Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Analyse Fonctionnelle"

présenté par :

Mr. Benidris Mansour

Étude d'un Problème aux Limites Non Local Général pour une Équation Elliptique du Second Ordre

soutenu publiquement le 27 *Juin* 2019 *devant le jury composé de :*

Président :	Mme. LIMAM KHEIRA	MCA	Université UMAB
Examinateur :	Mr. RABAH HAOUA	MCB	Université UMAB
Encadreur :	Mr.MEDEGHRI AHMED	PROF	Université UMAB

Année Universitaire : 2018/2019

MASTER

Remerciement

Tout d'abord, je remercie **Dieu le tout puissant** pour la force et la volonté qu'il m'a donné pour mener à bien ce modeste travail.

Je tiens à remercier mon directeur de mémoire, **Mr le Professeur A.Medeghri**, de m'avoir encadré, orienté, aidé. Je le remercie aussi pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux et précieux conseils , qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je remercie vivement, pour l'honneur qu'ils me font, les membres du jury : **Mme K.Limam** et **Mr R.Haoua** pour avoir accepté d'évaluer le travail de mon mémoire.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance aux personnes suivantes :
Mlle Z.Kaisserli et **Mr L.Djilali** pour leur aide dans la réalisation de ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les enseignants (et surtout mon cher ami **Mr M.Andesmas**) qui par leurs encouragements, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont répondus à mes questions durant les cinq année de ma formation.

Enfin, je remercie mes amis qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Table Des Matières

Introduction

Les conditions aux limites de Robin ont été traités par plusieurs auteurs ce qui n'est pas le cas des conditions aux limites non locales.

Dans ce travail on s'intéresse aux conditions aux limites non locales généralisées.
On fait une synthèse de l'article [1] Aissa Aibeche, Nasreddine Amroune et Stephane Maingot, "General Non Local Boundary Value problem for Second Order Elliptic Equation" ; Mathematishe Nachrichten.2017.

L' objectif étant l'étude de problèmes elliptiques avec des conditions aux limites non locales généralisées (car il s'agit des coefficients opérateurs) dans des espaces de Banach particuliers (les espaces U.M.D) :

$$(1) \qquad \begin{cases} u''(x) + \mathsf{A}u(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \\ \alpha u'(1) - \gamma \mathsf{H}u(0) = d_0 \\ \beta u'(0) + \delta \mathsf{K}u(1) = d_1, \end{cases}$$

où :
$f \in \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{E})$; *avec* $1 < p < \infty$ et E un espace de Banach complexe U.M.D.
$d_0, d_1 \in \mathsf{E}$.
A, H *et* K sont des opérateurs linéaires fermés dans E.
α, β, γ *et* $\delta \in \mathbb{C}$, vérifiant :

$$(2) \qquad (\alpha,\gamma) \neq (0,0) \ (\alpha,\delta) \neq (0,0)) \ (\beta,\gamma) \neq (0,0)) \ et \ (\beta,\delta) \neq (0,0)$$

L'objectif est de trouver une solution stricte de ce problème, c'est à dire une fonction u telle que :

$$u \in \mathsf{W}^{2,p}(0,1;\mathsf{E}) \cap \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{D}(\mathsf{A}))$$

Avec u vérifiant :

$$u(0) \in \mathsf{D}(\mathsf{H});\, u(1) \in \mathsf{D}(\mathsf{K})$$

Et vérifiant notre problème.

On supposera l'hypothèse d'ellipticité suivante :

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathsf{A} \text{ est un opérateur linéaire fermé.} \\ [0,+\infty[\ \supset\ \rho(\mathsf{A})\ et\ \sup\limits_{\lambda \geqq 0} \|\lambda(\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I})^{-1}\|_{L(\mathsf{E})}\ <\ \infty. \end{cases}$$

On sait que cette hypothèse implique que $-(-\mathsf{A})^{\frac{1}{2}}$ génère un semi-groupe analytique borné dans E(voir [3])
On suppose aussi que :

$$(4) \qquad \begin{cases} \forall\, s \in \mathbb{R}, (-\mathsf{A})^{is} \in \mathcal{L}(\mathsf{E})\ et\ \exists\, \theta_{\mathsf{A}} \in]0,\pi[; \\ \\ telque\ :\ \sup_{s\in\mathbb{R}} \|e^{-\theta_{\mathsf{A}}|s|}(-\mathsf{A})^{is}\|_{L(\mathsf{E})}\ <\ \infty. \end{cases}$$

les opérateurs H et K vérifient :

$$(5) \qquad 0 \in \rho(\mathsf{H}) \cap \rho(\mathsf{K})$$

Et les conditions de commutativité suivantes :

$$(6) \qquad \mathsf{A}^{-1}\mathsf{H}^{-1} = \mathsf{H}^{-1}\mathsf{A}^{-1}\ ,\ \mathsf{A}^{-1}\mathsf{K}^{-1} = \mathsf{K}^{-1}\mathsf{A}^{-1}\ et\ \mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1} = \mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}$$

On pose : $\mathsf{B} = -(-\mathsf{A})^{\frac{1}{2}}$ et on considère l'opérateur Π définit par :

$$\mathsf{D}(\Pi) = \mathsf{D}(\mathsf{B}^2\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1})\ et\ \Pi = \mathsf{B}^2\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1} - \gamma\delta\mathsf{I}$$

Supposons que :

$$(7) \qquad \Pi \text{ est inversible}$$

On définit l'opérateur Λ par :

$$\mathsf{D}(\Lambda) = \mathsf{D}(\Pi(\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}}) = \mathsf{D}(\Pi), \Lambda = \Pi(\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}}) + 2(\alpha\delta\mathsf{H}^{-1} + \gamma\beta\mathsf{K}^{-1})\mathsf{B}e^{\mathsf{B}}$$

Et on suppose que :

$$(8) \qquad \Lambda \text{ est inversible}$$

Cet opérateur Λ sera le déterminant de notre problème. De tels problèmes se posent dans plusieurs phénomènes physiques concrets. Par exemple ils apparaissent dans la théorie des plasma (physique des plasmas), la théorie du processus de diffusion [[23],[24]], les transferts de chaleur soumis à une spécification de masse, en électrochimie [[5]-[7]] et ils apparaissent également dans l'interaction fluide-structure dans l'application de l'hémodynamique[[20]].

Dans cette étude la nouveauté est que nous considérons les deux conditions aux limites à coefficients opérateurs comme des conditions aux limites non locales. Des problèmes similaires avec les conditions locales de Robin ont été examinés, citons par exemples [[8],[9]].

Plusieurs chercheurs se sont penchés sur ces problèmes, on trouvera une étude approfondie des problèmes à conditions aux limites non locales dans [[15],[23],[25]].

Ces travaux illustrent bien un regain d'intéret pour ces types de problèmes. On utilise la théorie des semi-groupes et les puissances fractionnaires d'opérateurs pour construire une représentation de la solution ; Ce qui nous permet de trouver des résultats d'existence, d'unicité et de régularité de la solution.

Ce mémoire est composé de cinq chapitres et il est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre on se propose de rappeler quelques lemmes techniques et on cite les outils mathématiques utilisés pour aboutir aux résultats souhaités.

Dans le deuxième on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence, l'unicité et la régularité de la solution obtenues en utilisant la théorie des sommes d'opérateurs(Approche de DORE-VENI) ainsi que l'interpolation des espaces.

Le troisième chapitre concerne l'étude du problème précédent avec un paramètre spectral ; L'objectif étant d'éliminer l'hypothèse d'inversibilité du déterminant opérationnel de notre problème.

Le quatrième chapitre est consacré à la résolution de quelquess cas particuliers (Dirichlet, Neumann, ..)

Dans le chapitre cinq ; Quelques applications aux EDP sont étudiées.

Chapitre 1

Rappels et outils mathématiques

1.1 Espaces de Banach UMD : "La propriété UMD"

Définition 1.1 *Un espace de Banach* E *possède la propriété UMD si :*

$\exists\, 1 < p < \infty$ et c(p) tel que :

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k d_k \right\|_{\mathsf{L^p}(\mathbb{R},\mathsf{E})} < \, c(p) \left\| \sum_{k=1}^{\infty} d_k \right\|_{L^p(\mathbb{R},\mathsf{E})} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

pour toute martingale $(d_k)_{k=0,\dots,n}$ et pour toute suite $(\xi_k)_k \in [-1,1]^n$.

Nous donnons dans ce qui suit une définition équivalente qui utilise la transformation de Hilbert.

Transformation de Hilbert :

Définition 1.2 *Soit* $\epsilon \in]0,1[$ *et* $1 < p < \infty$ *;* $\forall\, f \in \mathsf{L^p}(\mathbb{R},\mathsf{E})$ *:*

$$(Hf)(x) = \lim_{\epsilon \to 0} H_\epsilon(f)(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |s| < \frac{1}{\epsilon}}^{T} \frac{f(x-s)}{s}\, ds$$

Théorème 1.1 *(voir [4]) Soit* E *un espace de Banach et* $1 < p < \infty$. *Alors* E *est un espace UMD si seulement si la transformation de Hilbert est continue de* $\mathsf{L^p}(\mathbb{R},\mathsf{E})$ *dans* $\mathsf{L^p}(\mathbb{R},\mathsf{E})$

c-à-d :

$$\mathsf{E} \text{ est un espace } UMD \iff \lim_{\epsilon \to 0} H_\epsilon(f) \text{ existe dans } \mathsf{L^p}(\mathbb{R},\mathsf{E});\ \forall\, f \in \mathsf{L^p}(\mathbb{R},\mathsf{E}).$$

Remarque : 1.1 *Il existe une caractérisation géométrique des espaces UMD c'est la notion de* ξ*-convexité.*

Théorème 1.2

$$\mathsf{E} \textit{ est un espace } UMD \iff \mathsf{E} \textit{ est } \xi - \textit{convexe.}$$

L'importance de ce résultat est : "la notion d'espace UMD ne dépend pas de p .

Exemple : 1.1

1. *Les espaces de Hilbert sont UMD.*

2. *Tout espaces isomorphes à un espace UMD est lui même UMD.*

3. *Tout sous-espace fermé d'un UMD est un espace UMD.*

4. *L'interpolé des espaces UMD est UMD.*

5. *Si* E *UMD alors* $\mathsf{L^p}([0,1],\mathsf{E})$ *est UMD avec* $1 < p < \infty$.

Remarque : 1.2 *les espaces :* C, C^α*....ne sont pas des espaces UMD.*

1.2 les opérateurs linéaires fermés

Définition 1.3 *:*
Soit $(\mathsf{E}, \|.\|)$ *un espace de Banach.*
Un opérateur linéaire A *sur* E *est une application linéaire définie d'un sous-espace vectoriel* $\mathsf{D(A)}$ *de* E *à valeurs dans* E *et on note :*

$$\begin{aligned} A : \mathsf{D(A)} \subset \mathsf{E} &\longrightarrow \mathsf{E} \\ \varphi &\longmapsto \mathsf{A}\varphi \end{aligned}$$

1. *A sera dit borné si et seulement si :*

$$\exists\, c > 0 : \forall\, \varphi \in \mathsf{E} : \|\mathsf{A}\varphi\|_{\mathsf{E}} \leqq c\|\varphi\|_{\mathsf{E}}$$

.

2. *A sera dit fermé si et seulement si :*

$$\mathsf{G(A)} \textit{ (le graphe de } \mathsf{A}) \textit{ est un fermé de } \mathsf{E} \textit{ dans } \mathsf{E}.$$

avec :

$$\mathsf{G(A)} = \{(\varphi, \mathsf{A}\varphi);\ \varphi \in \mathsf{D(A)}\}.$$

Proposition 1.1 *Soit* A *un opérateur linéaire tel que :*

$$A : \mathsf{D(A)} \subset \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{E}$$

Alors A *est fermé si et seulement si* $\forall\, (\varphi_n)_n \subset \mathsf{D(A)}$ *tel que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}\varphi_n = \Psi \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in D(A) \\ \\ \mathsf{A}\varphi = \Psi. \end{array} \right.$$

1.3 Ensemble résolvant, Résolvante et Spectre

Soit E un espace de Banach et :

$$A : \mathsf{D}(\mathsf{A}) \subset \mathsf{E} \quad \longrightarrow \quad \mathsf{E}$$

Un opérateur linéaire fermé sur E.

1.3.1 Ensemble résolvant

Définition 1.4 *On appelle ensemble résolvant de* A *l'ensemble :*

$$\rho(\mathsf{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \, : \, (\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) \, \textit{est inversible dans} \, \mathbf{L}(\mathsf{E})\}.$$

1.3.2 La résolvante

Définition 1.5 *Si* $\lambda \in \rho(\mathsf{A})$*, on définit la résolvante de* A *au point* λ *par l'opérateur :* $(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I})^{-1}$.

1.3.3 Le spectre

Définition 1.6 $\sigma(\mathsf{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathsf{A})$ *(complémentaire de* $\rho(\mathsf{A})$ *dans* $\mathbb{C}$*) est appelé le spectre de* A *et un élément de* $\sigma(\mathsf{A})$ *est appelé valeur spectrale.*

1.4 les Semi-Groupes :(voir [19],[18])

Définition 1.7 *Soit* E *un espace de Banach. On dit que la famille* $(\mathbf{G}(t))_{t \geqq 0}$ *d'opérateurs linéaires bornés sur* E *forme un semi-groupe si :*

1. $\mathbf{G}(0) = \mathsf{I}_{\mathsf{E}}$

2. $\forall \, t, s \geqq 0 \, : \, \mathbf{G}(t+s) = \mathbf{G}(t)\mathbf{G}(s)$.

