = 0.8$ sur $[-4, 4]$ : (a). Les fonctions $f$ et $\tilde{f}$ ; (b). Les fonction $\tilde{f}_{\tilde{h}}(t)$ et $f(t)$ ; (c). Erreur relative correspondante. . . . .	28
4.7	Valeurs propres estimées et exactes de $\tilde{f}(t) = -t^2 + 16 + \delta(t)$ pour $\tilde{h} = 0.8$ . . . . .	28
4.8	Allure du carré de quelques fonctions propres $L^2$ -normalisées dans les cas non bruité et bruité avec $h = 0.2$ et dans le cas bruité avec $\tilde{h} = 0.8$ pour $\tilde{f}(t) = -t^2 + 16 + \delta(t)$ sur $[-4, 4]$ . . . . .	29
4.9	Filtrage d'un signal MRS [18]. . . . .	30
4.10	Localisation des fonctions propres [18]. . . . .	30

# Liste des abréviations

- CWT** : Transformée en ondelette continue (Continuous Wavelet Transform).
- dB** : Décibel.
- IRM** : Imagerie par résonance magnétique (Magnetic Resonance Imaging).
- MRS** : Spectroscopie par résonance magnétique (Magnetic Resonance Spectroscopy).
- p.p.** : Presque partout.
- ppm** : Partie par million.
- SCSA** : Analyse spectrale semi-classique du signal (Semi-Classical Signal Analysis).
- SNR** : Rapport signal à bruit (Signal to Noise Ratio).
- SVD** : Décomposition en Valeur Singulière (Singular Value Decomposition).
- TFC** : Transformée de Fourier Continue.
- TFD** : Transformée de Fourier Discrète.

# Index des notations

$\mathbb{R}$	: Espace des nombres réels.
$\mathbb{C}$	: Espace des nombres complexes.
$\mathbb{K}$	: Sous espace vectoriel de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	: Espace des matrices à valeurs réelles de taille $n \times m$ .
$\mathbb{C}^{n \times m}$	: Espace des matrices à valeurs complexes de taille $n \times m$ .
$t$	: Élément de $\mathbb{R}$ .
$\mathcal{C}^p$	: Espace des fonctions $p$ fois continument différentiables.
$L^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$	: Ensemble des fonctions $f$ mesurable sur $\mathbb{R}$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty}  f(t) ^{\frac{1}{2}} dt < \infty$ .
$L^1(\mathbb{R})$	: Ensemble des fonctions $f$ mesurable sur $\mathbb{R}$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty}  f(t)  dt < \infty$ .
$L^1_{loc}(\mathbb{R})$	: Ensemble des fonctions $f \in L^1(\Lambda)$ pour tout compact $\Lambda \subset \mathbb{R}$ .
$L^1_1(\mathbb{R})$	: Espace de Faddeev
$L^2(\mathbb{R})$	: Ensemble des fonctions $f$ mesurable sur $\mathbb{R}$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty}  f(t) ^2 dt < \infty$ .
$H^2$	: Espace de Sobolev d'ordre 2.
$f$	: Une fonction unidimensionnelle.
$\langle, \rangle$	: Le produit scalaire.
$\mathcal{S}f$	: Série de Fourier de la fonction $f$ .
$W_f$	: Transformée en ondelette continue de la fonction $f$ .
$V^*$	: Adjoint de la matrice $V$ , i. e. ; la transposée de la matrice conjuguée d'une matrice complexe .
$\mathcal{H}(f)$	: Opérateur de Schrödinger unidimensionnel associée à la fonction $f$ .
$D(\mathcal{H})$	: Domaine de définition de $\mathcal{H}(f)$ .
$\sigma$	: Spectre de $\mathcal{H}(f)$ .
$\sigma_c$	: Spectre continu de $\mathcal{H}(f)$ .
$\sigma_d$	: Spectre discret de $\mathcal{H}(f)$ .
$N$	: Nombre des valeurs propres négatives de l'opérateur de Schrödinger $\mathcal{H}(f)$ .
$\mu_n$	: Valeurs propres négatives de l'opérateur de Schrödinger $\mathcal{H}(f)$ avec $n = 1, \dots, N$ .
$\psi_n$	: Fonctions propres $L^2$ -normalisées associée à $\mu_n$ de l'opérateur de Schrödinger $\mathcal{H}(f)$ .
$J_+(s, t)$	: Fonction de Jost par la gauche associée à l'opérateur de Schrödinger $\mathcal{H}(f)$ .
$J_-(s, t)$	: Fonction de Jost par la droite associée à l'opérateur de Schrödinger $\mathcal{H}(f)$ .
$\mathcal{R}_r(s)$	: Coefficient de réflexion par la droite associé à l'opérateur de Schrödinger $\mathcal{H}(f)$ .
$\mathcal{R}_l(s)$	: Coefficient de réflexion par la gauche associé à l'opérateur de Schrödinger $\mathcal{H}(f)$ .
$T(s)$	: Coefficient de transmission associé à l'opérateur de Schrödinger $\mathcal{H}(f)$ .
$h$	: Paramètre semi-classique en lien avec la constante de Planck.
$\mathcal{H}_h(f)$	: Opérateur de Schrödinger semi-classique associé à la fonction $f$ .
$D(\mathcal{H}_h)$	: Domaine de définition de $\mathcal{H}_h(f)$ .

- $N_h$  : Nombre des valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_h(f)$ .  
 $\mu_{n,h}$  : Valeurs propres négatives de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_h(f)$  avec  $n = 1, \dots, N_h$ .  
 $\psi_{n,h}$  : Fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées à  $\mu_{n,h}$  de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_h(f)$ .  
 $D_2$  : Matrice de différenciation du second ordre.  
 $I$  : Matrice dont sa diagonale contient les éléments de la fonction  $f$ .  
 $H_h$  : Opérateur de Schrödinger semi-classique discrétisé.  
 $\underline{\psi}_{n,h}$  : Vecteurs propres  $L^2$ -normalisés associés à  $\mu_{n,h}$  de l'opérateur  $H_h(I)$  pour  $n = 1, \dots, N_h$ .  
 $\delta$  : Quantité définissant un bruit et/ou une perturbation.  
 $\tilde{f}$  : Fonction unidimensionnelle bruitée tel que  $\tilde{f}(t) = f(t) + \delta(t)$ .  
 $\tilde{h}$  : Paramètre semi-classique dans le cas bruité.  
 $\mathcal{H}_{\tilde{h}}(\tilde{f})$  : Opérateur de Schrödinger semi-classique associé à la fonction  $\tilde{f}$  dans le cas bruité.  
 $\tilde{N}_{\tilde{h}}$  : Nombre des valeurs propres négatives de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_{\tilde{h}}(\tilde{f})$ .  
 $\tilde{\mu}_{\tilde{n},\tilde{h}}$  : Valeurs propres négatives de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_{\tilde{h}}(\tilde{f})$  avec  $\tilde{n} = 1, \dots, \tilde{N}_{\tilde{h}}$ .  
 $\tilde{\Psi}_{\tilde{n},\tilde{h}}$  : Fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées à  $\tilde{\mu}_{\tilde{n},\tilde{h}}$  de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_{\tilde{h}}(\tilde{f})$ .  
 $\tilde{I}$  : Matrice diagonale contenant les éléments de la fonction  $\tilde{f}$ .  
 $\underline{\tilde{\Psi}}_{\tilde{n},\tilde{h}}$  : Vecteurs propres  $L^2$ -normalisés associés à  $\tilde{\mu}_{\tilde{n},\tilde{h}}$  pour  $\tilde{n} = 1, \dots, \tilde{N}_{\tilde{h}}$ .



# Introduction

A l'heure actuelle, nous vivons dans un monde où l'utilisation des différents appareils électroniques, électroménagers, médicaux et autres devient indispensable. Ces appareils produisent d'une manière implicite et/ou explicite lors de leur utilisation un phénomène physique souvent appelé un signal et qui diffère d'un appareil à un autre, citons à titre d'exemple les signaux de télécommunications, les signaux géophysiques, les signaux biologiques, les signaux interpersonnels, ... [4, 7, 11, 14, 16, 18, 19, 20].

Cependant, malgré l'évolution remarquable des appareils, les signaux acquis sont, dans la plupart des cas, exposés aux effets indésirables dit bruit. Et donc, les signaux acquises nécessitent souvent des post-traitements [2, 3, 4, 13, 18, 21].

En effet, le traitement du signal consiste en un ensemble de théories et de méthodes, relativement indépendantes du signal traité, permettant de créer, d'analyser, de modifier, d'améliorer, de classifier, de reconnaître les signaux et finalement d'extraire des informations utiles de structure. Ces termes peuvent être regrouper en deux verbes filtrer et/ou débruiter [14, 18, 21].

Ainsi, le traitement du signal est une science de l'ingénieur, qui se nourrit de différentes disciplines scientifiques théoriques et appliquées sans omettre les mathématiques qui contribuent énormément et profondément vu que les signaux peuvent être distingués non seulement par leurs modes de production mais aussi par leurs natures mathématiques : réels/complexes, déterministes/aléatoires, analogiques/numériques [13, 16, 21].

En terme mathématique, un signal est représenté par une fonction de dimension appropriée au signal, par exemple si on possède un signal d'électrocardiogramme, alors ce dernier est traduit en mathématique par une fonction unidimensionnelle, par contre une image d'échographie est une fonction bidimensionnelle.

Traiter un signal donné revient à décomposer sa fonction associée en une somme finie d'un ensemble de fonctions élémentaires pondérées par des quantités appelées des coefficients [27].

En d'autre terme, la sommation des fonctions élémentaires avec les coefficients donne la fonction originale avec toutes ses informations et détails. Toutefois, la théorie mathématique de l'approximation [27] suggère que l'ensemble des fonctions élémentaires doit être extrait à partir de la fonction originale et affirme que les premières fonctions élémentaires possèdent l'information utile et à partir d'un certain rang, les fonctions élémentaires contiennent uniquement les faibles intensités. Ainsi, filtrer un signal revient, en mathématique, à le décomposer puis le reconstruire en utilisant uniquement, sous des conditions, les premières fonctions élémentaires.

Ce travail se propose de faire un point sur les nombreuses méthodes de décomposition des fonctions unidimensionnelles [3, 5, 11, 13, 21, 23]. Ensuite d'entendre la méthode la plus efficace en terme de propriétés, temps de calcul pour les signaux bruités.

Nous avons organisé ce document lequel traite à la fois une étude théorique et numérique de la façon suivante :

- Le premier chapitre présente un état de l'art sur les différentes méthodes de décom-

positions des fonctions unidimensionnelles existantes en précisant leurs avantages et limites selon les suggestions de la théorie mathématique de l'approximation.

- Tandis que le second chapitre étaye une approche de décomposition des fonctions unidimensionnelles récemment découverte. Cette nouvelle approche, dite SCSA et qui respecte bien la suggestion de la théorie mathématique de l'approximation, est présentée suivie par ses propriétés ainsi que sa convergence.
- Le troisième chapitre est consacré à la validation numérique de l'approche SCSA et de ses propriétés. Nous y décrivons le schéma numérique suivi par une application sur des fonctions unidimensionnelles académiques et réelles.
- L'adaptation de l'approche SCSA au cas bruité est présentée dans le quatrième chapitre. Nous contribuons à l'étude théorique, où la convergence de l'approche est prouvée, et à la validation numérique.

En dernier, une conclusion générale est présentée suivie par une annexe qui explique certains résultats présentés brièvement dans le texte. Les différents articles utilisés pour l'élaboration de ce travail sont présentés dans la bibliographie.

# Chapitre 1

## État de l'art

### 1 Introduction

Dans ce chapitre, un état de l'art sur les méthodes de décomposition des fonctions unidimensionnelles existantes est présenté. Pour chacune des méthodes, nous précisons leurs avantages et limites sans omettre la suggestion de la théorie de l'approximation laquelle réside en l'utilisation d'un ensemble de fonctions élémentaires dépendant de la fonction elle-même.

### 2 Méthodes de décomposition de Fourier

Cette section a pour but de présenter quelques méthodes de décomposition de Fourier. Ces dernières ont connu un remarquable développement et touchent à des domaines extrêmement variés. Plus que cela, l'analyse harmonique, laquelle est une branche des mathématiques, a vu le jour grâce à l'analyse de Fourier. Nous commencerons par présenter la méthode de Fourier la plus classique, autrement dit, les séries de Fourier.

#### 2.1 Séries de Fourier

**Définition 1.1 (Fonction continue par morceaux)** [20] Une fonction  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite continue (resp. de classe  $\mathcal{C}^p$ ) par morceaux sur  $[a, b]$  s'il existe une subdivision  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  et des fonctions  $f_i$  continues (resp. de classe  $\mathcal{C}^p$ ) sur  $[a_i, a_{i+1}]$  telles que  $f$  soit égale à  $f_i$  sur l'intervalle ouvert  $]a_i, a_{i+1}[$ .

**Définition 1.2 (Fonction périodique)** [20] Soit  $T > 0$  un nombre réel. Une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  est dite périodique de période  $T$  si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t+T) = f(t). \quad (1.1)$$

**Définition 1.3 (Série de Fourier)** [20] Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $T$ -périodique, continue par morceaux. On définit les coefficients de Fourier de la fonction  $f$  par les formules suivantes

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  est appelée pulsation associée à  $T$ .

En utilisant ces formules, la série de Fourier est donnée par

$$\mathcal{S}f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t), \quad (1.3)$$

ou encore

$$\mathcal{S}f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad (1.4)$$

avec

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.5)$$

Les séries de Fourier ont contribué au développement de beaucoup de résultats et cela dans plusieurs domaines. Cependant, leur majeur inconvénient est d'imposer la périodicité des fonctions à étudier. Pour élargir les conditions des séries de Fourier, la transformée de Fourier a été introduite.

## 2.2 Transformée de Fourier

**Définition 1.4 (Fonction localement intégrable)** [20] *On dit que la fonction  $f$ , définie sur un intervalle  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$  non réduit à un point, est localement intégrable sur  $]a, b[$ , si elle est intégrable sur tout segment  $[\alpha, \beta]$  contenu dans  $]a, b[$ . Autrement dit,*

$$\forall t \in [\alpha, \beta] \subset ]a, b[ : \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \text{ existe.} \quad (1.6)$$

**Définition 1.5 (Transformée de Fourier continue)** [21] *Soit  $f$  une fonction définie sur  $L^2(\mathbb{R})$ . La transformée de Fourier continue (TFC) de  $f$ , notée  $\hat{f}$ , est définie par la formule suivante*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\xi t} dt, \quad (1.7)$$

où  $\xi \in \mathbb{R}$  représente la fréquence.

De l'expression (1.7) on peut définir la transformée de Fourier inverse par

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi t\xi} d\xi. \quad (1.8)$$

Dans le cas où la fonction  $f$  est définie uniquement en un nombre de points finis  $N$ , la définition de la transformée de Fourier devient.

