**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHESCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITÉ ABDELHAMID BENBADIS DE MOSTAGANEM**

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire présenté pour obtenir le grade de Master

Spécialité : Mathématiques

*Option : Analyse fonctionnelle*

par

**TAYEB MEBARKA**

# Les équations abstraites du second ordre de type elliptique sur le domaine $\mathbb{R}_-$ avec conditions de Robin

Soutenue le 29 / 05 / 2019

Devant le Jury

| | |
|---|---|
| **Président** | Dr. Djillali Laid, UMAB, Mostaganem |
| **Examinateur** | MAA. Diala Houriar, UMAB, Mostaganem |
| **Encadreur** | Dr. Andasmas Maamar, UMAB, Mostaganem |

# Remerciements

Avant tout je remercie Dieu tout-puissant, qui m'a donné la force, la patience, le courage, la volonté pour accomplir ce mémoire

Je tiens à présenter mes sincères remerciements à Mr Andasmas maamar, pour avoir accepté mon encadrement et de m'avoir orientée, aidée et encouragée tout au long de la réalisation de ce travail, pour ses conseils permanents, et sa disponibilité. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je suis très honorée par son encadrement.

Mes remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail. Je remercie vivement Mr Djillali laid et Mme Diala H. qui m'ont fait l'honneur d'être parmi le jury de ce mémoire.

Je n'oublie pas mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, je remercie infiniment toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# Je dédie ce modeste travail

A ma mère et mon père qui par leur dévouement et leur affection ont été

Pour moi un soutien tout au long de mes études et ma vie.

A mes frères, mes soeurs, mes chères copines, mes collègues, mes amies.

A toute la famille TAIB, SAHEL.

Je dédie ce travail à toute personne de proche ou de loin qui n'a pas cessé de me Guider et de m'encourager durant la réalisation de ce travail.

Taib Mebarka

# Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions le problème du second ordre de type elliptique suivant

$$\begin{cases} u''(x) + A_\omega u(x) = g(x) \\ u'(0) - \mathbf{H}u(0) = \phi, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

Sur le domaine non borné $\mathbb{R}_-$, posé dans un espace de Banach complexe $E$ de type UMD tels que :

$A$, $H$ sont deux opérateurs fermés dans $E$,
$\phi$ est un élément auxiliaire donné dans $E$,
$g$ est une fonction dans $L^p(\mathbb{R}_-, E)$.

On étudie l'existence et l'unicité de la solution classique du problème dans le cadre $L^p$, avec la condition au limite

$$u(-\infty) = 0.$$

En utilisant le célèbre théorème de Dore-Venni, on fait preuve que

$$u \in W^{2,p}(-\infty, 0, E) \cap L^p(-\infty, 0, D(A)).$$

# Table des matières

**Introduction** **i**

**1 Rappels** **1**
1.1 Les opérateurs fermés . . . 1
1.2 L'intégrale de Dunford . . . 3
1.3 Les semi-groupes . . . 3
1.3.1 Les semi-groupes fortement continus ($C_0$ semi-groupe) . . . 3
1.3.2 Les semi-groupes analytiques . . . 5
1.4 Les espaces fonctionnels . . . 5
1.4.1 Intégrales définies dépendant d'un paramètre . . . 6
1.4.2 Les espaces d'interpolation . . . 6
1.4.3 Les espaces de Sobolev et de Besov . . . 8
1.4.4 Les espaces UMD . . . 9
1.5 Les puissances fractionnaires, classe Bip$(\theta; E)$ . . . 9
1.6 Sommes d'opérateurs linéaires dans les espaces de Banach . . . 11
1.7 Sommes commutatives . . . 12
1.7.1 Sommes de Da Prato et Grisvard . . . 12

**2 Position et Résolution du Problème** **14**
2.1 Position du problème, hypothèses et conséquences . . . 14
2.2 Technical lemmas . . . 17
2.3 Représentation de la solution $(P)$ . . . 20
2.3.1 Résolution du problème (P) : . . . 21
2.3.2 Etude de la régularité de $u$ . . . 24
2.4 Cas Particuliers . . . 26
2.4.1 Le cas $H = 0$ . . . 26
2.4.2 Le cas $H = -aI$ avec $a > 0$ . . . 26
2.4.3 Le cas H $= -\sqrt{-A_\omega} = Q_\omega$ . . . 27
2.5 Exemples . . . 27

# Introduction

Plusieurs auteurs ont étudié des équations différentielles abstraites sur des domaines infinis ; Limam dans [18] à étudié le problème suivant (pour $\delta \in ]0,1]$ fixé)

$$\begin{cases} \left(u^{\delta}\right)''(x) + Au^{\delta}(x) = g^{\delta}(x) \ \ p.\ p.\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, \delta) \\ \left(u^{\delta}\right)'(\delta) = f_{+}^{\delta} \\ u^{\delta}(0_{-}) = u^{\delta}(0_{+}), \quad \mu_{-}(u^{\delta})'(0_{-}) = \mu_{+}(u^{\delta})'(0_{+}), \end{cases} \tag{0.0.2}$$

tel que $A$ est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset E$ vérifiant l'hypothèse d'ellipticité, en basant sur la théorie des semi-groupes et le célèbre Théorème de Dore et Venni. Eltaief A. et Maingot S. [13] ont étudié l'équation différentielle abstraite complète de type elliptique

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = g(x), \quad x \in (0, R) \tag{0.0.3}$$

Posée dans un espace de Banach complexe $E$ de type UMD ou quelconque, vérifiant les conditions aux limites

$$\begin{matrix} u(0) = u_0 \\ u(R) = u_R \end{matrix}, \tag{0.0.4}$$

où $A$, $B$ sont deux opérateurs linéaire fermés dans $E$ et le second membre $g \in L^{P}(0, R, E)$ avec $1 < P < +\infty$ et $u_{0,}u_R \in E$ et $u_R = 0$ dans la cas $R = +\infty$. Ils ont cherché la solution stricte $u$ de (0.0.3) telles que (0.0.4).

Ce mémoire est consacré à l'étude d'une classe d'équations différentielles opérationnelles abstraites du second ordre de la forme

$$u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = g(x), \qquad \omega \geq 0, \tag{0.0.5}$$

posée dans un espace UMD de Banach complexe $E$, sur le domaine non borné $\mathbb{R}_{-}$. Sur le bord $x = 0$ on impose une condition non homogène à coefficients opérateurs de type Robin

$$u'(0) - \mathbf{H}u(0) = \phi. \tag{0.0.6}$$

L'objectif de ce mémoire est l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité de la solution classique de l'équation (0.0.5) dans le cas commutatif et dans le cadre $L^{P}(\mathbb{R}_{-})$ avec les conditions aux limites : (0.0.6) et

$$u(-\infty) = 0,$$

la condition au limite $-\infty$ est nécessairement nulle (selon Brezis [5], corollaire VIII. 8 page 130.)
On utilisera la méthode de Krein [17] pour expliciter la solution. En appliquant la théorie des semi-groupes analytiques et le célèbre Théorème de Dore et Venni [9] pour prouver la régularité de la solution ; un travail similaire à celui de Etaif A. dans l'article [13] avec une condition de type Robin au point $x = 0$.
Ce mémoire est composée de trois chapitres.

Dans **le premier chapitre,** on donne des rappels sur quelques notions de base d'analyse fonctionnelle qui sont utilisées dans ce travail. En particulier, le calcul fonctionnel de Dunford, la théorie des semi-groupes [21], la théorie des sommes d'opérateurs linéaires [9], [8], les espaces d'interpolation [16], [24], les puissances fractionnaires d'opérateurs [22].

**Le deuxième chapitre** est consacré à la recherche de la solution stricte $u$ du problème suivant

$$\begin{cases} (u)''(x) + Au(x) - \omega u(x) = g(x), & \omega \geq 0, \quad p.\ p.\ x \in (-\infty, 0), \\ (u)'(0) - Hu(0) = \phi \end{cases} \tag{0.0.7}$$

tel que $A,\ H$ sont deux opérateurs linéaires fermés de domaines respectivement $D(A) \subset E,\ D(H) \subset E$, vérifiant l'hypothèse d'ellipticité.

Dans le **troisième chapitre,** on traite les cas spéciales $H = 0$, $H = -aI$ $(a > 0)$ et $H = -\sqrt{-A_\omega}$ avec quelques exemples.

**Chapitre 1**

# Rappels

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions de base concernant les outils d'analyse fonctionnelle comme les opérateurs linéaires fermés, les intégrales de Dunford, les espaces fonctionnels, les espaces d'interpolation, la théorie des semi-groupes, les puissances fractionnaires (pour plus de détails voir [5], [3], [4], [16], [20], [21]). On donnera aussi quelques résultats sur la théorie des sommes d'opérateurs linéaires dans le cadre commutatif et non commutatif (voir [9], [15].

Soit $E$ un espace de Banach complexe, $A$ un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ de $E$ à valeurs dans $E$, $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de $A$.

## 1.1 Les opérateurs fermés

**Définition 1.1.1** *On dit que l'opérateur $A$ est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset D(A)$ telle que $x_n$ converge vers $x$ et $Ax_n$ converge vers $y$, alors $x \in D(A)$ et $Ax = y$.*

**Définition 1.1.2** *L'opérateur $A$ est dit fermable si et seulement si $A$ admet une extension fermée i.e.*

$$\forall (x_n) \subset D(A) : \left\{ \begin{array}{c} x_n \to 0 \\ Ax_n \to y \end{array} \right. \Longrightarrow y = 0.$$

*La plus petite extension fermée de $A$ est notée $\overline{A}$ et s'appelle la fermeture de $A$.*

**Définition 1.1.3** *Soit $A$ un opérateur linéaire fermé sur $X$. l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de $A$ est définie par*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \quad \text{est inversible dans } L(X)\}.$$

*Si $\lambda \in \rho(A)$ on définit la résolvant $R_\lambda(A)$ de $A$ au point $\lambda$ par*

$$R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

*Le spectre de $A$, noté $\sigma(A)$, est définie par*

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A).$$

***Proposition 1.1.1*** *Soit $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire.*
*1. Si $A$ est un opérateur fermé, alors pour tout $B \in L(X,Y)$,*
*l'opérateur $A + B : D(A) \subset X \to Y$ est fermé .*
*2. Si $A$ est un opérateur fermé et injectif alors $A^{-1}$ est fermé.*
*3. Si $A$ est un opérateur fermé à valeurs dans $X$ et $D(A)$ est fermé dans $X$, alors $A$ est continue de $D(A)$ dans $X$ (Application directe du théorème du graphe fermé).*
*4. Si $A$ est un opérateur continue de $D(A)$ dans $X$, alors $A$ est fermé si et seulement si son domaine est fermé.*
*5. Si $\rho(A) \neq \varnothing$ alors $A$ est fermé.*

**Définition 1.1.4** *Soit $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire. On peut munir $D(A)$ d'une norme notée $\|.\|_{D(A)}$et appelée norme du graphe ,elle est définie pour tout $x \in D(A)$ par :*

$$\|x\|_{D(A)} := \|x\|_X + \|Ax\|_Y .$$

**Proposition 1.1.2** *Si $A$ est un opérateur linéaire fermé, alors $\left(D, \|.\|_{D(A)}\right)$est un espace de Banach.*

**Proposition 1.1.3** *Soient $A \in L(X)$ et $B : D(B) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire fermé tels que $\mathrm{Im}(A) \subset D(B)$. Alors $BA \in L(X)$.*
***Preuve*** *: Il est clair que $BA$ est défini sur $X$. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $X$ telle que*

$$\begin{cases} x_n \to x \text{ dans } X, \\ (BA)\, x_n \to y \text{ dans } X. \end{cases}$$

