Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Analyse Fonctionnelle"

présenté par :

Faouzia MANSOURI

Quelques Résultats sur les Solutions des Equations Différentielles Linéaires Homogènes et non Homogènes d'Ordre Supérieur

soutenu publiquement le 27/ 06/2O19 devant le jury composé de :

Président :	D. Rabab BOUABDELLI	Université de Mostaganem
Examinatrice :	D. Amina FERRAOUN	Université de Mostaganem
Encadreur :	D. Mansouria SAIDANI	Université de Mostaganem

Année Universitaire : 2018 / 2019

MASTER

Dédicaces

Grâce à mon Dieu qui ma donné la vie et aussi la capacité de lire et écrire.

Je dédie ce modeste travail à mes chères parents qui ont sacrifiés pour ma réussite et mon bonheur et qui m'ont encouragé durant la période des études pour arriver à mon rêve.

A ma sœur, mes frères et toute ma famille.

A mon encadreur Mme Mansouria SAIDANI, tous mes professeurs et tous mes amis.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie le Dieu Alkadir le plus puissant de m'avoir donné la volonté et la patience d'aller jusqu'au bout pour réaliser mon but.

Je tiens à remercier mon encadreur Mme Mansouria SAIDANI qui m'a aidé par ses connaissances scientifiques et disposer tous ce qui est nécessaire pour résoudre les difficultés rencontrés lors de la réalisation de ce travail.

Mes remerciements les plus sincères vont Mme Rabab BOUABDELLI qui ma honoré en acceptant d'être présidente du jury. Je tiens adresser mes remerciement Mme Amina FERRAOUN pour l'intérêt quelle a porté pour mon travail en participant ce jury en tant que examinatrice.

A mes chères parents qui ont aidé à arriver ce que je suis, merci à toutes et à tous.

Table des matières

Introduction

La théorie de Nevanlinna est un outil très bénéfice dans la théorie des fonctions dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes. En effet depuis l'année 1925, R.Nevanlinna a publié les résultats de ses travaux sur la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes .Grâce à cet thématique,plusieurs problèmes ont été résolus par des chercheurs effectuant des recherches dans la même thématique, on cite à titre d'exemple [3], [9], [10], [14], [17],[21], [27]...

Ce manuscrit est composé d'une introduction, quatre chapitres et une conclusion.

Dans **le premier chapitre**, nous citons quelques définitions, notations et résultats de la théorie de Nevanlinna utilisés dans ce travail, concernant l'ordre de croissance des solutions f et l'exposant de convergence p-itératif, la mesure linéaire, la mesure logarithmique et la densité des ensembles.

Le deuxième chapitre concerne la croissance des solutions de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f^{'} + A_0(z) f = 0$$

où $A_0, \ldots, A_{k-1}$ sont des fonctions entières avec $A_0 \not\equiv 0$. Nous estimons l'hyper-ordre sous la condition de l'existence d'un coefficient dominant A_0.

Dans **le troisième chapitre**, nous étudions l'ordre itératif des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes où les coefficients sont des fonctions méromorphes satisfaisant certaines conditions de croissance. Quelques estimations de l'exposant de convergence itératif de ces solutions sont également données.

Dans **le dernier chapitre**, on s'intéresse à l'étude de l'ordre itératif des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} A_j f^{(j)} + A_0 f = 0$$

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} A_j f^{(j)} + A_0 f = F$$

où $k \geqslant 2, A_j, (j = 0 \ldots, k-1)$ et F sont des fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini.

Sous certaines conditions sur les coefficients, nous donnons quelques estimations de l'exposant de convergence itératif .

Chapitre 1

Outils principaux

Notre objectif dans ce chapitre est de donner les définitions de base de la théorie de Nevanlinna et de Wimam-Valiron sur les fonctions méromorphes et de rappeler quelques propriétés sur la croissance des fonctions méromorphes. Pour plus de détails voir ([16], [22], [29]).

1 Fonction caractéristique de Nevanlinna

Théorème 1.1 *(Formule de Jensen) ([22]) Soient f une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0, +\infty$ et $a_1, a_2, \cdots, a_n$ (respectivement $b_1, b_2, \cdots, b_m$) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \log\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r} \log\frac{r}{|a_j|} \tag{1.1}$$

Définition 1.1 *([22]) Pour tout nombre réel $x \geq 0$, on définit :*

$$\log^+ x = max(\log x, 0) = \begin{cases} \log x, & x > 1, \\ 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

Lemme 1.1 *([6]) Soient $x_1, x_2, ..., x_n, x, y$ des nombres réels strictement positifs. Alors, nous avons*

(1) $\log x \leq \log^+ x$,

(2) $\log^+ x \leq \log^+ y, \quad (x \leq y)$,

(3) $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$,

(4) $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}$,

(5) $\log\left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \log^+ x_j$

(6) $\log^+\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \leq \log n + \sum_{j=1}^{n} \log^+ x_j$.

Preuve. Les propriétés (1), (2) sont des conséquences immédiates de la définition 1.1 et la monotonie de la fonction logarithme ordinaire. Montrons (3), (4) ,(5) et (6). Pour (3), nous avons

$$\begin{aligned} \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x} &= max\left(\log x, 0\right) - max\left(\log\frac{1}{x}, 0\right) \\ &= max(\log x, 0) - max(-\log x, 0) \\ &= \log x. \end{aligned}$$

(4) est obtenue comme suit

$$\begin{aligned} \log^+ x + \log^+ \tfrac{1}{x} &= max\left(\log x, 0\right) + max\left(\log \tfrac{1}{x}, 0\right) \\ &= max(\log x, 0) + max(-\log^+ x, 0) \\ &= |\log x|. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Pour (5), si $\prod_{j=1}^{n} x_j \leq 1$,alors l'inégalité est évidente. Supposons que $\prod_{j=1}^{n} x_j > 1$. Alors, $\log^+\left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right) = \log\left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \log x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \log^+ x_j$, d'après (1).
Enfin, nous avons (6) en utilisant (2) et (5). En effet

$$\begin{aligned} \log^+\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) &\leq \log^+(n \max_{1\leq j\leq n} x_j) \\ &\leq \log n + \log^+(\max_{1\leq j\leq n} x_j) \\ &\leq \log n + \sum_{j=1}^{n} \log^+(x_j). \end{aligned} \tag{1.4}$$

■

Définition 1.2 *([22]) Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe, on désigne par $n(t,a,f)$ le nombre des racines de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq t$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité, et par $\overline{n}(t,a,f)$ le nombre des racines distinctes. On désigne par $n(t,\infty,f)$ le nombre des pôles de f dans le disque $|z| \leq t$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité,et $\overline{n}(t,\infty,f)$ le nombre de pôles distinctes de f dans le disque $|z| \leq t$. Soit f une fonction méromorphe.On définit la fonction a-point de f par :*

$$\mathrm{N}(r,a,f) = \mathrm{N}(r,\frac{1}{f-a}) := \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt + n(0,a,f)\log r,\ (a \neq \infty),$$

$$\mathrm{N}(r,\infty,f) = \mathrm{N}(r,f) := \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt + n(0,\infty,f)\log r,\ (a = \infty),$$

$$\overline{\mathrm{N}}(r,a,f) = \overline{\mathrm{N}}(r,\frac{1}{f-a}) := \int_0^r \frac{\overline{n}(t,a,f) - \overline{n}(0,a,f)}{t} dt + \overline{n}(0,a,f)\log r,\ (a \neq \infty),$$

et

$$\overline{\mathrm{N}}(r,\infty,f) = \overline{\mathrm{N}}(r,f) := \int_0^r \frac{\overline{n}(t,\infty,f) - \overline{n}(0,\infty,f)}{t} dt + \overline{n}(0,\infty,f)\log r,\ (f = \infty).$$

Lemme 1.2 *([22]) Soit f une fonction méromorphe avec a-points $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ dans le disque $|z| \leq r$ tels que : $0 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \cdots \leq |\alpha_n| \leq r$,chaque racine étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors :*

$$\int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t} dt = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt = \sum_{0<|\alpha_j|\leq r} \log \frac{r}{|\alpha_j|}$$

Preuve. Posons $|\alpha_j| = r_j (1 \leq j < n)$, alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \log \frac{r}{|\alpha_j|} &= \sum_{j=1}^{n} \log \frac{r}{r_j} \\
&= \log\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{r}{r_j}\right) \\
&= \log\left(\frac{r^n}{r_1.r_2\cdots r_n}\right) \\
&= \log\left[\frac{r_2}{r_1}.\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2 \cdots \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^{n-1}.\left(\frac{r}{r_n}\right)^n\right] \\
&= \log\frac{r_2}{r_1} + 2\log\frac{r_3}{r_2} + \cdots + (n-1)\log\frac{r_n}{r_{n-1}} + n\log\frac{r}{r_n} \\
&= \int_0^{r_1} 0\frac{dt}{t} + \int_{r_1}^{r_2} 1\frac{dt}{t} + \int_{r_2}^{r_3} 2\frac{dt}{t} + \cdots + \int_{r_{n-1}}^{r_n} (n-1)\frac{dt}{t} + \int_{r_n}^{r} n\frac{dt}{t} \\
&= \int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t} dt.
\end{aligned}$$

■

Lemme 1.3 *([16]) soit f une fonction méromorphe représentée par sa série de Laurent à l'origine par*

$$f(z) = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j, c_m \in \mathbb{C}^*, m \in \mathbb{Z}.$$

Alors,

$$\log|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi + \mathrm{N}(r,f) - \mathrm{N}\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

Définition 1.3 *([16]) Soit f une fonction méromorphe. On définit la fonction de proximité de f au point a par :*

$$\begin{aligned}
m(r,a,f) &= m\left(r,\frac{1}{f-a}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{\left|f(re^{i\varphi})-a\right|} d\varphi, \quad si \quad a \neq +\infty
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
m(r,\infty,f) &= m(r,f) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi.
\end{aligned}$$

Définition 1.4 *([16]) Soit f une fonction méromorphe. Alors, la fonction caractéristique de Nevanlinna $\mathrm{T}(r,f)$ de f est définie par :*

$$\mathrm{T}(r,f) = m(r,f) + \mathrm{N}(r,f)$$

Exemple 1.1 *Soit $f(z) = \frac{e^z}{z}$. Nous avons $n(t,\infty,f) = 1$ et $n(0,\infty,f) = 1$ et*

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}(r,f) &= \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt + n(0,\infty,f)\log r \\
&= \log r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\frac{e^{re^{i\varphi}}}{re^{i\varphi}}\right| d\varphi \\ &= \frac{r}{\pi} - \frac{1}{2}\log r. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(r,f) &= \frac{r}{\pi} - \frac{1}{2}\log r + \log r \\ &= \frac{r}{\pi} + \frac{1}{2}\log r. \end{aligned}$$

Proposition 1.1 *([16]) Soient $f, f_1, f_1, \cdots, f_n$ des fonctions méromorphes et a, b, c et d des nombres complexes telles que $ab - cd \neq 0$. Alors :*

(1) $\mathrm{T}\left(r, \prod_{j=1}^{n} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \mathrm{T}(r, f_j)$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

(2) $\mathrm{T}\left(r, \sum_{j=1}^{n} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \mathrm{T}(r, f_j) + \log n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

(3) $\mathrm{T}\left(r, f^n\right) = n\mathrm{T}(r,f)$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

(4) $\mathrm{T}\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) = \mathrm{T}(r,f) + \mathrm{O}(1)$, $f \neq \frac{-d}{c}$.

2 Premier théorème fondamental de Nevanlinna

Théorème 1.2 *([16]) Soient $a \in \mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe. Soit*

$$f(z) - a = \sum_{j=m}^{\infty} c_j z^j, c_m \neq 0, m \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$$

la série de Laurent de $f - a$ à l'origine. Alors, pour tout nombre complexe a nous avons

$$\mathrm{T}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \mathrm{T}(r,f) - \log|c_m| + \varphi(r,a),$$

tel que : $|\varphi(r,a)| \leq \log^+|a| + \log 2$.

3 La croissance d'une fonction entière ou méromorphe

3.1 L'ordre de croissance et l'hyper-ordre d'une fonction

Définition 1.5 *([20]) Soit f une fonction méromorphe. L'ordre de croissance et l'yper ordre de f sont définis respectivement par :*

$$\rho(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \mathrm{T}(r,f)}{\log r},$$

$$\rho_2(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log \mathrm{T}(r,f)}{\log r}.$$

Si f est une fonction entière. Alors, l'ordre de croissance et l'yper ordre de f sont définis respectivement par :

$$\rho(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r},$$

$$\rho_2(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r}.$$

3.2 L'ordre p-itératif d'une fonction

Définissons inductivement, pour $r \in [0,\infty)$, $\exp_1 r = e^r$ et $\exp_{i+1} r = \exp(\exp_i r)$, $i \in \mathbb{N}$. Pour tout r suffisamment grand, nous définir $\log_1 r = \log r$ et $\log_{i+1} r = \log(\log_i r)$, $i \in \mathbb{N}$. Nous notons aussi $\exp_0 r = r = \log_0 r$, $\log_{-1} r = \exp_1 r$ et $\exp_{-1} r = \log_1 r$. Pour exprimer l'ordre itératif des fonctions méromorphes, nous rappelons les définitions suivantes (voir [7],[20] , [23]).