1.4.1 Semi-Groupes fortement continus

Définition 1.8 *On dit qu'un semi-groupe* $(\mathbf{G}(t))_{t \geqq 0}$ *est fortement continu si et seulement si pour tout* $x \in \mathsf{E}$*, l'application :*

$$\begin{aligned} \mathbf{G} : \mathbb{R}_+ \quad &\longrightarrow \quad \mathsf{E} \\ t \quad &\longmapsto \quad \mathbf{G}(t)\varphi \end{aligned}$$

est continue ; c-à-d :

$$\forall \, \varphi \in \mathsf{E} : \lim_{t \to 0^+} \|(\mathbf{G}(t)\varphi) - \varphi\|_{\mathsf{E}} = 0.$$

et on dit que :

$$(\mathbf{G}(t))_{t \geqq 0}$$

est un C_0-semi-groupe.

1.4.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe :

Définition 1.9 *On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe $(\mathbf{G}(t))_{t \geqq 0}$, l'opérateur Λ défini par :*

$$\mathsf{D}(\Lambda) = \left\{ \varphi \in E : \lim_{t \to 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t} \text{ existe} \right\} \neq \emptyset.$$

et si $\varphi \in \mathsf{D}(\Lambda)$:

$$\Lambda \varphi = \lim_{t \to 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t}.$$

Exemple : 1.2 *Soit : $\mathsf{E} = \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})$, alors l'opérateur Λ défini par :*

$$\begin{cases} D_\Lambda = W^{1.2}(\mathbb{R}) = \{u \in L^p(\mathbb{R}),\, u' \in L^p(\mathbb{R})\}, \\ \\ \Lambda\, u = u', \quad \forall u \in D_\Lambda. \end{cases}$$

est générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe de translation défini par :

$$(\mathbf{G}(t)u)(\varphi) = u(\varphi + t) \quad \text{pour presque } \varphi \text{ et } u \in L^p(\mathbb{R})$$

Proposition 1.2 *Si Λ est générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $(\mathbf{G}(t))_{t \geqq 0}$ alors :*

1. *Λ est linéaire fermé de domaine $D(\Lambda)$ dense dans E.*

2. *$\forall \varphi \in \mathsf{E}$, la fonction :*

$$t \longrightarrow \mathbf{G}(t)\varphi$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. *Si $\varphi \in \mathsf{D}(\Lambda)$ et $t \geqq 0$ alors $\mathbf{G}(t)\varphi \in \mathsf{D}(\Lambda)$*

4. *La fonction :*

$$t \longrightarrow \mathbf{G}(t)\varphi$$

est continument dérivable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\varphi \in \mathsf{D}(\Lambda)$ et on a :

$$\varphi \in \mathsf{D}(\Lambda) \implies \forall t \geqq 0 : \tfrac{d}{dt}\mathbf{G}(t)\varphi = \Lambda\mathbf{G}(t)\varphi = \mathbf{G}(t)\Lambda\varphi$$

5. *$\forall \varphi \in \mathsf{E}, \forall t \geqq 0$ on a :*

$$\int_0^T \mathbf{G}(s)\varphi\, ds \in \mathsf{D}(\Lambda) \quad \text{et} \quad \Lambda \int_0^T \mathbf{G}(s)\varphi\, ds \in \mathsf{D}(\Lambda)$$

et si de plus $\varphi \in \mathsf{D}(\Lambda)$ alors :

$$\Lambda \int_0^T \mathbf{G}(s)\varphi\, ds = \int_0^T \mathbf{G}(s)\Lambda\varphi\, ds = \mathbf{G}(t)\varphi - \varphi$$

6. *Si* Λ *est générateur infinitésimal du* C_0*-semi-groupe* $(\mathbf{S}(t))_{t \geqq 0}$ *alors :* $\forall\, t \geqq 0$ *on a :*

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{G}(t)$$

Théorème 1.3 *(Conditions nécessaires) : Soit* Λ *le générateur infinitésimal du* C_0*-semi-groupe* $(\mathbf{G}(t))_{t \geqq 0}$ *alors :*

1. Λ *est linéaire fermé.*

2. $\mathsf{D}(\Lambda)$ *est dense dans* E. $(\overline{\mathsf{D}(\Lambda)} = \mathsf{E})$

3. $\rho(\Lambda) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, Re\lambda > \omega\}$ *avec* $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, Re\lambda > \omega, \forall\, k \geqq 1$ *:*

$$\|(\Lambda - \lambda \mathsf{I})^{-1}\|_{L(\mathsf{E})} \leqq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^k}.$$

Théorème 1.4 *(Hille-Yoshida)*
Les conditions du théorème précédent sont nécessaires et suffisantes pour qu'il existe un C_0*-semi-groupe* $(\mathbf{G}(t))_{t \geqq 0}$ *dont* Λ *est le générateur infinitésimal.*

1.4.3 Semi-Groupes analytiques :

Définition 1.10 *Soit* E *un espace de Banach complexe. Soit* Δ *tel que :*

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \varphi_1 < argz < \varphi_2 \quad et \quad \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$$

Soit $\{\mathbf{G}(z)\}_{z \in \Delta}$ *une famille d'opérateurs linéaires bornés sur* E.

On dit que $\{\mathbf{G}(z)\}_{z \in \Delta}$ *forme un semi-groupe holomorphe dans* Δ *si elle vérifie :*

1. $\mathbf{G}(z_1 + z_2) = \mathbf{G}(z_1)\mathbf{G}(z_2), \;\forall\, z_1, z_2 \in \Delta.$

2. $\mathbf{G}(0) = I_{\mathsf{E}}$

3. $\lim\limits_{z \to 0} \mathbf{G}(z)\varphi = \varphi, \forall\, \varphi \in \Delta$

4. *L'application :*

$$z \in \Delta \setminus \{0\} \;\longrightarrow\; \mathbf{G}(z)\varphi \in \mathsf{E}$$

est holomorphe $\forall \varphi \in \mathsf{E}$.

Théorème 1.5 *(KATO)*
Soit :

$$A : \mathsf{D(A)} \subset \mathsf{E} \;\longrightarrow\; \mathsf{E}$$

un opérateur linéaire non borné vérifiant :

1. A *est fermé.*

2. $\overline{\mathsf{D(A)}} = \mathsf{E}$.

3. $\rho(\mathsf{A}) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^*, Re\lambda \geqq 0\}$ *et* $\exists\, \mathsf{L} > 0, \forall\, \lambda \in \rho(\mathsf{A})$ *:*

$$\|(\Lambda - \lambda \mathsf{I})^{-1}\|_{L(\mathsf{E})} \leqq \frac{L}{\lambda}$$

Alors A *est générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $(\mathbf{G}(t))_{t \geqq 0}$ *tel que :*

1. $\exists\, M > 0 \,:\, \forall\, t > 0\, \|(\mathbf{G}(t)\|_{L(\mathsf{E})} < M.$

2. $\forall\, t > 0 \,:\, \mathbf{G}(t) \in L(\mathsf{E}, \mathsf{D}(\mathsf{A})).$

3. $\forall\, t > 0 \,:\, \mathbf{G}(t) \in L(\mathsf{E}, \mathsf{D}(\mathsf{A}))$ *et* $\|\mathsf{A}(\mathbf{G}(t)\|_{L(\mathsf{E})} < \frac{M}{t}.$

1.4.4 Semi-Groupes analytiques généralisés :

Soit E un espace de Banach. Soit :

$$A : \mathsf{D}(\mathsf{A}) \subset \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{E}$$

un opérateur linéaire vérifiant :

$$\exists\, \theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\text{ et } M > 0 \quad : \quad \begin{cases} \rho(\mathsf{A}) \supset S_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |arg z| \leqq \phi\} \\ et \\ \|(\Lambda - \lambda \mathsf{I})^{-1}\|_{L(\mathsf{E})} \leqq \frac{M}{\lambda} \end{cases}$$

où $\rho(\mathsf{A})$ est l'ensemble résolvant de A. Si $\overline{\mathsf{D}(\mathsf{A})} \neq \mathsf{E}$ alors Sinestrari (voir[22]) a prouvé qu'on peut définir un semi-groupe analytique généralisé $(e^{\varphi \mathsf{A}})_{\varphi \geqq 0}$ qui a toutes les propriétés comme le semi-groupe holomorphe usuel.

1.5 Les espaces d'interpolation

Soit $(\mathsf{E}_0, \|.\|_0)$ et $(\mathsf{E}_1, \|.\|_1)$ deux espaces de Banach qui s'injectent continument dans un espace topologique séparé ξ. Considérons :$\mathsf{E}_0 \cap \mathsf{E}_1$, $\mathsf{E}_0 + \mathsf{E}_1$ et $(\mathsf{E}_0, \mathsf{E}_1)_{\theta,p}$ avec les normes suivantes :

$$\begin{cases} \|x\|_{\mathsf{E}_0 \cap \mathsf{E}_1} = \|x\|_{\mathsf{E}_0} + \|x\|_{\mathsf{E}_1} \; si \; x \in \mathsf{E}_0 \cap \mathsf{E}_1 \\ \\ \|x\|_{\mathsf{E}_0 + \mathsf{E}_1} = \inf_{x = x_0 + x_1} (\|x\|_{\mathsf{E}_0} + \|x\|_{\mathsf{E}_1}) \\ \\ \|x\|_{\theta,p} = \inf_{x = u_0(t) + u_1(t)} (\|t^{-\theta}\, u_0\|_{\mathsf{L}^{\mathsf{p}}_*(\mathbb{R}_+, \mathsf{E}_0)} + \|t^{1-\theta}\, u_1\|_{\mathsf{L}^{\mathsf{p}}_*(\mathbb{R}_+, \mathsf{E}_1)}) \; si \; x \in (\mathsf{E}_0, \mathsf{E}_1)_{\theta,p} \end{cases}$$

Définition 1.11 *Soit* X *un espace de Banach.On désigne par* $\mathsf{L}^{\mathsf{p}}_*(\mathbb{R}_+, \mathsf{X})$ *avec* $p \in [1, \infty[$*, l'espace de Banach des fonctions fortement mesurables définies pour presque tout t positif et tel que :*

$$\left(\int_0^\infty \|f(t)\|^p_{\mathsf{X}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{\mathsf{L}^{\mathsf{p}}_*(\mathbb{R}_+, \mathsf{X})} < \infty$$

Si $p = +\infty$, *alors on définit l'espace* $\mathsf{L}_*^\infty(\mathbb{R}_+, \mathsf{X})$ *par :*

$$f \in \mathsf{L}_*^\infty(\mathbb{R}_+, \mathsf{X}) \implies \begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathsf{X} \; est\ fortement\ mesurable. \\ et \\ supess_{0<t<\infty} \|f(t)\|_\mathsf{X} < \infty \end{cases}$$

Définition 1.12 *Soit* $0 < \theta < 1$ *et* $1 < p < \infty$, *on dit que* $x \in (\mathsf{E}_0, \mathsf{E}_1)_{\theta,p}$ *si et seulement si :*

$$\begin{cases} i) \forall\, t > 0 \;:\; \exists\, u_0(t) \in \mathsf{E}_0,\; u_1(t) \in \mathsf{E}_1 \;:\; x = u_0(t) + u_1(t) \\ \\ ii) t^{-\theta}\, u_0(t) \in \mathsf{L}_*^\mathsf{p}(\mathbb{R}_+, \mathsf{E}_0);\; t^{1-\theta}\, u(t) \in \mathsf{L}_*^\mathsf{p}(\mathbb{R}_+, \mathsf{E}_1). \end{cases}$$

Proposition 1.3 *Les espaces* :$(\mathsf{E}_0 \cap \mathsf{E}_1; \|.\|_{\mathsf{E}_0 \cap \mathsf{E}_1})$;, $(\mathsf{E}_0 + \mathsf{E}_1; \|.\|_{\mathsf{E}_0+\mathsf{E}_1})$ *et* $((\mathsf{E}_0, \mathsf{E}_1)_{\theta,p}; \|.\|_{\theta,p})$ *sont des espaces de Banach. De plus :*

$$\mathsf{E}_0 \cap \mathsf{E}_1 \subset (\mathsf{E}_0, \mathsf{E}_1)_{\theta,p} \subset \mathsf{E}_0 + \mathsf{E}_1$$

où : '$\subset$' désigne l'injection continue. Et on a aussi :

$$(\mathsf{E}_0, \mathsf{E}_1)_{\theta,p} = (\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_0)_{1-\theta,p}$$