*Alors comme $\mathrm{Im}(A) \subset D(B)$, $(Ax_n)_{n\geq 0}$est une suite d'éléments de $D(B)$ et comme $A \in L(X)$ on a*

$$\begin{cases} Ax_n \to Ax \text{ dans } X, \\ B(Ax_n) \to y \text{ dans } X. \end{cases}$$

*$B$ étant fermé et $Ax \in D(B)$, d'après la définition $(1.1.1)$, on a $B(Ax) = y$.*
*Ainsi $x \in D(BA)$ et $(BA)x = y$. $BA$ est donc un opérateur fermé et définie sur $X$. D'après le théorème du graphe fermé, on obtient $BA$ borné sur $X$ i.e. $BA \in L(X)$.*

**Définition 1.1.5** *On dit que $A$ est sectoriel si*
*$i)$ $D(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont denses dans $E$,*
*$ii)$ $\ker(A) = \{0\}$ et $\rho(A) \supset \left]-\infty, 0\right[$ et $\exists M \geqslant 1$ telle que*

$$\left\| t\,(A - tI)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant M.$$

## 1.2 L'intégrale de Dunford

Notons par $H(A)$ l'espace des fonctions holomorphes dans un ensemble fermé contenant le spectre de $A$. La formule analogue à la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes est définie par l'intégrale de Dunford suivante

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) (zI - A)^{-1} dz$$

Où $\gamma$ est une courbe simple inclue dans $\rho(A)$ et $f \in H(A)$. L'opérateur $f(A) \in L(E)$ et ne dépend pas du choix de $\gamma$.

## 1.3 Les semi-groupes

### 1.3.1 Les semi-groupes fortement continus ($C_0$ semi-groupe)

**Définition 1.3.1** *On appelle semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach $E$ toute famille $(G(t))_{t \geqslant 0}$ dans $L(E)$ vérifiant les axiomes suivants*
$(i)$ *Pour tout $x \in E$, l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & E \\ t & \mapsto & G(t)x \end{array}$$

*est continue.*
$(ii)$ $G(0) = I$
$(iii)$ $\forall s \geqslant 0, \forall t \geqslant 0 : G(t+s) = G(t) G(s)$.
*On dit aussi que $(G(t))_{t \geqslant 0}$ est un $C_0$ semi-groupe.*

**Remarques**
$i)$ On dit que $G(t)$ est un groupe fortement continu si $(i)$ et $(iii)$ sont vérifiées pour $s$, $t$ de signes quelconques.
$ii)$ On dit que $G(t)$ est un semi-groupe de contraction si

$$\|G(t)\|_{L(E)} \leqslant 1.$$

**Exemples**
1) Soit $A$ un opérateur borné dans $E$, alors la famille d'opérateurs

$$G(t) = e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}$$

est un groupe sur $E$.
2) Soit $E = L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leqslant p < \infty$ et

$$(G(t) f)(x) = f(x - t),$$

dans ce cas $(G(t))_{t \geqslant 0}$ est un groupe appelé groupe des translations.

**Théorème 1.3.1** *Soit $G$ un semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes $M \geqslant 1$ et $\omega \geqslant 0$ telles que*

$$\forall t \geqslant 0 \quad \|G(t)\|_{L(E)} \leqslant M e^{\omega t}.$$

**Définition 1.3.2** *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(G(t))_{t \geqslant 0}$, l'opérateur $A$ défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ x \in E : \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \\ Ax := \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t}. \end{cases}$$

**Remarques**

*1) Si $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe $(G(t))_{t \geqslant 0}$, alors $A$ est fermé à domaine dense.*

*2) Le semi-groupe $(G(t))_{t \geqslant 0}$ est uniquement déterminé par son générateur infinitésimal $A$.*

*3) Le semi-groupe $(G(t))_{t \geqslant 0}$ est uniformément continu si et seulement s'il est de la forme $\left(e^{tA}\right)_{t \geqslant 0}$ où $A$ est un opérateur borné dans $E$.*

*4) Si $A$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(G(t))_{t \geqslant 0}$* tel que pour $\lambda > \omega$,

$$\|G(t)\|_{L(E)} \leqslant M e^{\omega t},$$

*Alors l'opérateur*

$$(\lambda I - A)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t) x dt,$$

*est borné et pour tout $\lambda \in \rho(A)$*

$$\left\| (\lambda I - A)^{-1} x \right\| \leqslant M (\lambda - \omega)^{-1}.$$

5) Si $A$ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(G(t))_{t \geqslant 0}$, alors*

*i) Si $x \in D(A)$* et $t \geqslant 0$ alors

$$G(t)x \in D(A).$$

*ii) La fonction $t \mapsto G(t)x$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $x \in D(A)$. De plus*

$$\forall t \geqslant 0, \frac{d}{dt} G(t)x = AG(t)x = G(t)Ax.$$

*iii) Pour tout $x \in E$ et tout $t \geqslant 0$*

$$\int_0^t G(s)xds \in D(A) \text{ et } A \int_0^t G(s)xds = G(t)x - x,$$

*et si de plus $x \in D(A)$*

$$A \int_0^t G(s)xds = \int_0^t G(s)Axds = G(t)x - x.$$

### 1.3.2 Les semi-groupes analytiques

**Définition 1.3.3** *On appelle semi-groupe analytique de type* $\alpha \in \left]0, \pi/2\right[$ *toute application* $G$ *définie sur l'ensemble*

$$\Sigma_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \alpha\}$$

*à valeurs dans* $L(E)$ *telle que*

(1) $z \mapsto G(z)$ *est analytique sur* $\Sigma_\alpha$.

(2) $\forall x \in E,\ G(0) = I$ *et*

$$\lim_{z \in \Sigma_\alpha \quad z \to 0} G(z)\, x = x$$

(3) $\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha,\ G(z_1 + z_2) = G(z_1)\, G(z_2)$.
*De plus*

$$G(t)\, x = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{tz} (zI - A)^{-1} x dz = e^{tA} x.$$

**Théorème 1.3.2 (de Kato)** *Soit* $A : D(A) \subset E \to E$ *un opérateur linéaire vérifiant*

(1) $A$ *fermé de domaine* $D(A)$ *dense dans* $E$.

(2) $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re} \lambda \geqslant 0\}$ *et* $\exists M > 0$ *telle que*

$$\forall \lambda > 0 : \left\| (\lambda I - A)^{-1} \right\| \leqslant \frac{M}{1 + \lambda}.$$

*Alors* $A$ *est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique* $G$ *vérifiant*

(1) $\exists C > 0,\ \forall t > 0 : \| G(t) \|_{L(E)} \leqslant C$.

(2) $\forall t > 0,\ G(t) \in L(E, D(A))$ *et* $\| A G(t) \| \leqslant \dfrac{M}{t}$.

## 1.4 Les espaces fonctionnels

Dans toute la suite, on désigne par $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (non nécessairement borné) et on pose $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...., \alpha_n)$ un multi-indice, avec $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ et on utilise la notation

$$\partial^\alpha = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} .... \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}.$$

**Définition 1.4.1** *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$ *On définit les espaces* $L^P(0, R; X)$ *par :*
$L^P(0, R; X) = \{g : (0, R) \longrightarrow X,$ *B-mesurable telle que la fonction*
$x \mapsto \| g(x) \|_X^p$ *est Lebesgue intégrable*$\}$
*Si p est fini.On munit cet espace de la norme :*
$\| g \|_{L^p(0,R,X)} = \left( \int_E \| g(x) \|_X^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$
*Pour* $p = \infty$ *on pose :*
$L^\infty(0, R; X) = \{g : [0, R] \longrightarrow X,$ *B-mesurable telle que la fonction*

$x \mapsto \|g(x)\|_X$ *est Lebesgue mesurable et* $\sup_{x\in(0,R)}$ *ess* $\|g(x)\|_X < +\infty\}$
*Muni de la norme :*
$\|g\|_{L^\infty(0,R,X)} = \sup_{x\in(0,R)}$ *ess* $\|g(x)\| x$.

***Théorème 1.4.1*** *L'espace* $L^P(0,R,X)$, $p \in [1,+\infty]$ *muni de la norme précédente est un espace de Banach.*

### 1.4.1 Intégrales définies dépendant d'un paramètre

On rappelle le résultat classique :

**Proposition 1.4.1** *Soient* $J$ *un intervalle non trivial de* $\mathbb{R}$, $X$ *un espace de Banach* $f : J \times [a,b] \to X$ *une application continue, admettant une dérivée partielle par rapport à la première variable* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *continue sur* $J \times [a,b]$
*et* $\alpha, \beta$ *deux fonctions de classe* $C^1$ *sur* $J$ *et à valeurs dans* $[a,b]$.
*Alors, l'application*

$$\begin{array}{rrl} h: & J \longrightarrow & X \\ & x \longmapsto & \int_\alpha^\beta f(x,t)dt \end{array}$$

*est de classe* $C^1$ *sur* $J$ *et pour tout* $x \in J$

$$h'(x) = \beta'(x) f(x,\beta(x)) - \alpha'(x) f(x,\alpha(x)) + \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

### 1.4.2 Les espaces d'interpolation

On désigne par $X_0$ et $X_1$ deux espaces de Banach contenus avec injection continue dans un espace topologique séparé $E$ (c'est à dire $X_0 \hookrightarrow E$, $X_1 \hookrightarrow E$). Considérons les espaces de Banach

$$X_0 \cap X_1 \text{ et } X_0 + X_1$$

Munis des normes

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1},$$

Et

$$\|x\|_{X_0+X_1} = \inf_{x=x_0+x_1,\quad x_i \in X_i} \left(\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}\right).$$

Le couple $\{X_0, X_1\}$ est dit couple d'interpolation.