**Définition 1.6 (Transformée de Fourier discrète)** [21] *La transformée de Fourier discrète (TFD) de  $f$  est définie par*

$$\hat{f}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi kn}{N}} \text{ pour } k = 0, \dots, N-1. \quad (1.9)$$

La formule d'inversion discrète est donnée par

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k e^{i\frac{2\pi nk}{N}} \text{ pour } n = 0, \dots, N-1. \quad (1.10)$$

Parmi les limites de la transformée de Fourier, la dissimulation de l'information temporelle apparait. C'est pourquoi de nouvelles représentations sont apparues. Ces dernières cherchent à représenter conjointement l'information temporelle et fréquentielle. C'est le cas, par exemple, de la transformée en ondelettes [21].

## 2.3 Transformée en ondelettes

**Définition 1.7 (Transformée en ondelettes)** [4] La transformée en ondelettes continue (CWT), d'une fonction  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ , notée par  $\mathcal{W}_f$ , au temps  $b$  et à l'échelle  $a$  est définie par le produit scalaire de la fonction  $f$  et la fonction ondelette mère  $\psi_{ab}$

$$\mathcal{W}_{f,\psi}(a,b) = \langle f, \psi_{ab} \rangle, \quad (1.11)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad (1.12)$$

où  $\langle, \rangle$  est le produit scalaire et  $\overline{\psi}$  désigne la fonction complexe conjuguée de  $\psi$ .

**Remarque 1.1** [4]

- La transformée en ondelettes est définie comme le résultat d'un opérateur intégral qui transforme un signal<sup>1</sup> d'énergie finie (i.e.;  $f \in \mathbf{L}^2$ ) en utilisant un ensemble de fonctions  $\psi_{ab}$  dite fonction d'ondelette mère.
- La transformée en ondelettes permet de représenter un signal unidimensionnel  $f(t)$  sous forme d'un champ à deux dimensions  $\mathcal{W}_{f,\psi}(a,b)$  en faisant varier  $a$  et  $b$ .
- La transformée en ondelettes donne une représentation temps-échelle de la fonction  $f(t)$ .

Pour retrouver la fonction origine  $f$ , on utilise la formule définie par

$$f(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|^2} \mathcal{W}_{f,\psi}(a,b) \psi_{a,b}(t) da db, \quad (1.13)$$

où

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega, \quad (1.14)$$

$\hat{\psi}$  étant la transformée de Fourier de l'ondelette mère  $\psi$ .

Malgré l'immense succès de la transformée en ondelettes, cette dernière reste insuffisante d'un point de vue théorie du signal, et cela vient, par exemple, du choix d'ondelette mère analysante. Plus que cela, les méthodes de décomposition de Fourier et leurs dérivées ne respectent pas la proposition de la théorie de l'approximation laquelle réside en l'utilisation d'un ensemble de fonctions élémentaires dépendant de la fonction elle-même.

Pour ces raisons et bien d'autres, nous présentons dans ce qui suit une autre méthode de décomposition des fonctions.

## 3 Méthode de décomposition en valeur singulière (SVD)

La décomposition en valeur singulière, connue sous le terme SVD, est l'un des outils de base et sans aucun doute le plus important en algèbre linéaire numérique. La méthode SVD trouve des applications en nombre croissant dans le domaine du traitement du signal pour les problèmes de communication, radar, sonar, parole et images [11].

**Définition 1.8** [11] La méthode SVD est une technique mathématique permettant de décomposer une matrice  $M$  de taille  $m \times n$  en trois matrices dont le produit équivaut à  $M$  s'écrit sous la forme

$$M = U \Sigma V^*, \quad (1.15)$$

avec

1. Dans ce manuscrit, la notion signal aura le même sens qu'une fonction.

- $U$  : matrice unitaire de taille  $m \times m$ , avec

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_m]^t,$$

telle que  $\{u_i\}_{i=1, \dots, m}$  sont les vecteurs singuliers de la matrice  $MM^*$ .

- $\Sigma$  : matrice de taille  $m \times n$  dont les coefficients diagonaux sont les valeurs singulières positives ou nuls et tous les autres éléments sont nuls.
- $V$  : matrice unitaire de taille  $n \times n$  et  $V^*$  est son adjoint, avec

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_n]^t,$$

telle que  $\{v_i\}_{i=1, \dots, n}$  sont les vecteurs singuliers de la matrice  $M^*M$ .

Au sein de  $\Sigma$ , les valeurs singulières sont classées par ordre décroissant le long de la diagonale, les valeurs les plus grandes correspondant aux informations les plus intenses du signal et les valeurs les plus faibles correspondant aux informations moins intenses.

La décomposition en valeurs singulière est une méthode très utilisée dans le cadre de factorisation des matrices. Elle permet d'extraire les informations grâce aux valeurs singulières.

Il est clair que la méthode SVD respecte bien la proposition de la théorie de l'approximation puisque elle utilise des quantités qui dépendent de la fonction elle-même. Cependant, la méthode SVD n'est pas directement exploitable pour des fonctions unidimensionnelles. Il est donc nécessaire de transformer la fonction unidimensionnelle discrétisée par un vecteur en une matrice pour établir cette décomposition puis le rendre à son état initial. Ce passage exige de lourds calculs dans la résolution numérique, c'est pourquoi une troisième méthode sera présentée dans la suite.

## 4 Méthode de décomposition de Deift et Trubowitz

La méthode de décomposition de Deift et Trubowitz fait partie des méthodes de décomposition via la transformée de diffusion inverse [13, 15, 23]. Cette classe de méthodes a une très grande importance vu qu'elle est la plus répandue dans la plupart des phénomènes physiques [5, 24, 29].

Les méthodes de décomposition via la transformée de diffusion inverse permettent de décomposer une fonction selon un ensemble de fonctions élémentaires dépendant de la fonction elle-même [5]. L'idée principale de toutes ces méthodes est de

1. Considérer la fonction à décomposer comme étant un potentiel de l'opérateur de Schrödinger<sup>2</sup> lequel est donné par

$$\mathcal{H}(f) = -\frac{d^2}{dt^2} - f, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.16)$$

2. Extraire le spectre discret  $\sigma_d$  et le spectre continu  $\sigma_c$  de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}(f)$  lors de sa résolution spectrale.
3. Décomposer la fonction en utilisant uniquement le spectre discret  $\sigma_d$  et continu  $\sigma_c$  selon une formule bien précise.

---

2. Dans tous ce qui suit, toute fonction à décomposer est considérée comme étant un potentiel de l'opérateur de Schrödinger.

Une étude très approfondie a été proposé par Deift et Trubowitz [5]. La formule de décomposition de Deift et Trubowitz est obtenue en sommant deux termes, un terme qui se caractérise par le spectre discret  $\sigma_d$ , et un autre qui montre la contribution du spectre continu  $\sigma_c$  dans la décomposition et la reconstruction de la fonction  $f$  comme le montre le théorème suivant.

**Théorème 1.1** [5] *Soit  $f \in \mathbf{L}_1^1(\mathbb{R})$ . Alors, le potentiel  $f$  de l'opérateur de Schödinger (1.16) peut être reconstruit, d'une manière unique, par la formule suivante*

$$f(t) = -4 \sum_{n=1}^N \sqrt{-\mu_n} \psi_n^2(t) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \int_0^b \left( \frac{2i}{\pi} \int_{-a}^{+a} s \mathcal{R}_{r(l)}(s) J_{\pm}^2(s, t) ds \right) da, \quad p.p. \quad (1.17)$$

Si de plus,  $s\mathcal{R}_{r(l)} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ . Alors

$$f(t) = -4 \sum_{n=1}^N \sqrt{-\mu_n} \psi_n^2(t) + \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s \mathcal{R}_{r(l)}(s) J_{\pm}^2(s, t) ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.18)$$

où  $\mu_n$  et  $\psi_n$  sont, respectivement, les valeurs propres négatives rangées par ordre décroissant et les fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées caractérisant le spectre discret  $\sigma_d$ ,  $\mathcal{R}_{r(l)}$  et  $J_{\pm}$  sont les coefficients de réflexion par la gauche et par la droite et les fonctions Jost, respectivement, lesquelles constituent le spectre continu  $\sigma_c$  et  $\mathbf{L}_1^1(\mathbb{R})$  représente l'espace de Feddeev

$$\mathbf{L}_1^1(\mathbb{R}) = \left\{ f \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|(1 + |t|) dt < \infty \right. \right\}. \quad (1.19)$$

Malgré le grand succès que la méthode de Deift et Trubowitz a connu, cependant, elle reste inexploitable numériquement et cela à cause de la partie qui dépend du spectre continu  $\sigma_c$ . Pour y remédier à cet inconvénient, l'idée est d'introduire le paramètre semi-classique  $h$  [25] dans l'opérateur de Schödinger  $\mathcal{H}(f)$  et par suite dans les deux spectres  $\sigma_d$  et  $\sigma_c$ . Le paramètre  $h$  permet d'annuler la partie dépendante du spectre continu  $\sigma_c$ , d'où l'apparition d'une nouvelle méthode de décomposition [5] laquelle sera présentée dans le chapitre suivant.

Plus de détails sur l'opérateur de Schrödinger et sur sa résolution spectrale sont présentés dans l'annexe.

## 5 Conclusion

Dans ce chapitre, différentes méthodes de décomposition des fonctions unidimensionnelles ont été présentées chacune avec ses avantages et limites. Nous avons souligné, ensuite, que la méthode basée sur les formules de décomposition de Deift et Trubowitz respecte bien la proposition de la théorie de l'approximation, laquelle suggère un ensemble de fonctions élémentaires dépendant de la fonction elle-même. Cependant, les formules de Deift et Trubowitz pose un problème technique vu la contribution du spectre continu  $\sigma_c$ . Pour contourner ce problème, nous allons présenter, dans le chapitre suivant, une nouvelle méthode basée sur les formule de Deift et Trubowitz et une quantification semi-classique.

# Chapitre 2

## Analyse spectrale semi-classique du signal : SCSA

### 1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter une nouvelle méthode de décomposition des fonctions. Il s'agit de la méthode SCSA qui vient de *Semi-Classical Signal Analysis*. Cette méthode, laquelle est une extension de la formule de Deift et Trubowitz au cas semi-classique, respecte bien la proposition de la théorie de l'approximation. La convergence de cette nouvelle méthode ainsi que ses propriétés font, aussi, partie de ce chapitre.

### 2 Un aperçu sur l'analyse semi-classique

La théorie de l'analyse semi-classique a vu le jour en se posant la question : comment peut-on mesurer à la fois la position  $x$  et la vitesse  $v$  d'un électron  $e$  ?

En effet, en physique classique, à l'aide de l'inégalité de l'incertitude de Heisenberg  $\sigma_x \sigma_v \geq \frac{h}{4\pi m}$ , où  $m$  représente la masse de l'électron et  $h$  un réel positif très petit, on peut mesurer à la fois la vitesse  $v$  et la position  $x$ . Plus que cela, l'utilisation de l'inégalité d'incertitude de Heisenberg permet un passage de la physique classique vers la physique quantique. Ensuite, pour y revenir à la physique classique, on fait tendre le paramètre  $h$ , dit paramètre semi-classique, vers 0. Ce passage de limite permet aussi de faire une analyse micro-locale.

Autrement dit, d'une manière extrêmement simple l'idée de l'analyse semi-classique est de comprendre la physique quantique lorsque le paramètre  $h$  tend vers 0 [6, 22, 25].



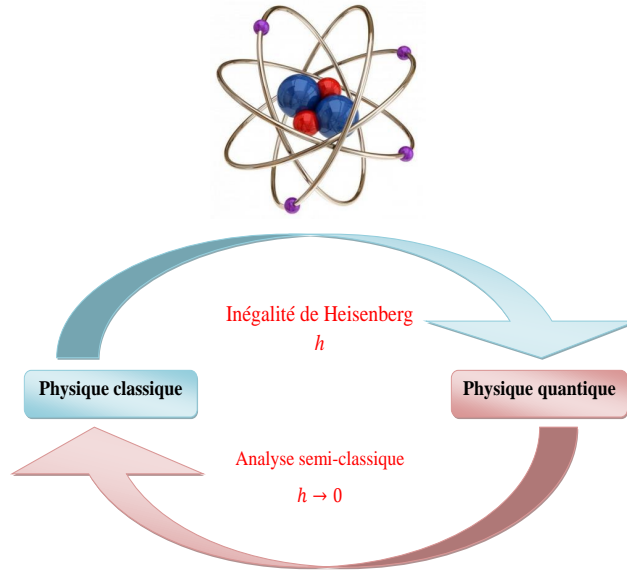


FIGURE 2.1 – Représentation de l’analyse semi-classique

Pour plus de détails sur la théorie de l’analyse semi-classique, nous renvoyons le lecteur vers [6, 22, 25].

### 3 Définition de la SCSA

Dans tout ce qui suit, nous nous intéressons essentiellement à l’opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnel  $\mathcal{H}_h$  défini sur  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  par

$$\mathcal{H}_h(f) = -h^2 \frac{d^2}{dt^2} f, \quad \mathbf{D}(\mathcal{H}_h(f)) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}), \quad (2.1)$$

tel que

$$f \in \mathbf{L}_1^1(\mathbb{R}), \quad f(t) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d^m f}{dt^m} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}), \quad m = 1, 2. \quad (2.2)$$

Il est à noter que sous les hypothèses (2.2), il existe un nombre  $N_h$  fini [8] et non nul [15] de valeurs propres négatives de l’opérateur  $\mathcal{H}_h(f)$ . Notons  $\mu_{n,h}$  les valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_h(f)$  avec

$$\mu_{1,h} < \mu_{2,h} < \dots < \mu_{N_h,h}, \quad n = 1, \dots, N_h,$$

et soient  $\psi_{n,h}$  les fonctions propres  $\mathbf{L}^2$ -normalisées associées à  $\mu_{n,h}$ ,  $n = 1, \dots, N_h$ .

Nous définissons l’approche SCSA par

**Définition 2.1** [17, 20] Soient  $f$  une fonction vérifiant les hypothèses (2.2) et  $h$  le paramètre semi-classique. L’approximation par la méthode SCSA est définie par

$$f_h(t) = 4h \sum_{n=1}^{N_h} \sqrt{-\mu_{n,h}} \psi_{n,h}^2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

où  $\mu_{n,h}$  et  $\psi_{n,h}$ ,  $n = 1, \dots, N_h$  sont respectivement les valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_h(f)$  et les fonctions propres  $\mathbf{L}^2$ -normalisées associées tel que

$$\mathcal{H}_h(f) \psi_{n,h} = \mu_{n,h} \psi_{n,h}, \quad n = 1, \dots, N_h. \quad (2.4)$$

Il est clair d'après cette définition que la SCSA résulte d'une écriture à partir d'un ensemble de fonction élémentaires adaptatives qui dépend de la fonction elle-même et qui consiste en le carré des fonctions propres  $L^2$ -normalisées  $\psi_{n,h}$  de l'opérateur de Schrödinger semi-classique  $\mathcal{H}_h(f)$  pondérée par les valeurs propres négatives  $\mu_{n,h}$  associées.

## 4 Convergence et comportement du spectre discret en fonction de $h$

Dans cette section, nous allons présenter quelques résultats du comportement du spectre discret  $\sigma_d$  de l'opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnel  $\mathcal{H}_h(f)$  en fonction du paramètre semi-classique  $h$ . Ce dernier joue un rôle important. En effet, il permet de modifier le spectre de l'opérateur  $\mathcal{H}_h(f)$  de façon à approcher au mieux  $f_h$  par  $f$ . Intuitivement, plus  $h$  diminue, plus l'extraction des valeurs propres négatives de  $f$  par rapport à  $t$  est meilleure, d'où la convergence du signal estimé vers le signal original.