Définition 1.13 *(Cas particulier)*
Soit $0 < \theta < 1$ *et* $1 < p < \infty$, *posons* $\mathsf{E}_0 = \mathsf{D}(\mathsf{A})$ *et* $\mathsf{E}_1 = \mathsf{E}$, *alors :*

$$\mathsf{E}_0 \cap \mathsf{E}_1 = \mathsf{D}(\mathsf{A}) \; et \; \mathsf{E}_0 + \mathsf{E}_1 = \mathsf{E}$$

et par suite :

$$\mathsf{D}(\mathsf{A}) \subset (\mathsf{D}(\mathsf{A}), \mathsf{E})_{\theta,p} \subset \mathsf{E}$$

et on écrit :

$$\begin{cases} i) \forall\, t > 0 \;:\; \exists\, u_0(t) \in \mathsf{D}(\mathsf{A}),\; u_1(t) \in \mathsf{E} \;:\; x = u_0(t) + u_1(t) \\ \\ ii)\, t^{-\theta}\, u_0(t) \in \mathsf{L}_*^\mathsf{p}(\mathsf{D}(\mathsf{A}));\; t^{1-\theta}\, u(t) \in \mathsf{L}_*^\mathsf{p}(\mathsf{E}) \end{cases}$$

On a des caractéristiques explicites de ces espaces, par exemple, dans les cas suivants :
1. Supposons que $\rho(\mathsf{A}) \supset \mathbb{R}_+$ et qu'il existe une constante $c > 0$ tel que $\forall\, \lambda > 0$:

$$\|(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I})^{-1}\|_{L(\mathsf{E})} \leqq \frac{c}{\lambda}$$

alors $\mathsf{D}_\mathsf{A}(\theta, p) = (\mathsf{D}(\mathsf{A}); \mathsf{E})_{1-\theta,p}$ est exactement le sous-espace de E des φ telles que :

$$\|t^\theta \mathsf{A}(\mathsf{A} - t\mathsf{I})^{-1} \varphi\|_\mathsf{E} \in \mathsf{L}_*^\mathsf{p}(\mathbb{R}_+, \mathsf{E})$$

2. Dans le cas ou A génère un semi-groupe fortement continue et borné dans E,alors :

$$\mathsf{D_A}(\theta,p) = \{\varphi \in \mathsf{E} : \|t^{\theta}(e^{t\mathsf{A}} - \mathsf{I})\varphi\|_{\mathsf{E}} \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}_{*}(\mathbb{R}_+,\mathsf{E})\}\ (voir[10])$$

3. Si maintenant A génère un semi-groupe analytique et borné dans E ; alors :

$$\mathsf{D_A}(\theta,p) = \{\varphi \in \mathsf{E} : \|t^{1-\theta}\mathsf{A}e^{t\mathsf{A}}\varphi\|_{\mathsf{E}} \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}_{*}(\mathbb{R}_+,\mathsf{E})\}\ (voir[10])$$

Lemme 1.1 *(voir[10])*
L' hypothèse (5) implique qu'Il existe $\mathsf{B} = -(-\mathsf{A})^{\frac{1}{2}}$ *qui génère un semi-groupe analytique borné dans* E*(voir [3]) et de plus on a le résultat de réitération suivant :*

$$(\mathsf{D}(\mathsf{B}),\mathsf{X})_{\frac{1}{p},p} = (\mathsf{D}(\mathsf{A}),\mathsf{X})_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$$

1.6 Propriété de commutativité

Proposition 1.4 *Soit* X *un espace de Banach. Soient* P,Q *deux opérateurs linéaires fermés sur* X *tel que :*

$$0 \in \rho(\mathsf{P}) \cap \rho(\mathsf{Q})$$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :
i. $\mathsf{P}^{-1}\mathsf{Q}^{-1} = \mathsf{Q}^{-1}\mathsf{P}^{-1}$
ii. $\mathsf{D}(\mathsf{PQ}) = \mathsf{D}(\mathsf{QP})$ *et* $\mathsf{PQ}x = \mathsf{QP}x$ *pour tout* $x \in \mathsf{D}(\mathsf{PQ}) = \mathsf{D}(\mathsf{QP})$ *(c'est-à-dire* $\mathsf{PQ} = \mathsf{QP}$*)*

Preuve : (i) $\Longrightarrow$ *(ii)*

$\mathsf{D}(\mathsf{PQ}) \subset \mathsf{D}(\mathsf{QP})$

En effet, $x \in \mathsf{D}(\mathsf{PQ})$ alors :

$$\begin{aligned} x &= \mathsf{Q}^{-1}\mathsf{Q}x \text{ (car } x \in \mathsf{D}(\mathsf{Q})) \\ &= \mathsf{Q}^{-1}\mathsf{P}^{-1}\mathsf{PQ}x \text{ (car } \mathsf{Q}x \in \mathsf{D}(\mathsf{P})), \\ &= \mathsf{P}^{-1}\mathsf{Q}^{-1}\mathsf{PQ}x \text{ (d'après } (i)) \end{aligned} \tag{1.1}$$

c'est-à-dire :

$$x \in \mathsf{D}(\mathsf{P})\ et\ \mathsf{Px} = \mathsf{Q}^{-1}\mathsf{PQ}x \in \mathsf{D}(\mathsf{Q})$$

D'où :

$$x \in \mathsf{D}(\mathsf{QP})$$

De même, par échange des rôles de P et Q on aura :

$$\mathsf{D}(\mathsf{QP}) \subset \mathsf{D}(\mathsf{PQ})$$

Enfin si $x \in \mathsf{D}(\mathsf{PQ}) = x\,\mathsf{D}(\mathsf{QP})$ alors vu (2) on a :

$$x = \mathsf{P}^{-1}\mathsf{Q}^{-1}\mathsf{PQ}x$$

Soit :

$$\mathsf{QP}x = \mathsf{PQ}x$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

si $y \in \mathsf{X}$ alors :

$$y = \mathsf{QPP}^{-1}\mathsf{Q}^{-1}y$$

Or

$$\mathsf{P}^{-1}\mathsf{Q}^{-1}y \in \mathsf{D}(\mathsf{PQ}) = \mathsf{D}(\mathsf{QP})$$

D'où :

$$y = \mathsf{QP}[\mathsf{P}^{-1}\mathsf{Q}^{-1}y] = \mathsf{PQ}[\mathsf{P}^{-1}\mathsf{Q}^{-1}y]$$

Soit

$$\mathsf{Q}^{-1}\mathsf{P}^{-1}y = \mathsf{P}^{-1}\mathsf{Q}^{-1}y$$

$\square$

1.7 Somme d'opérateurs(Approche de Dore-Venni)

Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés dans X de domaines $\mathsf{D(A)}$ et $\mathsf{D(B)}$ respectivement.
On s'intéresse à l'équation :

$$\mathsf{A}u + \mathsf{B}u - \lambda\, u = g \tag{1.2}$$

où :
g est un vecteur donné de X.
L'opérateur somme $\mathsf{L} = \mathsf{A} + \mathsf{B}$ est défini par :

$$\begin{cases} D_L = D_A \cap D_B, \\ Lu = Au + Bu, \\ u \in D(L). \end{cases}$$

Donc l'équation 1.2 s'écrit :

$$\mathsf{L}u - \lambda\, u = g$$

Une solution stricte de cette équation est un élément $u \in D(L)$ qui la satisfait. Donc il faut trouver une telle solution lorsque g est quelconque dans X mais ce n'est pas toujours possible.

1.7.1 Théorème de Dore-Venni

Les hypothèses sur A et B :

On suppose que les opérateurs A et B vérifient :

$$(\text{DV } 1) : \begin{cases} \rho(\mathsf{A}) \supset]-\infty, 0] \ et \ \exists\, \mathsf{M_A} > 0; \forall\, \lambda \geqq 0 \, : \, \|(\mathsf{A}+\lambda)^{-1}\|_{L(\mathsf{E})} \leqq \dfrac{\mathsf{M_A}}{1+\lambda} \\ \rho(\mathsf{B}) \supset]-\infty, 0] \ et \ \exists\, \mathsf{M_B} > 0; \forall\, \lambda \geqq 0 \, : \, \|(\mathsf{B}+\lambda)^{-1}\|_{L(\mathsf{E})} \leqq \dfrac{\mathsf{M_B}}{1+\lambda} \\ \overline{\mathsf{D(A)}} = \overline{\mathsf{D(B)}} = \mathsf{X} \end{cases}$$

$$(\text{DV } 2) : \{\forall\, \lambda \in \rho(-\mathsf{A}), \forall\, \mu \in \rho(-\mathsf{B}) \, : \, (\mathsf{A}+\lambda)^{-1}(\mathsf{B}+\mu)^{-1} = (\mathsf{B}+\mu)^{-1}(\mathsf{A}+\lambda)^{-1}\}$$

$$(\text{DV } 3) : \begin{cases} \forall\, s \in \mathbb{R} \, : \, \mathsf{A}^{is} \in L(\mathsf{X}) \, et \, \exists\, k > 0, \, \theta_\mathsf{A} > 0 \, : \, \|\mathsf{A}^{is}\|_{L(\mathsf{X})} \leqq k e^{|s|\theta_\mathsf{A}} \\ \forall\, s \in \mathbb{R} \, : \, \mathsf{B}^{is} \in L(\mathsf{X}) \, et \, \exists\, k > 0, \, \theta_\mathsf{B} > 0 \, : \, \|\mathsf{B}^{is}\|_{L(\mathsf{X})} \leqq k e^{|s|\theta_\mathsf{B}} \\ \theta_\mathsf{A} + \theta_\mathsf{B} < \pi \end{cases}$$

On note par BIP(X,θ) (Bounded imaginary powers) l'ensemble des opérateurs sectoriels sur X vérifiant(DV1) et (DV3). On a alors le théorème de Dore-Venni suivant :

Théorème 1.6 *Si X est un espace UMD et sous les hypothèses (DV1), (DV2) et (DV3) alors l'opérateur :*

$$\mathsf{L} = \mathsf{A} + \mathsf{B}$$

est fermé et inversible et :

$$\mathsf{L}^{-1} \in L(\mathsf{X})$$

De plus L^{-1} est défini par l'intégrale :

$$\mathsf{L}^{-1} = \frac{1}{i\pi}\int_{\gamma} \frac{\mathsf{A}^{-z}\mathsf{B}^{z-1}}{\sin(\pi\, z)}\, dz.$$

où γ est une courbe verticale contenue dans la bande :

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < Rez < 1\}$$

et orientée de $\infty\, e^{-\frac{i\pi}{2}}$ vers $\infty\, e^{\frac{i\pi}{2}}$

1.7.2 Application du théorème de Dore-Venni au problème de Cauchy :

Soit X un espace UMD. On considère le problème de Cauchy :

$$(P_c) \,:\, \begin{cases} u'(t) + \mathsf{A}u(t) = f(t), \;\; t \in [0,T] \\ \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

où :
$f \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,\mathsf{T};\mathsf{X})$ *et* $\mathsf{A} : \mathsf{D}(\mathsf{A}) \longrightarrow \mathsf{X}$ un opérateur linéaire fermé de domaine dense et tel que :

$$\exists\, c > 0 \;\; \|(\mathsf{A} + \lambda \mathsf{I})^{-1}\|_{L(\mathsf{X})} \leqq \frac{c}{1+\lambda}$$

Et

$$\mathsf{A} : \xi \longmapsto \mathsf{A}\xi$$

un groupe fortement continu dans $L(\mathsf{X})$ vérifiant :

$$\exists\, c > 0 \,:\, \|\mathsf{A}^{i\xi}\|_{L(\mathsf{X})} \leqq c e^{\theta_{\mathsf{A}}|\xi|} \quad et \quad 0 < \theta_{\mathsf{A}} < \frac{\pi}{2}$$

On écrit le problème sous la forme d'une somme d'opérateurs. On définit alors les opérateurs A et B comme suit :

$$\begin{cases} \mathsf{D}(\mathcal{A}) \subset \mathsf{L^p}(0,\mathsf{T};\mathsf{X}) \\ (\mathcal{A}\,u)(.) = \mathsf{A}u(.), u \in \mathsf{D}(\mathsf{A}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathsf{D}(\mathsf{B}) = \{u \in W^{1,p}([0,T],X) : u(0) = 0\}, \\ \mathsf{B}u = u', u \in \mathsf{D}(\mathsf{B}) \end{cases}$$

Et donc notre équation devient :

$$\mathsf{B}u + \mathcal{A}\,u = f$$

Dans ce cas on a : X est UMD ce qui implique que $\mathsf{L^p}(0,\mathsf{T};\mathsf{X})$ est UMD.

L'opérateur linéaire fermé B satisfait :(voir Dore-Venni[11])

$$\begin{cases} \rho(\mathsf{B}) \supset]-\infty,0] \; et \; \forall\,\lambda \geqq 0 \, : \, \exists\, c_0 > 0 \, : \, \|(\lambda\mathsf{I}-\mathsf{B})^{-1}\|_{L(\mathsf{X})} \leqq \dfrac{c_0}{1+|\lambda|} \\ \xi \longmapsto \mathsf{B}_{is} \; est \;\; un \;\; groupe \;\; fortement \;\; continu \;\; tel \;\; que : \\ \forall\, s \in \mathbb{R} \, : \, \mathsf{B}^{is} \in L(\mathsf{X})\, et\, \exists\, c_1 > 0, : \, \|\mathsf{B}^{is}\|_{L(\mathsf{X})} \leqq c_1(1+s^2)e^{\frac{\pi}{2}|s|} \end{cases}$$

$\mathcal{A}$ et B vérifient (DV2), On utilise donc l'approche de Dore-Venni et on aura le résultat final suivant :

Si X est UMD et l'opérateur A comme défini ci-dessus alors $f \in \mathsf{L^p}(0,\mathsf{T};\mathsf{X})$, $1 < p < \infty$, le problème de Cauchy (P_c) admet une unique solution :

$$u \in W^{1,p}(0,T;X) \cap \mathsf{L^p}(0,\mathsf{T};\mathsf{D}(\mathsf{A}))$$

Donc :

$$t \longmapsto \mathsf{A}u(t) = \mathsf{A}\int_0^t e^{(t-s)\mathsf{A}} f(s)ds \in \mathsf{L^p}(0,\mathsf{T};\mathsf{X})$$

1.8 Lemmes techniques

Lemme 1.2 *(voir H.Triebel [26]) Soit* $p \in]1,\infty[$ *et supposons l'hypothèse 3, alors :*

1. $\mathsf{A}e^{x\mathsf{B}}\varphi \in \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{X})$ *si et seulement si* $\varphi \in (\mathsf{D}(\mathsf{A}),\mathsf{X})_{\frac{1}{2p},p}$.