**Définition 1.4.2** *Soit* $\{X_0, X_1\}$ *un couple d'interpolation. On appelle espace intermédiaire entre* $X_0$ *et* $X_1$ *tout espace de Banach* $X$ *tel que*

$$X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1.$$

*Les espaces* $X_i, i = 0, 1$ *sont des espaces intermédiaires.*

**Définition 1.4.3** *Soient* $\theta \in \left]0,1\right[$ *et* $p \in [1,+\infty]$. *On appelle espace d'interpolation entre* $X_0$, $X_1$ *l'espace* $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ *tel que* $x \in (X_0, X_1)_{\theta,p}$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} i)\ \forall t > 0, \exists u_i(t) \in X_i \quad (i = 0,1) : x = u_0(t) + u_1(t) \\ ii)\ t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0), \quad t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1) \end{cases}$$

*Où*

$$L_*^p(E) = \left\{ f : \left]0,\infty\right[ \to E : \int_0^{+\infty} \|f(t)\|_E^p \frac{dt}{t} < \infty \right\}.$$

**Propriétés**

On donne maintenant quelques propriétés fondamentales de ces espaces, pour tout $\omega$, $\theta$, $t \in \left]0,1\right[$ et $p, q, r \in [1,+\infty]$ :

1) Si $0 < \theta \leqslant \omega < 1$ alors

$$(X_0, X_1)_{\theta,p} \subset (X_0, X_1)_{\omega,q}.$$

2) Si $p \leqslant q$ alors

$$(X_0, X_1)_{\theta,p} \subset (X_0, X_1)_{\theta,q}.$$

3) Si $X_0 = X_1$ alors

$$(X_0, X_1)_{\theta,p} = X_0 = X_1.$$

4) Si $0 < \omega < \theta < 1$, alors on a

$$((X_0, X_1)_{\theta,p}, (X_0, X_1)_{\omega,q})_{t,r} = (X_0, X_1)_{\alpha,r},$$

Avec

$$\alpha = (1-t)\,\theta + t\omega \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \frac{1-t}{p} + \frac{t}{q}.$$

**Cas Particulier** $(D(A), E)_{\theta,p}$

Soient $E$ un espace de Banach, $A$ un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ inclus dans $E$. Posons

$$X_0 = D(A) \text{ et } X_1 = E,$$

Alors

$$X_0 \cap X_1 = D(A) \text{ et } X_0 + X_1 = E,$$

donc, pour tout $\theta \in \left]0,1\right[$ et $p \in [1,+\infty]$ on a

$$D(A) \subset (D(A), E)_{\theta,p} \subset E.$$

Si $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+$ et s'il existe une constante $C_A > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0 : \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant \frac{C_A}{\lambda},$$

Alors

$$\begin{aligned} (D(A), E)_{\theta,p} &= D_A(1-\theta, p) \\ &= \left\{ x \in E : \left\| t^{1-\theta} A (A - t)^{-1} x \right\|_E \in L_*^p \right\}. \end{aligned}$$

**Définition 1.4.4** *Pour tout $\theta \in ]0,1[$, $p \in [1,+\infty]$ et $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$D_A(\theta + k, p) = \left\{ x \in D(A^k) : A^k x \in D_A(\theta, p) \right\},$$

*Avec la norme*

$$\|x\|_{D_A(\theta+k,p)} = \|x\|_E + \left\| A^k x \right\|_{D_A(\theta,p)}.$$

**Théorème 1.4.2 (de Lions)** *Si $A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(G(t))_{t \geqslant 0}$, alors pour tout $p \in [1,+\infty]$ et $\theta \in ]0,1[$*

$$(D(A), E)_{\theta,p} = \left\{ x \in E : \left\| t^{\theta-1} (G(t) - I) x \right\|_E \in L_*^p \right\}$$

*Muni de la norme*

$$\|x\|_{(D(A),E)_{\theta,p}} = \|x\|_E + \left( \int_0^{+\infty} \left\| t^{\theta-1} (G(t) - I) x \right\|_E^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}.$$

*Avec les modifications usuelles si $p = \infty$.*

### 1.4.3 Les espaces de Sobolev et de Besov

<u>Pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$ :</u>

On note $W^{m,p}(\Omega, E)$ l'espace de Sobolev des fonctions $f : \Omega \to E$ telles que $\partial^\alpha f \in L^p(\Omega, E)$ pour tout $|\alpha| \leqslant m$. C'est un espace de Banach avec la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega,E)} = \begin{cases} \left( \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega,E)}^p \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leqslant p < \infty \\ \max\limits_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega,E)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

<u>Pour $s \in ]0,1[$ et $1 \leqslant p < \infty$ :</u>

On définit l'espace fractionnaire de Sobolev

$$W^{s,p}(\Omega, E) = \left\{ f \in L^p(\Omega, E) : \int_\Omega \int_\Omega \frac{\|f(x) - f(y)\|_E^p}{|x-y|^{sp+n}} dx dy < \infty \right\}.$$

Les espaces de Sobolev ne sont pas stables complètement par interpolation, on est amené à définir les espaces de Besov $B_{p,q}^m(\Omega, E)$. Pour $s \in ]0,1[$ et $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, on définit

$$B_{p,q}^s(\Omega, E) = \left\{ f \in L^p(\Omega, E) : \int_\Omega \left( \int_\Omega \frac{\|f(x) - f(y)\|_E^p}{|x-y|^{sq+n}} dx \right)^{q/p} dy < \infty \right\}.$$

Avec la modification classique quand $p = \infty$ et $q = \infty$.
Dans le cas où $p = q$ on a

$$B_{p,p}^s(\Omega, E) = W^{s,p}(\Omega, E).$$

### 1.4.4 Les espaces UMD

On présente ici, une propriété géométrique des espaces de Banach $E$, connue sous le nom UMD (Unconditional Martingale difference property, pour plus détails voir [3]

**Définition 1.4.5** *On dit que $E$ est UMD si la transformation de Hilbert $H$ définie sur $L^p(\mathbb{R}, E)$, $1 < p < \infty$ par*

$$(Hf)(t) = \frac{1}{i\pi} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int\limits_{\epsilon \leqslant |s| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{f(t-s)}{s} ds, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}, E)$$

*Est bornée.*

**Définition 1.4.6** *$E$ est $\xi$-convexe s'il existe une fonction $\xi : E \times E \to \mathbb{R}$ convexe telle que*

*i)* $\xi(0,0) > 0$

*ii)* $\xi(x,y) \leqslant \|x+y\|_E$ avec

$$\|x\|_E = \|y\|_E = 1, \quad \forall x, y \in E.$$

**Théorème 1.4.3** *Soit $E$ un espace de Banach, les conditions suivantes sont équivalentes*

*i) $E$ est* UMD.

*ii) Il existe une fonction $\xi$ symétrique et biconvexe vérifie $\xi(0,0) > 0$ et*

$$\xi(x,y) \leqslant \|x+y\|_E,$$

*tel que $\|x\|_E \leqslant 1 \leqslant \|y\|_E, \forall x, y \in E$.*

Les **exemples** les plus utilisés de tels espaces sont

- ► Les espaces de Hilbert (On choisit $\xi(x,y) = 1 + \langle x, y \rangle$ où le crochet $\langle ., . \rangle$ indique le produit scalaire).
- ► Les sous espaces fermés d'un espace UMD.
- ► Les espaces construits sur $L^p(\Omega, E)$, $1 < p < \infty$ tel que $E$ est UMD.

Les espaces $C^n(\Omega; E)$ tel que $n \in \mathbb{N}^*$ ne sont pas UMD.

## 1.5 Les puissances fractionnaires, classe Bip$(\theta; E)$

Dans cette sous section, on donne la définition des puissances complexes d'un opérateur sectoriel. Si $\mathbf{A} : E \to E$ est un opérateur **borné** positif, la puissance complexe de l'opérateur $\mathbf{A}$ est définie par

$$\mathbf{A}^z x = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_\gamma t^z (tI - \mathbf{A})^{-1} x dt,$$

Où $z$ est un nombre complexe arbitraire.

Si $\mathbf{A}$ est un opérateur linéaire fermé sectoriel, on définit la puissance fractionnaire de partie réelle positive (pour $0 < \operatorname{Re} z < 1$) par la représentation de Balakrishnan suivante

$$\mathbf{A}^z x = \frac{\sin z\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} t^{z-1} (tI - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} x dt,$$

Pour tout $x \in D(\mathbf{A})$ (voir Haase [16], Proposition 3.1.12, page 67).

Si $-1 < \operatorname{Re} z < 0$, on écrit, pour $x \in D(\mathbf{A})$,

$$\mathbf{A}^z x = \mathbf{A}^{z+1} \mathbf{A}^{-1} x = \frac{\sin (z+1)\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} t^z (tI - \mathbf{A})^{-1} x dt.$$

Le théorème suivant, rassemble quelques propriétés essentielles de $\mathbf{A}^z$ (voir Dore et Venni [9])

**Théorème 1.5.1** *Soit* $\mathbf{A}$ *un opérateur linéaire positif, alors on a les propriétés suivantes*
*1) Soit* $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0$ *et* $m, n \in \mathbb{N} : m > n + \operatorname{Re} z > 0$ *alors*

$$\forall x \in E \quad \mathbf{A}^z x = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(n+z)\Gamma(m-n-z)} \int_0^{+\infty} t^{z+n-1} (\mathbf{A}(tI - \mathbf{A}))^{-1} \mathbf{A}^{-n} x dt$$

*est absolument convergente.*

*2)* $z \to \mathbf{A}^z$ *est holomorphe de* $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ *dans* $L(E)$.

*3) Si* $m \in \mathbb{N} : m \geqslant 2$ *et* $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < m$ *alors* $D(\mathbf{A}^m)$ *est dense dans* $D(\mathbf{A}^z)$.

*4) Soit* $w, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w < 0 < \operatorname{Re} z$ *alors*

$$\mathbf{A}^w \mathbf{A}^z \subseteq \mathbf{A}^{w+z} \subseteq \mathbf{A}^z \mathbf{A}^w.$$

*De plus, si* $\operatorname{Re}(w+z) \neq 0$ *alors*

$$\mathbf{A}^{w+z} = \mathbf{A}^z \mathbf{A}^w.$$

*5) Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *et* $x \in D(\mathbf{A}^\alpha)$ *alors* $z \to \mathbf{A}^z x$ *est holomorphe pour* $\operatorname{Re} z < \alpha$.

*6) Supposons que* $\mathbf{A}^{is} \in L(E)$ *pour* $s \in \mathbb{R}$ *donc*

*(a) Si* $\operatorname{Re} w < 0$ *et* $w + z = is$ *alors* $\mathbf{A}^{w+z} = \mathbf{A}^w \mathbf{A}^z = \mathbf{A}^z \mathbf{A}^w$.

*(b) Si* $\operatorname{Re} w < 0$ *alors* $\mathbf{A}^{is} \mathbf{A}^w = \mathbf{A}^{w+is} = \mathbf{A}^w \mathbf{A}^{is}$.

*(c) Si* $\operatorname{Re} w \geqslant 0$ *alors* $\mathbf{A}^{is} \mathbf{A}^w \subseteq \mathbf{A}^{w+is} \subseteq \mathbf{A}^w \mathbf{A}^{is}$ *et la seconde inclusion*

*est en fait une égalité si* $\operatorname{Re} w > 0$.

*7) Si* $0 < \operatorname{Re} z < 1$ *alors*

$$\left\|\mathbf{A}^{-z}\right\| \leqslant M\left(\cosh\left(\pi \operatorname{Im} z\right) + \frac{\sinh\left(\pi \operatorname{Im} z\right)}{\sin\left(\pi \operatorname{Im} z\right)}\right).$$

*8) Soit* $\mathbf{A}^{is} \in L(E)$ *avec* $s \in \mathbb{R}$, *pour* $\varphi \in \left]0, \pi/2\right[$ *fixé, on pose*

$$\Sigma_{\varphi} = \left\{\rho e^{i\theta} : \rho > 0 \text{ et } \pi - \varphi < \theta < \pi + \varphi\right\},$$

*alors* $\mathbf{A}^{z+is} \rightarrow \mathbf{A}^{is}$ *(dans la topologie forte de* $L(E)$*).*

*9) Soit* $\Delta \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ *et* $\Delta_1 = \overline{\Delta} \cap (i\mathbb{R}) \neq \emptyset$. *On suppose que*

$$\sup_{z \in \Delta} \|\mathbf{A}^z\| < +\infty,$$

*alors* $\forall w \in \Delta_1$, $\mathbf{A}^w \in L(E)$ *et* $\mathbf{A}^z \rightarrow \mathbf{A}^w$ *où* $z \rightarrow w$, $z \in \Delta$ *(dans la topologie forte de* $L(E)$*).*

*10) Si* $T \in L(E)$ *alors*

$$(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1} T = T (\mathbf{A} - \lambda I)^{-1},$$

*pour* $\lambda \in \rho(\mathbf{A})$, *et*

$$\begin{aligned} (a)\ T\mathbf{A}^z &= \mathbf{A}^z T \text{ pour } \operatorname{Re} z < 0. \\ (b)\ T\mathbf{A}^z &\subseteq \mathbf{A}^z T \text{ pour } \operatorname{Re} z \geqslant 0. \end{aligned}$$

*11) Si* $(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1}$ *et* $(\mathbf{B} - \mu I)^{-1}$ *commutent alors*

*(a)* $\mathbf{A}^z\mathbf{B}^w = \mathbf{B}^w\mathbf{A}^z$ *pour* $\max\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} < 0$.