Définition 1.6 *([20]) Soit f une fonction méromorphe. L'ordre p-itératif de f est défini comme suit*

$$\rho_p(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log_p T(r,f)}{\log r} \quad (p \geq 1).$$

Si f est une fonction entière. Alors, l'ordre p-itératif de f est défini par :

$$\rho_p(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log r} \quad (p \geq 1).$$

3.3 L'ordre inférieur d'une fonction

Définition 1.7 *([20]) Soit f une fonction méromorphe. L'ordre inférieur et l'yper ordre inférieur de f sont définis respectivement par :*

$$\mu(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

$$\mu_2(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

Si f est une fonction entière. Alors l'ordre inférieur et l'yper ordre inférieur de f sont définis respectivement par :

$$\mu(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r},$$

$$\mu_2(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r}.$$

3.4 L'ordre p-itératif inférieur d'une fonction

Définition 1.8 *([20]) Soit f une fonction méromorphe. Alors, l'ordre p-itératif inférieur de f est défini par*

$$\mu_p(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log_p T(r,f)}{\log r} \quad (p \geq 1).$$

Si f est une fonction entière. Alors, l'ordre p-itératif inférieur de f est défini par :

$$\mu_p(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log r},$$

Définition 1.9 ([22]) *L'indice de croissance de l'ordre p-itératif d'une fonction méromorphe f est défini par*

$$i(f) = \begin{cases} 0, & si \quad f \quad \text{est rationnelle,} \\ \min\left\{j \in \mathbb{N} : \rho_j(f) < +\infty\right\}, & si \quad f \quad \text{est transcendante, avec} \quad \rho_j(f) < +\infty \quad \text{existent,} \\ +\infty, & si \quad \rho_j(f) = +\infty \quad \text{pour tout} \quad j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

3.5 L'exposant de convergence p-itératif d'une fonction

Définition 1.10 ([16], [22]) *Soit f une fonction méromorphe. L'exposant de convergence de la suite des zéros de la fonction f est donné par*

$$\lambda(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

et l'exposant de convergence de la suite des zéros distincts de la fonction f est défini par

$$\overline{\lambda}(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

Définition 1.11 ([16], [22]) *Soit f une fonction méromorphe. L'exposant de convergence p-itératif de la suite des zéros de la fonction f est donné par*

$$\lambda_p(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

et l'exposant de convergence p-itératif de la suite des zéros distincts de la fonction f est défini par

$$\overline{\lambda}_p(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log_p \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

Définition 1.12 ([16], [22]) *Soit f une fonction méromorphe. L'exposant de convergence p-itératif de la suite des pôles de f est défini par*

$$\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log_p N(r, f)}{\log r}.$$

Définition 1.13 ([16], [22]) *L'indice de croissance de l'ordre p-itératif d'une fonction méromorphe f est défini par*

$$i_\lambda(f, a) = \begin{cases} 0, & si \quad f \quad n(r,a) = O(\log r), \\ \min\{p \in \mathbb{N} : \lambda_p(f,a) < \infty\}, & si \quad \lambda_p(f,a) < \infty \quad \text{pour certain} \quad p \in \mathbb{N}, \\ \infty, & si \quad \lambda_p(f,a) = \infty \quad \text{pour tout} \quad p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Remarque 1.1 *Si $a = 0$, alors nous fixons $i_\lambda(f,a) = i_\lambda(f)$. Si $a = \infty$, alors nous définissons $i_\lambda(f,a) = i_\lambda\left(\frac{1}{f}\right)$. De même, on peut définir le degré de croissance $i_{\overline{\lambda}}(f,a)$ de $\overline{\lambda}_p(f,a)$.*

4 La mesure et la densité des ensembles

4.1 La mesure linéaire, la mesure logarithmique

Définition 1.14 ([20], [21]) *La mesure linéaire d'un ensemble* $E \subset [0, +\infty)$ *est définie par*

$$m(E) = \int_E dt = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt.$$

La mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty)$ *est définie par*

$$m_l(F) = \int_F \frac{dt}{t} = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt.$$

Exemple 1.2 *La mesure linéaire de* $E = [1, 5] \subset [0, +\infty[$ *est*

$$\begin{aligned} m(E) &= \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt \\ &= \int_1^5 dt \\ &= 4. \end{aligned}$$

Exemple 1.3 *La mesure logarithmique de* $F = \left[e^1, e^5\right] \subset [1, +\infty[$ *est*

$$\begin{aligned} m_l(F) &= \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt \\ &= \int_{e^1}^{e^5} \frac{dt}{t} \\ &= [\log t]_{e^1}^{e^5} \\ &= 4. \end{aligned}$$

4.2 La densité des ensembles

Définition 1.15 ([20], [21]) *La densité supérieure de l'ensemble* $E \subset [0, +\infty)$ *est définie par*

$$\overline{dens}(E) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{m(E \cap [0, r])}{r}.$$

Définition 1.16 ([20], [21]) *La densité inférieure de l'ensemble* $E \subset [0, +\infty)$ *est définie par*

$$\underline{dens}(E) = \liminf_{r \to +\infty} \frac{m(E \cap [0, r])}{r}.$$

Exemple 1.4 *La densité inferieur et la densité superieur de* $E = [1, 5] \subset [0, +\infty[$ *est*

$$\overline{dens}(E) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{m(E \cap [0, r])}{r} = 0.$$

$$\underline{dens}(E) = \liminf_{r \to +\infty} \frac{m(E \cap [0, r])}{r} = 0.$$

Définition 1.17 ([20], [21]) *La densité logarithmique inférieure d'un ensemble* $F \subset [1, +\infty)$ *est définie par*

$$\underline{\log dens}\,(F) = \liminf_{r \to +\infty} \frac{m_l\,(F \cap [1, r])}{\log r}.$$

La densité logarithmique supérieure d'un ensemble $F \subset [1, +\infty)$ *est définie par*

$$\overline{\log dens}\,(F) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{m_l\,(F \cap [1, r])}{\log r}.$$

Exemple 1.5 *La densité logarithmique inferieur et la densité logarithmique superieur de* $F = \left[e^2, e^4\right] \subset [1, +\infty[$ *est*

$$\overline{\log dens}(F) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{m_l(F \cap [1, r])}{\log r} = 0,$$

$$\underline{\log dens}(F) = \liminf_{r \to +\infty} \frac{m_l(F \cap [1, r])}{\log r} = 0.$$

Proposition 1.2 *([5]) Pour tout ensemble* $H \subset [1, +\infty)$, *les assertions suivantes sont vérifiées :*

i) Si $\underline{m_l}\,(H) = +\infty$, *alors* $m\,(H) = +\infty$;

ii) Si $\overline{dens}\,(H) > 0$, *alors* $m\,(H) = +\infty$;

iii) Si $\overline{\log dens}\,(H) > 0$, *alors* $m_l\,(H) = +\infty$.

5 Éléments de la théorie de Wimam-Valiron

5.1 Indice central et le terme maximal

Définition 1.18 ([28]) *Soit* $f\,(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *une fonction entière. On définit le terme maximal de* f *par* $\mu\left(r, f\right) = \max_{n \geq 0} |a_n|\, r^n$ *et on définit l'indice central de la fonction* f *par*

$$\nu_r\left(f\right) = \max\left\{m : \mu\left(r, f\right) = |a_m|\, r^m\right\}.$$

Exemple 1.6 *Soit* $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$. *Le terme maximal de* f *est* $|a_n| r^n$, *lorsque* $|z| = r \to +\infty$ *et par suite* $\nu(r, f) = n$.

6 Théorème de factorisation de Hadamard

Définition 1.19 *(Produit canonique)* ([28]) *Soit* f *une fonction méromorphe transcendante et soient* $z_1, z_2, \ldots$ *ses zéros avec* $0 < |z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \ldots$ *Soit* p *l'entier minimal tel que la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}}$ *converge.*

On appelle

$$\begin{aligned} E(z, 0) &= (1 - z), \\ E(z, p) &= (1 - z) \exp(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}) \quad p = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

des facteurs principaux. Le produit infini

$$p(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \mathrm{E}\left(\frac{z}{z_n}, p\right),$$

converge uniformément dans chaque domaine fini dans $\mathbb{C}$ *et par suite* $\mathrm{P}(z)$ *est entier et s'appelle le produit canonique de* f *formé à partir des zéros de* f. *L'entier* p *est appelé le genre du produit canonique.*

Théorème 1.3 ([13]) *Soit* f *une fonction méromorphe d'ordre* ρ *telle que*

$$f(z) = c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + \dots, (c_k \neq 0),$$

au voisinage de $z = 0$ *et soient* $\{a_{1,} a_2, \dots\}$ *et* $\{b_{1,} b_2, \dots\}$ *les zéros et les pôles de* f *dans* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, *respectivement. Alors,*

$$f(z) = z^k e^{\mathrm{Q}(z)} \frac{\mathrm{P}_1(z)}{\mathrm{P}_2(z)},$$

avec $\mathrm{Q}(z)$ *est un polynôme de degré inférieur ou égal à* ρ *et* $\mathrm{P}_1(z)$ *et* $\mathrm{P}_2(z)$ *sont des produit canoniques de* f *formés à partir des zéros et des pôles non nuls de* f.

Chapitre 2

L'hyper ordre des solutions entières des équations différentielles linéaires à coefficients fonctions entières

1 Introductions et résultats

Nous étudions la croissance des solutions de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0,$$

où $A_0, \ldots, A_{k-1}$ sont des fonctions entières avec $A_0 \not\equiv 0$.

Récemment dans [9], [10], [21] le concept d'hyper-ordre a été utilisé pour étudier la croissance de solutions d'ordre infini des équations différentielles complexes.

Les résultats suivants ont été obtenus pour l'équation du second ordre

$$f'' + A(z) f' + B(z) f = 0 \tag{2.1}$$

où $A, B \not\equiv 0$ sont des fonctions entières.

Théorème 2.1 *([21]) Soient H un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{dens}\{|z| : z \in H\} > 0$ *et A et B des fonctions entières telles que pour certaines constantes réelles* $\alpha, \beta > 0$*, nous avons*

$$|A(z)| \leqslant \exp\left\{o(1)|z|^{\beta}\right\} \tag{2.2}$$

et

$$|B(z)| \geqslant \exp\left\{(1 + o(1))\,\alpha |z|^{\beta}\right\} \tag{2.3}$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in H$*. Alors, toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation (2.1) satisfait* $\rho(f) = +\infty$ *et* $\rho_2(f) \geqslant \beta$.

Théorème 2.2 *([9]) Soit H un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{dens}\{|z| : z \in H\} > 0$ *et soient A et B des fonctions entières, avec* $\rho(A) \leqslant \rho(B) = \rho < +\infty$ *tels que pour certaine constante réelle* $C > 0$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné, nous avons*

$$|A(z)| \leqslant \exp\left\{o(1)|z|^{\rho-\varepsilon}\right\} \tag{2.4}$$

et

$$|B(z)| \geqslant \exp\left\{(1 + o(1))\,C\,|z|^{\rho-\varepsilon}\right\} \tag{2.5}$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in H$*. Alors, toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation (2.1) satisfait* $\rho(f) = +\infty$ *et* $\rho_2(f) = \rho(B)$.

Pour $k \geqslant 2$, on considère une équation différentielle linéaire de la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0 \tag{2.6}$$

où $A_0, \ldots, A_{k-1}$ sont des fonctions entières avec $A_0 \not\equiv 0$. Il est bien connu que toutes les solutions de l'équation (2.6) sont des fonctions entières et si certains coefficients de (2.6) sont transcendants, (2.6) a au moins une solution d'ordre infini.

Le but principal de ce chapitre est détaillé les résultats de Belaïdi [3] qui a étudié la croissance des solutions de l'équation différentielle linéaire (2.6).

Théorème 2.3 *([3]) Soit* H *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{dens}\{|z| : z \in H\} > 0$ *et soient* $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ *des fonctions entières telles que pour certaines constantes réelles* α, β, μ *où* $0 \leqslant \beta < \alpha$ *et* $\mu > 0$, *nous avons*

$$|A_0(z)| \geqslant e^{\alpha |z|^{\mu}} \tag{2.7}$$

et

$$|A_j(z)| \leqslant e^{\beta |z|^{\mu}}, \quad j = 1, \ldots, k-1, \tag{2.8}$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in H$. *Alors, toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation (2.6) satisfait* $\rho(f) = +\infty$ *et* $\rho_2(f) \geqslant \mu$.