2. $\mathsf{B}e^{x\mathsf{B}}\varphi \in \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{X})$ *si et seulement si* $\varphi \in (\mathsf{D}(\mathsf{A}),\mathsf{X})_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$.

Rappel :

On rappelle que si $m \in \mathbb{N}^*$ et C génère un semi-groupe analytique, alors :

$$\Phi \in (\mathsf{D}(\mathsf{C^m}), \mathsf{X})_{\frac{1}{mp},p} \quad \textit{si et seulement si} : \quad \mathsf{C^m} e^{x\mathsf{C}} \Phi \in \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{X})$$

En effet : supposons que $\Phi \in (\mathsf{D}(\mathsf{C^m}), \mathsf{X})_{\frac{1}{mp},p}$, donc d'après le théorème de Triebel (voir [26]) qui assure l'équivalence des

normes :$\|\Phi\|^{**} = \|x^{(1-\theta)m}\mathsf{C}^m G(x)\Phi\|_{\mathsf{L^p_*(X)}} + \|\Phi\|_{\mathsf{X}}$ et $\|\Phi\|_{(}\mathsf{D}(\mathsf{C^m}), \mathsf{X})_{\frac{1}{mp},p}$:

$\exists\, K > 0$

$$\begin{aligned} \|\Phi\|^{**} &= \|x^{m(1-(1-\frac{1}{mp}))}\mathsf{C}^m e^{x\mathsf{C}}\Phi\|_{\mathsf{L^p_*(X)}} + \|\Phi\|_{\mathsf{X}} \\ &\leqq K\|\Phi\|_{(}\mathsf{D}(\mathsf{C^m}), \mathsf{X})_{\frac{1}{mp},p} \\ &< \infty \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \|\mathsf{C}^m e^{x\mathsf{C}}\Phi\|^p_{\mathsf{X}} &= \int_0^1 \|\mathsf{C}^m e^{x\mathsf{C}}\Phi\|^p_X \, dx \\ &\leqq \int_0^\infty \|x^{m(1-(1-\frac{1}{mp}))}\mathsf{C}^m e^{x\mathsf{C}}\Phi\|^p_X \, \frac{dx}{x} \\ &= \|x^{m(1-(1-\frac{1}{mp}))}\mathsf{C}^m e^{x\mathsf{C}}\Phi\|^p_{\mathsf{L^p_*(X)}} \end{aligned}$$

donc :

$$\|\mathsf{C}^m e^{x\mathsf{C}}\Phi\|_{\mathsf{X}} \leqq \mathsf{K}\,\|\Phi\|_{(\mathsf{D}(\mathsf{C^m}),\mathsf{X})_{\frac{1}{mp},p}} \quad < \quad \infty$$

alors :

$$x \longmapsto \mathsf{C}^m e^{x\mathsf{C}}\,\Phi \in \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{X})$$

Et réciproquement :

on suppose que :

$$x \longmapsto \mathsf{C}^m e^{x\mathsf{C}}\,\Phi \in \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{X})$$

alors :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|x^{m(1-(1-\frac{1}{mp}))}\mathsf{C}^m e^{x\mathsf{C}}\Phi\|^p_X \, \frac{dx}{x} &= \int_0^\infty \|\mathsf{C}^m e^{x\mathsf{C}}\Phi\|^p_X \, dx \\ &= \int_0^1 \|\mathsf{C}^m e^{x\mathsf{C}}\Phi\|^p_X \, dx + \int_1^\infty \|\mathsf{C}^m e^{x\mathsf{C}}\Phi\|^p_X \, dx \end{aligned}$$

La première intégrale est finie et pour la deuxième intégrale, on a :

$$\|\mathsf{C}^m e^{x\mathsf{C}}\|_{\mathcal{L}(\mathsf{X})} \leqq \frac{\mathsf{K}}{x^m} \textit{ avec } \mathsf{K} > 0$$

alors :

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \|\mathsf{C}^m e^{x\mathsf{C}}\Phi\|_X^p\, dx &\leqq \int_1^\infty \tfrac{\mathsf{K}^p}{x^{mp}}\|\Phi\|_{\mathsf{X}}^p dx \\ &= \mathsf{K}^p \int_1^\infty x^{-mp} dx \|\Phi\|_{\mathsf{X}}^p \\ &= \tfrac{\mathsf{K}^p}{mp-1}\|\Phi\|_{\mathsf{X}}^p < \infty\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \|x^{m(1-(1-\frac{1}{mp}))}\mathsf{C}^m e^{x\mathsf{C}}\Phi\|_X^p \tfrac{dx}{x} &= \|x^{m(1-(1-\frac{1}{mp}))}\mathsf{C}^m e^{x\mathsf{C}}\Phi\|_{\mathsf{L}^{\mathsf{p}}_*(\mathsf{X})} \\ &< \infty\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\|\Phi\|^{**} &= \|x^{m(1-(1-\frac{1}{mp}))}\mathsf{C}^m e^{x\mathsf{C}}\Phi\|_{\mathsf{L}^{\mathsf{p}}_*(\mathsf{X})} + \|\Phi\|_{\mathsf{X}} \\ &< \infty\end{aligned}$$

et d'après l'équivalence des normes $\|\Phi\|^{**}$ et $\Phi \in (\mathsf{D}(\mathsf{C}^m), \mathsf{X})_{\frac{1}{mp},p}$ on constate que :

$$\|\Phi\|_{(\mathsf{D}(\mathsf{C}^m),\mathsf{X})_{\frac{1}{mp},p}} < \infty$$

et par suite :

$$\Phi \in (\mathsf{D}(\mathsf{C}^m), \mathsf{X})_{\frac{1}{mp},p}$$

Preuve(du lemme) :

1. D'après le rappel précédent :

$$\mathsf{A}e^{x\mathsf{B}}\varphi = \mathsf{B}^2 e^{x\mathsf{B}}\varphi \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,1;\mathsf{X}) \iff \varphi \in (\mathsf{D}(\mathsf{A}), \mathsf{X})_{\frac{1}{2p},p}$$

2. De même :

$$\mathsf{B}e^{x\mathsf{B}}\varphi \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,1;\mathsf{X}) \iff \varphi \in (\mathsf{D}(\mathsf{B}), \mathsf{X})_{\frac{1}{p},p} = (\mathsf{D}(\mathsf{A}), \mathsf{X})_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p} \text{ (d'après le lemme 1.1)}$$

D'où le résultat.

$\square$

Lemme 1.3 *Soit* X *un espace de Banach UMD. Soit* $f \in \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{X})$; *avec* $1 < p < \infty$, *sous les hypothèses 3 et 4 ; On a :*

(1.3) $$x \;\mapsto\; \mathsf{F}(x,f) = \mathsf{B}\int_0^x e^{(x-s)\mathsf{B}} f(s)\,ds \;\in\; \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{X})$$

(1.4) $$x \;\mapsto\; \mathsf{K}(x,f) = \mathsf{B}\int_x^1 e^{(s-x)\mathsf{B}} f(s)\,ds \;\in\; \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{X})$$

(1.5) $$x \;\mapsto\; \mathsf{T}(x,f) = \mathsf{B}\int_0^1 e^{(x+s)\mathsf{B}} f(s)\,ds \;\in\; \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{X})$$

Preuve : Pour 1.3 :
X étant UMD et B un opérateur linéaire fermé dans X vérifiant les hypothèses de Dore-Venni, alors :

$$v(x) = \int_0^x e^{(x-s)\mathsf{B}} f(s)\,ds$$

est la solution stricte et unique du problème de Cauchy :

(1.6) $$(P_c)\begin{cases} v'(x) + \mathsf{B}v(x) = f(x) \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

alors en appliquant le théorème de Dore-Venni sur ce problème de Cauchy ; on obtient :

$$v \in \mathsf{W}^{1,2}(0,1;\mathsf{X}) \cap \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{X})$$

donc :

$$x \mapsto F(x,f) \in \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{X})$$

Pour 1.4 :
En posant $t = 1 - s$, on obtient :

$$\begin{aligned} K(x,f) &= \mathsf{B}\int_x^1 e^{(s-x)\mathsf{B}} f(s)\,ds \\ &= \mathsf{B}\int_x^1 e^{(s-1+1-x)\mathsf{B}} f(s)\,ds \\ &= \mathsf{B}\int_x^1 e^{((1-x)-(1-s))\mathsf{B}} f(s)\,ds \\ &= \mathsf{B}\int_x^1 e^{((1-x)-t)\mathsf{B}} f(1-t)\,dt \\ &= F(1-x, f(1-x)) \end{aligned}$$

donc :

$$x \;\longmapsto\; K(x,f) = \; x \;\longmapsto\; F(1-x, f(1-x)) \in \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{X}) \text{ d'après 1.3}$$

Pour 1.5 :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in [0,1] : T(x,f) &= \mathsf{B}\int_0^1 e^{(x+s)\mathsf{B}} f(s)\,ds \\ &= \mathsf{B}\int_0^x e^{(x+s)\mathsf{B}} f(s)\,ds + \mathsf{B}\int_x^1 e^{(x+s)\mathsf{B}} f(s)\,ds \\ &= \mathsf{B}\int_0^x e^{(x-s)\mathsf{B}}\, e^{2s\mathsf{B}} f(s)\,ds + e^{2x\mathsf{B}}\,\mathsf{B}\int_x^1 e^{(s-x)\mathsf{B} f(s)\,ds} \\ &= F(x, e^{2\mathsf{B}} f) + e^{2x\mathsf{B}} K(x,f)\end{aligned}$$

donc :

$$T(x,f) = 0 \implies F(x, e^{2\mathsf{B}} f) + e^{2x\mathsf{B}} K(x,f) \in \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{X}) \text{ d'après 1.3 et 1.4}$$

□

Corollaire 1.1 *Soit* X *un espace de Banach UMD. Soit* $f \in \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{X})$; *avec* $1 < p < \infty$, *sous les hypothèses 3 et 4 ; On a :*

$$\int_0^1 e^{s\mathsf{B}} f(s)\,ds \in (\mathsf{D}(\mathsf{B}),\mathsf{X})_{\frac{1}{p},p} = (\mathsf{D}(\mathsf{A}),\mathsf{X})_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$$

Preuve : 1.5 implique que :

$$x \mapsto \mathsf{B} e^{x\mathsf{B}} \int_0^1 e^{s\mathsf{B}} f(s) ds \in \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{X})$$

donc en appliquant la deuxième assertion du lemme 1.2 on obtient :

$$\int_0^1 e^{s\mathsf{B}} f(s) ds \in (\mathsf{D}(\mathsf{A}),\mathsf{X})_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}.$$

□

Chapitre 2

Étude du problème 1

2.1 Position du problème

On considère le problème abstrait suivant dans un espace de Banach UMD E :

$$(2.1) \qquad \begin{cases} u''(x) + \mathsf{A}u(x) = f(x) \;\; p.p \; x \in (0,1) \\ \alpha\, u'(1) - \gamma\, \mathsf{H}u(0) = d_0 \\ \beta\, u'(0) + \delta\, \mathsf{K}u(1) = d_1 \end{cases}$$

où :
$f \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,1;\mathsf{E})$ *avec* $1 < p < \infty$;
A est un opérateur linéaire fermé de domaine $\mathsf{D}(\mathsf{A})$ dans E vérifiant :

$$\begin{cases} [0,+\infty[\; \supset \rho(\mathsf{A}) \\ \sup_{\lambda \geqq 0} \|\lambda(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I})^{-1}\|_{L(\mathsf{E})} < \infty. \end{cases}$$

On sait que cette hypothèse implique que $-(-\mathsf{A})^{\frac{1}{2}}$ génère un semi-groupe analytique borné dans E(voir [3])
On suppose aussi que :

$$\begin{cases} \forall\, s \in \mathbb{R}, (-\mathsf{A})^{is} \in \mathcal{L}(\mathsf{E}) \;\; et \;\; \exists\, \theta_{\mathsf{A}} \in]0,\pi[; \\ telque \; : \; \sup_{s\in\mathbb{R}} \|e^{-\theta_{\mathsf{A}}|s|}(-\mathsf{A})^{is}\|_{L(\mathsf{E})} < \infty. \end{cases}$$