*(b) si* $\mathbf{A}^{is}$ *et* $\mathbf{B}^{it} \in L(X)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$ *alors* $\mathbf{A}^z\mathbf{B}^w = \mathbf{B}^w\mathbf{A}^z$
*pour* $\max\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} \leqslant 0$.

**Définition 1.5.1** *On note Bip(*$\theta; E$*) (Bounded imaginary powers) l'ensemble des opérateurs sectoriels sur* $E$ *qui admettent des puissances imaginaires bornées.*

## 1.6 Sommes d'opérateurs linéaires dans les espaces de Banach

On donne, ici, quelques rappels sur les principaux résultats de la théorie des sommes d'opérateurs linéaires. Soit $X$ un espace de Banach complexe, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux opérateurs linéaires fermés de domaines $D(\mathbf{A})$ et $D(\mathbf{B})$ respectivement dans $X$ et leurs ensembles résolvants $\rho(\mathbf{A})$ et $\rho(\mathbf{B})$ non vides. La résolution du problème

$$\mathbf{A}u + \mathbf{B}u - \lambda u = f, \quad \lambda > 0 \tag{1.6.1}$$

repose sur la construction de l'inverse de $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ sous des hypothèses correspondantes à des méthodes différentes, selon les deux cas suivants :

1- les résolvantes des opérateurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ commutent : i.e.,

$$\left[(\mathbf{A}-z)^{-1};(\mathbf{B}-\mu)^{-1}\right]:=(\mathbf{A}-z)^{-1}(\mathbf{B}-\mu)^{-1}-(\mathbf{B}-\mu)^{-1}(\mathbf{A}-z)^{-1}=0$$

2- le cas non commutatif : i.e.

$$\left[(\mathbf{A}-z)^{-1};(\mathbf{B}-\mu)^{-1}\right]\neq 0.$$

## 1.7 Sommes commutatives

Dans ce cas, il y a deux approches différentes.

### 1.7.1 Sommes de Da Prato et Grisvard

Da Prato et Grisvard ont étudié l'équation (1.6.1) sous les hypothèses suivantes

$$(DG.1)\quad\begin{cases}\exists\ C_{\mathbf{A}},C_{\mathbf{B}}>0,\ \theta_{\mathbf{A}},\theta_{\mathbf{B}}\in[0,\pi[\ \text{ tels que}\\ i)\ \rho(\mathbf{A})\supset\Sigma_{\mathbf{A}}=\{z\in\mathbb{C}^*:|\arg z|<\pi-\theta_{\mathbf{A}}\},\\ \forall z\in\Sigma_{\mathbf{A}};\left\|(\mathbf{A}-zI)^{-1}\right\|_{L(X)}\leqslant\dfrac{C_{\mathbf{A}}(\theta)}{|z|}.\\ ii)\ \rho(\mathbf{B})\supset\Sigma_{\mathbf{B}}=\{z\in\mathbb{C}^*:|\arg z|<\pi-\theta_{\mathbf{B}}\},\\ \forall z\in\Sigma_{\mathbf{B}};\left\|(\mathbf{B}-zI)^{-1}\right\|_{L(X)}\leqslant\dfrac{C_{\mathbf{B}}(\theta)}{|z|}.\\ iii)\ \theta_{\mathbf{A}}+\theta_{\mathbf{B}}<\pi.\\ iv)\ \overline{D(\mathbf{A})+D(\mathbf{B})}=X,\end{cases}$$

$$(DG.2)\quad\begin{cases}\forall\lambda\in\rho(\mathbf{A}),\forall\mu\in\rho(\mathbf{B}):\\ \left[(\mathbf{A}-\lambda)^{-1};(\mathbf{B}-\mu)^{-1}\right]=0.\end{cases}$$

Ces auteurs ont montré, pour $f\in D_{\mathbf{A}}(\theta,q)+D_{\mathbf{B}}(\theta,q)$, $\theta\in]0,1[$ et $q\in[1,+\infty]$ que l'équation (1.6.1) admet une solution stricte et unique $u$ donnée explicitement par l'intégrale de Dunford

$$u=\frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(\mathbf{A}-(z+\lambda)I)^{-1}(\mathbf{B}+zI)^{-1}f\,dz$$

Où $\gamma_\lambda$ est une courbe simple orientée de $\infty\ e^{-i\theta_0}$ à $\infty\ e^{i\theta_0}$ avec $\theta_0\in]\theta_{\mathbf{B}},\pi-\theta_{\mathbf{A}}[$, demeurant dans $\Sigma_{\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}}\cap\Sigma_{-\mathbf{B}}$.De plus, la solution a la régularité suivante

$$\mathbf{A}u,\mathbf{B}u\in D_{\mathbf{A}}(\theta,q)\,(\text{resp. } D_{\mathbf{B}}(\theta,q)).$$

**Sommes de Dore et Venni**

Dore et Venni ont utilisé la théorie des opérateurs linéaires qui admettent des puissances imaginaires bornées pour étudier l'équation (1.6.1). Ils ont supposé que

$(DV.0)$ $\quad X$ est un espace de Banach de type $UMD$,

$$(DV.1)\begin{cases} i)\rho\left(\mathbf{A}\right)\supset\left]-\infty,0\right]\ \ et\ \exists M_{\mathbf{A}}>0:\left\|\left(\mathbf{A}+tI\right)^{-1}\right\|\leqslant\dfrac{M_{\mathbf{A}}}{1+t},\forall t\geqslant 0\\ ii)\rho\left(\mathbf{B}\right)\supset\left]-\infty,0\right]\ \ et\ \exists M_{\mathbf{B}}>0:\left\|\left(\mathbf{B}+tI\right)^{-1}\right\|\leqslant\dfrac{M_{\mathbf{B}}}{1+t},\forall t\geqslant 0\end{cases}$$

$$(DV.2)\begin{cases}\forall\lambda\in\rho\left(\mathbf{A}\right),\quad\mu\in\rho\left(\mathbf{B}\right),\\ \left(\lambda I-\mathbf{A}\right)^{-1}\left(\mu I-\mathbf{B}\right)^{-1}=\left(\mu I-\mathbf{B}\right)^{-1}\left(\lambda I-\mathbf{A}\right)^{-1}.\end{cases}$$

$$(DV.3)\begin{cases} i)\forall s\in\mathbb{R}:\mathbf{A}^{is}\in L\left(x\right)\ \ et\\ \exists K_{\mathbf{A}}\geqslant 1,\ \theta_{\mathbf{A}}>0,\ \forall s\in\mathbb{R}:\left\|\mathbf{A}^{is}\right\|\leqslant K_{\mathbf{A}}e^{\theta_{\mathbf{A}}|s|},\\ ii)\forall s\in\mathbb{R}:\mathbf{B}^{is}\in L\left(x\right)\ \ et\\ \exists K_{\mathbf{B}}\geqslant 1,\ \theta_{\mathbf{B}}>0,\ \forall s\in\mathbb{R}:\left\|\mathbf{B}^{is}\right\|<K_{\mathbf{B}}e^{\theta_{\mathbf{B}}|s|},\\ iii)\ \theta_{\mathbf{A}}+\theta_{\mathbf{B}}<\pi.\end{cases}$$

Alors, la somme $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ est fermée, inversible et son inverse est défini par

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)^{-1}=\frac{1}{2i}\int_{\gamma}\frac{\mathbf{A}^{-z}\mathbf{B}^{z-1}}{\sin\pi z}dz,$$

où $\gamma$ est une courbe verticale contenue dans la bande

$$\left\{z\in\mathbb{C}:0<\operatorname{Re}z<1\right\},$$

et orientée de $\infty e^{-i\pi/2}$ vers $\infty e^{i\pi/2}$.

Ce résultat a été généralisé par Prüss et Sohr [22], dans le cas où l'un des deux opérateurs (seulement) est inversible.

Chapitre 2

# Position et Résolution du Problème

## 2.1 Position du problème, hypothèses et conséquences

Dans ce travail, nous considérons le problème de transmission abstrait suivant :

$$(P)\ \begin{cases} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = g(x), & \omega \geq 0,\ p.p.\ x \in\ ]-\infty, 0[ \\ u'(0) - Hu(0) = \phi \end{cases}$$

où $A$ et $H$ sont deux opérateurs fermés dans un espace complexe de Banach $E$
avec les domaines de définitions respectivement $D(A) \subset E$ et $D(H) \subset E$.
Le second membre $g \in L^p(]-\infty, 0[, E)$ avec $1 < p < +\infty$; $\phi$ est un élément donné dans $E$.
On note

$$A_\omega := A - \omega I \quad ,$$

Le problème $(P)$ devient

$$(P)\ \begin{cases} u''(x) + A_\omega u(x) = g(x), & \omega \geq 0,\ p.p.\ x \in\ ]-\infty, 0[ \\ u'(0) - Hu(0) = \phi \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Nous étudions l'existence et l'unicité de la solution classique $(P)$, tels que :

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(-\infty, 0; E) \cap L^p(-\infty, 0; D(A)) \\ u(0) \in D(H). \end{cases}$$

**Les hypothèses essentielles proposées pour résoudre le problème sont :**

**Hypothèse 1** *$E$ est un espace UMD, voir* $(1.4.5)$.

**Hypothèse 2** *L'intervalle $[0, \infty[$ est contenu dans les ensembles résolvant des deux opérateurs $A$, $H$, de plus il existe $C \geq 1$, tels que pour tous $\lambda \geqslant 0$, leurs résolvantes vérifient :*

$$\max\left(\left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|, \left\|(H - \lambda I)^{-1}\right\|\right) \leqslant \frac{C}{1 + \lambda} \tag{2.1.2}$$

*et il existe $K \geq 1$, tels que pour tous $s \in \mathbb{R}$, leurs puissances imaginaires vérifient :*

$$\left\|(-A)^{is}\right\| \leqslant K e^{\theta_A |s|},\ \left\|(-H)^{is}\right\| \leqslant K e^{\theta_H |s|}. \tag{2.1.3}$$

*où*

$$0 < \frac{\theta_A}{2} + \theta_H < \pi.$$

**Corollaire 2.1.1** *Pour $\omega \geqslant 0$, nous notions $Q_\omega := -\left(-A_\omega\right)^{1/2}$. l'hypothèse* (2.1.2) *implique que $Q_\omega$ génère un semigroupe analytique $\left(e^{xQ_\omega}\right)_{x\geqslant 0}$ ( voir Balakhrishnan [1, p. 419] ).*

**Hypothèse 3** $D\left(Q_\omega\right) \subset D\left(H\right).$

**Hypothèse 4** *Les operateurs $A$ et $H$ commutent au sens des résolvantes.*

**On note maintenant quelques conséquences sur l'operateur $Q_\omega$ :**

**Conséquence 1** *Selon le théorème 3 dans ([22, p. 437]); les hypothèses* (2.1.2), (2.1.3) *implique $\left(-A_\omega\right) \in BIP\left(E, \theta_A\right)$ (pour tout $\omega \geq 0$). M. Haase ([16, page71, Proposition 3.2.1, e) ]) assure que*

$$\left(-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}} \in \sec t\left(\frac{1}{2}\theta_A\right)$$