Théorème 2.4 *([3]) Soit* H *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{dens}\{|z| : z \in H\} > 0$, *et soient* $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ *des fonctions entières avec*

$$\max\left\{\rho(A_j) : \quad j = 1, \ldots, k-1\right\} \leqslant \rho(A_0) = \rho < +\infty$$

de sorte que pour certaines constantes réelles $\alpha, \beta \ (0 \leqslant \beta < \alpha)$, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *nous avons*

$$|A_0(z)| \geqslant e^{\alpha |z|^{\rho-\varepsilon}} \tag{2.9}$$

et

$$|A_j(z)| \leqslant e^{\beta |z|^{\rho-\varepsilon}}, \quad j = 1, \ldots, k-1 \tag{2.10}$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in H$. *Alors, toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation (2.6) satisfait* $\rho(f) = +\infty$ *et* $\rho_2(f) = \rho(A_0)$.

2 Lemmes auxiliaires

Nos preuves dépendent principalement des lemmes suivants.

Lemme 2.1 *([14],p.90) Soit f une fonction entière transcendante d'ordre fini* ρ. *Soit*

$$\Gamma = \left\{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \ldots, (k_m, j_m)\right\}$$

un ensemble fini de paires distincts de entiers satisfaisant $k_i > j_i \geqslant 0$ *pour* $i = 1, \ldots, m$ *et soit* $\varepsilon > 0$ *une constante donnée. Alors, il existe un ensemble* $E \subset [0, \infty)$ *de mesure linéaire finie tel que pour tout z satisfaisant* $|z| \notin E$ *et pour tous* $(k, j) \in \Gamma$, *nous avons*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leqslant |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}. \tag{2.11}$$

Lemme 2.2 *([14]) Soient f une fonction méromorphe transcendante, $\alpha > 1$ et $\varepsilon > 0$ donné. Alors, il existe un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ de mesure linéaire finie et une constante $c > 0$, tels que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E$, nous avons*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq c\left[T\left(\alpha r, f\right) r^{\varepsilon} \log T\left(\alpha r, f\right)\right]^{j} \quad (j \in \mathbb{N}). \tag{2.12}$$

Lemme 2.3 *([9]) Soient f une fonction entière d'ordre infini et $\rho_2(f) = \rho$. Soit $\nu_f(r)$ l'indice central de f. Alors,*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log \nu_f(r)}{\log r} = \rho, \tag{2.13}$$

Lemme 2.4 *([17], [27]) Soit f fonction entière transcendante et soit z un point avec $|z| = r$ auquel $\left|f(z)\right| = M\left(r, f\right)$. Alors, pour tout $|z| = r \notin E$ de mesure logarithmique finie, nous avons*

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_f(r)}{z}\right)^{j} (1 + o(1)) \quad (j \in \mathbb{N}, r \notin E) \tag{2.14}$$

où $\nu_f(r)$ est l'indice central de f.

3 Preuve du Théorème 2.3

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (2.6) avec $\rho(f) < \infty$. De (2.6) nous pouvons écrire

$$\frac{1}{A_0(z)}\frac{f^{(k)}}{f} + \frac{A_{k-1}(z)}{A_0(z)}\frac{f^{(k-1)}}{f} + \cdots + \frac{A_1(z)}{A_0(z)}\frac{f'}{f} + 1 = 0 \tag{2.15}$$

ou

$$\frac{1}{A_0(z)}\frac{f^{(k)}}{f} + \sum_{j=1}^{k-1}\frac{A_j(z)}{A_0(z)}\frac{f^{(j)}}{f} = -1 \tag{2.16}$$

Alors, par le Lemme 2.1, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, +\infty)$ de mesure linéaire finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| \notin E_1$ et pour tout $j = 1, 2, ...k$, nous avons

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant |z|^{jc}, \quad j = 1, ..., k; \quad c = \rho - 1 + \varepsilon \tag{2.17}$$

De plus, d'après les hypothèses du Théorème 2.3, il existe un ensemble E_2 avec $\overline{dens}\{|z| : z \in E_2\} > 0$ tel que pour tout z vérifiant $z \in E_2$, nous avons

$$|A_0(z)| \geqslant e^{\alpha|z|^{\mu}} \tag{2.18}$$

et

$$|A_j(z)| \leqslant e^{\beta|z|^{\mu}} \quad j = 1, ..., k-1 \tag{2.19}$$

quand $z \to \infty$. Des formules (2.17), (2.18) et (2.19) il en résulte que pour tout z satisfaisant $z \in E_2$ et $|z| \notin E_1$, nous avons

$$\begin{aligned}\left|\frac{A_j(z)}{A_0(z)}\right|\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| &\leqslant \frac{e^{\beta|z|^{\mu}}}{e^{\alpha|z|^{\mu}}}|z|^{jc}, \quad j = 1, ..., k-1; \quad c = \rho - 1 + \varepsilon, \\ &\leqslant \frac{1}{e^{(\alpha-\beta)|z|^{\mu}}}|z|^{jc}, \quad j = 1, ..., k-1; \quad c = \rho - 1 + \varepsilon.\end{aligned} \tag{2.20}$$

et
$$\left|\frac{1}{A_0(z)}\right|\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1}{e^{\alpha|z|^{\mu}}}|z|^{kc}, \quad c=\rho-1+\varepsilon \tag{2.21}$$
quand $z\to\infty$. Il existe donc un ensemble $H\subset[0,\infty)$ de densité supérieure positive tel que (2.20), (2.21) soient vérifiées. Puisque
$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in H}}\frac{1}{e^{(\alpha-\beta)|z|^{\mu}}}|z|^{jc}=0, \quad j=1,\dots,k-1$$
et
$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in H}}\frac{1}{e^{\alpha|z|^{\mu}}}|z|^{kc}=0,$$
il s'ensuit que
$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in H}}\left|\frac{A_j(z)}{A_0(z)}\right|\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|=0, \quad j=1,\dots,k-1$$
et
$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in H}}\left|\frac{1}{A_0(z)}\right|\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right|=0.$$
En faisant tendre z vers ∞ pour $z\in H$ dans la formule (2.16), nous obtenons $0\leqslant -1$, c'est une contradiction. Par suite, toute solution $f\not\equiv 0$ de l'équation (2.6) est d'ordre infini.

Maintenant de (2.6), il en résulte que
$$A_0(z)=-\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}-A_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}-\cdots-A_1(z)\frac{f'(z)}{f(z)},$$
$$|A_0(z)|\leqslant\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right|+|A_{k-1}(z)|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right|+\cdots+|A_1(z)|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \tag{2.22}$$
Par le Lemme 2.2, il existe un ensemble $E_3\subset[0,+\infty)$ de mesure linéaire finie tel que pour tout z satisfaisant $|z|=r\notin E_3$, nous avons
$$\begin{aligned}\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| &\leqslant r^{\epsilon j}\left[T(2r,f)\log T(2r,f)\right]^{j},\\ &\leqslant r\left[T(2r,f)\right]^{j+1}, \quad j=1\dots,k.\end{aligned} \tag{2.23}$$
De plus, d'après les hypothèses du Théorème 2.3, il existe un ensemble E_4 avec $\overline{dens}\{|z|: z\in E_4\}>0$ tel que pour tout z satisfaisant $z\in E_4$, nous avons
$$|A_0(z)|\geqslant e^{\alpha|z|^{\mu}} \tag{2.24}$$
et
$$|A_j(z)|\leqslant e^{\beta|z|^{\mu}}, \quad j=1,\dots,k-1 \tag{2.25}$$
quand $z\to\infty$. De (2.22), (2.23), (2.24) et (2.25) et pour tout z satisfaisant $z\in E_4$ et $|z|\notin E_3$, nous obtenons
$$\begin{aligned}e^{\alpha|z|^{\mu}}\leqslant|A_0(z)| &\leqslant \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right|+\sum_{j=1}^{k-1}|A_j(z)|\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|\\ &\leqslant r\left[T(2r,f)\right]^{k+1}+\sum_{j=1}^{k-1}e^{\beta|z|^{\mu}}r\left[T(2r,f)\right]^{j+1}\\ &\leqslant r\left[T(2r,f)\right]^{k+1}e^{\beta|z|^{\mu}}+\sum_{j=1}^{k-1}e^{\beta|z|^{\mu}}r\left[T(2r,f)\right]^{j+1}\\ &\leqslant r\left[T(2r,f)\right]^{k+1}\left[1+(k-1)e^{\beta|z|^{\mu}}\right].\end{aligned} \tag{2.26}$$

quand $z \to \infty$. Il existe donc un ensemble $H \subset [0,+\infty)$ de densité supérieure positive. De (2.26)

$$\begin{array}{lcl}
\Rightarrow & e^{\alpha|z|^{\mu}} & \leqslant rk\left[T\left(2r,f\right)\right]^{k+1} e^{\beta|z|^{\mu}} \\
\Rightarrow & e^{(\alpha-\beta)|z|^{\mu}} & \leqslant rk\left[T\left(2r,f\right)\right]^{k+1} \\
\Rightarrow & e^{(\alpha-\beta)|z|^{\mu}} e^{-kr} & \leqslant \left[T\left(2r,f\right)\right]^{k+1} \\
\Rightarrow & e^{(\alpha-\beta)|z|^{\mu}\left(1-\frac{k|z|}{(\alpha-\beta)|z|^{\mu}}\right)} & \leqslant \left[T(2r,f)\right]^{k+1}
\end{array}$$

$$e^{(\alpha-\beta)|z|^{\mu}(1-o(1))} \leqslant \left[T(2r,f)\right]^{k+1}$$

quand $z \to \infty$. Par conséquent

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r} \geqslant \mu$$

La preuve du théorème 2.3 est achevée.

4 Preuve du Théorème 2.4

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (2.6). En utilisant les mêmes arguments que dans le Théorème 2.3, nous obtenons $\rho(f) = +\infty$.

Maintenant, prouvons que $\rho_2(f) = \rho(A_0) = \rho$. Selon le Théorème 2.3, nous avons $\rho_2(f) \geqslant \rho - \varepsilon$,et puisque ε est arbitraire, nous obtenons $\rho_2(f) \geqslant \rho(A_0) = \rho$. D'autre part, d'après la théorie de Wiman-Valiron, il existe un ensemble $E \subset [1,+\infty)$ de mesure logarithmique $m_l(E) < \infty$ et z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1] \cup E$ et $\left|f(z)\right| = M\left(r,f\right)$, tel que (2.14) soit vérifiée. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, si r est suffisamment grand, nous avons

$$|A_j(z)| \leqslant e^{r^{\rho+\varepsilon}}, \quad j = 0,1,\ldots,k-1. \tag{2.27}$$

En substituant (2.14) et (2.27) dans (2.6), nous obtenons

$$\left(\frac{\nu_f(r)}{|z|}\right)^{k} |1+o(1)| \leqslant e^{r^{\rho+\varepsilon}} \left(\frac{\nu_f(r)}{|z|}\right)^{k-1} |1+o(1)| + e^{r^{\rho+\varepsilon}} \left(\frac{\nu_f(r)}{|z|}\right)^{k-2} |1+o(1)|$$

$$+\cdots+ e^{r^{\rho+\varepsilon}} \left(\frac{\nu_f(r)}{|z|}\right) |1+o(1)| + e^{r^{\rho+\varepsilon}}. \tag{2.28}$$

La formule (3.15) devient

$$\left(\frac{\nu_f(r)}{|z|}\right)^{k} |1+o(1)| \leqslant k e^{r^{\rho+\varepsilon}} \left(\frac{\nu_f(r)}{|z|}\right)^{k-1} |1+o(1)|.$$

Par suite

$$\left(\frac{\nu_f(r)}{|z|}\right) \leqslant k e^{r^{\rho+\varepsilon}} \tag{2.29}$$

où z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1] \cup E$ et $\left|f(z)\right| = M\left(r,f\right)$. Par (2.29), nous obtenons

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log \nu_f(r)}{\log r} \leqslant \rho + \varepsilon. \tag{2.30}$$

Puisque ε est arbitraire, par (2.30) et par le Lemme 2.3 , nous avons $\rho_2(f) \leqslant \rho$. Ceci et le fait que $\rho_2(f) \geqslant \rho$ donnent $\rho_2(f) = \rho$.

5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a détaillé les résultats de Belaïdi [3] qui a étudié la croissance des solutions de l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0,$$

où $A_0, \ldots, A_{k-1}$ sont des fonctions entières avec $A_0 \not\equiv 0$.

Chapitre 3

Ordre itératif des solutions méromorphes de certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes d'ordre itératif fini

1 Introduction et Résultats

Nous étudions l'ordre itératif des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes où les coefficients sont des fonctions méromorphes satisfaisant certaines conditions de croissance et nous donnons également quelques estimations de l'exposant de convergence itératif.

Pendant près de quatre décennies, la théorie de la distribution des valeurs de Nevanlinna s'est avérée un outil utile pour étudier l'oscillation complexe des équations différentielles. Récemment, les concepts d'hyper-ordre (voir [9], [30]) et d'ordre itératif ([20], [22]) ont été utilisés pour étudier plus en détail le développement de solutions méromorphes à ordre infini des équations différentielles complexes de type complexe. Les résultats suivants ont été obtenus.