$d_0, d_1 \in \mathsf{E}$;
$\alpha,\ \beta,\ \gamma\, et\, \delta \in \mathbb{C}$, telles que :

$$(\alpha,\gamma) \neq (0,0) \;\; (\alpha,\delta) \neq (0,0)) \;\; (\beta,\gamma) \neq (0,0)) \;\; et) \;\; (\beta,\delta) \neq (0,0)$$

et H, K sont des opérateurs linéaires fermés dans E vérifiant :

$$0 \in \rho(\mathsf{H}) \cap \rho(\mathsf{K})$$

Et les conditions de commutativité suivantes :

$$\mathsf{A}^{-1}\mathsf{H}^{-1} = \mathsf{H}^{-1}\mathsf{A}^{-1} \ , \ \mathsf{A}^{-1}\mathsf{K}^{-1} = \mathsf{K}^{-1}\mathsf{A}^{-1} \ et \ \mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1} = \mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}.$$

On pose : $\mathsf{B} = -(-\mathsf{A})^{\frac{1}{2}}$ et on considère l'opérateur Π définit par :

$$D(\Pi) = \mathsf{D}(\mathsf{B}^2\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}) \ et \ \Pi = \mathsf{B}^2\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1} - \gamma\delta\mathsf{I}$$

Supposons que :

$$\Pi \text{ est inversible}$$

On définit l'opérateur Λ par :

$$\mathsf{D}(\Lambda) = D(\Pi(\mathsf{I} - e^{2\mathsf{B}})) = D(\Pi) \quad et \quad \Lambda = \Pi(\mathsf{I} - e^{2\mathsf{B}}) + 2(\alpha\delta\mathsf{H}^{-1} + \gamma\beta\mathsf{K}^{-1})\mathsf{B}e^{\mathsf{B}}$$

Et on suppose que :

$$\Lambda \text{ est fermé inversible}$$

Remarque : 2.1

i. *L'hypothèse 7 implique que* $(\alpha\beta, \gamma\delta) \neq (0,0)$ *et ceci est assuré par 2.*

ii. *Concernant* Π*, on note que :*

1. *Si* $\alpha\beta = 0$ *alors :*

$$D(\Pi) = \mathsf{E} \quad et \quad \Pi = -\gamma\delta\mathsf{I} \ est \ inversible.$$

2. *Si* $\alpha\beta \neq 0$ *et* $\mathsf{H} = \mathsf{K} = \mathsf{I}$ *alors :*

$$D(\Pi) = \mathsf{D}(\mathsf{B}^2) \quad et \quad \Pi = \alpha\beta\left(\mathsf{B}^2 - \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}\mathsf{I}\right) = \alpha\beta\left(\mathsf{A} - \left(\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}\right)\mathsf{I}\right)$$

Donc 7 est satisfaite si et seulement si :

$$\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} \in \rho(\mathsf{A}).$$

3. *Si* $\alpha\beta \neq 0$ *et* $\mathsf{H} = \mathsf{K} = \mathsf{B}$ *alors :*

$$D(\Pi) = \mathsf{E} \quad et \quad \Pi = (\alpha\beta - \gamma\delta)\mathsf{I}$$

Donc 7 est satisfaite si et seulement si :

$$\gamma\delta \neq \alpha\beta$$

4. *Si* $\alpha\beta \neq 0$ *et* $(\mathsf{H}, \mathsf{K}) = (\mathsf{B}, \mathsf{I})$ *ou* (I, B) *alors :*

$$D(\Pi) = \mathsf{D}(\mathsf{B}) \quad et \quad \Pi = \alpha\beta \left(\mathsf{B} - \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}\mathsf{I}\right)$$

Donc 7 est satisfaite si et seulement si :

$$\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} \in \rho(\mathsf{B}).$$

iii. *Si* $\xi \in \mathsf{E}$ *alors :*

$$\alpha\beta\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\xi \in \mathsf{D}(\mathsf{B}^2)$$

$$ainsi\ :\ \Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\xi \in \mathsf{D}(\mathsf{B}^2) \quad lorsque \quad \alpha\beta \neq 0$$

Il suffit d'écrire pour tout $\xi \in \mathsf{E}$ *:*

$$\Pi^{-1}\xi \in \mathsf{D}(\Pi) \quad = \quad \mathsf{D}(\mathsf{B}^2\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1})$$

Donc :

$$\alpha\beta\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\xi \quad = \quad \Pi^{-1}\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\xi \in \ \mathsf{D}(\mathsf{B}^2)$$

2.2 Représentation de la solution

On cherche une représentation de la solution à l'aide de la théorie des semi-groupes. Pour cela on utilise la méthode de réduction de l'ordre de Krein (voir [17]) :
posons : $y(x) = \frac{1}{2}[u(x) - v(x)]$, $z(x) = \frac{1}{2}[u(x) + v(x)]$, $v(x) = \mathsf{B}^{-1}u'(x)$ et $\mathsf{B}^2 = -\mathsf{A}$
Dérivons y :

$$y'(x) = \tfrac{1}{2}[u'(x) - v'(x)] \implies y'(x) = -\tfrac{1}{2}\mathsf{B}v(x) - \tfrac{1}{2}[-\mathsf{B}^{-1}u''(x)] \ (car\ v'(x) = -\mathsf{B}^{-1}u''(x))$$

$$\implies y'(x) = -\tfrac{1}{2}\mathsf{B}v(x) + \tfrac{1}{2}[\mathsf{B}^{-1}u''(x)]$$

Remplaçons u"(x) par $f(x) - \mathsf{A}u(x)$ on obtient :

$$y'(x) = -\tfrac{1}{2}\mathsf{B}v(x) + \tfrac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}[f(x) - \mathsf{A}u(x)] \implies y'(x) = -\tfrac{1}{2}\mathsf{B}v(x) + \tfrac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}f(x) - \tfrac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}u(x)$$
$$\implies y'(x) = -\tfrac{1}{2}\mathsf{B}v(x) + \tfrac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}f(x) - \tfrac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}(-\mathsf{B}^2)u(x)$$
$$\implies y'(x) = -\tfrac{1}{2}\mathsf{B}v(x) + \tfrac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}f(x) + \tfrac{1}{2}\mathsf{B}u(x)$$

Et comme $y(x) = \frac{1}{2}[u(x) - v(x)]$ alors :

$$y'(x) = \mathsf{B}y(x) + \frac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}f(x)$$

De la même manière on aura :

$$z'(x) = -\mathsf{B}z(x) - \frac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}f(x)$$

Et le problème 2.1 est équivalent au deux problèmes :

$$\begin{cases} y'(x) - \mathsf{B}y(x) = \frac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}f(x) \\ y(0) = y_0 = \frac{u(0)-v(0)}{2} \\ = \frac{1}{2}u(0) + \frac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}u'(0) \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} z'(x) + \mathsf{B}z(x) = -\frac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}f(x) \\ z(1) = z_1 = \frac{u(1)+v(1)}{2} \\ = \frac{1}{2}u(1) - \frac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}u'(1) \end{cases}$$

La solution générale est donnée par :

$$y(x) = e^{x\mathsf{B}}y_0 + \tfrac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}\int_0^x e^{-(t-x)\mathsf{B}}f(t)dt$$

Et

$$z(x) = e^{(1-x)\mathsf{B}}z_1 + \tfrac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}\int_x^1 e^{(t-x)\mathsf{B}}f(t)dt$$

D'où la solution du problème 2.1 est donnée par :

$$\begin{aligned} u(x) &= y(x) + z(x) \\ &= e^{x\mathsf{B}}y_0 + \tfrac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}\int_0^x e^{-(t-x)\mathsf{B}}f(t)dt + e^{(1-x)\mathsf{B}}z_1 + \tfrac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}\int_x^1 e^{(t-x)\mathsf{B}}f(t)dt \end{aligned} \tag{2.2}$$

Représentation de la solution :

La solution u admet la représentation suivante :

$$u(x) = e^{x\mathsf{B}}y_0 + e^{(1-x)\mathsf{B}}z_1 + \mathsf{I}_x + \mathsf{J}_x$$

avec :

$$\mathsf{I}_x = \tfrac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}\int_0^x e^{-(t-x)\mathsf{B}}f(t)dt$$

Et

$$\mathsf{J}_x = \frac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}\int_x^1 e^{(t-x)\mathsf{B}} f(t)dt$$

Calcul de u' :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \left(\left[e^{x\mathsf{B}}y_0 + \frac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}\int_0^x e^{-(t-x)\mathsf{B}} f(t)dt + e^{(1-x)\mathsf{B}}z_1 + \frac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}\int_x^1 e^{(t-x)\mathsf{B}} f(t)dt\right]\right)' \\ &= \mathsf{B}e^{x\mathsf{B}}y_0 - \mathsf{B}e^{(1-x)\mathsf{B}}z_1 + \mathsf{B}\mathsf{I}_x - \mathsf{B}\mathsf{J}_x \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{cases} u(0) = y_0 + e^{\mathsf{B}}z_1 + \mathsf{J}_0; \\ u(1) = e^{\mathsf{B}}y_0 + z_1 + \mathsf{I}_1; \\ u'(0) = \mathsf{B}y_0 - \mathsf{B}e^{\mathsf{B}}z_1 - \mathsf{B}\mathsf{J}_0; \\ u'(1) = \mathsf{B}e^{\mathsf{B}}y_0 - \mathsf{B}z_1 + \mathsf{B}\mathsf{I}_1. \end{cases}$$

On a aussi les conditions non locales généralisées suivantes :

$$\begin{cases} \alpha\, u'(1) - \gamma\, \mathsf{H}u(0) = d_0; \\ \beta\, u'(0) - \delta\, \mathsf{K}u(1) = d_1. \end{cases}$$

En remplaçant les expressions de u'(1), u(0), u'(0) et u(1), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha\,(\mathsf{B}e^{\mathsf{B}}y_0 - \mathsf{B}z_1 + \mathsf{B}\mathsf{I}_1) - \gamma\,\mathsf{H}(y_0 + e^{\mathsf{B}}z_1 + \mathsf{J}_0) = d_0. \\ \beta\,(\mathsf{B}y_0 - \mathsf{B}e^{\mathsf{B}}z_1 - \mathsf{B}\mathsf{J}_0) + \delta\,\mathsf{K}(e^{\mathsf{B}}y_0 + z_1 + \mathsf{I}_1) = d_1. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha\,\mathsf{B}e^{\mathsf{B}}y_0 - \alpha\,\mathsf{B}z_1 + \alpha\,\mathsf{B}\mathsf{I}_1 - \mathsf{H}(\gamma\,y_0 + \gamma\,e^{\mathsf{B}}z_1 + \gamma\,\mathsf{J}_0) = d_0 \\ \beta\,\mathsf{B}y_0 - \beta\,\mathsf{B}e^{\mathsf{B}}z_1 - \beta\,\mathsf{B}\mathsf{J}_0 + \mathsf{K}(\delta\,e^{\mathsf{B}}y_0 + \delta\,z_1 + \delta\,\mathsf{I}_1) = d_1 \end{cases}$$

En appliquant $\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-2}$ à la première équation et $\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-2}$ à la deuxième, on aura :

$$\begin{cases} \alpha\,\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-2}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}}y_0 - \alpha\,\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-2}\mathsf{B}z_1 + \alpha\,\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-2}\mathsf{B}\mathsf{I}_1 - \mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-2}\mathsf{H}(\gamma\,y_0 + \gamma\,e^{\mathsf{B}}z_1 + \gamma\,\mathsf{J}_0) = \mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-2}d_0.; \\ \beta\,\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-2}\mathsf{B}y_0 - \beta\,\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-2}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}}z_1 - \beta\,\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-2}\mathsf{B}\mathsf{J}_0 + \mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-2}\mathsf{K}(\delta\,e^{\mathsf{B}}y_0 + \delta\,z_1 + \delta\,\mathsf{I}_1) = \mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-2}d_1. \end{cases}$$

En utilisant la commutativité, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha\,\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}}\mathsf{B}^{-2}y_0 - \alpha\,\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-2}\mathsf{B}z_1 + \alpha\,\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-2}\mathsf{B}\mathsf{I}_1 - \gamma\mathsf{B}^{-2}y_0 - \gamma\,e^{\mathsf{B}}\mathsf{B}^{-2}z_1 - \gamma\mathsf{B}^{-2}\,\mathsf{J}_0 = \mathsf{B}^{-2}\mathsf{H}^{-1}d_0. \\ \beta\,\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{B}^{-2}y_0 - \beta\,\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}}\mathsf{B}^{-2}z_1 - \beta\,\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{J}_0 + \delta\,e^{\mathsf{B}}\mathsf{B}^{-2}y_0 + \delta\mathsf{B}^{-2}\,z_1 + \delta\mathsf{B}^{-2}\,\mathsf{I}_1 = \mathsf{B}^{-2}\mathsf{K}^{-1}d_1. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (\alpha\, \mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}} - \gamma \mathsf{I})\mathsf{B}^{-2}y_0 - (\alpha\, \mathsf{H}^{-1}\mathsf{B} + \gamma\, e^{\mathsf{B}})\mathsf{B}^{-2}z_1 = d_0\mathsf{B}^{-2}\mathsf{H}^{-1} + \gamma\mathsf{B}^{-2}\mathsf{J}_0 - \alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{I}_1. \\ (\beta\, \mathsf{K}^{-1}\mathsf{B} + \delta\, e^{\mathsf{B}})\mathsf{B}^{-2}y_0 + (\delta\, \mathsf{I} - \beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}})\mathsf{B}^{-2}z_1 \ = d_1\mathsf{B}^{-2}\mathsf{K}^{-1} - \delta\mathsf{B}^{-2}\mathsf{I}_1 + \beta\, \mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{J}_0. \end{cases}$$