### 4.1 Étude de la convergence de $f_h$ lorsque $h$ tend vers 0

La convergence de l'approche SCSA est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 2.1** [13] *Soit  $f$  une fonction réelle vérifiant les conditions (2.2). Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , nous avons*

$$f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} 4h \sum_{n=1}^{N_h} \sqrt{-\mu_{n,h}} \psi_{n,h}^2(t), \quad (2.5)$$

où  $\mu_{n,h}$  et  $\psi_{n,h}$ ,  $n = 1, \dots, N_h$  sont respectivement les valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_h(f)$  et les fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées tel que

$$\mathcal{H}_h(f) \psi_{n,h} = \mu_{n,h} \psi_{n,h}, \quad n = 1, \dots, N_h. \quad (2.6)$$

Pour montrer ce théorème nous allons utiliser la formule Deift et Trubowitz [8] étendue en terme semi-classique que nous rappelons ci-dessous

$$f_h(t) = 4h \sum_{n=1}^{N_h} \sqrt{-\mu_{n,h}} \psi_{n,h}^2(t) - \frac{2ih^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s \mathcal{R}_{r(l),h}(s) J_{\pm,h}^2(s, t) ds, \quad (2.7)$$

pour  $s \mathcal{R}_{r(l),h} \in L^1(\mathbb{R})$  et  $f$  vérifiant les hypothèses (2.2).

Intuitivement, la démonstration du théorème 2.1 repose sur la formule (2.7). Autrement dit, nous devons montrer que la quantité

$$\frac{2ih^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s \mathcal{R}_{r(l),h}(s) J_{\pm,h}^2(s, t) ds, \quad (2.8)$$

tend vers 0 lorsque le paramètre semi-classique  $h$  converge vers 0. A cet effet, nous utiliserons des propriétés relatives au coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_{r(l),h}$  et des propriétés de bornitude des fonctions de Jost  $J_{\pm,h}$ , lesquelles sont données par les résultats suivants.

**Lemme 2.1** [24] *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  une fonction continue avec  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ . Alors,*

$$|J_{\pm,h}(s, t) - \exp(\pm its/h)| \leq |s|^{-1} \delta_{\pm}(t) \exp(|s|^{-1} \delta_{\pm}(t)) \quad (2.9)$$

pour tout  $s \in \mathbb{R}^*$ , où

$$\delta_{\pm}(t) = \pm \int_t^{\pm\infty} |f(y)| dy. \quad (2.10)$$

A partir de ce lemme nous déduisons la bornitude des fonctions de Jost  $J_{\pm, h}$ .

**Corollaire 2.1** [24] Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  une fonction continue avec  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ . Alors,

$$|J_{\pm, h}(s, t)| \leq C, \quad (2.11)$$

où  $C$  une constante réelle dépendant de  $h$ .

Les propositions suivantes sont des résultats de convergence sur le coefficient de réflexion.

**Proposition 2.1** [17, 20] Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  une fonction qui vérifie aussi les hypothèses (2.2). Alors,

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^4 \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 |\mathcal{R}_{r(l), h}(s)|^2 ds = 0. \quad (2.12)$$

**Proposition 2.2** [17, 20] Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  une fonction qui vérifie aussi les hypothèses (2.2). Alors,

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |s \mathcal{R}_{r(l), h}(s)| ds = 0. \quad (2.13)$$

Ainsi, l'utilisation de tous les résultats auxiliaires précédents donne

**Corollaire 2.2** [13] Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  une fonction vérifiant, aussi, les hypothèses (2.2). Alors,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ih^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s \mathcal{R}_{r(l), h} J_{\pm}^2(s, t) ds = 0. \quad (2.14)$$

## 4.2 Comportement du spectre discret en fonction de $h$

Dans cette partie nous présentons quelques résultats sur le spectre discret de l'opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnel  $\mathcal{H}_h(f)$  en fonction du paramètre semi-classique  $h$ . Nous verrons par la suite que ces résultats sont très utiles pour l'étude numérique et l'analyse des fonctions.

La première proposition concerne les propriétés du nombre  $N_h$  des valeurs propres négatives  $\mu_{n, h}$  de  $\mathcal{H}_h(f)$

**Proposition 2.3** [17, 20] Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles vérifiant les hypothèses (2.2). Alors,

1. Le nombre  $N_h$  des valeurs propres négatives  $\mu_{n, h}$  de  $\mathcal{H}_h(f)$  est une fonction décroissante de  $h$ .
2. Si de plus,  $f \in L^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ . Alors,

$$\lim_{h \rightarrow 0} h N_h = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{f(t)} dt. \quad (2.15)$$

Il est à noter qu'il existe un lien étroit entre la fonction à décomposer  $f$  et ses valeurs propres négatives  $\mu_{n, h}$ . ce dernier est présenté par la proposition suivante.

**Proposition 2.4** [17, 20] Soient  $f$  une fonction à valeurs réelles vérifiant les hypothèses (2.2),  $h$  le paramètre semi-classique et  $\mu_{n, h}$ ,  $n = 1, \dots, N_h$  avec  $\mu_{1, h} < \mu_{2, h} < \dots < \mu_{N_h, h} < 0$  les valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_h(f)$ . Supposons, de plus, que  $0 < f < \max_{t \in \mathbb{R}} f(t)$ .

Alors,

$$\max_{t \in \mathbb{R}} -f(t) \leq \mu_{n, h} < 0, \quad n = 1, \dots, N_h. \quad (2.16)$$

La proposition suivante donne des résultats de convergence des sommes des valeurs propres négatives  $\mu_{n,h}$ ,  $n = 1, \dots, N_h$  lorsque le paramètre  $h \rightarrow 0$ . Ces sommes peuvent être très intéressantes dans l'analyse des signaux réels comme par exemple les signaux de pression artérielle [16, 17] et les signaux turbomachine [7, 14].

**Proposition 2.5** [17, 20] *Sous les hypothèses (2.2), nous avons*

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{n=1}^{N_h} \sqrt{-\mu_{n,h}} = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt, \quad (2.17)$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_h(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt. \quad (2.18)$$

Si de plus  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ . Alors,

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{n=1}^{N_h} (-\mu_{n,h})^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{16} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt. \quad (2.19)$$

L'un des avantages de l'approche par SCSA est l'utilisation d'un ensemble de fonctions élémentaires dépendant de la fonction elle-même. Cet ensemble est constitué par les fonctions propres  $\mathbf{L}^2$ -normalisées  $\psi_{n,h}$  de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_h(f)$ . Ces derniers possèdent une propriété de localisation très intéressante qui est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 2.6** [26] *Pour toute fonction  $f$  vérifiant*

$$f \in \mathbf{L}_{loc}^{\infty}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = +\infty, \quad (2.20)$$

le spectre  $\sigma$  de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_h(f)$  est purement discret, i.e.; il existe une base orthonormale, de fonctions propres  $\psi_{n,h}$  associées aux valeurs propres simples  $\mu_{n,h}$  avec  $n = 1, \dots, N_h$ .

Si de plus,  $\mu_{1,h} < \mu_{2,h} < \dots < \mu_{N_h,h} < 0$ , alors, chaque fonction propre  $\psi_{n,h}$  associée à  $\mu_{n,h}$  a exactement  $n$  pics, i.e.;  $\psi_{n,h}$  prend la valeur zéro  $n - 1$  fois. Et toutes les fonctions propres  $\psi_{n,h}$  décroissent rapidement et exponentiellement au voisinage de l'infinie.

## 5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation de la formule de la décomposition SCSA pour des fonctions unidimensionnelles. La définition de cette nouvelle approche a été présentée suivie par l'étude de sa convergence lorsque le paramètre semi-classique  $h$  tend vers 0. En dernier, quelques propriétés intéressantes sur les valeurs propres  $\mu_{n,h}$  et les fonctions propres  $\psi_{n,h}$  de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_h(f)$  ont été établies.

# Chapitre 3

## Résolution numérique de la SCSA, interprétation et applications

### 1 Introduction

Ce chapitre est dédié à la présentation du schéma numérique qui permet la décomposition, l'estimation, l'analyse et la représentation d'une fonction unidimensionnelle par l'approche SCSA. La validation numérique de sa convergence ainsi que de ces propriétés sont testées via plusieurs exemples académiques et réels.

### 2 Résolution numérique de la SCSA

Pour effectuer la résolution numérique du problème spectral de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel

$$-h^2 \frac{d^2}{dt^2} \psi_{n,h}(t) - f(t) \psi_{n,h}(t) = \mu_{n,h} \psi_{n,h}(t), \quad n = 1, \dots, N_h, \quad (3.1)$$

nous passons par les étapes suivantes.

#### Étape 1 : Discrétisation de l'opérateur de Schrödinger

Pour cette première étape, il existe de nombreuses méthodes de discrétisation des équations différentielles et aux dérivées partielles, ces dernières peuvent appartenir à l'un des trois groupes suivants [1, 3, 10, 12]

- Méthodes des différences finies,
- Méthodes des éléments finis,
- Méthodes pseudo-spectrales.

L'idée de toutes ces méthodes consiste à approcher la solution par une série de fonction de base en un nombre fini de points. La différence entre elles réside dans la nature des fonctions de base et le choix des points de discrétisation. Nous utilisons la méthode pseudo-spectrale de Fourier, pour atteindre la discrétisation de notre opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnel. Cette méthode permet de réaliser un bon compromis entre précision et temps de calcul.

Pour cela, considérons l'opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnel, associé à la fonction  $f$

$$\mathcal{H}_h(f(t)) = -h^2 \frac{d^2}{dt^2} - f(t). \quad (3.2)$$

Soient  $M$  points  $t_j, j = 1, \dots, M$  uniformément répartis sur un intervalle  $[a, b]$  tel que

$$a = t_1 < t_2 < \dots < t_{M-1} < t_M = b. \quad (3.3)$$

Le pas  $\Delta t$ , qui représente l'écart entre deux points successifs  $t_j$  et  $t_{j+1}$ , est constant et est donné par

$$\Delta t = \frac{b-a}{M-1}. \quad (3.4)$$

Ramenons nous à présent à l'intervalle  $[0, 2\pi \frac{M-1}{M}]$  par l'homothétie

$$t \rightarrow \frac{2\pi(M-1)}{(b-a)M}(t-a). \quad (3.5)$$

Soit, alors,  $\Delta = \frac{2\pi}{M}$  le nouveau pas.

La discrétisation du terme  $\frac{d^2}{dt^2}$ , par le biais de la transformée de Fourier direct et inverse discrète [21] et de quelques propriétés d'interpolation [10], donne la matrice de différenciation du second ordre symétrique définie négative  $D_2$  [17]

$$D_2 = \frac{\Delta^2}{(\Delta t)^2} D_2^\pi, \quad (3.6)$$

où  $D_2^\pi$  est réalisée en utilisant la commande `toeplitz` de MATLAB [30].

Ainsi, la version discrétisée de l'équation de Schrödinger semi-classique (3.2) est, alors, donnée par

$$H_h(I) = -h^2 D_2 - \text{diag}(I), \quad (3.7)$$

où la matrice  $\text{diag}(I)$  est la matrice diagonale dont les éléments sont les  $f(t_j) = I[j]$  avec  $j = 1, \dots, M$ .

### Étape 2 : Valeurs propres et fonctions propres

Cette étape consiste à calculer les valeurs propres  $\mu$  et les fonctions propres  $\psi$ . La discrétisation de l'opérateur de Schrödinger (3.2) nous ramène à un problème de valeurs propres de matrice (3.7) que nous pouvons résoudre par des méthodes de calcul direct.

Pour la résolution de ce problème nous avons utilisé la commande `eig` de MATLAB.

Ainsi, dans ce cas, les valeurs propres négatives sont notées  $\mu_{n,h}$  avec  $\mu_{1,h} < \dots < \mu_{N_h,h} < 0$  où  $N_h$  est le nombre des valeurs propres négatives de l'opérateur  $H_h(I)$  avec  $0 < N_h < M$ .

Les vecteurs propres associés  $L^2$ -normalisés, par l'utilisation de la méthode de Simpson [28], sont notés par  $\underline{\psi}_{n,h} = [\underline{\psi}_{1,h}, \dots, \underline{\psi}_{N_h,h}]^T$ , ils vérifient

$$\Delta t \sum_{n=1}^{N_h} \underline{\psi}_{n,h}^2 = 1 \iff \|\underline{\psi}_{k,h}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}, \text{ pour } n = 1, \dots, N_h. \quad (3.8)$$

Ainsi, dans le cas discret la formule de la SCSA (2.3) devient

$$I_h[j] = 4h \sum_{n=1}^{N_h} \sqrt{-\mu_{n,h}} \underline{\psi}_{n,h}^2[j], \quad j = 1, \dots, M. \quad (3.9)$$

### Étape 3 : Calcul d'une valeur optimale du paramètre semi-classique $h$

La Proposition 2.3 montre que le nombre  $N_h$  des valeurs propres négatives est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{N}$  décroissante en  $h$ . De plus, plus  $h$  diminue, et plus l'erreur d'approximation par la méthode SCSA diminue. Néanmoins la diminution de  $h$ , devient très lourde à gérer numériquement et nous nous contentons en pratique de déterminer une valeur  $\hat{h}$  de  $h$  qui permet de réaliser une bonne précision avec un minimum de valeurs propres négatives  $N_h$ . Pour déterminer  $\hat{h}$ , nous proposons de minimiser la fonctionnelle quadratique suivante qui n'est rien autre que l'erreur moyenne quadratique sur un intervalle  $[h_1, h_2]$

$$J(h) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (I[j] - I_h[j])^2, \quad (3.10)$$

Ainsi, la figure 3.1 résume la procédure de reconstruction d'une fonction par l'approche SCSA.

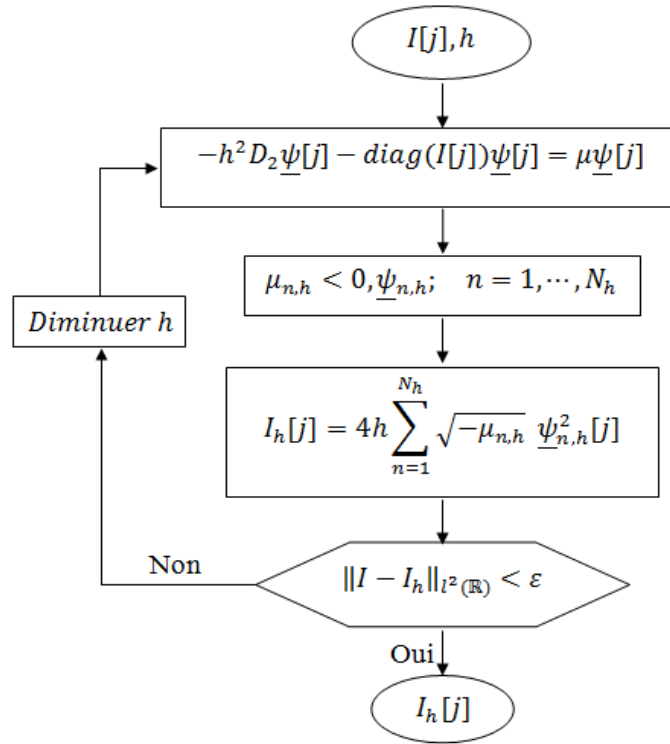


FIGURE 3.1 – Algorithme de reconstruction d'une fonction unidimensionnelle par l'approche SCSA.