Théorème 3.1 *([21]) Soit* H *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{dens}\{|z| : z \in \mathrm{H}\} > 0$ *et soient* A, B *des fonctions entières telles que pour certaines constantes* $\alpha, \beta > 0$*,*

$$|\mathrm{A}(z)| \leqslant \exp\left\{o(1)|z|^{\beta}\right\}$$

et

$$|\mathrm{B}(z)| \geqslant \exp\left\{(1+o(1))\alpha|z|^{\beta}\right\}$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in \mathrm{H}$*. Alors, toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation*

$$f'' + \mathrm{A}(z)f' + \mathrm{B}(z)f = 0 \tag{3.1}$$

satisfait $\rho(f) = +\infty$ *et* $\rho_2(f) \geqslant \beta$*.*

Théorème 3.2 *([9]) Soit H un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{dens}\{|z| : z \in \mathrm{H}\} > 0$ *et soient* A, B *des fonctions entières, avec*

$$\rho(\mathrm{A}) \leqslant \rho(\mathrm{B}) = \rho < +\infty$$

tels que pour une constante réelle $C > 0$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné,*

$$|A(z)| \leqslant \exp\left\{o(1)|z|^{\rho-\varepsilon}\right\}$$

et

$$|B(z)| \geqslant \exp\left\{(1+o(1))C|z|^{\rho-\varepsilon}\right\}$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in H$. *Alors, toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation (3.1) satisfait* $\rho(f) = +\infty$ *et* $\rho_2(f) = \rho$.

Théorème 3.3 *([3]) Soit H un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{dens}\{|z| : z \in H\} > 0$ *et soient* $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ *des fonctions entières telles que pour certains constantes* $0 \leqslant \beta < \alpha$ *et* $\mu > 0$, *nous avons :*

$$|A_0(z)| \geqslant \exp\left\{\alpha|z|^{\mu}\right\}$$

et

$$|A_j(z)| \leqslant \exp\left\{\beta|z|^{\mu}\right\},\ j = 1, \ldots, k-1$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in H$. *Alors, toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0 \tag{3.2}$$

satisfait $\rho(f) = +\infty$ *et* $\rho_2(f) \geqslant \mu$.

Théorème 3.4 *([3]) Soit* H *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{dens}\{|z| : z \in H\} > 0$, *et soient* $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ *des fonctions entières avec*

$$\max\left\{\rho(A_j) : \quad j = 1, \ldots, k-1\right\} \leqslant \rho(A_0) = \rho < +\infty$$

de sorte que pour certaines constantes réelles α, β $(0 \leqslant \beta < \alpha)$, *nous avons pour tout* $\varepsilon > 0$

$$|A_0(z)| \geqslant e^{\alpha|z|^{\rho-\varepsilon}}$$

et

$$|A_j(z)| \leqslant e^{\beta|z|^{\rho-\varepsilon}}, \quad j = 1, \ldots, k-1$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in H$. *Alors, toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation (3.2) satisfait* $\rho(f) = +\infty$ *et* $\rho_2(f) = \rho(A_0)$.

Soit $k \geqslant 2$ un entier, $A_0, \ldots, A_{k-1}, A_k$ avec $A_0 \not\equiv 0$ et $A_k \not\equiv 0$ sont des fonctions entières. Il est bien connu que si $A_k \equiv 1$, alors toutes les solutions de l'équation différentielle linéaire

$$A_k(z) f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0 \tag{3.3}$$

sont des fonctions entières. Nous savons aussi que si certains coefficients $A_0, \ldots, A_{k-1}$ sont transcendantes et $A_k \equiv 1$, alors l'équation (3.3) a au moins une solution d'ordre infini. Mais, quand A_k est une fonction méromorphe non constante, l'équation (3.3) peut avoir des solutions méromorphes. Par exemple, l'équation

$$\frac{z^4}{e^z(z^3 - 3z^2 + 6z - 6)} f''' - \frac{z^3}{e^z(z^2 - 2z + 2)} f'' + f' + \frac{1-z}{z} f = 0 \tag{3.4}$$

a une solution méromorphe $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$. La question qui se pose donc : quelles conditions sur $A_0, \ldots, A_k$ va garantie que toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de (3.3) a un ordre infini ?

Récemment, Chen [11] a amélioré ses résultats aux équations différentielles linéaires du second ordre avec des coefficients méromorphes. Notre objectif principal dans ce chapitre est de présenter les résultats de J. He, X. M. Zheng and H. Hu [18] qui ont généralisé les résultats des Théorèmes 3.3 et 3.4 et de Chen[11] en obtenant quelques résultats de l'ordre itératif des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur (3.2) et (3.5) en donnant quelques estimations de l'exposant de convergence itératif.

Théorème 3.5 *([18]) Soit H un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{dens}\{|z| : z \in \mathrm{H}\} > 0$, *et soient* $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_{k-1}$ *des fonctions méromorphes d'ordre itératif fini tels que pour certaines constantes* $\alpha_2 > \alpha_1 \geqslant 0, \mu > 0$, *nous avons*

$$|\mathrm{A}_0(z)| \geqslant \exp_p\left\{\alpha_2 |z|^{\mu}\right\}$$

et

$$|\mathrm{A}_j(z)| \leqslant \exp_p\left\{\alpha_1 |z|^{\mu}\right\} (j = 1, \dots, k-1)$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in \mathrm{H}$. *Si l'équation (3.2) ont des solutions méromorphes, alors toute solution méromorphe* $f(\not\equiv 0)$ *satisfait* $\rho_{p+1}(f) \geqslant \mu$.

De plus, si $\max\left\{|\mathrm{A}_j(z)|, j = 0, 1, \dots, k-1\right\} \leqslant \exp_p\left\{\beta |z|^{\mu}\right\}$ *quand* $z \to \infty$, *où* $\beta(> 0)$ *est une constante, alors toute solution méromorphe* $f(\not\equiv 0)$ *avec* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ *vérifie que* $i(f) = p+1$ *et* $\rho_{p+1}(f) = \mu$.

Théorème 3.6 *([18]) Soit H un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{dens}\{|z| : z \in \mathrm{H}\} > 0$ *et soit* $\mathrm{F}(\not\equiv 0)$ *une fonction méromorphe avec* $|\mathrm{F}(z)| \leqslant \exp_q\left\{\alpha |z|^{\mu}\right\}$ *quand* $z \to \infty$ *ou* $\rho_q(\mathrm{F}) \leqslant \mu \quad (0 < q \leqslant p < \infty)$. *Soient* $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_{k-1}$ *des fonctions méromorphes d'ordre itératif fini satisfaisant les conditions suivantes :*

(i) pour certaines constantes $\alpha_2 > \alpha_1 \geqslant 0, \mu > 0$,

$$|\mathrm{A}_0(z)| \geqslant \exp_p\left\{\alpha_2 |z|^{\mu}\right\}$$

et

$$|\mathrm{A}_j(z)| \leqslant \exp_p\left\{\alpha_1 |z|^{\mu}\right\} (j = 1, \dots, k-1)$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in \mathrm{H}$ *;*

(ii) $\max\left\{|\mathrm{A}_j(z)|, j = 0, 1, \dots, k-1\right\} \geqslant \exp_p\left\{\beta |z|^{\mu}\right\}$ *quand* $z \to \infty$, *où* $\beta(> 0)$ *est une constante.*

Alors, toute solution méromorphe f avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ *de l'équation*

$$f^{(k)} + \mathrm{A}_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + \mathrm{A}_1(z) f' + \mathrm{A}_0(z) f = \mathrm{F}(z) \tag{3.5}$$

vérifie $i(f) = p+1$ *et* $\rho_{p+1}(f) = \mu$, *avec au plus une solution exceptionnelle* f_0 *avec* $i(f) < p+1$ *ou* $\rho_{p+1}(f_0) < \mu$.

2 Lemmes auxiliaires

Lemme 3.1 *([25]) Soit* $f = \dfrac{g}{d}$, *où* g, d *sont des fonctions entières d'ordre itératif fini satisfaisant* $\mu_p(g) = \mu_p(f) \leqslant \rho_p(g) = \rho_p(f) < \infty$, $0 < p < \infty$, $i(d) < p$ *ou* $\rho_p(d) = \beta < \mu_p(f)$. *Soit z un point avec* $|z| = r$ *auquel* $|g(z)| = \mathrm{M}(r, g)$ *et* $\nu_g(r)$ *désigne l'indice central de g, alors l'estimation*

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^j (1 + o(1)) \quad (j \in \mathbb{N})$$

est vérifiée pour tout $|z| = r$ *en dehors d'un ensemble* E_2 *de mesure logarithmique finie.*

Lemme 3.2 *([19],[25]) Soit f une fonction entière d'ordre itératif fini vérifiant $i(f) = p+1, \rho_{p+1}(f) = \rho$, et $\mu_{q+1}(f) = \mu \quad (0 < q \leqslant p < \infty)$. Soit $\nu_f(r)$ l'indice central de f. Alors,*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log_{p+1} \nu_f(r)}{\log r} = \rho,$$

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{\log_{q+1} \nu_f(r)}{\log r} = \mu.$$

Lemme 3.3 *([22]) Soient $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ et $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ des fonctions monotones croissantes telles que $g(r) \leqslant h(r)$ en dehors d'un ensemble exceptionnel E_3 de mesure linéaire finie. Alors, pour toute constante $\alpha > 1$, il existe $r_0 > 0$ tels que $g(r) \leqslant h(\alpha r)$ pour tout $r > r_0$.*

Lemme 3.4 *([26]) Soit f une fonction méromorphe d'ordre itératif finie avec $i(f) = p, p \in \mathrm{N}$. Alors, ils existent des fonctions entières $\pi_1(z), \pi_2(z)$ et $D(z)$ telles que :*

$$f(z) = \frac{\pi_1(z)e^{D(z)}}{\pi_2(z)} \quad et \quad \rho_p(f) = \rho = \max\left\{\rho_p(\pi_1), \rho_p(\pi_2), \rho_p\left(e^{D(z)}\right)\right\}.$$

De plus, pour tout $\epsilon > 0$ donné, nous avons

$$\exp\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\rho+\epsilon}\right\}\right\} \leq \left|f(z)\right| \leq \exp_p\left\{r^{\rho+\epsilon}\right\} \quad (r \notin E_4),$$

où E_4 est un ensemble de mesure linéaire finie.

Lemme 3.5 *([25]) Soient $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, F(\not\equiv 0)$ des fonctions méromorphes et f une solution méromorphe de l'équation (3.5) vérifiant l'une des conditions suivantes :*

$(i) \max\left\{i(F) = q, i(A_j)\,(j = 0, \ldots, k-1)\right\} < i(f) = p+1\,(0 < p < \infty)$,

$(ii) b = \max\left\{\rho_{p+1}(F), \rho_{p+1}(A_j)\,(j = 0, \ldots, k-1)\right\} < \rho_{p+1}(f) = \rho$.

Alors, $\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) = \rho$.

3 Preuve du Théoremè 3.5

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de l'équation (3.2).
L'équation (3.2) peut être écrite comme suit

$$A_0(z) = -\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} - A_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)} - \cdots - A_1(z)\frac{f'(z)}{f(z)},$$

$$|A_0(z)| \leqslant \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + |A_{k-1}(z)|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_1(z)|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|. \tag{3.6}$$

Alors, par le Lemme 2.2, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, \infty)$ de mesure linéaire fini tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_1$, nous avons

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant Cr\left[T(2r, f)\right]^{j+1} \quad (j = 1, \ldots, k), \tag{3.7}$$

ou C est une constante. Par les hypothèses de Théorèmes 3.5, il exist un ensemble H avec $\overline{dens}\{|z| : z \in H\} > 0$ tel que pour tout $z \to \infty$ pour $z \in H$, nous avons

$$|A_0(z)| \geqslant \exp_p\left\{\alpha_2|z|^{\mu}\right\} \quad \text{et} \quad |A_j(z)| \leqslant \exp_p\left\{\alpha_1|z|^{\mu}\right\} (j = 1, \ldots, k-1). \tag{3.8}$$

En remplaçant (3.7) et (3.8) dans (3.6), pour tout $z \to \infty$ pour $z \in \mathrm{H}$ et $|z| = r \notin \mathrm{E}_1$, nous avons

$$\begin{aligned}\exp_p\left\{\alpha_2|z|^{\mu}\right\} &\leqslant |\mathrm{A}_0(z)| \\ &\leqslant cr\left[\mathrm{T}(2r,f)\right]^{k+1} + \exp_p\left\{\alpha_1|z|^{\mu}\right\} cr\left[\mathrm{T}(2r,f)\right]^{k} + \cdots + \exp_p\left\{\alpha_1|z|^{\mu}\right\} cr\left[\mathrm{T}(2r,f)\right]^{2}.\end{aligned}$$

D'où

$$\exp_p\left\{\alpha_2|z|^{\mu}\right\} \leqslant kCr\left[\mathrm{T}(2r,f)\right]^{k+1} \exp_p\left\{\alpha_1|z|^{\mu}\right\}. \tag{3.9}$$

Ce qui donne

$$\exp_p\left\{\alpha_2|z|^{\mu}\right\} - \exp_p\left\{\alpha_1|z|^{\mu}\right\} \leqslant kcr\left[\mathrm{T}(2r,f)\right]^{k+1}. \tag{3.10}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}\exp_p\left\{\alpha_2|z|^{\mu}\right\} - \exp_p\left\{\alpha_1|z|^{\mu}\right\} &= \exp\left(\exp_{p-1}\left\{\alpha_2|z|^{\mu}\right\}\right) - \exp\left(\exp_{p-1}\left\{\alpha_1|z|^{\mu}\right\}\right) \\ &= \exp\left(\exp_{p-1}\left\{\alpha_2|z|^{\mu}\right\} - \exp_{p-1}\left\{\alpha_1|z|^{\mu}\right\}\right) \\ &= \exp\left[\exp_{p-1}\left\{\alpha_2|z|^{\mu}\right\}\left[1 - \frac{\exp_{p-1}\{\alpha_1|z|^{\mu}\}}{\exp_{p-1}\{\alpha_2|z|^{\mu}\}}\right]\right] \\ &= \exp\left[\exp_{p-1}\left\{\alpha_2|z|^{\mu}\right\}(1-o(1))\right]\end{aligned}$$

D'ou, il exist un ensemble $\mathrm{E} \subset [0,\infty)$ de densité supérieur positive tel que

$$\exp\left[\exp_{p-1}\left\{\alpha_2|z|^{\mu}\right\}(1-o(1))\right] \leqslant kCr\left[\mathrm{T}(2r,f)\right]^{k+1} \tag{3.11}$$

quand $z \to \infty$ dans H. De (3.11), nous avons $\rho_{p+1}(f) \geqslant \mu$.