Si on pose $\overline{y_0} = \mathsf{B}^{-2}y_0$ et $\overline{z_1} = \mathsf{B}^{-2}z_1$ ceci implique :

$$\begin{cases} (\alpha\, \mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}} - \gamma \mathsf{I})\overline{y_0} - (\alpha\, \mathsf{H}^{-1}\mathsf{B} + \gamma\, e^{\mathsf{B}})\overline{z_1} = d_0\mathsf{B}^{-2}\mathsf{H}^{-1} + \gamma\mathsf{B}^{-2}\mathsf{J}_0 - \alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{I}_1. \\ (\beta\, \mathsf{K}^{-1}\mathsf{B} + \delta\, e^{\mathsf{B}})\overline{y_0} + (\delta\, \mathsf{I} - \beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}})\overline{z_1} \ = d_1\mathsf{B}^{-2}\mathsf{K}^{-1} - \delta\mathsf{B}^{-2}\mathsf{I}_1 + \beta\, \mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{J}_0. \end{cases}$$

Résolution du système :

Appliquons $(\delta\mathsf{I} - \beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}})$ à la première équation :

$(\delta\alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}} - \delta\gamma\mathsf{I} - \beta\alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^2e^{\mathsf{B}} + \gamma\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}})\overline{y}_0 - (\alpha\delta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B} - \beta\alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^2e^{\mathsf{B}} + \gamma\delta\, e^{\mathsf{B}}$

$-\gamma\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}e^{2\mathsf{B}})\overline{z}_1 = d_0\delta\mathsf{B}^{-2}\mathsf{H}^{-1} + \delta\gamma\mathsf{B}^{-2}\mathsf{J}_0 - \delta\alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{I}_1 - d_0\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-1}e^{\mathsf{B}} - \beta\gamma\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{J}_0$

$+\alpha\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}e^{\mathsf{B}}\mathsf{I}_1.$

Appliquons $-(\alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B} + \gamma\, e^{\mathsf{B}})$ à la deuxième équation :

$(-\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^2 - \alpha\delta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}} - \gamma\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}} - \gamma\delta\, e^{2\mathsf{B}})\overline{y}_0 - (\alpha\delta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B} - \alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^2 + \gamma\delta\, e^{\mathsf{B}}$

$-\gamma\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}e^{2\mathsf{B}})\overline{z}_1 = -\alpha\, d_1\mathsf{B}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1} + \alpha\delta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{I}_1 - \alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{J}_0 - \gamma\, d_1\mathsf{B}^2\mathsf{K}^{-1}e^{\mathsf{B}} + \gamma\delta\mathsf{B}^{-2}e^{\mathsf{B}}\mathsf{I}_1$

$-\gamma\beta\mathsf{B}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e\mathsf{B}\mathsf{J}_0.$

La soustraction des deux résultats nous ramène à déterminer $\overline{y}_0$:

$(2\alpha\delta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}} - \delta\gamma\mathsf{I} - \beta\alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^2e^{2\mathsf{B}} + 2\gamma\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}} + \alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^2 + \gamma\delta\, e^{2\mathsf{B}})\overline{y}_0 =$

$\alpha\, d_1\mathsf{B}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1} - 2\alpha\delta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{I}_1 + \alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{J}_0 + \gamma\, d_1\mathsf{B}^{-2}\mathsf{k}^{-1}e^{\mathsf{B}} - \gamma\delta\mathsf{B}^{-2}e^{\mathsf{B}}\mathsf{I}_1 + d_0\delta\mathsf{B}^{-2}\mathsf{H}^{-1}$

$+\delta\gamma\mathsf{B}^{-2}\mathsf{J}_0 - d_0\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-1}e^{\mathsf{B}} + \alpha\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}e^{\mathsf{B}}\mathsf{I}_1.$

ceci implique que :

$(2\alpha\delta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}} - \delta\gamma\mathsf{I} - \beta\alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^2e^{2\mathsf{B}} + 2\gamma\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}} + \alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^2 + \gamma\delta\, e^{2\mathsf{B}})\overline{y}_0 =$

$e^{\mathsf{B}}\left[-\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-1}d_0 + \alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{I}_1 + \gamma\, \mathsf{B}^{-2}\mathsf{k}^{-1}e^{\mathsf{B}}d_1 - \gamma\delta\mathsf{B}^{-2}e^{\mathsf{B}}\mathsf{I}_1\right] + \delta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-2}d_0 + \gamma\delta\mathsf{B}^{-2}\mathsf{J}_0$

$-2\alpha\delta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{I}_1 + \alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{k}^{-1}d_1 + \alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{k}^{-1}\mathsf{J}_0.$

Posons :

(2.3) $\Lambda = (2\alpha\delta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}} - \delta\gamma\mathsf{I} - \beta\alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^2e^{2\mathsf{B}} + 2\gamma\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}} + \alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^2 + \gamma\delta\, e^{2\mathsf{B}})$.

L'équation précédente devient :

$$\Lambda\,\overline{y}_0 = e^{\mathsf{B}}\left[-\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-1}d_0 + \alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{I}_1 + \gamma\,\mathsf{B}^{-2}\mathsf{k}^{-1}e^{\mathsf{B}}d_1 - \gamma\delta\mathsf{B}^{-2}e^{\mathsf{B}}\mathsf{I}_1\right] + \delta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-2}d_0 + \gamma\delta\mathsf{B}^{-2}\mathsf{J}_0$$

$$-2\alpha\delta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{I}_1 + \alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{k}^{-1}d_1 + \alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{k}^{-1}\mathsf{J}_0.$$

Si on pose :

$$\Phi = -\beta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1}d_0 + \alpha\beta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{I}_1 + \gamma\Lambda^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-2}d_1 - \gamma\delta\Lambda^{-1}\mathsf{B}^{-2}\mathsf{I}_1.$$

On aura :
(2.4)
$$\overline{y}_0 = e^{\mathsf{B}}\Phi + \delta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-2}d_0 + \gamma\delta\Lambda^{-1}\mathsf{B}^{-2}\mathsf{J}_0 - 2\alpha\delta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{I}_1 + \alpha\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1}d_1 + \alpha\beta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{J}_0.$$

Maintenant on applique :$(\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B} + \delta\, e^{\mathsf{B}})$ à l'équation une on obtient :

$$\beta\alpha\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^2e^{\mathsf{B}} - \beta\gamma\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B} + \delta\alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}e^{2\mathsf{B}} - \delta\gamma\, e^{\mathsf{B}})\overline{y}_0 - (\alpha\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^2 + \gamma\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}} + \delta\alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}$$

$$+\gamma\delta\, e^{2\mathsf{B}})\overline{z}_1 = \beta\, d_0\mathsf{B}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1} + \beta\gamma\mathsf{B}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{J}_0 - \beta\alpha\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{I}_1 + \delta\, d_0\mathsf{B}^{-2}\mathsf{H}^{-1}e^{\mathsf{B}} + \delta\gamma\mathsf{B}^{-2}e^{\mathsf{B}}\mathsf{J}_0$$

$$-\delta\alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-1}e^{\mathsf{B}}\mathsf{I}_1.$$

Et on applique $(\alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}} - \gamma\mathsf{I})$ à la deuxième équation on aura :

$$\alpha\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^2e^{\mathsf{B}} + \alpha\delta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}e^{2\mathsf{B}} - \gamma\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B} - \gamma\delta\, e^{\mathsf{B}})\overline{y}_0 + (\alpha\delta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}} - \alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^2e^{2\mathsf{B}} - \gamma\delta\mathsf{I}$$

$$+\gamma\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}})\overline{z}_0 = \alpha\, d_1\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1}e^{\mathsf{B}} - \alpha\delta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{I}_1e^{\mathsf{B}} + \alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{\mathsf{B}}\mathsf{J}_0 - \gamma\, d_1\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-2}$$

$$+\gamma\delta\mathsf{B}^{-2}\mathsf{I}_1 - \gamma\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{J}_0.$$

La soustraction des deux résultats nous donne :

$$(2\alpha\delta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}} - \alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^2e^{2\mathsf{B}} - \gamma\delta\mathsf{I} + 2\gamma\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}e^{\mathsf{B}} + \alpha\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^2 + \gamma\delta\, e^{2\mathsf{B}})\overline{z}_1 =$$

$$-\beta\, d_0\mathsf{B}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1} + \alpha\beta\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{I}_1 - \delta\, d_0\mathsf{B}^{-2}\mathsf{H}^{-1}e^{\mathsf{B}} - \delta\gamma\mathsf{B}^{-2}e^{\mathsf{B}}\mathsf{J}_0 - \delta\alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-1}e^{\mathsf{B}}\mathsf{I}_1 + \alpha\, d_1\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1}e^{\mathsf{B}}$$

$$+\alpha\delta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{I}_1e^{\mathsf{B}} + \alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{\mathsf{B}}\mathsf{J}_0 - \gamma\, d_1\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-2} + \gamma\delta\mathsf{B}^{-2}\mathsf{I}_1 - 2\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{J}_0.$$

d'après 2.3 on obtient :

$$\Lambda\,\overline{z}_1 \;=\; e^{\mathsf{B}}\left[-\delta \mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-2}d_0 + \alpha \mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1}d_1 - \gamma\,\delta \mathsf{B}^{-2}\mathsf{J}_0 + \alpha\beta \mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{J}_0\right] - \beta \mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1}d_0$$

$$-\gamma \mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-2}d_1 + \alpha\beta \mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{I}_1 - 2\gamma\beta \mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{J}_0 + \gamma\delta \mathsf{B}^{-2}\mathsf{I}_1.$$

Et on posant :

$$\Psi \;=\; -\delta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-2}d_0 + \alpha\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1}d_1 - \gamma\delta\Lambda^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{B}^{-2}\mathsf{J}_0 + \alpha\beta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{J}_0.$$

La valeur de $\overline{z}_1$ sera donnée par l'expression :

(2.5)

$$\overline{z}_1 \;=\; e^{\mathsf{B}}\Psi - \beta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1}d_0 - \gamma\Lambda^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-2}d_1 + \alpha\beta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{I}_1 - 2\gamma\beta\Lambda^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{J}_0 + \gamma\delta\Lambda^{-1}\mathsf{B}^{-2}\mathsf{I}_1.$$

De 2.4 et comme $\overline{y}_0 = \mathsf{B}^{-2}y_0$ alors :

$$\alpha\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1}d_1 \;=\; \mathsf{B}^{-2}y_0 - e^{\mathsf{B}}\Phi - \mathsf{B}^{-2}\delta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}d_0 - \mathsf{B}^{-2}\gamma\delta\Lambda^{-1}\mathsf{J}_0 + 2\mathsf{B}^{-2}\alpha\delta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{I}_1$$

$$-\alpha\beta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{J}_0.$$

D'après iii de la remarque 2.1 on déduit que :

$$\alpha\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1}d_1 \;\in\; \mathsf{D}(\mathsf{B}^2)$$

Et par suite :

$$\alpha\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1 \;\in\; \mathsf{D}(\mathsf{B})$$

Et y_0 s'exprime par :

$$y_0 \;=\; \mathsf{B}^2e^{\mathsf{B}}\Phi + \delta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}d_0 + \gamma\delta\Lambda^{-1}\mathsf{J}_0 - 2\alpha\delta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{I}_1 + \mathsf{B}\alpha\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1 + \mathsf{B}\alpha\beta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{J}_0.$$

Le même raisonnement pour l'équation 2.5 nous conduit à déterminer z_1 qui sera donné

par la formule suivante :

$$z_1 \;=\; \mathsf{B}^2e^{\mathsf{B}}\Psi - \mathsf{B}\beta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}d_0 - \gamma\Lambda^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1 + \mathsf{B}^2\alpha\beta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{I}_1 - 2\gamma\beta\Lambda^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{J}_0 + \mathsf{B}^2\gamma\delta\Lambda^{-1}\mathsf{I}_1.$$

En substituant y_0 et z_1 dans 2.2, on obtient la solution :

$$u(x) \;=\; \mathsf{B}^2e^{x\mathsf{B}}e^{\mathsf{B}}\Phi + \delta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}d_0 + \gamma\delta\Lambda^{-1}\,e^{x\mathsf{B}}\mathsf{J}_0 - 2\alpha\delta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}e^{x\mathsf{B}}\mathsf{I}_1 + \mathsf{B}\alpha\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{x\mathsf{B}}d_1$$

$$+\mathsf{B}^2\alpha\beta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{x\mathsf{B}}\mathsf{J}_0 + \mathsf{B}^2e^{(1-x)\mathsf{B}}e^{\mathsf{B}}\Psi - \mathsf{B}\beta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}d_0 - \gamma\Lambda^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}d_1 + \mathsf{B}^2\gamma\delta\Lambda^{-1}\,e^{(1-x)\mathsf{B}}\mathsf{I}_1$$

$$+\mathsf{B}^2\alpha\beta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\mathsf{I}_1 - 2\gamma\beta\Lambda^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}e^{(1-x)\mathsf{B}}\mathsf{J}_0 + \mathsf{I}_x + \mathsf{J}_x.$$