### 3 Application à des fonctions académiques

Pour valider cette approche et étudier le rôle du paramètre semi-classique  $h$  sur la décomposition, l'estimation, l'analyse et la représentation des fonctions unidimensionnelles, nous présentons en détail un exemples très connu dans la littérature de la théorie d'analyse semi-classique [22], il s'agit de l'oscillateur harmonique défini par [13]

$$f(t) = -t^2 + C, \quad t, C \in \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

Dans ce qui suit, nous montrons comment nous choisissons la valeur optimale de  $h$ . Nous validons, ensuite, les propriétés sur le nombre  $N_h$  des valeurs propres négatives. La convergence de la méthode, ainsi que quelques remarques sur les valeurs propres et les fonctions propres  $L^2$ -normalisées seront aussi présentées.

Pour la résolution numériques, nous considérons  $f$  sur  $M$  points équidistants d'un intervalle  $[t_1, t_2]$ . Choisissons un intervalle suffisamment large, prenons par exemple  $t_1 = -4, t_2 = 4$  avec  $\Delta t = 0.005$  et  $C = 16$ , ainsi, dans un cas discret l'oscillateur harmonique devient

$$I[j] = -j^2 + 16, \quad j = 1, \dots, M. \quad (3.12)$$

Pour trouver la valeur optimal  $\hat{h}$  de  $h$ , nous calculons l'erreur moyenne quadratique  $J(h)$  donnée par la formule (3.10) pour différentes valeurs de  $h$ . Nous remarquons qu'à partir de  $h = 0.2$  (resp.  $N_h = 40$ ) la décomposition de la fonction  $f$  est satisfaite.

La figure 3.2(a) illustre les variations de l'erreur moyenne quadratique  $J(h)$  en fonction de  $h$ , tandis que la figure 3.2(b) montre la décroissance du nombre des valeurs propres négatives  $N_h$  en fonction de  $h$ , comme indiqué dans la proposition 2.3. Nous remarquons aussi, que  $N_h$  est une fonction en escalier comme illustré précédemment.

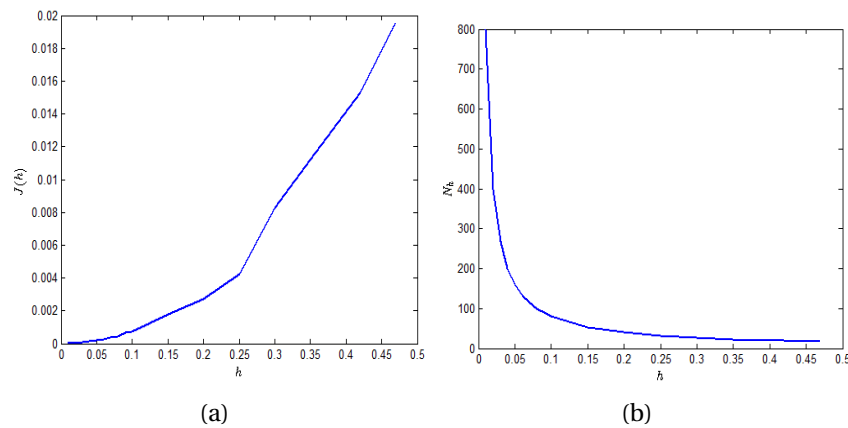


FIGURE 3.2 – Variation de l'erreur moyenne quadratique  $J(h)$  (Fig. (a)) et du nombre des valeurs propres négatives  $N_h$  (Fig. (b)) en fonction de  $h$  pour  $f(t) = -t^2 + 16$  sur  $[-4, 4]$ .

La figure 3.3 représente la variation de quelques valeurs propres rangées par ordre croissant, de la matrice  $-h^2 D_2 - \text{diag}(I)$  en fonction de  $h$ . Nous observons que ces valeurs propres, initialement positives, sont des fonctions décroissantes en  $h$  et qu'à chaque passage de  $N_h$  à  $N_h + 1$ , une valeur propre positive devient négative, à partir d'un certain rang de  $h$ , ce qui explique que pour un  $h$  très petit nous obtiendrons un  $N_h$  très grand.



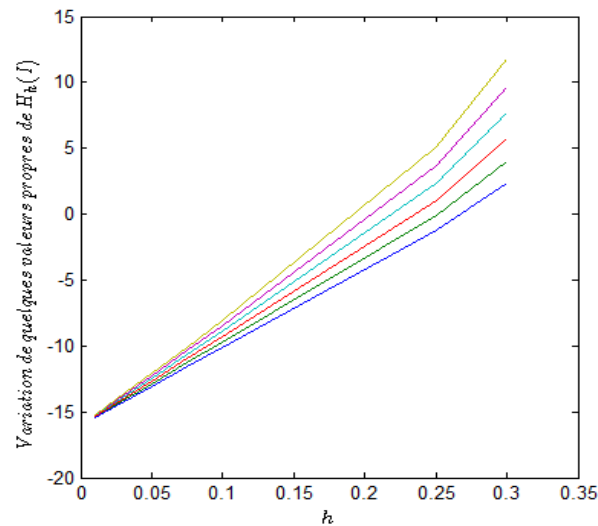


FIGURE 3.3 – Variation de quelques valeurs propres de  $H_h[I]$  en fonction de  $h$  pour  $f(t) = -t^2 + 16$  sur  $[-4, 4]$ .

La figure 3.4(a) montre une reconstruction satisfaisante de la fonction  $f$ , nous avons remarqué qu'à partir de  $h = 0.2$  i.e. ;  $N_h = 40$  la reconstruction de l'oscillateur harmonique est satisfaisante.

La figure 3.4(b) représente l'erreur relative en %. La valeur de cette erreur relative est inférieure à 3% se qui désigne numériquement que l'estimation est acceptable pour  $h = 0.2$ .

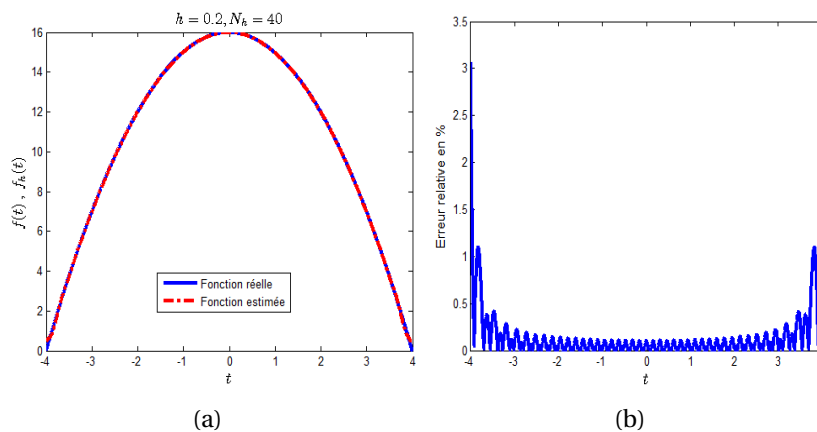


FIGURE 3.4 – (a). Reconstruction de  $f(t) = -t^2 + 16$  sur  $[-4, 4]$  ; (b). Erreur relative correspondante pour  $h = 0.2$  ( $N_h = 40$ ).

Une validation numérique de la proposition 2.4 est présentée par la figure 3.5, pour l'oscillateur harmonique  $f(t) = -t^2 + 16$  sur  $[-4, 4]$ .

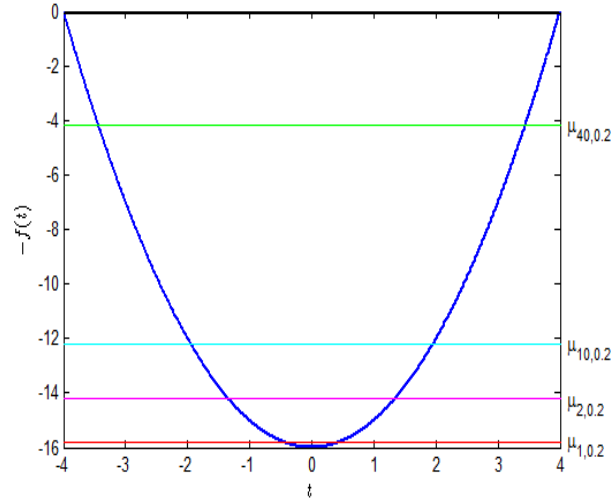


FIGURE 3.5 – Les valeurs propres négatives  $\mu_{n,h}$ ,  $n = 1, \dots, N_h$  de  $-h^2 \frac{d^2}{dt^2} - f(t)$ , pour  $f(t) = -t^2 + 16$  sur  $[-4, 4]$  et  $h = 0.2$ , sont toutes comprises entre  $-\max f$  et 0.

La figure 3.6 représente l’allure des carrés de quelques fonctions propres  $L^2$ -normalisées  $\psi_{n,h}^2$  dans le cas où  $h = 0.2$ . Nous remarquons que la première fonction propre  $\psi_{1,h}^2$  localise le plus grand pic de la fonction  $f$ . La deuxième fonction propre  $\psi_{2,h}^2$  représente les deux pics qui suivent  $\psi_{1,h}^2$ . La dernière fonction propre  $L^2$ -normalisée  $\psi_{40,h}^2$  présente plusieurs oscillations, ces dernières caractérisant les petits détails de la fonction  $f$ . De plus, nous remarquons, aussi, que l’amplitude du carré des fonctions propres diminue.

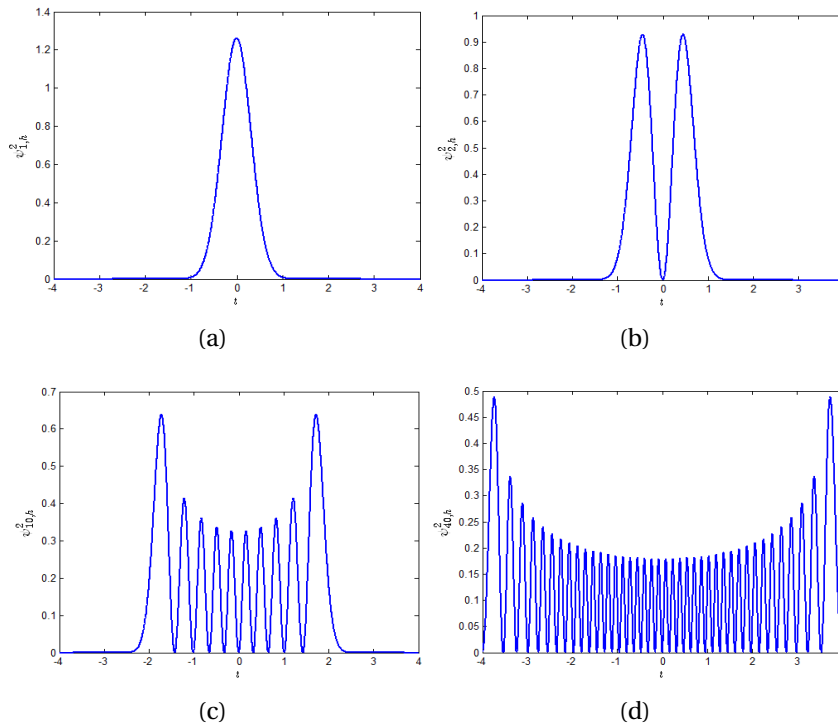


FIGURE 3.6 – Allure de la première, deuxième, dixième et dernière fonctions propres  $L^2$ -normalisées  $\psi_{n,h}^2$  dans le cas où  $h = 0.2$  pour  $f(t) = -t^2 + 16$  sur  $[-4, 4]$ .

En dernier, la figure 3.7 illustre une bonne estimation des valeurs propres négatives pour  $h = 0.2$ . Dans ce cas, nous avons 40 valeurs propres égales à  $(2i-1)h-16$ ,  $i = 1, \dots, 40$

respectivement.

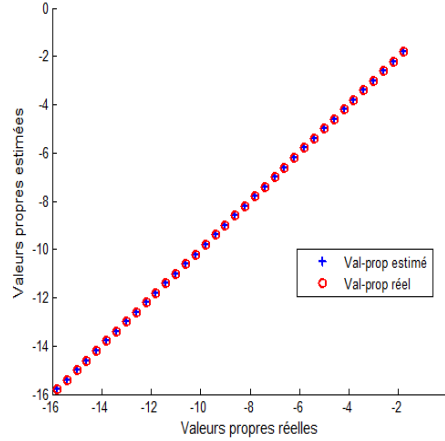


FIGURE 3.7 – Valeurs propres réelles et estimées dans le cas où  $h = 0.2$  pour  $f(t) = -t^2 + 16$  sur  $[-4, 4]$ .

## 4 Application à des signaux réels

La formule de la méthode SCSA a été testée et avec succès sur des signaux réels. Dans ce qui suit, nous présentons quelques uns.

### 4.1 Signaux de pression artérielle

Dans cette partie, nous présentons l'application de l'approche SCSA pour la reconstruction des signaux de pression artérielle notée par  $P$ , cependant,  $\hat{P}$  désigne l'estimation par l'approche SCSA

$$\hat{P}(t) = 4h \sum_{n=1}^{N_h} \sqrt{-\mu_{n,h}} \psi_{n,h}^2(t), \quad (3.13)$$

où  $\mu_{n,h}$ ,  $n = 1, \dots, N_h$  sont les valeurs propres négatives de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_h(P)$  et  $\psi_{n,h}$  les fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées.

L'approche par SCSA pour des signaux de pression artérielle permet non seulement de bien représenter et avec peu de composante le signal original, mais, plus que cela, on peut, aussi, faire une séparation et une estimation aux pression systolique et diastolique notées  $P_s$ ,  $P_d$  respectivement [16, 17].

En effet, une bonne troncature sur le nombre des valeurs propres négatives  $N_h$  permet de séparer la pression systolique de la pression diastolique vu que les plus grandes valeurs caractérisent la phase systolique tandis que les valeurs les plus faibles présentent la phase diastolique. Ainsi, nous obtenons

$$\hat{P}_s(t) = 4h \sum_{n=1}^{N_s} \sqrt{-\mu_{n,h}} \psi_{n,h}^2(t), \quad \hat{P}_d(t) = 4h \sum_{n=N_s+1}^{N_h} \sqrt{-\mu_{n,h}} \psi_{n,h}^2(t), \quad (3.14)$$

où  $\hat{P}_s$  et  $\hat{P}_d$  représentent, respectivement, les signaux de pression systolique et diastolique estimés.

Les figures 3.8 et 3.9 représentent, respectivement, une bonne reconstruction d'un signal de pression artérielle avec 9 composantes, les pressions systolique (Fig. 3.9(a)) et diastolique (Fig. 3.9(b)) estimées.