En utilisant les hypothèses du Théorème 3.5, pour r suffisamment grand, nous avons

$$\max\left\{|\mathrm{A}_j(z)|, j = 0, 1, \ldots, k-1\right\} \leqslant \exp_p\left\{\beta|z|^{\mu}\right\}, \tag{3.12}$$

ou $\beta > 0$ est une constante. Par le théorème de factorisation de Hadamard, nous pouvons écrire f sous la forme $f(z) = \dfrac{g(z)}{d(z)}$ où g et d sont des fonctions entières d'ordre itératif fini vérifiant

$$\mu_p(g) = \mu_p(f) \leqslant \rho_p(g) = \rho_p(f),\ i(d) < p$$

ou

$$\rho_p(d) = \lambda_p(d) = \lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f).$$

Par le Lemme 3.1, il existe un ensemble E_2 de mesure logarithmique fini tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin \mathrm{E}_2$ et $|g(z)| = \mathrm{M}(r,g)$, nous avons

$$\left(\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right) = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^j (1+o(1)) \quad (j = 1, \ldots, k). \tag{3.13}$$

Il s'ensuit par (3.2) que

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant |\mathrm{A}_{k-1}(z)|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |\mathrm{A}_1(z)|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + |\mathrm{A}_0(z)|. \tag{3.14}$$

En substituant (3.12) et (3.13) dans (3.14) nous obtenons

$$\left(\frac{\nu_f(r)}{|z|}\right)^k |1+o(1)| \leqslant \exp_p\{\beta|z|^\mu\}\left(\frac{\nu_f(r)}{|z|}\right)^{k-1}|1+o(1)| + \exp_p\{\beta|z|^\mu\}\left(\frac{\nu_f(r)}{|z|}\right)^{k-2}|1+o(1)|$$

$$+\cdots+\exp_p\{\beta|z|^\mu\}\left(\frac{\nu_f(r)}{|z|}\right)|1+o(1)| + \exp_p\{\beta|z|^\mu\}. \tag{3.15}$$

$$\nu_g(r)|1+o(1)| \leqslant kr^k \exp_p\{\beta|z|^\mu\}|1+o(1)|, \tag{3.16}$$

ou z vérifiant $|z| = r \notin [0,1]\cup E_2, r \to +\infty$ et $|g(z)| = M(r,g)$. De la formule (3.16) et les Lemmes 3.2 et 3.3, nous obtenons $\rho_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(g) \leqslant \mu$. D'où, toute solution méromorphe $f(\not\equiv 0)$ de l'équation (3.2) avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ vérifait $i(f) = p+1$ et $\rho_{p+1}(f) = \mu$. D'ou la preuve du Théorème 3.5.

4 Preuve du Théorème 3.6

Cas 1 : Supposons que $|F(z)| \leqslant \exp_q\{\alpha|z|^\mu\}$ quand $z \to \infty$. De l'équation (3.5), nous avons

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant |A_{k-1}(z)|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_1(z)|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + |A_0(z)| + \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|. \tag{3.17}$$

Par le théorème de factorisation de Hadamard, nous écrivons f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ où g et d sont des fonctions entières d'ordre itératif fini vérifiant

$$\mu_p(g) = \mu_p(f) \leqslant \rho_p(g) = \rho_p(f),$$

$$\rho_p(d) = \lambda_p(d) = \lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f).$$

Par le Lemme 3.1, il existe un ensemble E_2 de mesure logarithmique fini tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_2$ et $|g(z)| = M(r,g)$, nous avons (3.13). Par le Lemme 3.4, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble E_4 de mesure linéaire fini tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_4, z \to \infty$ et $|g(z)| = M(r,g)$, nous avons

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| &= \left|\frac{F(z)d(z)}{g(z)}\right| \\ &= \frac{|F(z)||d(z)|}{M(r,g)} \\ &\leqslant \frac{\exp_q\{\alpha|z|^\mu\}\exp_p\{r^{\rho_p(d)+\varepsilon}\}}{\exp_p\{r^{\mu_p(g)-\varepsilon}\}} \\ &\leqslant \exp_q\{\alpha|z|^\mu\}\end{aligned} \tag{3.18}$$

D'après la condition (ii) des hypothèses du théorème 3.6, pour r suffisamment grand,nous avons

$$\max\{|A_j(z)|, \quad j = 0,1,\ldots,k-1\} \leqslant \exp_p\{\beta|z|^\mu\}$$

où $\beta > 0$ est une constante. En substituant (3.12), (3.13) et (3.18) dans (3.17), pour z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2 \cup E_4$, $r \to \infty$ et $|g(z)| = M(r,g)$, nous avons

$$\left(\frac{\nu_g(r)}{|z|}\right)^k (1+o(1)) \leqslant \exp_p\{\beta|z|^\mu\}\left(\frac{\nu_g(r)}{|z|}\right)^{k-1}(1+o(1))+$$

$$\cdots + \exp_p\{\beta|z|^\mu\}\left(\frac{\nu_g(r)}{|z|}\right)(1+o(1)) + \exp_p\{\beta|z|^\mu\} + \exp_q\{\alpha|z|^\mu\}$$

$$\nu_g(r)|1+o(1)| \leqslant (k+1)r^k \exp_p\{\max\{\alpha,\beta\}|z|^\mu\}|1+o(1)|. \tag{3.19}$$

D'où par (3.19), Lemme 3.2 et Lemme 3.3, nous obtenons

$$\frac{\log_{p+1}\nu_g(r)}{\log r} \leqslant k\frac{\log_{p+1} r}{\log r} + \frac{\log_{p+1}(k+1)}{\log r} + \frac{\log\max\{\alpha,\beta\}}{\log r} + \mu\frac{\log r}{\log r}.$$

Par suite

$$\rho_{p+1}(f) \leqslant \mu. \tag{3.20}$$

De l'équation (3.5)

$$|A_0(z)| \leqslant \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + |A_{k-1}(z)|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_1(z)|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|. \tag{3.21}$$

Alors, par le Lemme 2.2, il existe un ensemble $E_1 \subset [0,\infty)$ de mesure linéaire finie tel que pour z vérifiant $|z| = r \notin E_1$, nous avons

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant cr\left[T(2r,f)\right]^{j+1} \quad j = 1,\ldots,k \tag{3.22}$$

où c est une constante. En utilisant les hypothèses de Théorème 3.6, il existe un ensemble H avec $\overline{dens}\{|z| : z \in H\} > 0$ tel que pour tout z vérifiant $z \to \infty$ pour $z \in H$, nous avons

$$|A_0(z)| \geqslant \exp_p\{\alpha_2|z|^\mu\} \quad \text{et} \quad |A_j(z)| \leqslant \exp_p\{\alpha_1|z|^\mu\}\,(j = 1,\ldots,k-1) \tag{3.23}$$

Substituant (3.22) et (3.23) dans (3.21), nous trouvons

$$\begin{aligned}\exp_p\{\alpha_2|z|^\mu\} &\leqslant \exp_q\{\alpha|z|^\mu\} + cr\left[T(2r,f)\right]^{k+1}\exp_p\{\alpha_1|z|^\mu\}\\ &+ \cdots + \exp_p\{\alpha_1|z|^\mu\}\,cr\left[T(2r,f)\right]^2\\ &\leqslant cr(k+1)\exp_p\{\alpha_1|z|^\mu\}\left[T(2r,f)\right]^{k+1}.\end{aligned}$$

D'où

$$\exp_p\{\alpha_2|z|^\mu\} - \exp_p\{\alpha_1|z|^\mu\} \leqslant cr(k+1)\left[T(2r,f)\right]^{k+1}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}exp_p\{\alpha_2|z|^\mu\} - \exp_p\{\alpha_1|z|^\mu\} &= \exp\left(\exp_{p-1}\{\alpha_2|z|^\mu\}\right) - \exp\left(\exp_{p-1}\{\alpha_1|z|^\mu\}\right)\\ &= \exp\left[\exp_{p-1}\{\alpha_2|z|^\mu\} - \exp_{p-1}\{\alpha_1|z|^\mu\}\right]\\ &= \exp\left[\exp_{p-1}\{\alpha_2|z|^\mu\}\left[1 - \frac{\exp_{p-1}\{\alpha_1|z|^\mu\}}{\exp_{p-1}\{\alpha_2|z|^\mu\}}\right]\right]\\ &= \exp\left(\exp_{p-1}\{\alpha_2|z|^\mu\}\left[1-o(1)\right]\right)\end{aligned}$$

D'ou,

$$\exp\left(\exp_{p-1}\{\alpha_2|z|^{\mu}\}[1-o(1)]\right) \leqslant cr(k+1)\left[T(2r,f)\right]^{k+1} \tag{3.24}$$

$$\mu \leqslant \rho_{p+1}(f). \tag{3.25}$$

De (3.20) et (3.25), nous avons

$$\rho_{p+1}(f) = \mu.$$

Supposons que f_0 est une solution méromorphe de l'équation (3.5) satisfaisant $i(f_0) < p+1$ ou $\rho_{p+1}(f_0) < \mu$. S'il existe une autre solution méromorphe f_1 avec $i(f_1) < p+1$ ou $\rho_{p+1}(f_1) < \mu$, alors $\rho_{p+1}(f_1 - f_0) < \mu$. Alors, $f_1 - f_0$ est une solution de l'équation homogène correspodante (3.2) et par le Théorème 3.5, nous obtenobs $\rho_{p+1}(f_1 - f_0) \geqslant \mu$ ce qui contredit la formule $\rho_{p+1}(f_1 - f_0) < \mu$. D'où, toute solution méromorphe f avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ vérifie $i(f) = p+1$ et $\rho_{p+1}(f) = \mu$, avec au plus une solution exceptionnelle f_0 satisfaisant $i(f) < p+1$ et $\rho_{p+1}(f_0) < \mu$.

Cas 2 : Supposons que $\rho_q(F) \leqslant \mu$. D'après le Lemme 3.4, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble E_4 de mesure linéaire finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_4, z \to \infty$, nous avons

$$|F(z)| \leqslant \exp_p\left\{r^{\rho_q(F)+\varepsilon}\right\} \leqslant \exp_p\left\{r^{\mu+\varepsilon}\right\}. \tag{3.26}$$

En utilisant un raisonnement similaire au premier cas, nous obtenons $i(f) < p+1$ et $\rho_{p+1}(f) = \mu$ avec au plus une solution exceptionnelle f_0 satisfaisant $i(f_0) < p+1$ et $\rho_{p+1}(f_0) < \mu$. Ceci achève la preuve.

5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a détallé les résultats de J. He, X. M. Zheng and H. Hu [18] qui ont généralisé les résultats des Théorèmes 3.3 et 3.4 et Chen[11] en obtenant quelques résultats de l'ordre itératif des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur (3.2) et (3.5) en donnant quelques estimations de l'exposant de convergence itératif.

Chapitre 4

L'ordre itératif des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes

1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère pour tout $k \geq 2$ les équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes

$$f^{(k)}(z) + A_{k-1}(z) f^{(k-1)}(z) + \ldots + A_1(z) f'(z) + A_0(z) f(z) = 0, \tag{4.1}$$

et

$$f^{(k)}(z) + A_{k-1}(z) f^{(k-1)}(z) + \ldots + A_1(z) f'(z) + A_0(z) f(z) = F(z), \tag{4.2}$$

où $A_0 \not\equiv 0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ et $F \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini.