On peut écrire la solution u(x) sous la forme :

$$u(x) = \mathsf{R}(x,d_0,d_1,f)+\mathsf{DV_1}(x,f)+\mathsf{DV_2}(x,f)+\mathsf{S}(x,d_0,d_1,f). \tag{2.6}$$

où :

$$\mathsf{R}(x,d_0,d_1,f) = e^{x\mathsf{B}}e^{\mathsf{B}}\Phi+e^{(1-x)}e^{\mathsf{B}}\Psi$$

$$\begin{aligned}\mathsf{DV_1}(x,f) &= \frac{1}{2}\gamma\delta\Lambda^{-1}\mathsf{B}^{-1}e^{x\mathsf{B}}\int_0^1 e^{x\mathsf{B}}f(s)ds+\frac{1}{2}\gamma\delta\Lambda^{-1}\mathsf{B}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\int_0^1 e^{(1-x)\mathsf{B}}f(s)ds\\ &+ \frac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}\int_0^x e^{(x-s)\mathsf{B}}f(s)ds+\frac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)\mathsf{B}}f(s)ds.\end{aligned}$$

$$\mathsf{DV_2}(x,f) = \frac{1}{2}\mathsf{B}\alpha\beta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{x\mathsf{B}}\int_0^1 e^{s\mathsf{B}}f(s)ds+\frac{1}{2}\mathsf{B}\alpha\beta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds$$

$$\begin{aligned}\mathsf{S}(x,d_0,d_1,f) &= \delta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}d_0-\mathsf{B}\beta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}d_0+\mathsf{B}\alpha\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{x\mathsf{B}}d_1-\gamma\Lambda^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}d_1\\ &- \alpha\delta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds-\gamma\beta\Lambda^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\int_0^1 e^{s\mathsf{B}}f(s)ds\end{aligned}$$

2.3 La régularité

Proposition 2.1 *Soit* $d_0,d_1\in\mathsf{E}; f\in\mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{E}); 1<p<\infty$ *alors :*

$$x \longmapsto \mathsf{AR}(x,d_0,d_1,f)\in\mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{E}).$$

Preuve :

Pour tout $\xi\in\mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{E}), k\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$e^{\mathsf{B}}\xi \in \mathsf{D}(\mathsf{B^k})$$

En particulier pour k=2 on a :

$$e^{\mathsf{B}}\xi \in \mathsf{D}(\mathsf{B}^2)$$

Ceci implique que :

$$\mathsf{B}^2e^{\mathsf{B}}\xi\in\mathsf{L^p}$$

C'est à dire :

$$\mathsf{A}e^{\mathsf{B}}\xi \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}.$$

Donc :

$$x \longmapsto \mathsf{A}e^{x\mathsf{B}}e^{\mathsf{B}}\xi = e^{x\mathsf{B}}\mathsf{A}e^{\mathsf{B}}\xi \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}.$$

D'où :

$$x \longmapsto \mathsf{AR}(x, d_0, d_1, f) = \mathsf{A}e^{x\mathsf{B}}e^{\mathsf{B}}\phi + \mathsf{A}e^{(1-x)\mathsf{B}}e^{\mathsf{B}}\psi \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,1;\mathsf{E}).$$

□

Proposition 2.2 *Si* $f \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,1;\mathsf{E}), 1 < p < \infty$ *alors :*

$$x \longmapsto \mathsf{ADV}_1(x, f) \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,1;\mathsf{E}).$$

Remarque : 2.2 *Soit* E *un espace de Banach. On suppose 3 et 4 et soit* $f \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,1;\mathsf{E})$ *avec :* $1 < p < \infty$ *alors :*

$$x \longmapsto \mathsf{B}\int_0^x e^{(x-s)\mathsf{B}}f(s)ds \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,1;\mathsf{E}).$$

Par conséquent et avec un changement de variable :

$$x \longmapsto \mathsf{B}\int_x^1 e^{(s-x)\mathsf{B}}f(s)ds \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,1;\mathsf{E}).$$

Preuve(de la proposition 2.2) :

Soit :

$$\begin{aligned}\mathsf{DV}_1(x,f) &= -\frac{1}{2}\gamma\delta\Lambda^{-1}\mathsf{B}e^{x\mathsf{B}}\int_0^1 e^{s\mathsf{B}}f(s)ds - \frac{1}{2}\gamma\delta\Lambda^{-1}\mathsf{B}e^{(1-x)\mathsf{B}}\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds \\ &- \frac{1}{2}\mathsf{B}\int_0^x e^{(x-s)\mathsf{B}}f(s)ds - \frac{1}{2}\mathsf{B}\int_x^1 e^{(s-x)\mathsf{B}}f(s)ds.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathsf{DV}_1(x,f) &= -\frac{1}{2}\gamma\delta\Lambda^{-1}\left[\mathsf{B}\int_0^1 e^{(x+s)\mathsf{B}}f(s)ds + \mathsf{B}\int_0^1 e^{[(1-x)+(1-s)]\mathsf{B}}f(s)ds\right] \\ &- \frac{1}{2}\mathsf{B}\int_0^x e^{(x-s)\mathsf{B}}f(s)ds - \frac{1}{2}\mathsf{B}\int_x^1 e^{(s-x)\mathsf{B}}f(s)ds.\end{aligned}$$

D'une part et d'après 1.3 et 1.4 (lemme 1.3) on a :

$$x \quad \longmapsto \quad \frac{1}{2}\mathsf{B}\int_0^x \; e^{(x-s)\mathsf{B}}f(s)ds \;\; \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(0,1;\mathsf{E}).$$

Et

$$x \quad \longmapsto \quad \frac{1}{2}\mathsf{B}\int_x^1 \; e^{(s-x)\mathsf{B}}f(s)ds \;\; \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(0,1;\mathsf{E}).$$

D'autre part et en utilisant 1.5 (lemme 1.3) on obtient :

$$x \quad \longmapsto \quad \mathsf{B}\int_0^1 \; e^{(x+s)\mathsf{B}}f(s)ds \;\; \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(0,1;\mathsf{E}).$$

Et

$$x \quad \longmapsto \quad \mathsf{B}\int_0^1 \; e^{\,[(1-x)+(1-s)\,]\mathsf{B}}f(s)ds \;\; \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(0,1;\mathsf{E}).$$

Et comme Λ^{-1} est borné alors :

$$x \quad \longmapsto \quad \mathsf{ADV}_1(x,f) \;\; \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(0,1;\mathsf{E})$$

Proposition 2.3 *Si* $f \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(0,1;\mathsf{E}), 1 < p < \infty$ *alors :*

$$x \quad \longmapsto \quad \mathsf{ADV}_2(x,f) \;\; \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(0,1;\mathsf{E})$$

Preuve : D'après le corollaire 1.1 on a :

$$\int_0^1 \; e^{s\mathsf{B}}f(s)\,ds \;\in\; (\mathsf{D}(\mathsf{B}),\mathsf{X})_{\frac{1}{p},p} = (\mathsf{D}(\mathsf{A}),\mathsf{X})_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}.$$

Donc en appliquant le lemme 1.2 ; On obtient :

$$x \quad \longmapsto \quad \mathsf{B}e^{x\mathsf{B}}\int_0^1 \; e^{s\mathsf{B}}f(s)ds \;\; \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(0,1;\mathsf{E}).$$

Et

$$x \quad \longmapsto \quad \mathsf{B}e^{(1-x)\mathsf{B}}\int_0^1 \; e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds \;\; \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(0,1;\mathsf{E})$$

□

De plus on a :

$$\forall \xi \in \mathsf{E}: \ \Pi^{-1}\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\xi \in \mathsf{D}(\mathsf{B}^2) \ = \ \mathsf{D}(\mathsf{A})$$

Et comme A est fermé alors :

$$\mathsf{A}\Pi^{-1}\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1} \in \mathsf{L}(\mathsf{E})$$

D'où :

$$x \ \longmapsto \ \mathsf{A}\Pi^{-1}\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{x\mathsf{B}}\mathsf{B}\int_0^1 \ e^{s\mathsf{B}}f(s)ds \in \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(0,1;\mathsf{E})$$

De la même façon on aura :

$$x \ \longmapsto \ \mathsf{A}\Pi^{-1}\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\mathsf{B}\int_0^1 \ e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds \in \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(0,1;\mathsf{E})$$

Lemme 2.1 *On a :*

$$\Lambda^{-1} = \Pi^{-1} + \Pi^{-1}\mathsf{W}$$

avec :

$$\mathsf{W} \in \mathcal{L}(\mathsf{E}) \quad et \quad \mathsf{W}(\mathsf{E}) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathsf{D}(\mathsf{B}^k)$$

Preuve 2.1 *Comme :*

$$\mathsf{I} - e^{2\mathsf{B}} \quad \textit{est inversible (voir A.Lunardi [18] p 60)}$$

Alors, on peut considérer :

$$\begin{cases} \mathsf{X} = 2\Pi^{-1}(\alpha\delta\mathsf{H}^{-1} + \gamma\beta\mathsf{K}^{-1})\mathsf{B}e^{\mathsf{B}}(\mathsf{I} - e^{2\mathsf{B}})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathsf{E}) \\ \\ \mathsf{S} = -e^{2\mathsf{B}} \in \mathcal{L}(\mathsf{E}). \end{cases}$$

Et on déduit que :

$$\Lambda^{-1} = (\mathsf{I}+\mathsf{S})^{-1}(\mathsf{I}+\mathsf{X})^{-1}\Pi^{-1}$$

Si on pose :

$$\begin{cases} -\mathsf{X}(\mathsf{I}+\mathsf{X})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathsf{E}) \\ \\ \mathsf{V} = -\mathsf{S}(\mathsf{I}+\mathsf{S})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathsf{E}). \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} (\mathsf{I}+\mathsf{X})^{-1} = \mathsf{I}+\mathsf{U} \\ (\mathsf{I}+\mathsf{S})^{-1} = \mathsf{I}+\mathsf{V}. \end{cases}$$

On obtient :

$$\Lambda^{-1} = (\mathsf{I}+\mathsf{U})(\mathsf{I}+\mathsf{V})\Pi^{-1} = (\mathsf{I}+\mathsf{V}+\mathsf{U}+\mathsf{UV})\Pi^{-1}$$

Donc :

$$\Lambda^{-1} = \Pi^{-1} + \Pi^{-1}\mathsf{W}$$

Avec :

$$\mathsf{W} = \mathsf{V}+\mathsf{U}(\mathsf{I}+\mathsf{V}) = (-\mathsf{S}+\mathsf{U})(\mathsf{I}+\mathsf{V}) = e^{\frac{1}{2}\mathsf{B}}M$$

Où :

$$\mathsf{M} = \left[e^{\frac{1}{2}\mathsf{B}} - 2\Pi^{-1}(\alpha\delta\mathsf{H}^{-1} + \gamma\beta\mathsf{K}^{-1})\mathsf{B}e^{\frac{1}{2}\mathsf{B}}(\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}})^{-1}\right](\mathsf{I}+\mathsf{V})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathsf{E}).$$

Étude de $S(x, d_0, d_1, f)$:

On a :

$$\begin{aligned} S(x,d_0,d_1,f) &= \delta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}d_0 - \mathsf{B}\beta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}d_0 + \mathsf{B}\alpha\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{x\mathsf{B}}d_1 - \gamma\Lambda^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}d_1 \\ &- \alpha\delta\Lambda^{-1}\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds - \gamma\beta\Lambda^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\int_0^1 e^{s\mathsf{B}}f(s)ds. \end{aligned}$$