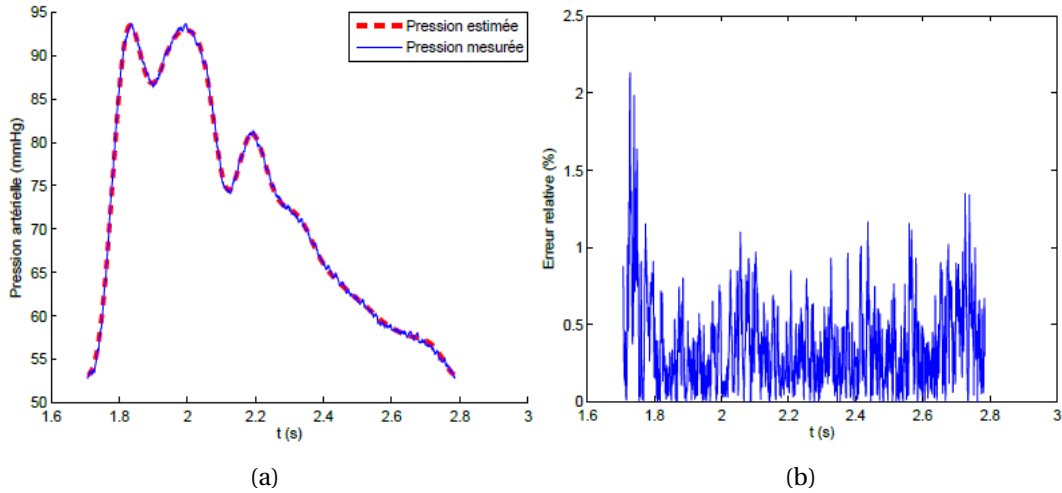


FIGURE 3.8 – Reconstruction de la pression artérielle par la SCSA pour  $N_h = 9$  : (a). Pression mesurée et estimée ; (b). Erreur relative correspondante [16].

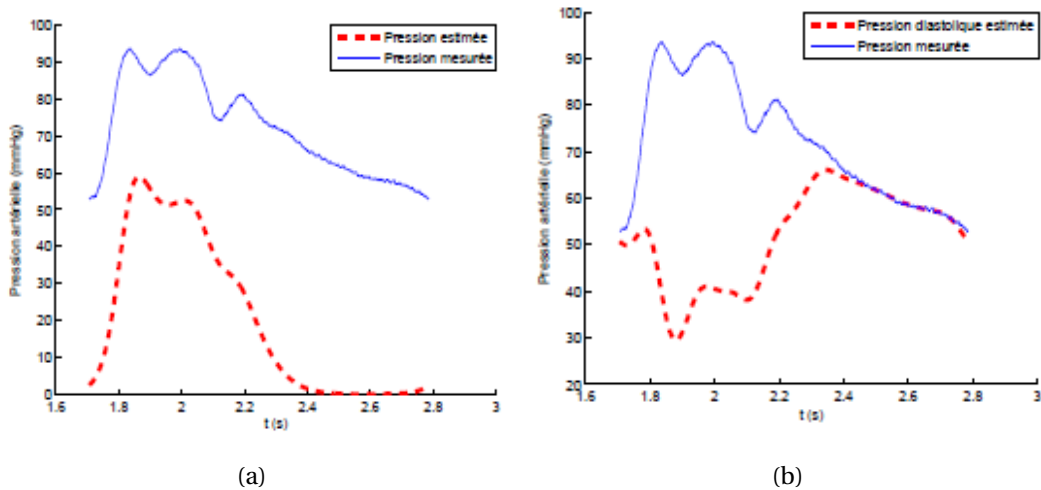


FIGURE 3.9 – (a). Pression systolique mesurée et estimée ; (b). Pression diastolique mesurée et estimée [16].

En se référant à la proposition 2.5, on définit des nouveaux paramètres qui permettent de bien analyser les signaux. Il s'agit des invariants qui permettront de donner plus d'informations physiologiques clinique sur les signaux

$$\text{INV}_1 = 4h \sum_{n=1}^{N_h} \sqrt{-\mu_{n,h}}, \quad \text{INV}_2 = \frac{16h}{3} \sum_{n=1}^{N_h} (-\mu_{n,h})^{\frac{3}{2}}. \quad (3.15)$$

## 4.2 Signaux turbomachine

Les signaux turbomachines sont concédées parmi les signaux les plus importants, c'est pourquoi plusieurs méthodes interviennent pour mieux les analyser, comme par exemple, la transformée de Fourier et la transformée en ondelette. Mais toutes ces méthodes ne conviennent pas aux signaux non stationnaire, par contre, la méthode SCSA contourne ce problème [17]. En effet, cette dernière utilise les invariants (formules (3.15))

pour bien analyser et estimer les informations les plus pertinentes dans ces signaux [7, 14].

La figure 3.10 présente une bonne reconstruction d'un signal turbomachine et ces invariants.

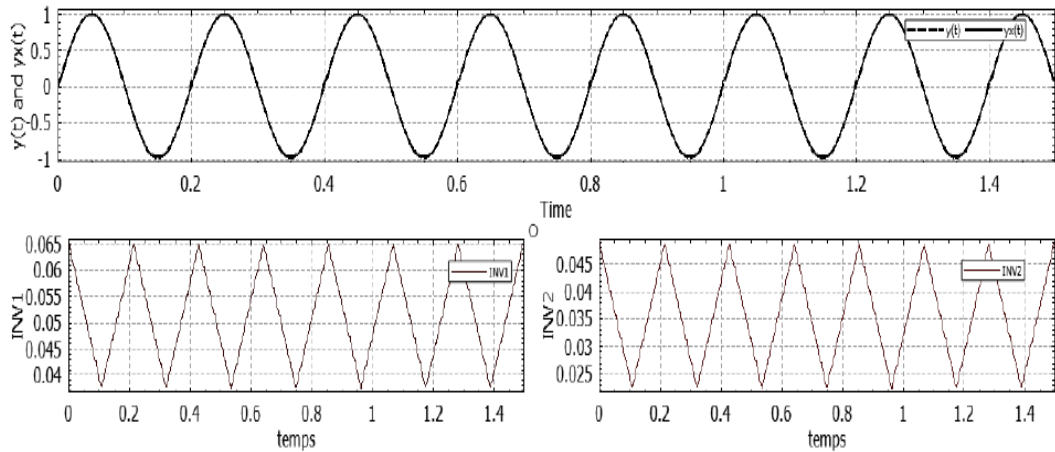


FIGURE 3.10 – Reconstruction du signal turbomachine et ses invariants [14].

## 5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la validation numérique de l'approche SCSA pour la reconstruction des signaux. Les différentes propriétés établies précédemment ont été montrées numériquement sur plusieurs fonctions académiques où uniquement l'oscillateur harmonique a été présenté. De plus, l'application de l'approche SCSA sur des signaux réels a été, aussi, présentée.

# Chapitre 4

## Extension de l'approche SCSA aux signaux bruités

### 1 Introduction

Ce chapitre représente le cœur de ce manuscrit. En effet, on y présente une étude analytique, une estimation et ainsi un débruitage d'une fonction unidimensionnelle bruitée par l'approche SCSA. La validation numérique et quelques propriétés sont testées via plusieurs exemples à la fois académiques et réels.

### 2 Quelques notions de base sur le bruit

**Définition 4.1** [2] *Le bruit est une perturbation indésirable qui se superpose aux fonctions ou encore aux signaux et aux données utiles et qui cache les informations pertinentes du signal.*

*En mathématique, le bruit est défini comme étant une quantité  $\delta$  additif à une fonction originale comme suit*

$$\tilde{f}(t) = f(t) + \delta(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

où  $f$  et  $\tilde{f}$  définissent la fonction originale et la fonction perturbée (bruitée) respectivement.

**Exemple 4.1** [2] *La figure 4.1 représente une fonction, un bruit et l'addition des deux.*

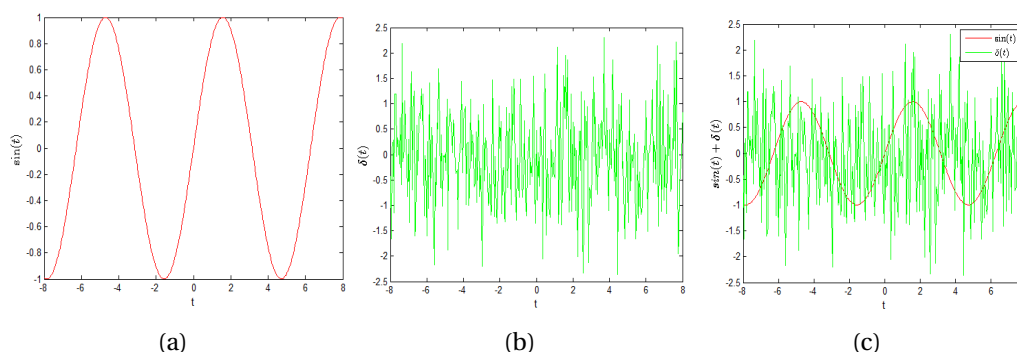


FIGURE 4.1 – Représentation d'un signal bruité.

**Remarque 4.1** [2] *Plusieurs types de bruit peuvent apparaître, on cite quelques uns*

1. *un bruit blanc.*

2. un bruit de scintillation, aussi nommé bruit rose.
3. un bruit en créneaux.

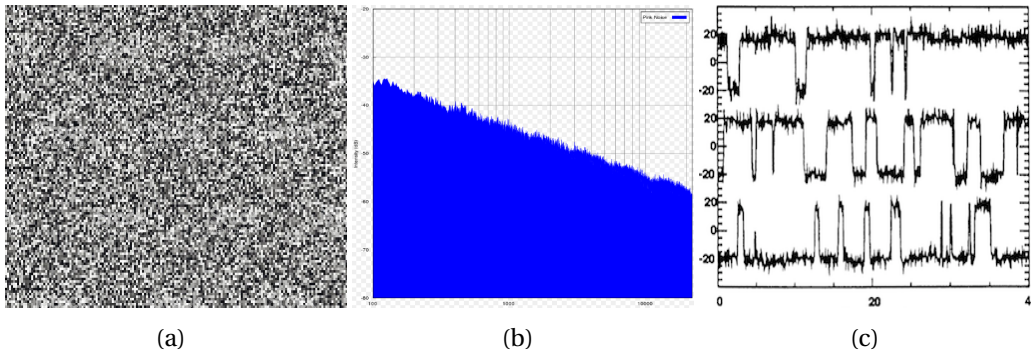


FIGURE 4.2 – Quelques types de bruit : (a). Bruit blanc ; (b). Bruit rose ; (c). Bruit créneaux.

**Définition 4.2** [2] *Filtrer ou débruirer un signal revient à supprimer ou à annuler toutes les composantes non utiles du signal. Autrement dit, filtrer un signal revient à garder toutes informations pertinentes vu qu'un signal peut contenir des composantes non utiles ou bien des bruits.*

### 3 Approche SCSA et signaux bruités

Dans cette section, nous nous intéressons au comportement de l'approche par SCSA dans le cas où la fonction  $f$  subirait une perturbation  $\delta$ .

Dans un cas bruité, l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel semi-classique est donné par

$$\mathcal{H}_{\tilde{h}}(\tilde{f}(t)) = -\tilde{h}^2 \frac{d^2}{dt^2} - \tilde{f}(t), \quad (4.2)$$

tel que

$$\tilde{f} \in \mathbf{L}_1^1(\mathbb{R}), \quad \tilde{f}(t) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d^m \tilde{f}}{dt^m} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}), \quad m = 1, 2, \quad (4.3)$$

où

$$\tilde{f}(t) = f(t) + \delta(t). \quad (4.4)$$

Il est à noter que sous les hypothèses (4.3), il existe un nombre  $\tilde{N}_{\tilde{h}}$  fini et non nul des valeurs propres négatives de l'opérateur  $\mathcal{H}_{\tilde{h}}(\tilde{f})$ . Notons  $\tilde{\mu}_{\tilde{n}, \tilde{h}}$  les valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_{\tilde{h}}(\tilde{f})$  avec

$$\tilde{\mu}_{1, \tilde{h}} < \tilde{\mu}_{2, \tilde{h}} < \dots < \tilde{\mu}_{\tilde{N}_{\tilde{h}}, \tilde{h}}, \quad \tilde{n} = 1, \dots, \tilde{N}_{\tilde{h}}, \quad (4.5)$$

et soient  $\tilde{\Psi}_{\tilde{n}, \tilde{h}}$  les fonctions propres  $\mathbf{L}^2$ -normalisées associées à  $\tilde{\mu}_{\tilde{n}, \tilde{h}}$ ,  $\tilde{n} = 1, \dots, \tilde{N}_{\tilde{h}}$ .

En adaptant toutes les formules citées dans le chapitre 2 au cas bruité, le filtrage d'une fonction bruitée par l'approche SCSA est donné par la définition suivante

**Définition 4.3** *Soient  $\tilde{f}$  une fonction vérifiant les hypothèses (4.3) et  $\tilde{h}$  le paramètre semi-classique assez petit. Le filtrage par l'approche SCSA est défini par*

$$\tilde{f}_{\tilde{h}}(t) = 4\tilde{h} \sum_{\tilde{n}=1}^{\tilde{N}_{\tilde{h}}} \sqrt{-\tilde{\mu}_{\tilde{n}, \tilde{h}}} \tilde{\Psi}_{\tilde{n}, \tilde{h}}^2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.6)$$

où  $\tilde{\mu}_{\tilde{n},\tilde{h}}$  et  $\tilde{\Psi}_{\tilde{n},\tilde{h}}$ ,  $\tilde{n} = 1, \dots, \tilde{N}_{\tilde{h}}$  sont respectivement les valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_{\tilde{h}}(\tilde{f})$  et les fonctions propres  $L^2$ -normalisées associées tel que

$$\mathcal{H}_{\tilde{h}}(\tilde{f})\tilde{\Psi}_{\tilde{n},\tilde{h}} = \tilde{\mu}_{\tilde{n},\tilde{h}}\tilde{\Psi}_{\tilde{n},\tilde{h}}, \quad \tilde{n} = 1, \dots, \tilde{N}_{\tilde{h}}. \quad (4.7)$$

Dans ce qui suit, nous allons montrer que l'approche par SCSA résiste au bruit quelque soit sa nature. Autrement dit, nous montrons, par le théorème suivant, que nous pouvons retrouver une bonne approximation de notre fonction  $f$  en lui faisant un débruitage par l'approche SCSA.

**Théorème 4.1** Soient  $f$  une fonction vérifiant les hypothèses (4.3) et  $f_h$  son approximation par l'approche SCSA où  $h$  est le paramètre semi-classique de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_h(f)$ .

Soient  $\tilde{f}$  la fonction bruitée de  $f$  et  $\tilde{f}_{\tilde{h}}$  la fonction débruitée par l'approche SCSA.

Pour tous  $h, \tilde{h}$  assez petit, nous avons

$$\|f_h - \tilde{f}_{\tilde{h}}\| \rightarrow 0 \quad \text{pour tous } h \text{ et } \tilde{h} \text{ assez petit.} \quad (4.8)$$

Une étude purement numérique nous permet de conclure que pour une valeur bien précise du paramètre semi-classique  $h$ , une bonne approximation de la fonction  $f$  est obtenue par contre le filtrage de  $\tilde{f}$  par ce même  $h$  n'est pas acceptable. Toute fois, pour un bon débruitage de la fonction  $\tilde{f}$  la valeur du paramètre semi-classique  $\tilde{h}$  doit être plus grande à celle de  $h$ . Ces remarques nous permettent de faire les hypothèses suivantes lesquelles seront utiles lors de la démonstration de la convergence.