Dans [3], Belaïdi a étendu les résultats de Kwon [21], Chen et Yang [9] des équations différentielles linéaires d'ordre deux à un ordre supérieur et il a obtenu les deux résultats suivants.

Théorème 4.1 *([3]) Soit* H *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{dens}\{|z| : z \in H\} > 0$*, et soient* $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ *des fonctions entières telles que pour certaines constantes réelles* α, β, μ*, où* $0 \leqslant \beta < \alpha$ *et* $\mu > 0$*, nous avons*

$$|A_0(z)| \geqslant e^{\alpha |z|^{\mu}}$$

et

$$|A_j(z)| \leqslant e^{\beta |z|^{\mu}}, \quad j = 1, \ldots, k-1,$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in H$*. Alors, toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation (4.1) est d'ordre infini et* $\rho_2(f) \geqslant \mu$.

Théorème 4.2 *([3]) Soit* H *un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{dens}\{|z| : z \in H\} > 0$*, et soient* $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ *des fonctions entières avec*

$$\max\{\rho(A_j), \quad j = 1, \ldots, k-1\} \leqslant \rho(A_0) = \rho < +\infty$$

de sorte que pour certaines constantes réelles α, β $(0 \leqslant \beta < \alpha)$, *nous avons pour tout* $\varepsilon > 0$

$$|A_0(z)| \geqslant e^{\alpha |z|^{\rho-\varepsilon}}$$

et

$$|A_j(z)| \leqslant e^{\beta |z|^{\rho-\varepsilon}}, \quad j = 1, ..., k-1$$

quand $z \to \infty$ *pour* $z \in H$. *Alors, toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation (4.1) est d'ordre infini et* $\rho_2(f) = \rho(A_0)$.

Dans [11], Chen a prouvé les résultats précédents de [9], [21] en étudiant les zéros et la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles homogènes et non homogènes

$$f''(z) + A(z) f'(z) + B(z) f(z) = 0,$$

et

$$f''(z) + A(z) f'(z) + B(z) f(z) = F(z)$$

où A, B et F sont des fonctions méromorphes.

Dans [24], Shen et Xu ont généralisé les résultats de Chen [11] aux équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes. Récemment, He, Zheng et Hu [18] ont amélioré les résultats ci-dessus d'un ordre usuel (ordre simple) à un ordre itératif comme suit.

Théorème 4.3 *([18]) Soient H un ensemble de nombres complexes satisfaisant* $\overline{dens}\{|z| : z \in H\} > 0$ *et* $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions méromorphes d'ordre p itératif fini telles que pour toutes constantes réelles* $\alpha_2 > \alpha_1 \geq 0$ *et* $\mu > 0$, *nous avons*

$$|A_0(z)| \geq \exp_\rho \{\alpha_2 |z|^\mu\}$$

et

$$|A_j(z)| \leq \exp_\rho \{\alpha_1 |z|^\mu\}, \quad j = 1 \dots, k-1$$

lorsque $z \to \infty$ *pour* $z \in H$. *Si l'équation (4.1) admet des solutions méromorphes, alors toute solution méromorphe* $f \not\equiv 0$ *satisfait* $\rho_{p+1}(f) \geq \mu$.
De plus, si

$$\max\{|A_j(z)| : j = 0, \dots, k-1\} \leq \exp_p \{\beta |z|^\mu\}$$

lorsque $z \to 0$, *où* $\beta > 0$ *est une constante, alors toute solution méromorphe* $f \not\equiv 0$ *avec* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ *satisfait* $i(f) = p+1$ *et* $\rho_{p+1}(f) = \mu$.

Théorème 4.4 *([18]) Soient H un ensemble de nombres complexes satisfaisant* $\overline{dens}\{|z| : z \in H\} > 0$ *et* $F \not\equiv 0$ *une fonction méromorphe avec*

$$|F(z)| \leq \exp_q \{\alpha |z|^\mu\}$$

lorsque $z \to \infty$ *ou* $\rho_q(F) \leq \mu \quad (0 \leq p < \infty)$. *Soient* $A_0, \dots, A_{k-1}$ *des fonctions méromorphes d'ordre p -itératif fini satisfaisant les conditions suivantes :*

(i) pour toutes constante réelles $\alpha_2 > \alpha_1 \geq 0$ *et* $\mu > 0$, *nous avons*

$$|A_0(z)| \leq \exp_p \{\alpha_2 |z|^\mu\}$$

et

$$|A_j(z)| \leq \exp_p \{\alpha_1 |z|^\mu\}, \; j = 1, \dots, k-1$$

lorsque $z \to \infty$ *pour* $z \in H$,

(ii) $\max\{|A_j(z)| : j = 0, \dots, k-1\} \leq \exp_p \{\beta |z|^\mu\}$ *lorsque* $z \to \infty$, *où* $\beta > 0$ *est une constante.*

Si l'équation (4.2) admet des solutions méromorphes, alors toute solution méromorphe f *avec* $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ *satisfait* $i(f) = p+1$ *et* $\rho_{p+1}(f) = \mu$, *avec au plus une solution exceptionnelle* f_0 *avec* $i(f_0) < p+1$ *ou* $\rho_{p+1}(f_0) < \mu$.

2 Principaux résultats

Dans le présent chapitre, nous étudions les zéros et la croissance des solutions méromorphes des équations (4.1) et (4.2). Nous étudions les résultats de l'article de Belaïdi [5] qui a étendu les résultats de Andasmas [1]. Sous certaines conditions sur les coefficients, il a donné quelques estimations de l'exposant de convergence itératif. En fait, nous allons détallier les preuves des résultats suivants.

Théorème 4.5 *([5]) Soient $H \subset [0,+\infty)$ un ensemble avec une densité supérieure positive et $A_j\,(j=0,1,\ldots,k-1)$ des fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini. S'il existe des constantes positives $\sigma>0, \alpha>0$ telles que*

$$\rho = \max\left\{\rho_p(A_j)\quad, j=1,2,\ldots,k-1\right\} < \sigma$$

et

$$|A_0(z)| \geq \exp_p\left\{\alpha r^{\sigma}\right\}$$

lorsque $|z|=r\in H, r\to+\infty$, alors toute solution méromorphe $f\not\equiv 0$ de l'équation (4.1) satisfait

$$\mu_p(f)=\rho_p(f)=\infty,\quad \rho_{p+1}(f)\geq\sigma.$$

De plus, si $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right)<\infty$, alors $i(f)=p+1$ et $\sigma\leq\rho_{p+1}(f)\leq\rho_p(A_0)$.

Théorème 4.6 *([5]) Soient $H\subset[0,\infty)$ un ensemble de densité supérieure positive, $A_j\,(j=0,1,\ldots,k-1)$ et $F\not\equiv 0$ des fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini. S'il existe des constantes positives $\sigma>0,\alpha>0$ telles que*

$$\rho=\max\left\{\rho_p(A_j):\ j=1,2,\ldots,k-1),\rho_p(F)\right\}<\sigma$$

et

$$|A_0(z)|\geq\exp_p\left\{\alpha r^{\sigma}\right\}$$

quand $|z|=r\in H, r\to+\infty$, alors toute solution méromorphe f avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right)<\sigma$ de l'équation (4.2) satisfait

$$\overline{\lambda}_p(f)=\lambda_p(f)=\rho_p(f)=\infty,\quad \overline{\lambda}_{p+1}(f)=\lambda_{p+1}(f)=\rho_{p+1}(f).$$

De plus, si $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right)<\min\left\{\mu_p(f),\sigma\right\}$, alors $i(f)=p+1$ et

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f)=\lambda_{p+1}(f)=\rho_{p+1}(f)\leq\rho_p(A_0).$$

Remarque 4.1 *Il est clair que $\rho_p(A_0)=\beta\geq\sigma$ dans les Théorèmes 4.5 et 4.6. En effet, supposons que $\rho_p(A_0)=\beta<\sigma$. Alors, en utilisant le Lemme 4.3, il existe un ensemble $E_3\subset(1,+\infty)$ de mesure linéaire finie telle que lorsque $|z|=r\notin E_3$, nous avons pour tout ε $\left(0<\varepsilon<\sigma-\beta\right)$*

$$|A_0(z)|\leq\exp_p\left\{r^{\beta+\varepsilon}\right\}.$$

D'autre part, selon les hypothèses du Théorème 4.5 et 4.6, il existe des constantes positives $\sigma>0,\alpha>0$ telles que

$$|A_0(z)|\geq\exp_p\left\{\alpha r^{\sigma}\right\}$$

lorsque $|z|=r\in H, r\to+\infty$, où $H\subset[0,+\infty)$ est un ensemble de densité supérieure positive (et donc de mesure linéaire infinie $m(H)=+\infty$). De (4.1) et (4.2), nous obtenons pour $|z|=r\in H\backslash E_3, r\to+\infty$

$$\exp_p\left\{\alpha r^{\sigma}\right\}\leq|A_0(z)|\leq\exp_p\left\{r^{\beta+\varepsilon}\right\}$$

et comme ε $\left(0<\varepsilon<\sigma-\beta\right)$ nous obtenons une contradiction lorsque $r\to+\infty$. Alors, $\rho_p(A_0)=\beta\geq\sigma$.

3 Lemmes auxiliaires

Pour prouver ces théorèmes, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 4.1 *([8]) Soient $p, q \geq 1$ des entiers et f une fonction entière d'ordre itératif fini vérifiant $i(f) = p+1, \rho_{p+1}(f) = \rho, i_{\mu}(f) = q+1$ et $\mu_{q+1}(f) = \mu$. Soit $\nu_f(r)$ l'indice central de f. Alors,*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log_{p+1} \nu_f(r)}{\log r} = \rho, \quad \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log_{q+1} \nu_f(r)}{\log r} = \mu.$$

Lemme 4.2 *([12]) Soient $p \geq 1$ un entier et $f = \frac{g}{d}$ une fonction méromorphe où g et d sont des fonctions entières satisfaisant $\mu_p(g) = \mu_p(f) \leq \rho_p(g) = \rho_p(f) \leq +\infty$, $i(d) < p$ ou $i(d) = p$ et $\rho_p(d) = \beta < \mu_p(f)$. Soit $\nu_g(r)$ l'indice central de g.*

Alors, il existe un ensemble E_2 de mesure logarithmique finie tel que l'estimation

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^j (1+o(1)) \quad (j \in \mathbb{N})$$

est vérifiée pour tout $|z| = r \notin E_2$ et $\left|g(z)\right| = M\left(r, g\right)$.

Lemme 4.3 *([26]) Soient $p \geq 1$ un entier et f une fonction méromorphe tels que $i(f) = p$ $\rho_p(f) = \rho < +\infty$. Alors, il existe des fonctions entières π_1,π_2 et D telles que :*

$$f(z) = \frac{\pi_1(z)e^{D(z)}}{\pi_2(z)} \quad et \quad \rho_p(f) = \max\left\{\rho_p(\pi_1), \rho_p(\pi_1), \rho_p\left(e^{D(z)}\right)\right\}.$$

De plus, pour tout $\epsilon > 0$ donné, nous avons

$$\exp\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\rho+\epsilon}\right\}\right\} \leq |f(z)| \leq \exp_p r^{\rho+\epsilon} \quad (r \notin E_3),$$

où E_3 est un ensemble de mesure linéaire finie.

Pour éviter certains problèmes causés par les ensembles exceptionnels, rappelons les lemmes suivants.

Lemme 4.4 *([2]) Soient $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ et $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ des fonctions monotones croissantes telles que $g(r) \leqslant h(r)$ en dehors d'un ensemble exceptionnel E_4 de mesure linéaire finie. Alors, pour toute constante $\lambda > 1$, il existe $r_0 > 0$ tels que $g(r) \leqslant h(\lambda r)$ pour tout $r > r_0$.*

Lemme 4.5 *([15]) Soient $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ et $\psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ des fonctions monotones croissantes telles que $\varphi(r) \leqslant \psi(r)$ pour tout $r \notin ([0, 1] \cup E_5)$ où E_5 est un ensemble de mesure logarithmique finie. Soit $\alpha > 1$ une constante donnée. Alors, il existe $r_1 = r_1(\alpha) > 0$ tel que $\varphi(r) \leqslant \psi(\alpha r)$ pour tout $r > r_1$.*

Lemme 4.6 *Soient $k \geq 2$, $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ $(A_0 \not\equiv 0)$ et F des fonctions méromorphes. Soient*

$$\rho = \max\left\{\rho_p(A_j)(j = 0, 1, \ldots, k-1), \rho_p(F)\right\} < \infty$$

et f une solution méromorphe d'ordre p-itératif infini de l'équation (4.2) où $A_0 \not\equiv 0, A_1, ..., A_{k-1}$, avec $A_0 \not\equiv 0$ et $F \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes d'ordre p- itératif fini avec $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$. Alors, $\rho_{p+1}(f) \leq \rho$.