*et pour tout $s \in \mathbb{R}$,*

$$\left(\left(-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{is} = \left(-A_\omega\right)^{i\frac{1}{2}s} \ ,$$

*cela montre que $Q_\omega$ est un operateur inversible et $-Q_\omega$ appartient à $BIP\left(E, \frac{\theta_A}{2}\right)$.*

**Conséquence 2** *Il existe deux constantes positives $a$, $M$ (voir Pazy [21, Theorem 6.13, p. 74]) tel que pour tous $x > 0$ on a*

$$\left\|e^{xQ_\omega}\right\|_E \leq Me^{-ax}, \tag{2.1.4}$$

*et*

$$\left\|Q_\omega e^{xQ_\omega}\right\|_E \leq Mx^{-1}e^{-ax}. \tag{2.1.5}$$

**Conséquence 3** *L'hypothèse* (1 *entraine la réflexivité de $E$. puisque $-A_\omega$ et $-H$ sont des opérateurs sectoriels, donc leurs domaines $D(A_\omega)$ et $D\left(H\right)$ sont dense dans $E$ ([16, Proposition 2.1.1, h). pages 21]).*

**Conséquence 4** *De l'hypothèse* (4),*on déduit que*
*1) Les opérateurs $A_\omega$, $H$ commutent aux sens des résolvantes.*
*2) Les opérateurs $Q_\omega$, $H$ commutent aux sens des résolvantes.*

Preuve : Soit $\lambda \geqslant 0$, on a

$$\left(\lambda I - Q_\omega\right)^{-1} = \left(\lambda I + \sqrt{-A + \omega I}\right)^{-1} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\left(zI - A\right)^{-1}}{\lambda + \sqrt{\omega - z}}dz$$

Où $\gamma$ est une courbe de Jordan entourant le spectre de $A$ dans le sens direct. Soient $\xi \in \rho\left(H\right)$ et $x \in E$,
On a

$$\left(\lambda I - Q_\omega\right)^{-1}\left(H - \xi I\right)^{-1}x = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\left(zI - A\right)^{-1}\left(H - \xi I\right)^{-1}x}{\lambda + \sqrt{\omega - z}}dz,$$

Par l'hypothèses (4), on a

$$\begin{aligned}
(\lambda I - Q_\omega)^{-1} (H - \xi I)^{-1} x &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{(H - \xi I)^{-1} (zI - A)^{-1} x}{\lambda + \sqrt{\omega - z}} dz \\
&= (H - \xi I)^{-1} (\lambda I - Q_\omega)^{-1} x.
\end{aligned}$$

**Conséquence 5** *L'operateur $(Q_\omega + H)$ est inversible.*
*Effectivement, on a $-Q_\omega \in BIP\left(E, \frac{\theta_A}{2}\right)$, $-H \in BIP(E, \theta_H)$, appliquant le Théorème de Dore et Venni ([10]) pour avoir l'inversibilité.*

**Conséquence 6** *(4), Les opérateurs $Q_\omega$, $H$ commutent sur $D(Q_\omega^2)$.*
*Preuve :*
*On a pour tous $x \in D(H)$*

$$\begin{aligned}
Q_\omega^{-1} H x &= H H^{-1} Q_\omega^{-1} H x, \\
&= H Q_\omega^{-1} H^{-1} H x \\
&= H Q_\omega^{-1} x
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

*maintenant pour tous $x \in D(Q_\omega) \subset D(H)$, on a*

$$Hx = HQ_\omega^{-1} Q_\omega x,$$

*puisque $Q_\omega x \in D(H)$ (voir (3)), donc par (2.1.6), on trouve*

$$Hx = Q_\omega^{-1} H Q_\omega x,$$

*alors $Hx \in D(Q_\omega)$ et*

$$Q_\omega H x = H Q_\omega x. \tag{2.1.7}$$

**Conséquence 7** *De (4), On a :*
*Les opérateurs $Q_\omega$, $(H - \nu I)^{-1}$ commutent sur $D(Q_\omega)$, pour tous $\nu \in \rho(H)$.*
*Pour tous $x \in D(Q_\omega)$, $\nu \in \rho(H)$, on a*

$$\begin{aligned}
(H - \nu I)^{-1} Q_\omega x &= Q_\omega \left[Q_\omega^{-1} (H - \nu I)^{-1}\right] Q_\omega x \\
&= Q_\omega \left[(H - \nu I)^{-1} Q_\omega^{-1}\right] Q_\omega x \\
&= Q_\omega (H - \nu I)^{-1} x.
\end{aligned}$$

**Conséquence 8** *De (4), On a :*
*Les opérateurs $(Q_\omega - zI)^{-1}$, $H$ commutent sur $D(H)$ pour tous $z \in \rho(Q_\omega)$. :*
*Preuve : voir (7)*

**Conséquence 9** *Pour tous $\tau > 0$, l'opérateur $e^{\tau Q_\omega}$ commute avec $Q_\omega^{-1}$, $Q_\omega$ et $H$ respectivement sur $E$, $D(Q_\omega)$ et $D(H)$.*
*Preuve : On montre les commutativités par (8) et le fait que*

$$e^{\tau Q_\omega} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\tau z} (zI - Q_\omega)^{-1} dz,$$

*où $\gamma$ est une curve Jordan entourne le spectre de $Q_\omega$ au sens direct.*

## 2.2 Technical lemmas

**Lemme 2.2.1** *([18, P. 5610, Lemma 8])Supposons* (1), (2.1.2), (2.1.3) *et* $g \in L^p(-\infty, 0; E)$ *avec* $1 < p < \infty$. *Alors, les applications suivantes :*

$$1.\ x \mapsto L_0(x,g) := Q_\omega \int_x^0 e^{(s-x)Q_\omega} g(s)\, ds\ .$$

$$2.\ x \mapsto L_{-\infty}(x,g) := Q_\omega \int_{-\infty}^x e^{(x-s)Q_\omega} g(s)\, ds\ .$$

$$3.\ x \mapsto L_{-\infty}(x,g) := Q_\omega \int_{-\infty}^0 e^{-(x+s)Q_\omega} g(s)\, ds\ .$$

*sont bien définis pour p.p.* $x \in \left]-\infty, 0\right]$ *et appartiennent à* $L^p(-\infty, 0; E)$.

**Lemme 2.2.2** *Soient* (1), (2.1.2), (2.1.3) *et* $g \in L^p(-\infty, 0; E)$ *avec* $1 < p < \infty$. *Alors, p.p.* $x \in (-\infty, 0)$,

$$1)\ \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 e^{(s-x)Q_\omega} g(s)ds = 0$$

$$2)\ \lim_{x\to-\infty} \int_{-\infty}^x e^{(x-s)Q_\omega} g(s)ds = 0\ .$$

**Proof.** 1) pour *p.p.* $x \in (-\infty, 0)$

$$\int_x^0 e^{(s-x)Q_\omega} g(s)ds = \int_{\frac{x}{2}}^0 e^{(s-x)Q_\omega} g(s)ds + \int_x^{\frac{x}{2}} e^{(s-x)Q_\omega} g(s)ds$$
$$= \alpha_1(x) + \alpha_2(x).$$

par (2),il exist $M > 0$ et $\sigma > 0$ tel que

$$\|\alpha_2(x)\| \leq M \int_x^{\frac{x}{2}} e^{-(s-x)\sigma} \|g(s)\|\, ds.$$

De l'inégalité de Hölder, pour $q = \frac{p}{p-1}$, on obtient

$$\|\alpha_2(x)\| \leq M \left( \int_x^{\frac{x}{2}} e^{-(s-x)q\sigma} ds \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_x^{\frac{x}{2}} \|g(s)\|^p\, ds \right)^{\frac{1}{p}},$$

donc

$$\|\alpha_2(x)\| \leq \frac{M}{(q\sigma)^{\frac{1}{q}}} \left( 1 - \underbrace{e^{\frac{x}{2}q\sigma}}_{<1} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_x^{\frac{x}{2}} \|g(s)\|^p\, ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{M}{(q\sigma)^{\frac{1}{q}}}\left(\int_{-\infty}^{\frac{x}{2}}\|g(s)\|^{p}\,ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

Puisque $g \in L^{p}(-\infty,0;E)$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{\frac{x}{2}}\|g(s)\|^{p}\,ds = 0$.

Par conséquence $\lim\limits_{x\to-\infty}\|\alpha_2(x)\| = 0$.
Pour $\alpha_1$, nous trouve

$$\|\alpha_1(x)\| \leq M\left(\int_{\frac{x}{2}}^{0}e^{-(s-x)q\sigma}ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{x}{2}}^{0}\|g_{-}(s)\|^{p}\,ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\alpha_1(x)\| \leq \frac{M}{(q\sigma)^{\frac{1}{q}}}\left(e^{\frac{x}{2}q\sigma}-e^{xq\sigma}\right)^{\frac{1}{q}}\|g\|^{p}_{L^{p}(-\infty,0;E)}$$

Ce qui donne $\lim\limits_{x\to-\infty}\|\alpha_1(x)\| = 0$.
2) comme ci-dessus, pour $p.p.\ x \in (-\infty,0)$ On a

$$\left\|\int_{-\infty}^{x}e^{(x-s)Q_\omega}g(s)ds\right\| \leq M\left(\int_{-\infty}^{x}e^{-(x-s)q\sigma}ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{-\infty}^{x}\|g(s)\|^{p}\,ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{M}{(q\sigma)^{\frac{1}{q}}}(1-0)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{-\infty}^{x}\|g(s)\|^{p}\,ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

ce qui donne

$$\lim_{x\to-\infty}\left\|\int_{-\infty}^{x}e^{(x-s)Q_\omega}g(s)ds\right\| = 0.$$

**Lemme 2.2.3** *([18, P. 5612, Corollary 9]), ([18, P. 2717, Lemma 6]) Sous l'hypothèse* (2.1.2) *et pour* $p \in \,]1,+\infty[$, *On a*

.) $\varphi \in (D(A_\omega),E)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}$ *si et seulement si* $x \mapsto Q_\omega e^{xQ_\omega}\varphi \in L^{p}(-\infty,0;E)$,

.) $\varphi \in (D(A_\omega),E)_{\frac{1}{2p},p}$ *si et seulement si* $x \mapsto Q_\omega^{2} e^{xQ_\omega}\varphi \in L^{p}(-\infty,0;E)$,

**Preuve**
Puisque $Q_\omega$ est un opérateur générateur et analytique de semi groupe, Alors pour tout $\theta \in \,]0,1[$, $m \in \mathbb{N}^{*}$ et $0 \leq p \leq \infty$, ([24, p. 96]), On a

$$\begin{aligned}(E,D(Q_\omega^{m}))_{\theta,p} &= \left\{\varphi \in E : \int_{0}^{\infty}\left\|t^{m-m\theta}Q_\omega^{m}e^{tQ_\omega}\varphi\right\|^{p}\frac{dt}{t} < +\infty\right\},\\ &= \left\{\varphi \in E : \int_{-\infty}^{0}\left\|t^{m-m\theta}Q_\omega^{m}e^{-tQ_\omega}\varphi\right\|^{p}\frac{dt}{t} < +\infty\right\}.\end{aligned}$$