**H-1** Le paramètre semi-classique  $\tilde{h}$  est plus grand que  $h$ , i. e. ;  $\tilde{h} > h$ .

**H-2** Le nombre des valeurs propres négatives dans le cas bruité est plus petites que celui dans le cas non bruité, i. e. ;  $\tilde{N}_{\tilde{h}} < N_h$ .

**Preuve.**

L'approximation par l'approche SCSA de la fonction  $f$  pour un certain  $h$  est donnée par

$$f_h(t) = 4h \sum_{n=1}^{N_h} \sqrt{-\mu_{n,h}} \Psi_{n,h}^2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.9)$$

tandis que le filtrage de la fonction  $\tilde{f}$  pour un certain  $\tilde{h}$  est

$$\tilde{f}(t)_{\tilde{h}} = 4\tilde{h} \sum_{\tilde{n}=1}^{\tilde{N}_{\tilde{h}}} \sqrt{-\tilde{\mu}_{\tilde{n},\tilde{h}}} \tilde{\Psi}_{\tilde{n},\tilde{h}}^2(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.10)$$

Nous avons

$$\|f_h - \tilde{f}_{\tilde{h}}\| = \left\| 4h \sum_{n=1}^{N_h} \sqrt{-\mu_{n,h}} \Psi_{n,h}^2 - 4\tilde{h} \sum_{\tilde{n}=1}^{\tilde{N}_{\tilde{h}}} \sqrt{-\tilde{\mu}_{\tilde{n},\tilde{h}}} \tilde{\Psi}_{\tilde{n},\tilde{h}}^2 \right\|. \quad (4.11)$$

Par l'application de l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\|f_h - \tilde{f}_{\tilde{h}}\| \leq \left\| 4h \sum_{n=1}^{N_h} \sqrt{-\mu_{n,h}} \Psi_{n,h}^2 \right\| + \left\| 4\tilde{h} \sum_{\tilde{n}=1}^{\tilde{N}_{\tilde{h}}} \sqrt{-\tilde{\mu}_{\tilde{n},\tilde{h}}} \tilde{\Psi}_{\tilde{n},\tilde{h}}^2 \right\|. \quad (4.12)$$

En utilisant l'hypothèse **H-1**, il découle

$$\|f_h - \tilde{f}_{\tilde{h}}\| \leq 4\tilde{h} \sum_{n=1}^{N_h} \sqrt{-\mu_{n,\tilde{h}}} \|\Psi_{n,\tilde{h}}^2\| + 4\tilde{h} \sum_{\tilde{n}=1}^{\tilde{N}_{\tilde{h}}} \sqrt{-\tilde{\mu}_{\tilde{n},\tilde{h}}} \|\tilde{\Psi}_{\tilde{n},\tilde{h}}^2\|, \quad (4.13)$$



où  $N_{\tilde{h}}$  est le nombre des valeurs propres négatives de l'opérateur  $\mathcal{H}_{\tilde{h}}(f)$ .

Comme les fonctions propres  $\psi_{n,h}$  et  $\tilde{\psi}_{\tilde{n},\tilde{h}}$  sont  $L^2$ -normalisées, alors, la formule (4.13) devient

$$\|f_h - \tilde{f}_{\tilde{h}}\| \leq 4\tilde{h} \left( \sum_{n=1}^{N_{\tilde{h}}} \sqrt{-\mu_{n,\tilde{h}}} + \sum_{\tilde{n}=1}^{\tilde{N}_{\tilde{h}}} \sqrt{-\tilde{\mu}_{\tilde{n},\tilde{h}}} \right), \quad (4.14)$$

$$\leq 4\tilde{h} C, \quad (4.15)$$

avec  $C = \sum_{n=1}^{N_{\tilde{h}}} \sqrt{-\mu_{n,\tilde{h}}} + \sum_{\tilde{n}=1}^{\tilde{N}_{\tilde{h}}} \sqrt{-\tilde{\mu}_{\tilde{n},\tilde{h}}}$ . En faisant tendre  $\tilde{h} \rightarrow 0$ , nous obtenons

$$\|f_h - \tilde{f}_{\tilde{h}}\| \rightarrow 0 \quad (4.16)$$

D'où la convergence du filtrage par l'approche SCSA. ■

## 4 Application à des fonctions académiques

Pour adapter l'approche SCSA au cas discret bruité, nous aurons besoins de résoudre le problème aux valeurs propres matriciel suivant

$$(-\tilde{h}^2 D_2 - \text{diag}(\tilde{I})) \tilde{\Psi}_{\tilde{n},\tilde{h}} = \tilde{\mu}_{\tilde{n},\tilde{h}} \tilde{\Psi}_{\tilde{n},\tilde{h}}, \quad (4.17)$$

où  $\tilde{\mu}_{\tilde{n},\tilde{h}}$  et  $\tilde{\Psi}_{\tilde{n},\tilde{h}}$  représentant respectivement les valeurs propres négatives et les vecteurs propres  $L^2$ -normalisés associés avec  $\tilde{n} = 1, \dots, \tilde{N}_{\tilde{h}}$  et  $\tilde{N}_{\tilde{h}}$  est le nombre de valeurs propres négatives.

Ainsi, dans le cas discret, le débruitage de la fonction  $\tilde{f}$  par l'approche SCSA est donné par

$$\tilde{I}[j] = 4\tilde{h} \sum_{\tilde{n}=1}^{\tilde{N}_{\tilde{h}}} \sqrt{-\tilde{\mu}_{\tilde{n},\tilde{h}}} \tilde{\Psi}_{\tilde{n},\tilde{h}}^2[j], \quad \text{pour } j = 1, \dots, M. \quad (4.18)$$

### 4.1 Comparaison entre l'approximation et le débruitage pour la même valeur de $h$

Rappelons que pour une bonne approximation de l'oscillateur harmonique

$$f(t) = -t^2 + 16, \quad t \in \mathbb{R},$$

la valeur du paramètre semi-classique  $h$  est 0.2. Dans ce qui suit, nous allons additionner un bruit à cet oscillateur harmonique puis débruiter la fonction résultante en gardant la même valeur de  $h = 0.2$ , dans le but de faire une étude numérique du spectre de l'opérateur de Schrödinger perturbé. Pour cela, soit l'oscillation harmonique bruité

$$\tilde{I}[j] = -j^2 + 16 + \delta[j] \quad j = 1, \dots, M. \quad (4.19)$$

où,  $\delta[j]$  est un bruit gaussien blanc de moyenne nulle et de variance  $\alpha$ , pour ce faire, nous utilisons la commande `randn` de MATLAB. La valeur de la variance est choisie de telle sorte que le rapport signal sur bruit

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \frac{\sum_{j=1}^M I[j]^2}{\sum_{j=1}^M (I[j] - \tilde{I}[j])^2}, \quad (4.20)$$

soit égale à 21.495 dB.

Comme il a été mentionné dans le chapitre précédent, l'approximation de la fonction  $f$  est faite avec  $N_h = 40$  pour  $h = 0.2$ , cependant le nombre des valeurs propres  $\tilde{N}_h$  devient 43 pour la fonction  $\tilde{f}$ . Ce changement du nombre des valeurs propres négatives est dû à cause de l'addition du bruit. La figure suivante montre que non seulement le nombre des valeurs propres négatives augmente mais une différence entre  $\mu_{n,h}$  et  $\tilde{\mu}_{\tilde{n},h}$  est constatée.

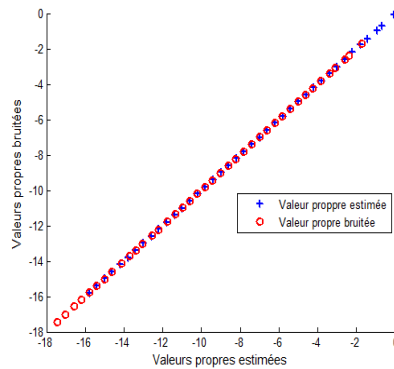


FIGURE 4.3 – Valeurs propres estimées et bruitées dans le cas où  $h = 0.2$  pour  $f(t) = -t^2 + 16$  et  $\tilde{f}(t) = -t^2 + 16 + \delta(t)$  avec  $t \in [-4, 4]$ .

Même si la fonction  $f$  subit le bruit  $\delta$ , les fonction propres gardent leurs propriétés de localisation des informations pertinentes. Pour  $h = 0.2$  nous remarquons une petite translation avec un changement d'amplitude des fonctions propres  $\tilde{\psi}_{\tilde{n},h}$  par rapport à  $\psi_{n,h}$  dû au bruit.

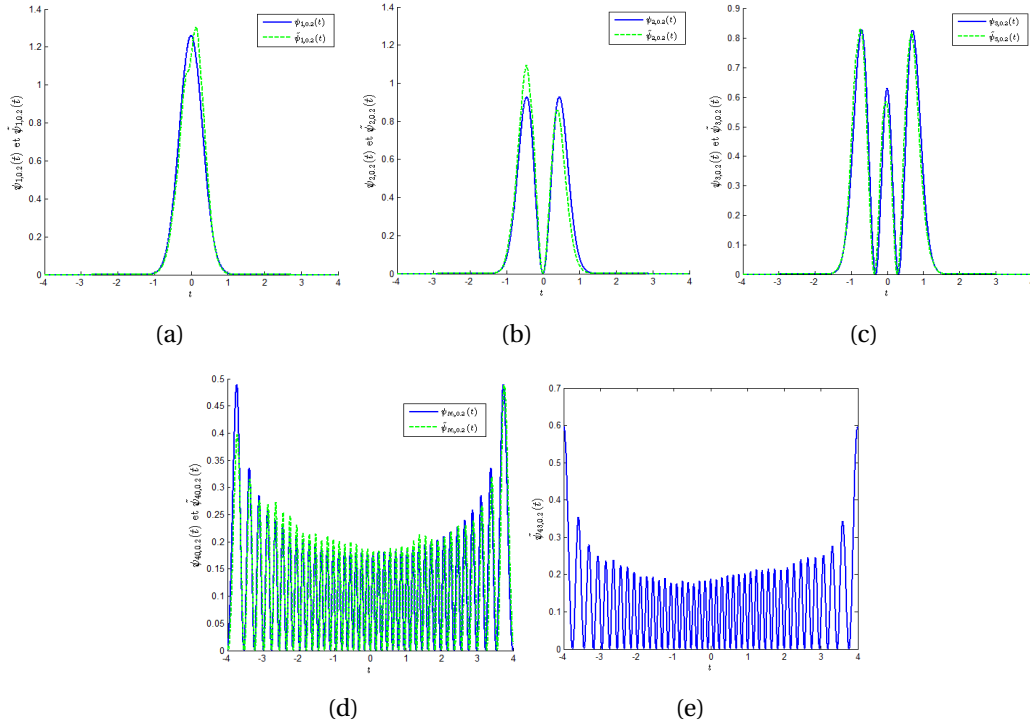


FIGURE 4.4 – Allure du carré de quelques fonctions propres  $L^2$ -normalisées dans le cas où  $h = 0.2$  pour  $f(t) = -t^2 + 16$  et  $\tilde{f}(t) = -t^2 + 16 + \delta(t)$  avec  $t \in [-4, 4]$ .

A partir des figures 4.3 et 4.4, nous pouvons conclure que le bruit affecte beaucoup plus les valeurs propres négatives que les fonctions propres.

La figure 4.5(a) représente un débruitage de la fonction  $\tilde{f}$ . Aussi, la variation de l'erreur relative est illustrée par la figure 4.5(c).

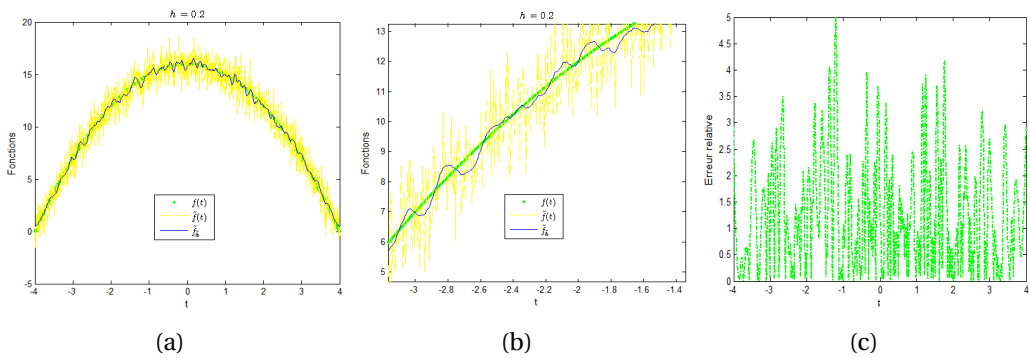


FIGURE 4.5 – Débruitage de  $\tilde{f}(t) = -t^2 + 16 + \delta(t)$  pour  $\tilde{h} = 0.2$  sur  $[-4, 4]$  : (a). Les fonctions  $f$ ,  $\tilde{f}$  et  $\hat{f}_h$ ; (b). Zoom sur la figure (a); (c). Erreur relative correspondante.

**Remarque 4.2** La valeur de l'erreur relative est proche de 5% ce qui désigne numériquement que le débruitage est acceptable pour  $h = 0.2$ .

## 4.2 Débruitage d'une fonction académique

Comme déjà cité précédemment, le principale but de ce manuscrit est d'approcher la fonction bruitée à la fonction originale avec un nombre minimal de valeurs propres

négatives. Pour cela, on teste quelques valeurs du paramètre  $h$  jusqu'à obtenir un bon débruitage avec un nombre minimal de composantes. La valeur  $\tilde{h} = 0.8$  qui correspond à  $\tilde{N}_{\tilde{h}} = 11$  permet de réaliser ce but.

La figure 4.6(a) représente un très bon débruitage de la fonction, ainsi la variation de l'erreur relative est présentée par la Figure 4.6(c).

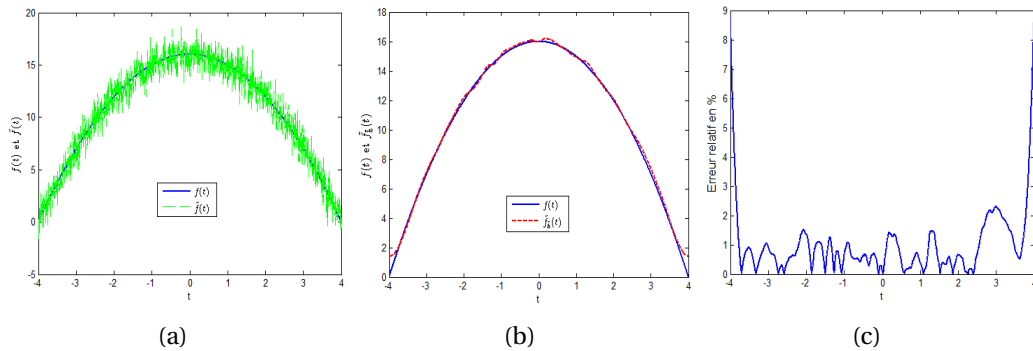


FIGURE 4.6 – Débruitage de  $\tilde{f}(t) = -t^2 + 16 + \delta(t)$  pour  $\tilde{h} = 0.8$  sur  $[-4, 4]$  : (a). Les fonctions  $f$  et  $\tilde{f}$ ; (b). Les fonction  $\tilde{f}_{\tilde{h}}(t)$  et  $f(t)$ ; (c). Erreur relative correspondante.