Preuve. Supposons que f est une solution méromorphe d'ordre p-itératif infini de l'équation (4.2).

L'équation (4.2) peut être écrite comme suit

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} = -A_0(z) - \sum_{j=1}^{k-1} A_j(z) \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} + \frac{F(z)}{f(z)}$$

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq |A_0(z)| + \sum_{j=1}^{k-1} |A_j(z)| \left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|. \tag{4.3}$$

En utilisant le théorème de la factorisation de Hadamard, nous pouvons écrire f comme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$, où g et d sont des fonctions entières telles que

$$\mu_p(g) = \mu_p(f) \leq \rho_p(g) = \rho_p(f) = +\infty,\ i(d) < p \quad ou \quad i(d) = p \tag{4.4}$$

et

$$\rho_p(d) = \lambda_p(d) = \lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f). \tag{4.5}$$

Par le Lemme 4.2, il existe un ensemble $E_2 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2$ tel que $|g(z)| = M(r, g)$, nous avons :

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^j (1 + o(1)) \quad (j \geq 1). \tag{4.6}$$

D'après le Lemme 4.3, pour tout $\varepsilon \left(0 < \varepsilon < \dfrac{\mu_p(f) - \rho_p(d)}{2}\right)$, il existe un ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie (et donc de mesure logarithmique finie) tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_3$, nous avons

$$|A_j(z)| \leq \exp_p\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\} \quad (j = 0, \ldots, k-1), \quad |F(z)| \leq \exp_p\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}. \tag{4.7}$$

Il en résulte que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_3$ auquel $|g(z)| = M(r, g)$, nous avons pour tout $\varepsilon \left(0 < \varepsilon < \dfrac{\mu_p(f) - \rho_p(d)}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| &= \left|\frac{d(z)F(z)}{g(z)}\right| \\ &\leqslant \frac{\exp_p\left\{r^{\rho_p(d)+\varepsilon}\right\} \exp_p\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}}{\exp_p\left\{r^{\mu_p(f)-\varepsilon}\right\}} \\ &\leqslant \exp_p\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

En substituant (4.6), (4.7) et (4.8) dans (4.3), on obtient pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2 \cup E_3$ auquel $|g(z)| = M(r, g)$,

$$\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^k |1 + o(1)| \leq \exp_p\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\} + \sum_{j=1}^{k-1} \exp_p\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\} \left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^j |1 + o(1)| + \exp_p\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}. \tag{4.9}$$

Donc, nous avons :

$$|\nu_g(r)|^k |1 + o(1)| \leq (k+1) r^k \exp_p\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\} |\nu_g(r)|^{k-1} |1 + o(1)|. \tag{4.10}$$

Alors, par le Lemme 4.5 et le Lemme 4.1, nous obtenons de (4.10) que $\rho_{p+1}(g) = \rho_{p+1}(f) \leq \rho + \varepsilon$. Étant donné que ε est arbitraire, alors nous obtenons $\rho_{p+1}(f) \leq \rho$. ■

Lemme 4.7 *Soient* $H \subset [0, +\infty)$ *un ensemble de densité supérieure positive (ou de mesure linéaire infinie) et* $A_j(j = 0, 1, \cdots, k-1)(A_0 \not\equiv 0)$, F *des fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini. S'il existe des constantes positives* $\sigma > 0$ *et* $\alpha > 0$ *telles que*

$$|A_0(z)| \geq \exp_p\{\alpha r^{\sigma}\}$$

lorsque $|z| = r \in H, r \to +\infty$ *et* $\rho = \max\{\rho_p(A_j)(j = 1, 2, \cdots, k-1), \rho_p(F)\} < \sigma$, *alors toute solution méromorphe* $f \not\equiv 0$ *de l'équation (4.2) est transcendante et satisfait* $\rho_p(f) \geq \sigma$.

Preuve. Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de l'équation (4.2) avec $\rho_p(f) < \sigma$.

De l'équation (4.2) nous avons

$$A_0(z) = \frac{F(z)}{f(z)} - \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} - \sum_{j=1}^{k-1} A_j(z)\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}. \tag{4.11}$$

Comme $\rho_p(A_j) < \sigma(j = 1, 2, \cdots, k-1), \rho_p(F) < \sigma$ et $\rho_p(f) < \sigma$, alors, de (4.11), on conclus que l'ordre p-itératif de A_0 est $\rho_1 = \rho_p(A_0) \leq \max\{\rho, \rho_p(f)\} < \sigma$. Du Lemme 4.3, pour tout ε $(0 < \varepsilon < \sigma - \rho_1)$ donné, il existe un ensemble $E_3 \subset [1, +\infty)$ de mesure linéaire finie tel que

$$|A_0(z)| \leq \exp_p\{r^{\rho_1+\varepsilon}\} \tag{4.12}$$

vérifié pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_3$.

D'autre part, d'après les hypothèses du Lemme 4.7, il existe un ensemble $H \subset [0, +\infty)$ un ensemble de densité supérieure positive (ou de mesure linéaire infinie) et des constantes positives $\sigma > 0$ et $\alpha > 0$ telles que

$$|A_0(z)| \geq \exp_p\{\alpha r^{\sigma}\} \tag{4.13}$$

lorsque $|z| = r \in H, r \to +\infty$. Du (4.12) et (4.13), et pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin H\backslash E_3, r \to +\infty$, nous avons

$$\exp_p\{\alpha r^{\sigma}\} \leq \exp_p\{r^{\rho_1+\varepsilon}\} \tag{4.14}$$

Cette dernière expression mène à une contradiction avec $(0 < \varepsilon < \sigma - \rho_1)$ lorsque $r \to +\infty$. En conséquent, toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (4.2) est transcendante et satisfait $\rho_p(f) \geq \sigma$. ∎

Lemme 4.8 *Soit* g *une fonction entière non constante d'ordre p-itératif finie. Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné, il existe un ensemble* $H_1 \subset [0, +\infty)$ *avec* $\overline{dens} H_1 = 1$ *tel que*

$$M(r, g) \geq \exp_p\{r^{\rho_p(g)-\varepsilon}\}$$

pour tout z *satisfaisant* $|z| = r \in H_1$.

Preuve. Lorsque $p = 1$, le lemme est due à Kwon dans [21]. Ainsi, nous assumons que $p \geq 2$. Posons $\alpha = \rho_p(g) - \varepsilon$ et $\beta = \rho_p(g) - \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, il existe une suite $\{r_n\}_n$ de nombre réels pour laquelle $(r_n)^{\frac{\varepsilon}{2}} \geq n^{\alpha}$ et

$$M(r_n, g) \geq \exp_p\left\{r_n^{\beta}\right\}.$$

Comme

$$\exp_p\left\{r_n^{\beta}\right\} = \exp_p\left\{(r_n)^{\frac{\varepsilon}{2}}(r_n)^{\beta-\frac{\varepsilon}{2}}\right\},$$

alors

$$\begin{aligned} M(r_n, g) &\geq \exp_p\left\{(r_n)^{\frac{\varepsilon}{2}}(r_n)^{\beta-\frac{\varepsilon}{2}}\right\} \\ &\geq \exp_p\{(nr_n)^{\alpha}\} \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. De la dernière inégalité pour tout $r \in [r_n, nr_n]$, nous obtenons

$$\begin{aligned} M\left(r, g\right) &\geq M\left(r_n, g\right) \\ &\geq M\left(\frac{r}{n}, g\right) \\ &\geq \exp_p\{r^{\alpha}\} \end{aligned}$$

Posons $H_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty}[r_n, nr_n]$ et considérons la suite $\{R_n\}_n$ telle que $\frac{nr_n}{2} \leq R_n \leq nr_n$, alors

$$\begin{aligned} \overline{dens}H_1 &= \limsup_{r\to+\infty}\frac{m\left(H_1 \cap [0, r]\right)}{r} \\ &\geq \limsup_{n\to+\infty}\frac{m\left([r_n, nr_n] \cap [0, R_n]\right)}{R_n} \\ &\geq \limsup_{n\to+\infty}\frac{R_n - \frac{2R_n}{n}}{R_n} \\ &= \limsup_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Par définition, nous avons $0 \leq \overline{dens}H_1 \leq 1$. Alors, $\overline{dens}H_1 = 1$ ∎

Lemme 4.9 *[4] Soient* $A_j\,(j = 0, 1, ..., k-1), F \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'orde p-itératif fini. Si* f *est une solution méromorphe de l'équation (4.2) satisfait* $\rho_p\left(f\right) = +\infty$ *et* $\rho_{p+1}\left(f\right) < \rho < +\infty$*, alors*

$$\overline{\lambda}_p(f) = \lambda_p(f) = \rho_p\left(f\right) = +\infty$$

et

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}\left(f\right).$$

4 Preuve du Théorème 4.5

Soit $f \not\equiv 0$ une solution méromorphe de (4.1). Il s'ensuit de (4.1) que

$$A_0(z) = -\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} - \sum_{j=1}^{k-1} A_j(z)\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}.$$

$$|A_0(z)| \leq \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \sum_{j=1}^{k-1}|A_j(z)|\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|. \tag{4.15}$$

Par le Lemme 4.7, nous savons que f est transcendante. En utilisant le Lemme 2.2, il existe un ensemble $E_1 \subset (0, +\infty)$ ayant une mesure linéaire finie telle que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_1$, nous avons

$$\begin{aligned} \left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| &\leqslant c\left[T(2r, f)r^{\varepsilon}\log T(2r, f)\right]^{j}\ (j = 1, 2, \ldots, k), \\ &\leqslant cr^{\varepsilon}\left[T(2r, f)\right]^{2j}\ (j = 1, 2, \ldots, k). \end{aligned}$$

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant cr\left[T(2r,f)\right]^{2k} \ (j=1,2,\ldots,k). \tag{4.16}$$

D'après le Lemme 4.3, pour tout $\varepsilon\,(0<\varepsilon<\sigma-\rho)$, il existe un ensemble $E_3 \subset (1,+\infty)$ de mesure linéaire finie telle que l'inégalité

$$|A_j(z)| \leq \exp_p\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\},\ j=1,2,\ldots,k-1 \tag{4.17}$$

est vérifiée pour tout z satisfaisant $|z|=r\notin E_3$. De plus, d'après les hypothèses du Théorème 4.5, il existe un ensemble $H\subset[0,+\infty)$ avec $m(H)=\infty$, tel que pour tout z satisfaisant $|z|=r\in H$, $r\to+\infty$, nous avons

$$|A_0(z)| \geq \exp_p\left\{\alpha r^{\sigma}\right\}. \tag{4.18}$$

Donc, de (4.15), (4.16), (4.17) et (4.18) que pour tout z satisfaisant $|z|=r\in H\backslash(E_1\cup E_3)$, $r\to +\infty$, nous avons

$$\begin{aligned}
\exp_p\left\{\alpha r^{\sigma}\right\} \leq |A_0(z)| &\leqslant r\left[T(2r,f)\right]^{2k}+\sum_{j=1}^{k-1}\exp_p\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}r\left[T(2r,f)\right]^{2k},\\
&\leqslant r\exp_p\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}\left[T(2r,f)\right]^{2k}+\sum_{j=1}^{k-1}\exp_p\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}r\left[T(2r,f)\right]^{2k},\\
&\leqslant kr\exp_p\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}\left[T(2r,f)\right]^{2k}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Par $0<\varepsilon<\sigma-\rho$, il résulte du Lemme 4.4 et (4.19) que

$$\mu_p(f)=\rho_p(f)=\infty \quad et \quad \rho_{p+1}(f)\geq\sigma. \tag{4.20}$$

De plus, si $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right)<\infty$, alors f est une solution méromorphe de (4.1) avec

$$\rho_p(f)=\mu_p(f)=\infty,$$

$$\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right)<\mu_p(f)$$

et par la remarque 4.1, nous avons

$$\max\left\{\rho_p(A_j): j=0,\ldots,k-1\right\}=\rho_p(A_0)=\beta<\infty.$$

Ainsi, par le Lemme 4.6, nous obtenons

$$\rho_{p+1}(f)\leq\rho_p(A_0). \tag{4.21}$$

Par (4.20) et (4.21), nous concluons que $\mu_p(f)=\rho_p(f)=\infty$ et $\sigma\leq\rho_{p+1}(f)\leq_p(A_0)$.