Soit $\varphi \in (E, D(Q_\omega^m))_{1-\frac{1}{mp},p}$, et

$$\int_{-\infty}^{0} \left\| t^{\frac{1}{p}} Q_\omega^m e^{-tQ_\omega} \varphi \right\|^p \frac{dt}{t} dt = \int_{-\infty}^{0} \left\| Q_\omega^m e^{-tQ_\omega} \varphi \right\|^p dt < +\infty$$

Donc, la fonction $Q_\omega^m e^{\cdot Q_\omega} \varphi \in L^p(-\infty, 0; E)$.
inversement, si $Q_\omega^m e^{\cdot Q_\omega} \varphi \in L^p(-\infty, 0; E)$, On a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} \left\| t^{m-m\left(1-\frac{1}{mp}\right)} Q_\omega^m e^{-tQ_\omega} \varphi \right\|^p \frac{dt}{t} &= \int_{-\infty}^{0} \left\| t^{\frac{1}{p}} Q_\omega^m e^{-tQ_\omega} \varphi \right\|^p \frac{dt}{t} \\ &= \int_{-\infty}^{0} \left\| Q_\omega^m e^{-tQ_\omega} \varphi \right\|^p dt \\ &= \left\| Q_\omega^m e^{\cdot Q_\omega} \varphi \right\|^p_{L^p(-\infty,0;E)} \leq +\infty. \end{aligned}$$

Donc $\varphi \in (E, D(Q_\omega^m))_{1-\frac{1}{mp},p}$.
On en déduit

$$\varphi \in (E, D(Q_\omega^m))_{1-\frac{1}{mp},p} \text{ si et seulement si } x \mapsto Q_\omega^m e^{xQ_\omega} \varphi \in L^p(-\infty, 0; E).$$

On applique cette propriété, pour $m = 1$ et $m = 2$, on obtient

.) $\varphi \in (E, D(Q_\omega))_{1-\frac{1}{p},p}$ si et seulement si $x \mapsto Q_\omega e^{xQ_\omega} \varphi \in L^p(-\infty, 0; E)$,

.) $\varphi \in \left(E, D\left(Q_\omega^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p}$ si et seulement si $x \mapsto Q_\omega^2 e^{xQ_\omega} \varphi \in L^p(-\infty, 0; E)$.

Applique la propriété de réitération, ([19]), on trouve

$$\begin{aligned} (E, D(Q_\omega))_{1-\frac{1}{p},p} &= \left(E, D\left(Q_\omega^2\right)\right)_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p} \\ &= \left(D\left(Q_\omega^2\right), E\right)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} = (D(A_\omega), E)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}, \end{aligned}$$

et

$$\left(E, D\left(Q_\omega^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} = \left(D\left(Q_\omega^2\right), E\right)_{\frac{1}{2p},p} = (D(A_\omega), E)_{\frac{1}{2p},p} .$$

Puis

.) $\varphi \in (D(A_\omega), E)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}$ si et seulement si $x \mapsto Q_\omega e^{xQ_\omega} \varphi \in L^p(-\infty, 0; E)$,

.) $\varphi \in (D(A_\omega), E)_{\frac{1}{2p},p}$ si et seulement si $x \mapsto Q_\omega^2 e^{xQ_\omega} \varphi \in L^p(-\infty, 0; E)$,

qui montre le lemme.

**Lemme 2.2.4** *([15, p. 678, Theorem 2]) Soit $u$ une fonction tels que*

$$u \in W^{n,p}(a, b; X) \cap L_p(a, b; D(A^k)),$$

*Où $n, k \in N^*$ et $p \in ]1, +\infty[$. Puis pour $j \in N$ satisfait le Poulsen condition $0 < \frac{1}{p} + j < n$ et $s \in \{a, b\}$, On a*

$$u^{(j)}(s) \in (D(A^k), X)_{\frac{j}{n}+\frac{1}{np}}.$$

**Lemme 2.2.5** *Soit* $\alpha > 0$. *l'hypothès* (2.1.2), (2.1.3) , (1) *et* (4).
*.) L'opérateur* $(Q_\omega + H)^{-1}$ *commutent avec* $Q_\omega$ *et avec* $H$ *respectivement on* $D(Q_\omega)$ *et* $D(H)$.

**Proof :** Puisque $\sigma(-Q_\omega) \subseteq \left\{re^{i\theta} : r > 0,\ |\theta| \leq \frac{\theta_A}{2}\right\}$ (Dore et Venni page 194, corollary 2.9) .
Par conséquent

$$\sum_{Q_\omega} = \left\{re^{i\theta} : r > 0,\ |\theta| < \pi - \frac{\theta_A}{2}\right\} \subset \rho(Q_\omega),$$

De même, on a

$$\sum_{H} = \left\{re^{i\theta} : r > 0,\ |\theta| < \pi - \theta_H\right\} \subset \rho(H).$$

D'après l'hypothèse de parabolicité (2)

$$\frac{\theta_A}{2} + \theta_H < \pi,$$

Le Théorème de Da Prato et Grisvard ([8]) donne

$$(Q_\omega + H)^{-1} = -\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (Q_\omega - zI)^{-1} (H + zI)^{-1} dz$$

où $\Gamma$ est un courbe de jurdan dans $\sum_{Q_\omega} \cap \sum_{-H}$, orienté de $+\infty e^{-i\psi}$ à $+\infty e^{i\psi}$ telle que $\psi \in \left]\theta_h, \pi - \frac{\theta_A}{2}\right[$.
On a pour tout $x \in D(Q_\omega)$

$$(Q_\omega + H)^{-1} Q_\omega x = -\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (Q_\omega - zI)^{-1} (H + zI)^{-1} Q_\omega x dz \tag{2.2.1}$$

Par (7) , on trouve

$$\begin{aligned}
(Q_\omega + H)^{-1} Q_\omega x &= -\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (Q_\omega - zI)^{-1} Q_\omega (H + zI)^{-1} x dz \\
&= -\frac{1}{2i\pi} Q_\omega \int_\Gamma (Q_\omega - zI)^{-1} (H + zI)^{-1} x dz \\
&= -Q_\omega (Q_\omega + H)^{-1} x.
\end{aligned}$$

Par la même méthode on montre la deuxième commutativité.

## 2.3 Représentation de la solution $(P)$

Dans cette section on résout le problème $(P)$ (2.1.1) et on étudie la régularité de la solution.
Où $\phi$ est un élément donné dans $E$ et $g \in L^p(]-\infty, 0[, E)$.

### 2.3.1 Résolution du problème (P) :

On a

$$(P)\left\{\begin{array}{lll} (u)''(x)+A_\omega u(x)=g(x) & p.p.\ x\in\left]-\infty,0\right[ & ...(Eq_1)\\ (u)'(0)-Hu(0)=\phi, & & ...(RC)\end{array}\right. \tag{2.3.1}$$

avec $g\in L^p\left(\left]-\infty,0\right[,E\right)$ et $\phi\in E$.
On utilise la réduction de Krein sur l'intervalle $\left]a,0\right[$ où $a<0$, puis on fait tendre $a\rightarrow-\infty$ pour avoir la solution sur $\left]-\infty,0\right[$.
En posant

$$\left\{\begin{array}{l} v(x)=-Q_\omega^{-1}(u)'(x)\\ y(x)=\dfrac{1}{2}(u(x)-v(x))\\ z(x)=\dfrac{1}{2}(u(x)+v(x))\end{array}\right. ,$$

On trouve deux problèmes de Cauchy

$$(PC_1)\left\{\begin{array}{l} (y)'(x)=Q_\omega y(x)+\frac{1}{2}Q_\omega^{-1}g(x)\\ y(a)=\xi_a=0,\end{array}\right. \tag{2.3.2}$$

and

$$(PC_2)\left\{\begin{array}{l} (z)'(x)=-Q_\omega z(x)-\frac{1}{2}Q_\omega^{-1}g(x)\\ z(0)=\xi_0\end{array}\right. , \tag{2.3.3}$$

Où $\xi_0$ est un élément constant dans $E$.
Pour une solution régulière $u\in W^{2,p}(-\infty,0;E)$, nécessairement ([5, page 130.]) on a

$$u(-\infty)=0=(u)'(-\infty),$$

Donc, on a posé $y(a)=0$, la même condition pour $-\infty$, on remarque

$$\begin{array}{rcl}\lim\limits_{a\rightarrow-\infty}y(a) &=& \lim\limits_{x\rightarrow-\infty}\dfrac{1}{2}(u(x)-v(x))\\ &=& \lim\limits_{x\rightarrow-\infty}\dfrac{1}{2}\left(u(x)-\left[-Q_\omega^{-1}(u)'(x)\right]\right)\\ &=& \lim\limits_{x\rightarrow-\infty}\dfrac{1}{2}\left(u(x)+Q_\omega^{-1}(u)'(x)\right)=0.\end{array}$$

La solution du problème $(PC_1)$ (2.3.2) est

$$y(x)=\frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_a^x e^{(x-s)Q_\omega}g(s)\,ds,$$

Pour $a\rightarrow-\infty$, on trouve

$$y(x)=\frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_{-\infty}^x e^{(x-s)Q_\omega}g(s)\,ds.$$

La solution du problème $(PC_2)$ (2.3.3) est

$$z(x) = e^{-xQ_\omega}\xi_0 + \frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_x^0 e^{(s-x)Q_\omega} g(s)\, ds.$$

Par conséquent, la solution de l'équation (2.3.1) avec la condition $u(0) = \xi_0$, est donnée par : pour $p.\ p.\ x \in \left]-\infty, 0\right]$,

$$u(x) = e^{-xQ_\omega}\xi_0 + \frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)Q_\omega} g(s)\, ds + \frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_x^0 e^{(s-x)Q_\omega} g(s)\, ds. \tag{2.3.4}$$

D'après le lemme 2.2.1, les intégrables parues dans $u_-$ sont bien définies sur $p.\ p.\ x \in \left]-\infty, 0\right]$. De plus, la condition $u(-\infty) = 0$ est bien vérifiée. On effet, il existe $\delta > 0$ et $M > 0$ (2.1.4), telle que

$$\forall x \leq 0, \quad \left|\left|e^{-xQ_\omega}\right|\right| < Me^{-\delta(-x)},$$

Donc

$$\left\|e^{-xQ_\omega}\xi_0\right\|_E \leqslant M_1 e^{-\delta(-x)} \left\|\xi_0\right\|_E \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En appliquant le Lemme 2.2.2, on trouve

$$\lim_{x\to-\infty} \left\|u(x)\right\|_E = 0.$$

**Détermination de $\xi_0$.**
Pour déterminer $\xi_0$, on utilise l'autre condition $(RC)$ (2.3.1)

$$(u)'(0) - Hu(0) = \phi. \tag{2.3.5}$$

On a

$$u(x) = e^{-xQ_\omega}\xi_0 + \frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)Q_\omega} g(s)\, ds + \frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_x^0 e^{(s-x)Q_\omega} g(s)\, ds, \tag{2.3.6}$$

Pour $x = 0$, on trouve

$$u(0) = \xi_0 + \frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-sQ_\omega} g(s)\, ds. \tag{2.3.7}$$

Par la différentiation de $u$, l'équation (2.3.6) donne

$$(u)'(x) = -Q_\omega e^{-xQ_\omega}\xi_0 + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)Q_\omega} g(s)\, ds - \frac{1}{2}\int_x^0 e^{(s-x)Q_\omega} g(s)\, ds.$$

On suppose que

$$\xi_0 \in D(Q_\omega), \tag{2.3.8}$$

Pour $x=0$, on a

$$(u)'(0) = -Q_\omega \xi_0 + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-sQ_\omega} g(s)\, ds, \tag{2.3.9}$$