La figure 4.7 représente l'estimation des valeurs propres négatives de la fonction  $\tilde{f}_{\tilde{h}}$  avec  $\tilde{h} = 0.8$ .

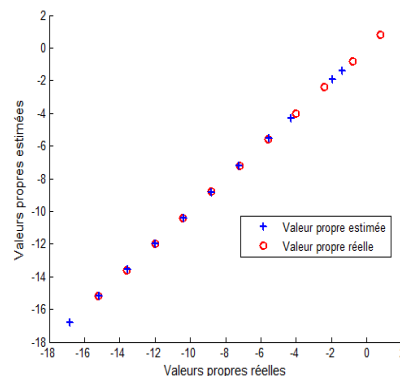


FIGURE 4.7 – Valeurs propres estimées et exactes de  $\tilde{f}(t) = -t^2 + 16 + \delta(t)$  pour  $\tilde{h} = 0.8$ .

Nous observons que les valeurs propres changent complètement pour un bon débruitage et une bonne pondération des fonctions propres. De là nous constatons que ce changement est dû au bruit qui influence sur les valeurs propres négatives plus que les fonctions propres.

La figure 4.8 représente l'allure des fonctions propres  $L^2$ -normalisées dans les cas non bruité et bruité avec  $h = 0.2$  et dans le cas bruité avec  $\tilde{h} = 0.8$ .

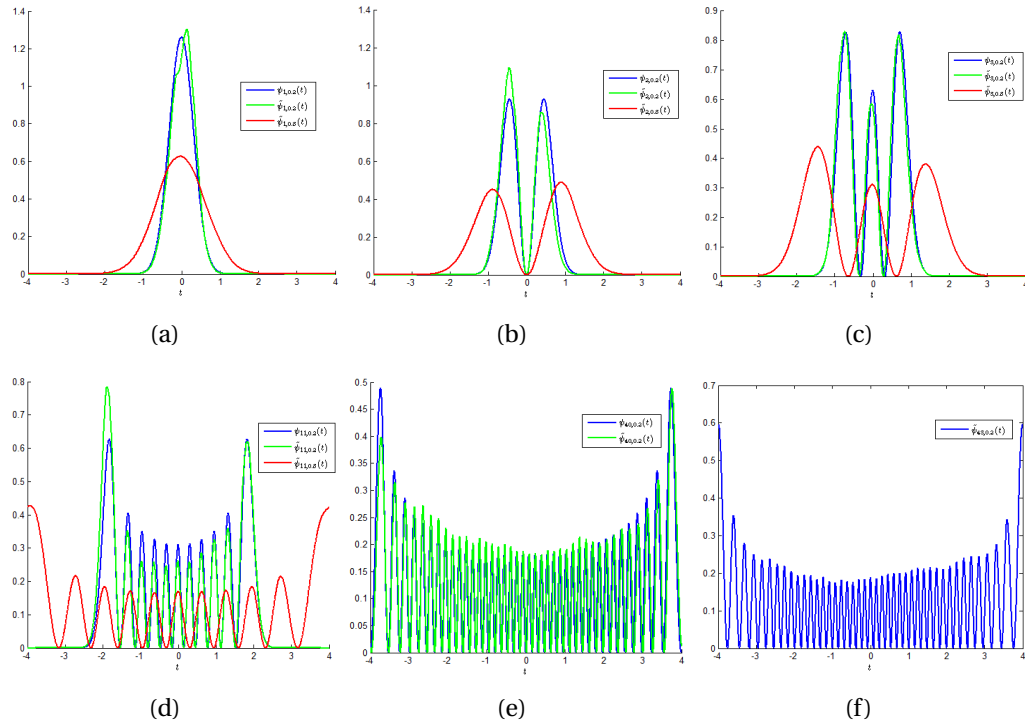


FIGURE 4.8 – Allure du carré de quelques fonctions propres  $L^2$ -normalisées dans les cas non bruité et bruité avec  $h = 0.2$  et dans le cas bruité avec  $\tilde{h} = 0.8$  pour  $\tilde{f}(t) = -t^2 + 16 + \delta(t)$  sur  $[-4, 4]$ .

Nous remarquons que lors d'un débruitage d'une fonction, la propriétés de localisation des fonctions propres est conservée, ceci confirme que seul les valeurs propres absorbent le bruit.

## 5 Application à des signaux réels

Dans le domaine médical, le patient est très souvent amené à faire des examens très approfondis et fiables pour que le diagnostic de la maladie soit plus ou moins précis. Ces examens nécessitent, en générale, l'utilisation des machines où les résultats sont présentés sous forme de signaux. Cependant, ces appareils médicaux sont très sensible à plusieurs effets à la fois dûs à la machine elle même ou au patient, à titre d'exemple, la version de la machine, son nombre de fois d'utilisation, le stress, la toux, la respiration,  $\dots$ . Il est donc nécessaire, de trouver un moyen pour éliminer le maximum des effets indésirables tout en gardant les informations importantes. Cette tâche est appelée, en traitement du signal, le débruitage ou encore le filtrage.

Parmi les appareils médicaux, on y trouve la spectroscopie par résonance magnétique (MRS). Le signal MRS est de plus en plus utilisé dans des situations où l'IRM ne peut pas donner un diagnostic précis. Et en raison de son importance, une étude approfondie devrait être consacrée pour une fiable extraction des informations utiles. Cependant, l'utilisation de la spectroscopie par MR est souvent difficile, en raison du faible rapport signal/bruit SNR, autrement dit, le signal MRS est très sensible aux différents effets et contient un taux élevé du bruit et des perturbations qui entravent l'extraction des informations.

Comme l'approche par SCSSA utilise à la fois un ensemble de fonctions élémentaires adaptatives, et un paramètre semi-classique lequel permet une analyse micro-locale du

signal, ces particularités font d'elle une bonne approche de filtrage des signaux MRS [18, 19].

La figure 4.9 représente un débruitage d'un signal MRS. Nous remarquons que malgré l'intensité du bruit est grande mais l'approche par SCSA a permis de faire un bon filtrage tout en gardant l'information utile.

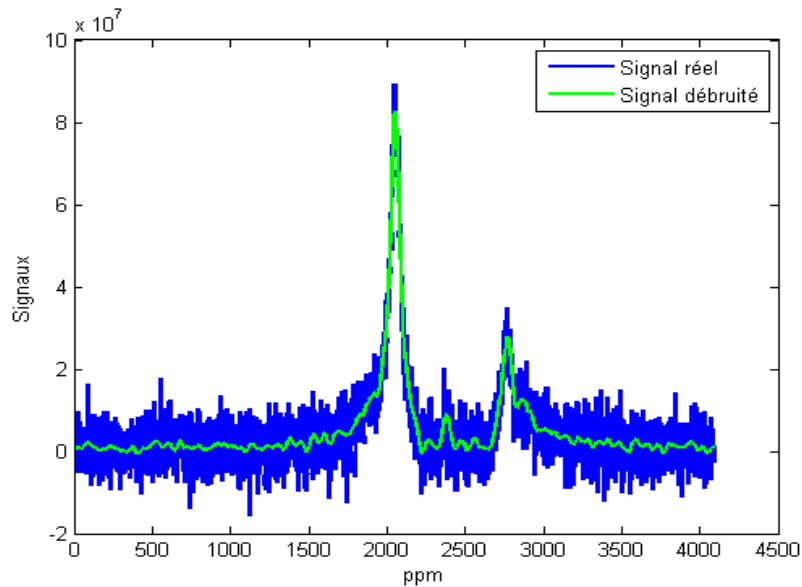


FIGURE 4.9 – Filtrage d'un signal MRS [18].

Il est nécessaire de rappeler que l'une des propriétés intéressantes de l'approche par SCSA est la localisation des fonctions propres. La figure 4.10 montre que même si le taux du bruit est trop fort, cette propriété reste valable.

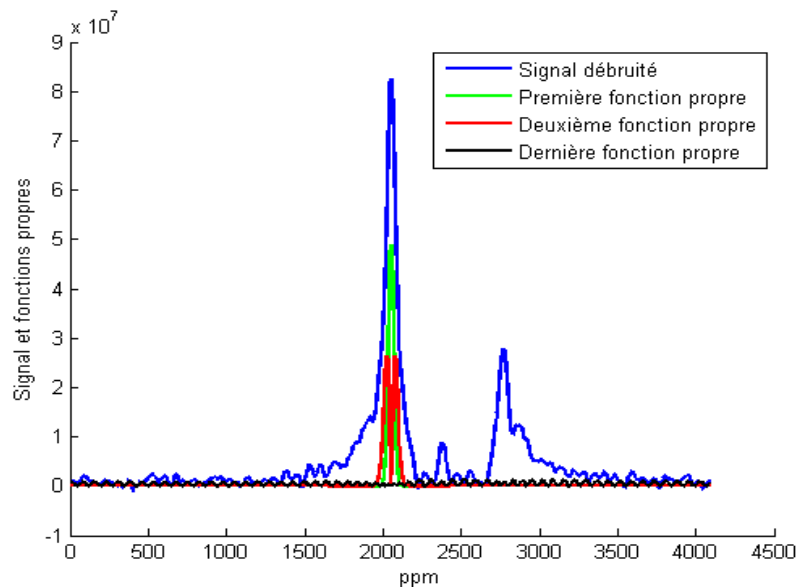


FIGURE 4.10 – Localisation des fonctions propres [18].

## 6 Conclusion

Le présent chapitre a été consacré à l'extension de l'approche SCSA pour des fonctions unidimensionnelles bruitées. Nous avons commencé par introduire quelques notions sur l'opérateur de Schrödinger semi-classique dans le cas où la fonction subirait une perturbation. La définition du débruitage d'une fonction par l'approche SCSA a été ensuite présentée suivie de quelques propriétés et sa convergence. Une validation numérique a été, ensuite, établie par des exemples académiques et réels.

# Conclusion

Une contribution à l'extension d'une nouvelle méthode de décomposition des fonctions unidimensionnelles basée sur une quantification semi-classique, dites SCSA, pour le filtrage/débruitage des signaux unidimensionnels bruités a été présentée dans ce manuscrit.

Bien qu'il existe plusieurs méthodes de décompositions comme par exemple les méthodes de décomposition de Fourier et la décomposition en valeurs singulières (SVD) mais l'approche SCSA respecte bien les suggestions de la théorie mathématique de l'approximation. En effet, cette méthode considère la fonction à décomposer comme étant un potentiel de l'opérateur de Schrödinger semi-classique unidimensionnelle  $\mathcal{H}_h(f)$  (formule 2.1) puis l'analyser en utilisant uniquement un nombre fini  $N_h$  de ses données spectrales  $\{\psi_{n,h}, \mu_{n,h}\}; n = 1, \dots, N_h$ .

L'avantage de l'utilisation de l'approche SCSA ne réside pas seulement en l'utilisation des fonctions élémentaires adaptatives mais plus que cela, il a été montré que les fonctions propres  $L^2$ -normalisées  $\psi_{n,h}$  associées aux valeurs propres négatives  $\mu_{n,h}$  de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}_h(f)$  contiennent l'information la plus pertinente de la fonction  $f$ , et d'où, dans ce travail, notre objectif se résume en l'extension de cette nouvelle approche pour les signaux bruités.

La convergence, des propriétés et des remarques très importantes ont été, aussi, établis dans ce mémoire où nous avons souligné le rôle important du paramètre semi-classique  $h$  dans le débruitage du signal bruité, ensuite il a été mentionné que les valeurs propres négatives absorbent le bruit contrairement aux fonctions propres qui gardent les mêmes formes et propriétés.

En dernier, ce travail ouvre la voie à de nombreuses perspectives prometteuses qui pourraient s'ouvrir et se réaliser dans de nombreux domaines. Tout premièrement, il nous paraît intéressant d'étendre l'approche par la SCSA au dimension supérieurs pour les différents types de signaux. Une autre perspective consiste à déterminer une méthode d'optimisation fiable pour pouvoir estimer la valeur optimale du paramètre semi-classique  $h$  selon le contexte d'étude.



# Bibliographie

- [1] **Allaire, G.** (2005) *Analyse numérique et optimisation*. Les Éditions de l'École Polytechnique. [13](#)
- [2] **Bellanger, M.** (1989) *Analyse des signaux et filtrage numérique adaptatif*, Édition Masson, Paris. [1](#), [22](#), [23](#)
- [3] **Boyd, J.P.** (2000) *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Dover Publication, Inc., 2ed edition. [1](#), [13](#)
- [4] **Chui, C.K.** (1992), *An introduction to Wavelets*. Texas A&M University, College Station, Texas. [1](#), [5](#)
- [5] **Deift, P. A., and Trubowitz, E.** (1979) *Inverse scattering on line*. Communications on Pure and applied Mathematics, XXXII, 121–251. [1](#), [6](#), [7](#), [35](#), [36](#), [37](#)
- [6] **Dimassi, M., and Sjöstrans, J.** (1999), *Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit*. Cambridge U Press. [8](#), [9](#)
- [7] **Eleiwi, F. Laleg Kirati, T. M., Khelladi, S., and Bakir, F.** (2011) *A semi-classical signal analysis method for the analysis of turbo-machinery flow unsteadiness*. Word Academy of Science, Engineering and Technology, **59**, 215–218. [1](#), [12](#), [21](#)
- [8] **Faddev, L. D.** (1964) *Properties of the S-matrix of the one-dimensional Schrödinger equation*. Trudy Math. Inst. Steklov **73**, 314–336. [9](#), [10](#), [35](#), [36](#)
- [9] **Gesztesy, F., and Holden, H.** (1994) *Trace formula and conservation laws for nonlinear evolution equations*. Reviews in Mathematical Physicals. **6**(1) 51–95. [37](#)
- [10] **Gottlieb, D., Hussaini, M. Y., and Orszag, S. A.,** (1984) *Theory and applications of spectral methods*. In Spectral Methods for Partial Differential Equation, R. Voigt, Eds, 1–54. [13](#), [14](#)
- [11] **Guillaume, L., William, W., Virgile, B. V., Emmanuelle, G., and Christian. B.** *Performance du SVD pour débruiter les spectres RMN et Raman*. Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS, Collège de France. [1](#), [5](#)
- [12] **Henrici, P.** (1986) *Application and Computational Complex Analysis : Discrete Fourier Analysis - Cauchy Integrals - Construction of Conformal Maps - Univalent Functions*. John Wiley and Sons. **3** Inc., New York, NY. [13](#)
- [13] **Kaiserli, Z.** (2015), *Décomposition du potentiel de l'opérateur de Schrödinger semi-classique bidimensionnel : Application à la représentation d'images*. Thèse de Doctorat, Université de Mostaganem Abdelhamid Ibn Badis, Mostaganem, Algérie. [1](#), [6](#), [10](#), [11](#), [15](#)
- [14] **Khalladi, S., Deligant, M., Laleg Kirati, T. M., Eleiwi, F., Ravelet, F., and Bakir, F.** *New indices for the analysis of turbomachinery features by a semi-classical signal analysis method*. Submitted. [iv](#), [1](#), [12](#), [21](#)
- [15] **Koelink, E.** (2008) *Scattering theory*. Lecture notes. [6](#), [9](#), [35](#), [36](#)