5 Preuve du Théorème 4.6

Soit f une solution méromorphe de (4.2). Supposons que $\rho_p(f)<\infty$. Il s'ensuit de (4.2) que

$$A_0(z)=-\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}-\sum_{j=1}^{k-1}A_j(z)\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}+\frac{F(z)}{f(z)}.$$

$$|A_0(z)| \leq \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \sum_{j=1}^{k-1} |A_j(z)| \left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|. \tag{4.22}$$

Par le Lemme 4.7, nous savons que f est transcendante avec $\rho_p(f) \geq \sigma$. De l'hypothèse $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \sigma$ et du théorème de factorisation de Hadamard, nous pouvons réécrire f comme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ où g et d sont des fonctions entières avec

$$\lambda_p(d) = \rho_p(d) = \lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \sigma,\ \rho_p(f) = \rho_p(g) \geq \sigma.$$

D'après le Lemme 4.8, pour tout $\varepsilon\ (0 < \varepsilon < \rho_p(g))$, il existe un ensemble $H_1 \subset [0, +\infty)$ avec $\overline{dens}(H_1) = 1$ tels que

$$M(r, g) \geq \exp_p\left\{r^{\rho_p(g)-\varepsilon}\right\} \tag{4.23}$$

soit vérifiée pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H_1$. Nous avons

$$\rho = \max\left\{\rho_p(A_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, k-1),\ \rho_p(F)\right\} < \sigma.$$

Alors, en utilisant le Lemme 4.3 et (4.23) pour tout ε vérifiant

$$0 < \varepsilon < \min\left\{\sigma - \rho, \frac{\rho_p(g) - \rho_p(d)}{2}\right\},$$

il existe un ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie tels que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H_1 \setminus E_3$ avec $\left|g(z)\right| = M\left(r, f\right)$, nous avons

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| &= \left|\frac{d(z)F(z)}{g(z)}\right| \\ &\leqslant \frac{\exp_p\left\{r^{\rho_p(d)+\varepsilon}\right\}\exp_p\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}}{\exp_p\left\{r^{\rho_p(g)-\varepsilon}\right\}} \\ &\leqslant \exp_p\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}.\end{aligned} \tag{4.24}$$

En utilisant des arguments similaires à ceux de la preuve du Théorème 3.5, pour tout $\varepsilon\left(0 < \varepsilon < \min\left\{\sigma - \rho, \frac{\rho_p(g)-\rho_p(d)}{2}\right\}\right)$, il existe un ensemble $E_2 = H \cap H_1 \subset [0, +\infty[$ de densité superieur positive tels que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H_2 \setminus (E_1 \cup E_3), r \to +\infty$ avec $|g(z)| = M(r, f)$, nous avons

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq r\left[T(2r, f)\right]^{2k} \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{4.25}$$

$$\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| \leq \exp_p\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}, \tag{4.26}$$

$$|A_j(z)| \leq \exp_p\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}, (j = 1, 2, \ldots, k-1), \tag{4.27}$$

$$|A_0(z)| \geq \exp_p\left\{\alpha r^{\sigma}\right\}. \tag{4.28}$$

En substituant (4.25), (4.26), (4.27) et (4.28) dans (4.22), nous obtenons pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H_2 \setminus (E_1 \cup E_3), r \to +\infty$, avec $\left|g(z)\right| = M\left(r, f\right)$,pour tout ε

$\left(0 < \varepsilon < \min\left\{\sigma - \rho, \frac{\rho_p(g)-\rho_p(d)}{2}\right\}\right)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\exp_p\{\alpha r^{\sigma}\} \le |A_0(z)| &\le r\left[T(2r,f)\right]^{2k} + \sum_{j=1}^{k-1}\exp_p\{r^{\rho+\varepsilon}\}\, r\left[T(2r,f)\right]^{2k} + \exp_p\{r^{\rho+\varepsilon}\} \\
&\le r\exp_p\{r^{\rho+\varepsilon}\}\left[T(2r,f)\right]^{2k} + \sum_{j=1}^{k-1}\exp_p\{r^{\rho+\varepsilon}\}\, r\left[T(2r,f)\right]^{2k} + \exp_p\{r^{\rho+\varepsilon}\} \\
&\le (k+1)r\left[T(2r,f)\right]^{2k}\exp_p\{r^{\rho+\varepsilon}\}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Par inégalité (4.29)

$$\log_p\left(\exp_p\{\alpha r^{\sigma}\}\right) \leqslant \log_p\left((k+)r\left[T(2r,f)\right]^{2k}\exp_p\{r^{\rho+\varepsilon}\}\right)$$

Par suite $\rho_p(f) = \infty$. Ce dernier résultat représente une contradiction ce qui signifie que l'hypothèse de $\rho_p(f) < \infty$ n'est pas vraie. Par conséquent, nous concluons que $\rho_p(f) = \infty$. Comme $F \not\equiv 0$, alors par le Lemme 4.9, nous obtenons

$$\overline{\lambda}_p(f) = \lambda_p(f) = \rho_p(f) = +\infty \quad \text{et} \quad \overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f). \tag{4.30}$$

De plus, si $\lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \min\{\mu_p(f), \sigma\}$, alors f est une solution méromorphe de (4.2) avec $\rho_p(f) = \infty, \lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) < \mu_p(f)$ et d'après la remarque 4.1, nous avons

$$\max\{\rho_p(A_j), (j = 0, 1, \ldots, k-1), \rho_p(F)\} = \rho_p(A_0) = \beta < \infty.$$

Donc, par le Lemme 4.6, nous obtenons

$$\rho_{p+1}(f) \le \rho_p(A_0). \tag{4.31}$$

Des inégalités (4.30) et (4.31), nous concluons que

$$\overline{\lambda}_p(f) = \lambda_p(f) = \rho_p(f) = +\infty$$

et

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) \le \rho_p(A_0).$$

6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a détaillé les résultats de l'article de Belaïdi [5] qui a étendu les résultats de Andasmas [1] en considérant, pour tout $k \ge 2$, les équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes

$$f^{(k)}(z) + A_{k-1}(z)f^{(k-1)}(z) + \ldots + A_1(z)f'(z) + A_0(z)f(z) = 0, \tag{4.32}$$

et

$$f^{(k)}(z) + A_{k-1}(z)f^{(k-1)}(z) + \ldots + A_1(z)f'(z) + A_0(z)f(z) = F(z), \tag{4.33}$$

où $A_0 \not\equiv 0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ et $F \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre p-itératif.

Conclusion

On a étudié certains problèmes liés à l'ordre de croissance des solutions des équations différentielles complexes dans le plan complexe. Des résultats importants on été obtenus sur les équations homogènes et non homogènes. L'outil principal utilisé dans cette étude étant la théorie de Nevanlinna.

On a commencé ce travail, par montrer quelques nouvelles propriétés sur l'ordre et l'hyper ordre des solutions des équations différentielles complexes à coefficients fonctions entières.

Dans la deuxième chapitre, on a étudié l'ordre itératif des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini.

Dans la troisième chapitre, nous avons pensé à étudier les zéros et la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini et nous avons donné aussi des estimations sur l'exposant de convergence itératif de ces solutions.

Bibliographie

[1] **M. Andasmas and B. Belaïdi,** (2015), *On the growth and the zeros of solutions of higher order linear differential equations with meromorphic coefficients.* Publications de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, **tome 98 (112),** 199-210. 27, 34

[2] **S. Bank**, (1972), *A general theorem concerning the growth of solutions of first order algebraic differential equations.* Compositio Math. **25**, 61-70. 28

[3] **B. Belaïdi**, (2002), *Estimation of the hyper-order of entire solutions of complex linear ordinary differential equations whose coefficients are entire functions.* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **no. 5,** 1-8. 1, 12, 16, 18, 25

[4] **B. Belaïdi,** (2008), *Oscillation of fixed points of solutions of some linear differential equations,* Acta. Math. Univ. Comenianae 77, **no. 2,** 263-269. 31

[5] **B. Belaïdi**, (2015), *Iterated order of meromorphic solutions of homogeneous and non-homogeneous linear differential equations,* Romai J,**v. 11, No.1** , 33-46. 9, 27, 34

[6] **B. Belaïdi**, (2017), *Fonctions Entières et Théorie de Nevanlinna,* Editions Al Djazair. 2

[7] **L. G. Bernal**, (1987) *On growth k-order of solutions of a complex homogeneous linear differential equations,* Proc. Amer. Math. Soc. **101**, 317-322. 6

[8] **T.B. Cao, Z.X. Chen, X.M. Zheng and J.Tu,** (2005) *On the iterated order of meromorphic solutions of higher order linear differential equations.* Ann. Differential Equations. **21 (2)**, 111-122. 28

[9] **Z. X. Chen and C.C Yang**, (1999) *Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations,* Kodai Math. J. 22. Differential Equations. **no. 2, 273-285** . 1, 11, 13, 17, 25, 26

[10] **Chen Z.X and Yang C.C**, (1999) *On the zeros and hyper-order of meromorphic solutions of linear differential equations,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **24**,pp.215-224. 1, 11

[11] **Y. Chen**, (2010) *Estimates of the zeros and growths of meromorphic solutions of homogeneous and non-homogeneous second order linear differential equations.* Math. Appl. (Wuhan). **23, no. 1**, 18-26. 19, 24, 26

[12] **A.Ferraoun, B. Belaïdi**, (2016), *Growth of solutions of complex differential equations with coefficients being Lacunary series of finite iterated order.* Nonlinear Studies, **(2), 237-252.** 28

[13] **A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskii**, (2008), *The distribution of values of meromorphic functions,* Irdat Nauk, Moscow, 1970 (in Russian), Transl. Math. Monogr., vol. 236, Amer. Math. Soc., Providence RI. 10

[14] **G. G. Gundersen**, (1988), *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates.* J. London Math. Soc. **(2) 37, no. 1**, 88-104. 1, 12, 13

[15] **G. G. Gundersen**, (1988), *Finite order solutions of second order linear differential equations.* Trans. Amer. Math. Soc. **305 no. 1**, 415-429. 28

[16] **W. K. Hayman**, (1964) *Meromorphic functions,* Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford. 2, 4, 5, 7

[17] **W. K. Hayman**, (1974) *The local growth of power series : a survey of the Wiman-Valiron method,* Canad. Math. Bull., 17, pp. 317-358. 1, 13

[18] **J. He, X. M. Zheng and H. Hu**, (2013) *Iterated order of meromorphic solutions of certain higher order linear differantial equations with meromorphic coefficients of finite iterated order,* Acta Universitatis Apulensis. **No 33**, pp. 145-157. 19, 24, 26

[19] **Y.Z.He and X.Z.Xiao**, (1988) *Algebroid Functions and Ordinary Differential Equations* , Science Press, (in Chineses) 20

[20] **L. Kinnunen**, (1998), *Linear differential equations with solutions of finite iterated order,* Southeast Asian Bull. Math., **22, no.4**, 385-405. 5, 6, 8, 9, 17

[21] **K. H. Kwon**, (1996) *On the growth of entire functions satisfying second order linear differential equations.* Bull. Korean Math. Soc. **33, no. 3**, 487-496. 1, 8, 9, 11, 17, 25, 26, 30

[22] **I. Laine**, (1993), *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations,* de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter deGruyter Co., Berlin. 2, 3, 7, 17, 20

[23] **A.Schonhage**, (1960), *uderdas Wachstum Zusammengesetzer Funktionen,* Math.Z., **73**, 22-44. 6

[24] **X. Shen and H. Y. Xu,** (2012), *The zeros and growth of solutions of higher order differential equations,* Fourth International Conference on Computational and Information Sciences, 605-608. 26

[25] **J. Tu and Z. X. Chen**, (2009), *Growth of solutions of complex differential equations with meromorphic coefficients of finite iterated order.* Southeast Asian Bull. Math. **33, no. 1**, 153-164. 19, 20

[26] **J. Tu and T. Long**, (2009), *Oscillation of complex high order linear differential equations with coefficients of finite iterated order.* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **No. 66**, 1-13. 20, 28

[27] **Valiron.G**,(1949) *Lecture on the General Theory of Integral Functions,* translated by E.F.Colling wood, Chelsea, New York. 1, 13

[28] **H. Wittich**, (1968), *Neuere Untersuchungen ber eindeutige analytishe Funktionen,* 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York. 9

[29] **C. C. Yang and H. X. Yi**, (2003), *Uniqueness theory of meromorphic functions, Mathematics and its Apllications.* 557. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht. 2

[30] **Yi H.X and Yang C.C**,(1995) *The Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, Science Press, Beijing(in Chinese).* 17

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions l'ordre itératif des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} A_j f^{(j)} + A_0 f = 0,$$

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} A_j f^{(j)} + A_0 f = F,$$

où $k \geqslant 2, A_j, (j = 0 \ldots, k-1)$ et F sont des fonctions méromorphes d'ordre p-itératif fini.

Sous certaines conditions sur les coefficients, nous donnons quelques estimations de l'exposant de convergence itératif

Mots-Clés. Fonction méromorphe, ordre de croissance, l'exposant de convergence itératif.

Abstract

In this manuscript, we study the iterative order of the meromorphic solutions of linear differential equations

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} A_j f^{(j)} + A_0 f = 0$$

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} A_j f^{(j)} + A_0 f = F$$

where $k \geqslant 2, A_j, (j = 0 \ldots, k-1)$ and F are meromorphic functions of finite p-iterated order.

Under certain conditions on the coefficients, we give some estimates of the iterated convergence exponent.

Key Words. Meromorphic function, order of growth, the-iterated convergence exponent.