De $(2.3.8)$ et $(3)$, on remarque que

$$u(0) \in D(Q_\omega) \subset D(H)$$

La substitution de (2.3.7) et (2.3.9) dans (2.3.5) donne

$$\left[-Q_\omega \xi_0 + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-sQ_\omega} g(s)\, ds\right] - H\left[\xi_0 + \frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-sQ_\omega} g(s)\, ds\right] = \phi,$$

D'où

$$(Q_\omega + H)\,\xi_0 = -\phi + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-sQ_\omega} g(s)\, ds - \frac{1}{2}HQ_\omega^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-sQ_\omega} g(s)\, ds,$$

Donc

$$(Q_\omega + H)\,\xi_0 = -\phi + \frac{1}{2}(Q_\omega - H)\,Q_\omega^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-sQ_\omega} g(s)\, ds. \tag{2.3.10}$$

D'après $(5)$, on a

$$\xi_0 = -(Q_\omega + H)^{-1}\phi + \frac{1}{2}(Q_\omega + H)^{-1}(Q_\omega - H)\,Q_\omega^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{-sQ_\omega} g(s)\, ds.$$

Par conséquent

$$\xi_0 = -(Q_\omega + H)^{-1}\phi + \frac{1}{2}(Q_\omega + H)^{-1}(Q_\omega - H)\,Q_\omega^{-2}Q_\omega\int_{-\infty}^{0} e^{-sQ_\omega} g(s)\, ds, \tag{2.3.11}$$

observons que $\xi_0 \in D(H) \cap D(Q_\omega)$. Alors, Sous l'hypothèse $D(Q_\omega) \subset D(H)$ $(3)$, l'assomption $u(0) \in D(H)$ (voir (2.3.7)) est toujours vérifiée.
La substitution de (2.3.11) dans (2.3.4) donne

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-xQ_\omega}\left[-(Q_\omega + H)^{-1}\phi + \frac{1}{2}(Q_\omega + H)^{-1}(Q_\omega - H)\,Q_\omega^{-2}Q_\omega\int_{-\infty}^{0} e^{-sQ_\omega} g(s)\, ds\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)Q_\omega} g(s)\, ds + \frac{1}{2}Q_\omega^{-1}\int_{x}^{0} e^{(s-x)Q_\omega} g(s)\, ds, \end{aligned}$$

donc, de la consequence (9) et le Lemme (2.2.5), on déduit la représentation suivante de $u$, pour $p.p.\ x \in \left]-\infty, 0\right]$,

$$
\begin{aligned}
u(x) &= -(Q_\omega + H)^{-1} e^{-xQ_\omega}\phi + \frac{1}{2}(Q_\omega + H)^{-1}(Q_\omega - H) Q_\omega^{-2} Q_\omega \int_{-\infty}^{0} e^{-(x+s)Q_\omega} g(s)\, ds \\
&\quad + \frac{1}{2} Q_\omega^{-2} Q_\omega \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)Q_\omega} g(s)\, ds + \frac{1}{2} Q_\omega^{-2} Q_\omega \int_{x}^{0} e^{(s-x)Q_\omega} g(s)\, ds. \qquad (2.3.12)
\end{aligned}
$$

En appliquant la notation apparue dans le lemme 2.2.1, on trouve

$$
\begin{aligned}
u(x) &= -(Q_\omega + H)^{-1} e^{-xQ_\omega}\phi + \frac{1}{2}(Q_\omega + H)^{-1}(Q_\omega - H) Q_\omega^{-2} L_{-\infty}(x, g) \\
&\quad + \frac{1}{2} Q_\omega^{-2} L_{-\infty}(x, g) + \frac{1}{2} Q_\omega^{-2} L_0(x, g), \qquad (2.3.13)
\end{aligned}
$$

### 2.3.2 Etude de la régularité de $u$

**Théorème 2.3.1** *Sous les hypothèses* $(1), (2.1.2), (2.1.3)$, $(3), (4)$ *et pour* $g \in L^p(-\infty, 0; E)$ *avec* $1 < p < \infty$, *le problème* $(P)$ *admet une unique solution classique*

$$
\begin{cases}
u \in W^{2,p}(-\infty, 0; E) \cap L^p(-\infty, 0; D(A)) \\
u(0) \in D(H).
\end{cases}
$$

*Si seulement si*

$$
\phi \in (D(A_\omega), E)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}
$$

**Proof :**
De (2.3.12), on a

$$
\begin{aligned}
u(0) &= -(Q_\omega + H)^{-1}\phi + \frac{1}{2}(Q_\omega + H)^{-1}(Q_\omega - H) Q_\omega^{-2} Q_\omega \int_{-\infty}^{0} e^{-sQ_\omega} g(s)\, ds \\
&\quad + \frac{1}{2} Q_\omega^{-2} Q_\omega \int_{-\infty}^{0} e^{-sQ_\omega} g(s)\, ds.
\end{aligned}
$$

d'où $u(0) \in D(H)$

Soit

$$
\phi \in (D(A_\omega), E)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} \quad .
$$

Avec (2.3.13) et Lemme (2.2.5) On a

$$
\begin{aligned}
u(x) &= -(Q_\omega + H)^{-1} Q_\omega^{-1}\left[Q_\omega e^{-xQ_\omega}\phi\right] + \frac{1}{2}(Q_\omega - H)(Q_\omega + H)^{-1} Q_\omega^{-2} L_{-\infty}(x, g) \\
&\quad + \frac{1}{2} Q_\omega^{-2} L_{-\infty}(x, g) + \frac{1}{2} Q_\omega^{-2} L_0(x, g), \qquad (2.3.14)
\end{aligned}
$$

donc $u(x) \in D(A_\omega)$.
Puisque
$$(Q_\omega - H)(Q_\omega + H)^{-1} Q_\omega^{-2} \in L(E),$$
selon le Lemme (2.2.1) et (2.2.3), on trouve $u \in L^p(-\infty, 0; E)$.
Appliquons $A_\omega = -Q_\omega^2$ sur $u$ dans (2.3.14), de la conséquence (2.1.7) et Lemme (2.2.5), on trouve
$$\begin{aligned} A_\omega u(x) &= Q_\omega (Q_\omega + H)^{-1} Q_\omega e^{-xQ_\omega}\phi - \frac{1}{2}(Q_\omega - H)(Q_\omega + H)^{-1} L_{-\infty}(x,g) \\ &\quad -\frac{1}{2}L_{-\infty}(x,g) - \frac{1}{2}L_0(x,g), \end{aligned} \tag{2.3.15}$$
puisque
$$Q_\omega (Q_\omega + H)^{-1} \in L(E),\ (Q_\omega - H)(Q_\omega + H)^{-1} \in L(E)$$
donc, par (2.2.1) et (2.2.3), On a
$$A_\omega u(.) \in L^p(-\infty, 0; E).$$
Puisque $u'' = -A_\omega u + g_-$ et $g \in L^p(-\infty, 0; E)$, on trouve que
$$u'' \in L^p(-\infty, 0; E).$$
donc
$$u \in W^{2,p}(-\infty, 0; E) \cap L^p(-\infty, 0; D(A)).$$
Inversement, on suppose que
$$u \in W^{2,p}(-\infty, 0; E) \cap L^p(-\infty, 0; D(A)),$$
donc
$$A_\omega u \in L^p(-\infty, 0; E). \tag{2.3.16}$$
Par (2.3.15), on a
$$\begin{aligned} Q_\omega (Q_\omega + H)^{-1} Q_\omega e^{-xQ_\omega}\phi &= A_\omega u(x) + \frac{1}{2}(Q_\omega - H)(Q_\omega + H)^{-1} L_{-\infty}(x,g) \\ &\quad +\frac{1}{2}L_{-\infty}(x,g) + \frac{1}{2}L_0(x,g), \end{aligned}$$
Par (2.3.16) et Lemme (2.2.1), on a
$$Q_\omega (Q_\omega + H)^{-1} Q_\omega e^{-xQ_\omega}\phi \in L^p(-\infty, 0; E),$$
Puisque $Q_\omega (Q_\omega + H)^{-1}$ admet un inverse borné, alors
$$Q_\omega e^{-xQ_\omega}\phi \in L^p(-\infty, 0; E).$$
Par Lemme (2.2.3), on trouve
$$\phi \in (D(A_\omega), E)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}$$

## 2.4 Cas Particuliers

On étudie ici, quelques cas particuliers, en remplaçant l'opérateur $H$ par les opérateurs : $H=0$, $H=-aI$, $a>0$ et $H=-\sqrt{-A_\omega}$.

### 2.4.1 Le cas $H=0$

Le problème (2.1.1) devient

$$\begin{cases} (u)''(x)+A_\omega u(x)=g(x), \quad \omega\geq 0, \quad p.p. \quad x\in ]-\infty,0[, \\ (u)'(0)=\phi \end{cases} \tag{2.4.1}$$

Dans ce cas nos hypothèses sont réduites aux

$$E \text{ est un espace } UMD \tag{H.0}$$

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur linéaire fermé tel que } \mathbb{R}_+\subset\rho(A) \\ \exists C>0:\forall\lambda\geqslant 0 \quad \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{L(E)}\leqslant \dfrac{C}{1+\lambda}. \end{cases} \tag{H'.1}$$

et

$$\exists C>1,\exists\theta_A\in ]0,\pi[:\forall s\in\mathbb{R} \quad \left\|(-A)^{is}\right\|\leqslant Ce^{\theta_A|s|}. \tag{H'.2}$$

Posons $Q_\omega:=-(-A_\omega)^{1/2}$. La solution du problème (2.4.1) s'écrit sous la fome, p. p. $x\in(-\infty,0)$

$$\begin{aligned} u(x) &= -Q_\omega^{-2}\left[Q_\omega e^{-xQ_\omega}\phi\right]+\frac{1}{2}Q_\omega^{-2}L_{-\infty}(x,g) \\ &\quad +\frac{1}{2}Q_\omega^{-2}L_{-\infty}(x,g)+\frac{1}{2}Q_\omega^{-2}L_0(x,g), \end{aligned}$$

**Théorème 2.4.1** *Supposons* $(H.0)$, $(H'.1)$, $(H'.2)$. *Soient*

$$g\in L^p(-\infty,0;E) \;\; \textit{avec } 1<p<\infty,$$

*alors le problème* (2.4.1) *admet une unique solution stricte* $u$ *si et seulement si*

$$\phi\in(D(A),E)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}.$$

### 2.4.2 Le cas $H=-aI$ avec $a>0$

Dans ce cas, le problème Le problème (2.1.1) devient le problème opérationnel suivant

$$\begin{cases} (u)''(x)+A_\omega u(x)=g(x), \quad p.\ p. \quad x\in ]-\infty,0[, \\ (u)'(0)+au(0)=\phi. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

avec $a>0$, les hypothèses sont réduites aux

$$E \text{ est un espace } UMD, \tag{H.1}$$

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur linéaire fermé tel que } \rho(A) \supset \mathbb{R}_+ \\ \exists C > 0 : \forall \lambda \geqslant 0 \quad \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{C}{1+\lambda}, \end{cases} \tag{H'.2}$$

$$\exists C > 1, \exists \theta_A \in \left]0, \pi\right[ : \forall s \in \mathbb{R} \quad \left\|(-A)^{is}\right\| \leqslant C e^{\theta_A |s|}. \tag{H'.3}$$

Ici, l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} Q_\omega - H & = & Q_\omega + aI, \\ (Q_\omega + H)^{-1} & = & (Q_\omega - \alpha I)^{-1} \end{array}$$

est inversible car $a \in \rho(Q_\omega)$. Le solution est

$$\begin{array}{rcl} u(x) & = & -(Q_\omega - \alpha I)^{-1} Q_\omega^{-1} \left[Q_\omega e^{-xQ_\omega}\phi\right] + \dfrac{1}{2}(Q_\omega + aI)(Q_\omega - aI)^{-1} Q_\omega^{-2} L_{-\infty}(x, g) \\ & & + \dfrac{1}{2} Q_\omega^{-2} L_{-\infty}(x, g) + \dfrac{1}{2} Q_\omega^{-2} L_0(x, g), \end{array}$$

**Théorème 2.4.2** *Supposons* $(H.1), (H'.2), (H'.3)$. *Soient* $g \in L^p(-\infty, 0; E)$ *avec* $1 < p < \infty$, *alors le problème* (2.4.2) *admet une unique solution stricte* $u$ *si et seulement si*

$$\phi \in (D(A), E)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}.$$

### 2.4.3 Le cas $\mathbf{H} = -\sqrt{-A_\omega} = Q_\omega$

On se propose, ici, d'étudier le problème suivant

$$(Pb) \quad \begin{cases} (u)''(x) + Au(x) - \omega u(x) = g(x), & \omega \geq 0, \quad p.p.\ x \in \left]-\infty, 0\right[, \\ (u)'(0) + \sqrt{-A_\omega}\, u(0) = \phi, \end{cases} \tag{2.4.3}$$

On remarque que l'opérateur $H := -\sqrt{-A_\omega}$ vérifie bien les hypothèses (2.1.3), (2.1.2), (3) et (4).