- [16] **Laleg Kirati, T. M.** (2008) *Analyse des signaux par quantification semi-classique. Application à l'analyse des signaux de pression artérielle.* Institut de Recherche en Informatique et en Automatique. INRA Centre Paris Rocquencourt. Université Versailles Saint Quentin en Yvelines. [iv](#), [1](#), [12](#), [19](#), [20](#)
- [17] **Laleg Kirati, T. M., Crépeau, E., and Sorine, M.** (2013) *Semi-classical signal analysis.* Mathematics of Control, Signals, and Systems(MCSS) Journal **25(1)**, 37–61. [9](#), [11](#), [12](#), [14](#), [19](#), [20](#)
- [18] **Laleg-Kirati, T. M., Kaiserli, Z., Achten, R., and Serrai, H.** (2015) *Magnetic resonance spectroscopy data de-noising using semi-classical signal analysis approach : application to in-vitro MRS data.* Proceedings of the 23rd annual Meeting ISMRM, Toronto, Canada 1963. [iv](#), [1](#), [30](#)
- [19] **Laleg Kirati T. M., Jiayu, Z., Eric, A., and Hacene, S.** (2016) *Spectral data de-noising using semi-classical signal analysis : application to localized MRS NMR* Biomed. doi : 10.1002/nbm.3590 [1](#), [30](#)
- [20] **Lesfari, A.** (2012) *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace.* Édition Ellipses . [1](#), [3](#), [4](#), [9](#), [11](#), [12](#)
- [21] **Mallat, S.** (2009) *A wavelet tour of signal processing : The sparse way.* Third Edition, Elsevier. [1](#), [4](#), [14](#)
- [22] **Martinez, A.** (2001) *An introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis.* Springer-Verlag, New York. [8](#), [9](#), [15](#)
- [23] **Newell, A.C.** (1980). *the inverse scattering Transform.* Topics in Current Physics, Springer-Verlag, New-York, **17**, 177–242.
- [24] **Ohmiya, M.** (1991) *On the Deift-Trubowitz trace formula for 1-Dimensional Schrödinger operator with integrable potential.* Funkcialaj Ekvacioj. **34**, 375–390. [1](#), [6](#)
- [25] **Olivier, L.** (2009) *Une vue panoramique sur l'analyse semi-classique.* [6](#), [10](#), [11](#)  
[7](#), [8](#), [9](#)
- [26] **Pankov, A.** *Introduction to spectral theory of Schrödinger operators.* Available at <http://www.math.nsysu.edu.tw/amen/posters/Pankov.pdf>. [12](#)
- [27] **Patrick, F. Lisl, W. and Charles, D.** *Approximation numérique.* IMB, Université Bordeaux 1, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence, France. [1](#)
- [28] **Quarteroni, A., Sacco, R., and Saleri, F.** (2007) *Méthodes numériques : Algorithmes, analyse et applications.* Springer, Varlag Italia, Milano. [14](#)
- [29] **Simon, B.** (2000), *Schrödinger operator in the twentieth century.* Journal of Mathematical Physics. **41(6)**, 3523–3555. [6](#), [35](#)
- [30] **Trefethen, L.N.** (2000) *Spectral methods in Matlab.* Society for Industrial and Applied Mathematics. [14](#)

# Annexe

## A Opérateur de Schrödinger unidimensionnel

Soit l'expression différentielle définit par

$$L = -\frac{d^2}{dt^2} - f, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.21)$$

où le potentiel  $f \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$  représente la fonction à décomposer.

L'opérateur de Schrödinger unidimensionnel  $\mathcal{H}$ , dans  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ , défini par

$$\mathcal{H}(f)v = Lv, \quad v \in \mathbf{D}(\mathcal{H}(f)), \quad (4.22)$$

avec

$$\mathbf{D}(\mathcal{H}(f)) = \left\{ g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \mid g, \frac{dg}{dt} \in \mathbf{AC}_{loc}(\mathbb{R}), Lg \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \right\}, \quad (4.23)$$

est auto-adjoint [29]. Le spectre de l'opérateur  $\mathcal{H}(f)$  noté par  $\sigma$  est donc réel [29] et est composé d'un

- spectre continu  $\sigma_c$ , qui comprend les valeurs propres positives de multiplicité 2.
- spectre discret  $\sigma_d$ , qui contient les valeurs propres négatives de multiplicité 1.

On suppose, maintenant, que  $f$  est une fonction à valeurs réelles vérifiant

$$f \in \mathbf{L}_1^1(\mathbb{R}), \quad \frac{\partial^m f}{\partial t^m} \in \mathbf{L}_1^1(\mathbb{R}), \quad m = 1, 2, \quad (4.24)$$

où

$$\mathbf{L}_1^1(\mathbb{R}) = \left\{ f \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|(1+|t|) dt < \infty \right\}. \quad (4.25)$$

$\mathbf{L}_1^1(\mathbb{R})$  est souvent appelé classe de Faddeev [8]. Avec ces conditions, on est dans le cas point limite et donc nous n'avons pas besoin de conditions aux limites à l'infini. Ainsi, on considère l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}(f)$  défini sur  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  par

$$\mathcal{H}(f)\psi = -\frac{d^2}{dt^2}\psi - f\psi, \quad \psi \in \mathbf{D}(\mathcal{H}(f)) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}), \quad (4.26)$$

où  $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$  est l'espace de Sobolev d'ordre 2.

On s'intéresse maintenant à l'équation aux valeurs propres suivante [5, 15]

$$\mathcal{H}(f)\psi = z\psi, \quad (4.27)$$

- Si  $f$  est une fonction nulle, alors l'équation(4.27) admet des solutions exponentielles.

- Si  $f$  est une fonction non nulle et  $z = s^2$  avec  $s \in \mathbb{C}^+$  (la demi plan complexe supérieur,  $\Im(s) \geq 0$ ). Alors la solution de l'équation (4.27) est composée d'un spectre continu  $\sigma_c$  et spectre discret  $\sigma_d$ . Ainsi, nous avons  $\sigma_c = [0, +\infty)$  et  $\sigma_d$  est composé d'un nombre fini (ou nul) de valeurs propres négatives que l'on note  $s^2 = \mu_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ .
- Si  $f$  est une fonction non nulle à support compact. Alors les solutions de l'équation (4.27) se comportent comme des exponentielles pour  $t \rightarrow \pm\infty$ . En fait, l'hypothèse  $f \in \mathbf{L}_1^1(\mathbb{R})$  permet de retrouver le comportement exponentiel des solutions de l'équation (4.27) en  $\pm\infty$ .

La décomposition des fonctions, en utilisant la méthode de décomposition de Deift et Trubowitz qui se classe parmi les méthodes de transformée de diffusion inverse, est basée essentiellement sur les données de diffusion. Pour cela, on va présenter, dans ce qui suit, la formulation et quelques notions sur les données de diffusion, ces dernières sont exprimées en fonction de la solution de l'opérateur de Schrödinger en  $\pm\infty$ .

## B Solution de Jost, états bornés et données de diffusion

Les solutions de Jost, notées  $J_{\pm}$  sont définies comme étant les solutions uniques de l'équation de Schrödinger en  $\pm\infty$  [5, 8, 15]. Elles sont données par

$$J_{\pm}(s, t) = e^{\pm ist} - \int_t^{\pm\infty} \frac{\sin[s(t-x')]}{s} f(x') J_{\pm}(s, x') dx', \quad (4.28)$$

où  $\Im(s) \geq 0$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

Ce sont des fonctions propres de  $\mathcal{H}(f)$  associées aux valeurs propres  $s^2$  vérifiant

$$\mathcal{H}(f)J_{\pm}(s, t) = s^2 J_{\pm}(s, t), \quad (4.29)$$

avec

$$\begin{aligned} J_{\pm}(s, t) &= e^{\pm ist} + o(1), & t \rightarrow \pm\infty, \\ \frac{dJ_{\pm}}{dt}(s, t) &= \pm ist e^{\pm ist} + o(1), & t \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (4.30)$$

A partir de ces fonctions, on définit de nouvelles quantités nommées coefficients de transmission  $T(s)$  et coefficients de réflexion par la gauche et par la droite  $\mathcal{R}_l(s)$  et  $\mathcal{R}_r(s)$  respectivement. Elles sont définies en fonctions du Wronskien des solutions de Jost comme suit [5, 15]

$$\begin{aligned} \frac{1}{T(s)} &= \frac{1}{2is} W(J_-(s, t), J_+(s, t)), & s \in \overline{\mathbb{C}^+} - \{0\}, \\ \frac{\mathcal{R}_l(s)}{T(s)} &= \frac{1}{2is} W(J_+(s, t), J_-(-s, t)), & s \in \mathbb{R} - \{0\}, \\ \frac{\mathcal{R}_r(s)}{T(s)} &= \frac{1}{2is} W(J_+(-s, t), J_-(s, t)), & s \in \mathbb{R} - \{0\}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

où  $W(w_1, w_2) = w_1(t) \frac{dw_2(t)}{dt} - \frac{dw_1(t)}{dt} w_2(t)$  représente le Wronskien de  $w_1$  et  $w_2$  et  $\overline{\mathbb{C}^+} = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ .

Le comportement en  $\mp\infty$  de  $J_{\pm}$  se déduit des propriétés de Wronskien et s'écrit en fonction de  $T(s)$  et  $\mathcal{R}_{r(l)}(s)$  :

$$J_{\pm}(s, t) = \frac{1}{T(s)} e^{\pm ist} + \frac{\mathcal{R}_{r(l)}(s)}{T(s)} e^{\mp ist} + o(1), \quad t \rightarrow \mp\infty. \quad (4.32)$$

Une interprétation physique de ces équations consiste à considérer la solution  $T(s)J_+(s, t)$  comme décrivant une onde plane  $e^{ist}$  émise de  $-\infty$ .  $T(s)e^{ist}$  est alors transmise vers

$+\infty$  et  $\mathcal{R}_l(s)e^{-ist}$  est réfléchi. De même  $T(s)J_-(s, t)$  décrit le phénomène pour une onde émise de  $+\infty$ . Pour plus de détails sur les solutions de Jost, les états bornés et les données de diffusion, on renvoie le lecteur vers [5, 9].

## C Formule de décomposition de Deift et Trubowitz

Deift et Trubowitz [5] ont montré que la fonction  $f$  considérée comme un potentiel de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}$  peut être décomposée, en utilisant la transformée de la diffusion inverse, par une formule explicite décrite dans le théorème suivant.

**Théorème 4.2** [5] *Soit  $f \in L^1_1(\mathbb{R})$ . Alors, le potentiel  $f$  peut être reconstruit, de manière unique, par la formule suivante*

$$f(t) = -4 \sum_{n=1}^N \sqrt{-\mu_n} \psi_n^2(t) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \int_0^b \left( \frac{2i}{\pi} \int_{-a}^{+a} s \mathcal{R}_{r(l)}(s) J_{\pm}^2(s, t) ds \right) da, \quad p.p. \quad (4.33)$$

Si de plus,  $s\mathcal{R}_{r(l)} \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors

$$f(t) = -4 \sum_{n=1}^N \sqrt{-\mu_n} \psi_n^2(t) + \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s \mathcal{R}_{r(l)}(s) J_{\pm}^2(s, t) ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.34)$$

La formule (4.34) est souvent appelée formule de trace de Deift et Trubowitz. Elle se décompose en la somme de deux termes, un terme qui se caractérise par le spectre discret  $\sigma_d$  de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}$ , et un autre qui montre la contribution du spectre continu  $\sigma_c$  dans la reconstruction du potentiel  $f$ .

On rappelle que le spectre discret  $\sigma_d$  de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}$  est composé d'un nombre fini  $N$  de fonctions propres  $L^2$ -normalisées  $\psi_n$  associées aux valeurs propres négatives rangées par ordre décroissant  $\mu_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ . En effet, les fonctions propres  $\psi_n$  constituent une base unique pour chaque potentiel, d'où l'obtention d'un ensemble adaptatif, contenant un nombre fini de fonctions propres  $L^2$ -normalisées au carré  $\psi_n^2$  associées aux valeurs propres négatives  $\mu_n$  pour la décomposition des fonctions grâce à l'utilisation de la transformée de la diffusion inverse de l'opérateur de Schrödinger  $\mathcal{H}$ .

# Décomposition d'une fonction unidimensionnelle par une méthode basée sur une quantification semi-classique : Application aux signaux bruités

**Résumé :** Une contribution à l'extension d'une nouvelle méthode de décomposition des fonctions unidimensionnelle basée sur une quantification semi classique, dite SCSA, au cas bruité a été établie dans ce manuscrit.

Bien qu'il existe, dans la littérature, plusieurs méthodes de décomposition mais l'approche par SCSA est réalisée grâce aux données spectrales de l'opérateur de Schrödinger semi-classique. En effet, l'approche SCSA considère la fonction à décomposer comme étant un potentiel de l'opérateur de Schrödinger semi-classique, puis extraire uniquement les valeurs propres négatives et les fonctions propres associées qui forment un ensemble de fonction élémentaires adaptatives comme le suggère la théorie mathématiques de l'approximation.

D'une manière précise, la méthode SCSA consiste à représenter la fonction sous la forme d'une somme finie des carrés des fonctions propres  $L^2$ -normalisées pondérée par les valeurs propres négatives associées.

Le filtrage des fonctions bruités par l'approche SCSA est réalisé en tronquant la somme vu que les premières fonctions propres contiennent l'information utile du signal.

La performance de l'approche SCSA pour le filtrage des signaux bruités a été testé et validé via des exemples à la fois académiques et réels.

**Mots-Clés.** Analyse semi-classique ; Décomposition de fonction 1D ; Opérateur de Schrödinger ; Valeurs propres négatives ; Fonctions propres  $L^2$ -normalisées ; Fonction bruités.

---

## Decomposition of one dimensional function using semi-classical quantification : Application to noisy functions

**Abstract :** This manuscript deal with contribution for the extension of a new method for decomposition of the one dimensional function based on semi-classical quantification, called SCSA, for noisy signals.

Despite the existence of the state-of-the-art methods for signals decomposition, The SCSA approach is established using the spectral data of the semi-classical Schrödinger operator. Indeed, The SCSA approach consider the function to be decomposed as a potential of the semi-classical Schrödinger operator, then extract only the negative eigenvalues and the associated eigenfunctions which form a set of adaptive functions as suggested by the theory of approximation.

More exactly, the approximation of the functions using the SCSA approach is expressed as a finite sum of the squared  $L^2$ -normalized eigenfunctions weighted by the associated negative eigenvalues.

Denoised function using the SCSA approach can be realized by truncating the summation since the key information about the signals belongs to the first eigenfunctions

Numerical results on both academic and real signals illustrate the performance of the SCSA approach on denoising process.

**Key Words.** Semi-classical analysis ; Decomposition of 1D function ; Schrödinger operator ; Negative eigenvalues ;  $L^2$ -normalized eigenfunctions ; Noisy function.