**Théorème 2.4.3** *Sous les hypothèses (2.1.3), (2.1.2), (3) et (4) et pour* $g \in L^p(-\infty, 0; E)$ *avec* $1 < p < \infty$, *les assertions suivantes sont équivalentes*
*1.* $\phi \in (D(A), E)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}$.
*2. Le problème* (2.4.3) *admet une unique solution stricte* $u$.

## 2.5 Exemples

#### Exemple 2.5.1

Prenons $E := L^2(\mathbb{R})$. On définit les opérateurs $A$ et $H$ comme suit,

$$\begin{cases} D(A) = \mathcal{H}^2(\mathbb{R}) \\ A\psi = \psi'' - \psi, \end{cases} \text{et} \quad \begin{cases} D(H) = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}) \\ H\psi = -a\psi \quad a > 1 \end{cases}$$

Alors le problème $(P)$ est équivalent à

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) - \omega u(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in (\left]-\infty, 0\right[) \times \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} u(0, y) + au(0, y) = \phi(y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.5.1}$$

**Proposition 2.5.1** *Les opérateurs $A$ et $H = -aI$ sont linéaires fermés des domaines denses dans $E$. De plus*
*i)* $\rho(A) \supset [0, \infty[$ *et* $\exists C_A > 0$ :

$$\forall \lambda \geqslant 0 : \left\| (A_\omega - \lambda)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant \frac{C_A}{1 + \omega + \lambda},$$

*ii)* $\rho(H) \supset [0, \infty[$ *et* $\exists C_A > 0$ :

$$\forall \lambda \geqslant 0 : \left\| (H - \lambda)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant \frac{C_H}{1 + \lambda},$$

**Preuve.** En effet, avec la même méthode dans [6] page 118.
i) On cherche la solution de l'équation spectrale suivante

$$(A_\omega - \lambda) u(t) := u''(t) - (\omega + \lambda + 1) u(t) = g(t),$$

en appliquant la transformé de Fourier, tels que $\omega \in [0, \infty[$, $\lambda \in [0, \infty[$ et . Il vient que

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{-\mathcal{F}(g)(\xi)}{\omega + \lambda + 1 + 4\pi^2\xi^2}.$$

Puisque $\mathcal{F}$ est un isomorphisme et $\mathcal{F} \in L(E)$, alors il existe $K > 1$ tel que

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leqslant K \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi}_{= \|\mathcal{F}(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} \leqslant K \int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathcal{F}(g)(\xi)|^2}{|\omega + \lambda + 1 + 4\pi^2\xi^2|^2} d\xi \qquad (2.5.2) \\ &\leqslant \frac{K}{(\omega + \lambda + 1)^2} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(g)(\xi)|^2 d\xi \leqslant \frac{K}{(\omega + \lambda + 1)^2} \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{cases} \mathcal{F}(u')(\xi) = 2i\pi\xi \mathcal{F}(u)(\xi) = \dfrac{2i\pi\xi \mathcal{F}(g)(\xi)}{\omega + \lambda + 1 + 4\pi^2\xi^2} \\ \mathcal{F}(u'')(\xi) = (2i\pi\xi)^2 \mathcal{F}(u)(\xi) = \dfrac{-4\pi^2\xi^2 \mathcal{F}(g)(\xi)}{\omega + \lambda + 1 + 4\pi^2\xi^2}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leqslant K \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{2\pi\xi}{\omega + \lambda + 1 + 4\pi^2\xi^2} \right|^2 |\mathcal{F}(g)(\xi)|^2 d\xi \\ &\leqslant \frac{K}{4(\omega + \lambda + 1)} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(g)(\xi)|^2 d\xi \leqslant \frac{K}{\omega + \lambda + 1} \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|u''\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leqslant K\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\frac{4\pi^2\xi^2}{\omega+\lambda+1+4\pi^2\xi^2}\right|^2|\mathcal{F}(g)(\xi)|^2\,d\xi\\ &\leqslant K\int\limits_{\mathbb{R}}|\mathcal{F}(g)(\xi)|^2\,d\xi\leqslant K\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Par conséquent $u,\ u',\ u''$ sont $L^2(\mathbb{R})$. D'autre part, on a

$$\left((A_\omega-\lambda)^{-1}g\right)(t)=u(t)$$

De (2.5.2) et pour tout $\lambda\geqslant 0$, on trouve

$$\left\|(A_\omega-\lambda)^{-1}g\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\leqslant\frac{\sqrt{K}}{\omega+\lambda+1}\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

telle que

$$\begin{aligned}u(t) &= \int\limits_{\mathbb{R}}e^{2i\pi\xi t}\mathcal{F}(u)(\xi)\,d\xi=\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{-e^{2i\pi\xi t}}{\omega+\lambda+1+4\pi^2\xi^2}\mathcal{F}(g)(\xi)\,d\xi\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{-e^{2i\pi\xi(t-s)}}{\omega+\lambda+1+4\pi^2\xi^2}g(s)\,dsd\xi.\end{aligned}$$

d'où

$$\left((A_\omega-\lambda)^{-1}g\right)(t)=\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{-e^{2i\pi\xi(t-s)}}{\omega+\lambda+1+4\pi^2\xi^2}g(s)\,dsd\xi. \tag{2.5.3}$$

**Proposition 2.5.2** *Les opérateurs $A$, $H$ vérifient*
*i)* $\exists K_A>1,\ \epsilon_A\in\,]0,\pi[\,:\forall s\in\mathbb{R}\quad\|(-A)^{is}\|_{L(E)}\leqslant K_Ae^{\theta_A|s|}$.

**Preuve.** Ce résultat découle du Fuhrman [14], lemme 3 page 218.

**Proposition 2.5.3** ***Caractérisation de l'espace d'interpolation :*** ([*15*])

Pour $E=L^2(\mathbb{R})$, on a

$$(D(A),E)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}=\left(H^2(\mathbb{R}),L^2(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}=H^{2(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p})}(\mathbb{R})=H^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}).$$

En appliquant notre Théorème, on trouve

**Proposition 2.5.4** *Soit $g\in L^p(-\infty,0;L^2(\mathbb{R}))$ avec $1<p<\infty$. Alors, Le problème* (2.5.1) *admet une unique solution stricte $u$ si et seulement si*

$$\phi\in H^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}).$$

# Bibliographie


[1] Balakrishnan A.V. : *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them.* Pacific. J. Math. 10 (1960), pp. 419-437.

[2] Berroug T. : *Sur des problèmes elliptiques et paraboliques dans les espaces de Hölder et les petits Hölder.* Thèse de Doctorat, Université du Havre, (2003).

[3] Bourgain J. : *Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional.* Ark. Mat. 21 (1983), pp.163-168.

[4] Burkholder D.L. : *A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional.* Ann. Probab. 9 (1981), pp. 997-1011.

[5] Brezis H. : *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris, New York, Barcelone, Milan, Mexico, Sao Paulo (1983).

[6] Cheggag M. : *Problème de Sturm-Liouville abstrait pour une équation différentielle abstrait complète elliptique du second ordre dans divers espaces.* Thèse d'état, Université d'Oran, Es-Sénia, (2008).

[7] Cheggag M., Favini A., Labbas R. and Medeghri A. : *Sturm-Liouville problem for an abstract differential equation of elliptic type in UMD spaces.* Differential and Integral Equations, 21 (2008), pp. 981-1000.

[8] Da Prato G. and Grisvard P. : *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles.* J. Math. Pures Appl. IX Ser. 54 (1975), pp. 305-387.

[9] Dore G. and Venni. A. : *On the closedness of the sum of two closed operators.* Math. Z. 196 (1987), pp. 189–201.

[10] Dore G. : *Lp regularity for abstract differential equations.* Functional analysis and related topics, 1991 (Kyoto), Lecture Notes in Math. 1540 (1993), Springer, Berlin, pp. 25-38.

[11] Dore G., Favini A., Labbas R. and Lemrabet K. : *An abstract transmission problem in a thin layer*, I : Sharp estimates, Journal of Functional Analysis 261 (2011), pp. 1865-1922.

[12] Dore G. and Yakubov. S. : *Semigroup estimates and non coercive boundary value problems.* Semigroup Forum, 60 (2000), pp. 93-121.

[13] Eltaief A. and Maingot S. : SECOND ordre abstract differntial equations of elliptic type set in R+. demenstration mathematical, Vol. XLVI, No 4 2013.

[14] Fuhrman M. : Bounded imaginary powers of abstract differential operators, evolution equations, Control theory and Biomathematics, Proceedings on the Hman-Sur-Lesse conference, edited by Ph. Clément and G. Lumer, M. Dekker, New York-Basel- Hong Kong, (1994), pp. 215-223.

[15] Grisvard P. : *Spazi di tracce e applicazioni.* Rendiconti di Matematica (4). 5 (1972), série VI, pp. 657-729.

[16] Haase M. : *The functional calculus for sectorial operators and similarity methods.* Thesis, Universität Ulm, Germany, (2003).

[17] Krein S. G. : *Linear differential equations in Banach spaces.* Moscou, (1967).

[18] Limam K. : *Resolution, in Lp-spaces, of transmission problems set in an unbounded domains.* Appl. Math. Comput. 218 (9) (2012), pp. 5605-5619.

[19] Lions J. L. and Peetre J. : *Sur une classe d'espace d'interpolation.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 19 (1964), pp. 5-86.

[20] Lunardi A. : *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems.* Birkhäuser, (1995).

[21] Pazy A. : *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 119 (1983).

[22] Prüss J. and Sohr H. : *Imaginary powers of elliptic second order differential operators in $L^p$-spaces.* Hiroshima Math. J., 23 (1993), pp. 161-192.

[23] Tanabe H. : *Equations of evolution*, Monographs and Studies in Mathematics 6. London-San Francisco-Melbourne, Pitman, (1979).

[24] Triebel H. : *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.* North Holland, amsterdam, (1978).