D'après le lemme précédent on a :

$$\Lambda^{-1} = \Pi^{-1} + \Pi^{-1}\mathsf{W}$$

$$
\begin{aligned}
S(x,d_0,d_1,f) &= \delta(\Pi^{-1}+\Pi^{-1}\mathsf{W})\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}d_0-\mathsf{B}\beta(\Pi^{-1}+\Pi^{-1}\mathsf{W})\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}d_0\\
&+ \mathsf{B}\alpha(\Pi^{-1}+\Pi^{-1}\mathsf{W})\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{x\mathsf{B}}d_1-\gamma(\Pi^{-1}+\Pi^{-1}\mathsf{w})\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}d_1\\
&- \alpha\delta(\Pi^{-1}+\Pi^{-1}\mathsf{W})\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds\\
&- \gamma\beta(\Pi^{-1}+\Pi^{-1}\mathsf{W})\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\int_0^1 e^{s\mathsf{B}}f(s)ds.\\
&= \delta\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}d_0+\delta\Pi^{-1}\mathsf{W}\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}d_0-\mathsf{B}\beta\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}d_0\\
&- \mathsf{B}\beta\Pi^{-1}\mathsf{W}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}d_0+\mathsf{B}\alpha\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{x\mathsf{B}}d_1\\
&+ \mathsf{B}\alpha\Pi^{-1}\mathsf{W}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{x\mathsf{B}}d_1-\gamma\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}d_1-\gamma\Pi^{-1}\mathsf{W}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}d_1\\
&- \alpha\delta\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds-\alpha\delta\Pi^{-1}\mathsf{W}\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds\\
&- \gamma\beta\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\int_0^1 e^{s\mathsf{B}}f(s)ds-\gamma\beta\Pi^{-1}\mathsf{W}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\int_0^1 e^{s\mathsf{B}}f(s)ds.\\
&= \delta\, e^{x\mathsf{B}}\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-1}d_0+e^{x\mathsf{B}}\mathsf{B}\delta\Pi^{-1}\mathsf{W}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}^{-1}d_0-\mathsf{B}\beta\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}d_0\\
&- \mathsf{B}\beta\Pi^{-1}\mathsf{W}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}d_0+\mathsf{B}\alpha\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{x\mathsf{B}}d_1\\
&+ \mathsf{B}\alpha\Pi^{-1}\mathsf{W}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{x\mathsf{B}}d_1-\gamma\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\mathsf{B}^{-1}d_1-\gamma\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{W}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}d_1\\
&- \mathsf{B}\alpha\delta\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}\mathsf{B}^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds-\alpha\delta\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{W}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds\\
&- \mathsf{B}\gamma\beta\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\mathsf{B}^{-1}\int_0^1 e^{s\mathsf{B}}f(s)ds-\mathsf{B}\gamma\beta\Pi^{-1}\mathsf{W}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\mathsf{B}^{-1}\int_0^1 e^{s\mathsf{B}}f(s)ds.\\
&= \mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}\delta\mathsf{B}^{-1}d_0+\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}\alpha\mathsf{K}^{-1}d_1-\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}\alpha\delta\mathsf{B}^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds\\
&- \mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\beta\mathsf{H}^{-1}d_0-\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\gamma\mathsf{B}^{-1}d_1\\
&- \mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\gamma\beta\mathsf{B}^{-1}\int_0^1 e^{s\mathsf{B}}f(s)ds+e^{x\mathsf{B}}\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{W}\delta\mathsf{B}^{-1}\mathsf{H}^{-1}d_0\\
&+ e^{x\mathsf{B}}\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{W}\alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1-e^{x\mathsf{B}}\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{W}\alpha\delta\mathsf{B}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds\\
&- e^{(1-x)\mathsf{B}}\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{W}\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_0-e^{(1-x)\mathsf{B}}\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{W}\gamma\mathsf{B}^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1\\
&- e^{(1-x)\mathsf{B}}\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{W}\gamma\beta\mathsf{B}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\int_0^1 e^{s\mathsf{B}}f(s)ds.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S(x,d_0,d_1,f) &= \mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}\left[\delta\mathsf{B}^{-1}d_0+\alpha\mathsf{K}^{-1}d_1-\alpha\delta\mathsf{B}^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds\right]\\
&- \mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\left[\beta\mathsf{H}^{-1}d_0+\gamma\mathsf{B}^{-1}d_1+\gamma\beta\mathsf{B}^{-1}\int_0^1 e^{s\mathsf{B}}f(s)ds\right]\\
&+ e^{x\mathsf{B}}\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{W}\left[\delta\mathsf{B}^{-1}\mathsf{H}^{-1}d_0+\alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1-\alpha\delta\mathsf{B}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds\right]\\
&- e^{(1-x)\mathsf{B}}\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{W}\left[\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_0+\gamma\mathsf{B}^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1+\gamma\beta\mathsf{B}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\int_0^1 e^{s\mathsf{B}}f(s)ds\right].
\end{aligned}
$$

Si on pose :

$$
\xi_0=\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{W}\left[\delta\mathsf{B}^{-1}\mathsf{H}^{-1}d_0+\alpha\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1-\alpha\delta\mathsf{B}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds\right]
$$

Et

$$
\xi_1=\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{W}\left[\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_0+\gamma\mathsf{B}^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1+\gamma\beta\mathsf{B}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\int_0^1 e^{s\mathsf{B}}f(s)ds\right]
$$

On aura :

$$
\begin{aligned}
S(x,d_0,d_1,f) &= \mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}\left[\delta\mathsf{B}^{-1}d_0+\alpha\mathsf{K}^{-1}d_1-\alpha\delta\mathsf{B}^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds\right]\\
&- \mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\left[\beta\mathsf{H}^{-1}d_0+\gamma\mathsf{B}^{-1}d_1+\gamma\beta\mathsf{B}^{-1}\int_0^1 e^{s\mathsf{B}}f(s)ds\right]\\
&+ e^{x\mathsf{B}}\xi_0-e^{(1-x)\mathsf{B}}\xi_1.\\
&= \mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}\alpha\mathsf{K}^{-1}d_1+\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}e^{x\mathsf{B}}\left[\delta\, d_0-\alpha\delta\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds\right]\\
&- \mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\beta\mathsf{H}^{-1}d_0-\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}e^{(1-x)\mathsf{B}}\left[\gamma\, d_1+\gamma\beta\int_0^1 e^{s\mathsf{B}}f(s)ds\right]\\
&+ e^{x\mathsf{B}}\xi_0-e^{(1-x)\mathsf{B}}\xi_1.
\end{aligned}
$$

Et finalement :

$$\begin{aligned} S(x,d_0,d_1,f) &= e^{x\mathsf{B}}\left[\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\alpha\mathsf{K}^{-1}d_1+\delta\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\left[d_0-\alpha\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds\right]\right] \\ &+ e^{(1-x)\mathsf{B}}\left[-\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}\beta\mathsf{H}^{-1}d_0-\gamma\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}\left[d_1+\beta\int_0^1 e^{(s\mathsf{B}}f(s)ds\right]\right] \\ &+ e^{x\mathsf{B}}\xi_0-e^{(1-x)\mathsf{B}}\xi_1. \end{aligned}$$

2.4 Théorème principal du chapitre

Théorème 2.1 *Soit* E *un espace de Banach UMD. Soit* $f\in\mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,1;\mathsf{E})$ *avec* $1<p<\infty$.

On suppose 3∼ 8 ; Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i. $\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\alpha\mathsf{K}^{-1}d_1+\delta\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\left[d_0-\alpha\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds\right]\in(\mathsf{D}(\mathsf{B}^2),\mathsf{E})_{\frac{1}{2p},p}$

Et

$-\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}\beta\mathsf{H}^{-1}d_0-\gamma\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}\left[d_1+\beta\int_0^1 e^{(s\mathsf{B}}f(s)ds\right]\in(\mathsf{D}(\mathsf{B}^2),\mathsf{E})_{\frac{1}{2p},p}$

ii. *u donnée par 2.6 est l'unique solution stricte du problème 2.1 .*

Preuve : On a :

$$u(x) = \mathsf{R}(x,d_0,d_1,f)+\mathsf{DV}_1(x,f)+\mathsf{DV}_2(x,f)+\mathsf{S}(x,d_0,d_1,f)$$

En utilisant les propositions précédentes 2.1, 2.2 et 2.3, il suffit d'étudier le terme $\mathsf{S}(x,d_0,d_1,f)$.

On a :

$$\begin{aligned} S(x,d_0,d_1,f) &= e^{x\mathsf{B}}\left[\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\alpha\mathsf{K}^{-1}d_1+\delta\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\left[d_0-\alpha\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds\right]\right] \\ &+ e^{(1-x)\mathsf{B}}\left[-\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}\beta\mathsf{H}^{-1}d_0-\gamma\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}\left[d_1+\beta\int_0^1 e^{(s\mathsf{B}}f(s)ds\right]\right] \\ &+ e^{x\mathsf{B}}\xi_0-e^{(1-x)\mathsf{B}}\xi_1. \\ &= \mathsf{J}_1(x)+\mathsf{J}_2(x)+\mathsf{J}_3(x). \end{aligned}$$

Où :

$$\mathsf{J}_1(x) = e^{x\mathsf{B}}\left[\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\alpha\mathsf{K}^{-1}d_1 + \delta\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\left[d_0 - \alpha\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds\right]\right]$$

$$\mathsf{J}_2(x) = e^{(1-x)\mathsf{B}}\left[-\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}\beta\mathsf{H}^{-1}d_0 - \gamma\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}\left[d_1 + \beta\int_0^1 e^{(s\mathsf{B}}f(s)ds\right]\right]$$

et

$$\mathsf{J}_3(x) = e^{x\mathsf{B}}\xi_0 - e^{(1-x)\mathsf{B}}\xi_1.$$

$\mathsf{J}_3(x)$ est régulié car :

$$\xi_0, \xi_1 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathsf{D}(\mathsf{B}^{\mathsf{k}})$$

$x \longmapsto \mathsf{B}^2\mathsf{J}_1(x) \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,1;\mathsf{E})$ si et seulement si :

$$\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\alpha\mathsf{K}^{-1}d_1 + \delta\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\left[d_0 - \alpha\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds\right] \in (\mathsf{D}(\mathsf{B}^2),\mathsf{E})_{\frac{1}{2p},p}$$

De même : $x \longmapsto \mathsf{B}^2\mathsf{J}_2(x) \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,1;\mathsf{E})$ si et seulement si :

$$-\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}\beta\mathsf{H}^{-1}d_0 - \gamma\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}\left[d_1 + \beta\int_0^1 e^{(s\mathsf{B}}f(s)ds\right] \in (\mathsf{D}(\mathsf{B}^2),\mathsf{E})_{\frac{1}{2p},p}$$

Il reste à justifier que $\mathsf{B}\alpha\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1$ et $-\mathsf{B}\beta\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}d_0$ sont bien définis c'est-à-dire :

$$\alpha\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1 \ ; \ -\beta\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}d_0 \in \mathsf{D}(\mathsf{B})$$

En effet :

1. Si $\beta \neq 0$: $\mathsf{B}\alpha\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1} = \dfrac{1}{\beta}\beta\mathsf{B}\,\alpha\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1} \in \mathsf{L}(\mathsf{E})$ *car* :

$$\mathsf{D}(\Pi) = \mathsf{D}(\mathsf{B}^2) \quad et \quad \Pi = \alpha\beta\left(\mathsf{B}^2 - \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}\mathsf{I}\right) = \alpha\beta\left(\mathsf{A} - \left(\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}\right)\mathsf{I}\right)$$

$$\Pi^{-1} = \left[(\alpha\beta)^{-1}\left(\mathsf{A} - \left(\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}\right)\mathsf{I}\right)\right]^{-1}$$

2. Si $\beta = 0$: *on a d'une part* : $-\gamma\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1 \in (\mathsf{D}(\mathsf{B}^2), \mathsf{E})_{\frac{1}{2p},p} \subset \mathsf{D}(\mathsf{B})$

donc :

$$\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1 \in \mathsf{D}(\mathsf{B}). \tag{2.7}$$

Et d'autre part :

$$\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}^{-1} = \mathsf{B}^{-1}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}$$

Alors :

$$\mathsf{BK}\Pi = \mathsf{K}\Pi\mathsf{B} \,(\text{d'après la propriété}\,(2.6.1)) \tag{2.8}$$

Donc :

$$\begin{aligned} d_1 &= \mathsf{B}^{-1}\mathsf{BK}\Pi\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1 \\ &= \mathsf{B}^{-1}\mathsf{K}\Pi\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1 \quad (\text{car } 2.7 \text{ et } 2.8) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \; d_1 = \mathsf{B}^{-1}\xi \quad (\text{avec}\, \xi = \mathsf{K}\Pi\mathsf{B}\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1)$$

$$\Longrightarrow \; d_1 \in \mathsf{D}(\mathsf{B}).$$

De plus on peut écrire :

$$\mathsf{B}\alpha\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1 = \alpha\Pi^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{B}d_1$$

□

De la même manière on montre que :$-\mathsf{B}\beta\,\Pi^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}d_0$ est bien défini.

Chapitre 3

Problème avec paramètre spectral

3.1 Position du problème

Afin d'éliminer l'hypothèse de l'inversibilité du déterminant, on ajoute un paramètre spectral à l'équation. On considère le problème suivant :

$$(3.1) \qquad \begin{cases} u''(x) + \mathsf{A}u(x) - \omega\, u(x) = f(x) \quad p.p\ x \in (0,1) \\ \alpha\, u'(1) - \gamma\, \mathsf{H}u(0) = d_0 \\ \beta\, u'(0) + \delta\, \mathsf{K}u(1) = d_1 \end{cases}$$

Soient les hypothèses suivantes :

$$(3.2) \qquad \mathsf{E} \text{ } \textit{un espace de Banach UMD}$$

Soit $\omega_0 \geqq 0$ fixé ; On pose $\mathsf{A}_\omega = \mathsf{A} - \omega \mathsf{I}$ avec $\omega \geqq \omega_0$ tel que :

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \mathsf{A}_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé.} \\ [0, +\infty[\ \subset\ \rho(\mathsf{A}_{\omega_0})\ et\ \sup\limits_{\lambda \geqq 0} \|\lambda(\mathsf{A}_{\omega_0} - \lambda \mathsf{I})^{-1}\|_{L(\mathsf{E})} < \infty. \end{cases}$$

$$(3.4) \qquad \begin{cases} \forall\, s \in \mathbb{R}, (-\mathsf{A}_{\omega_0})^{is} \in \mathcal{L}(\mathsf{E})\ et\ \exists\, \theta_{\mathsf{A}_{\omega_0}} \in]0, \pi[; \\ tel\, que\ :\ \sup_{s \in \mathbb{R}} \|e^{-\theta_{\mathsf{A}_{\omega_0}} |s|}(-\mathsf{A}_{\omega_0})^{is}\|_{L(\mathsf{E})} < \infty. \end{cases}$$

$$(3.5) \qquad 0 \in \rho(\mathsf{H}) \cap \rho(\mathsf{K})$$

Et les conditions de commutativité suivantes :

$$(3.6) \qquad \mathsf{A}_{\omega_0}^{-1}\mathsf{H}^{-1} = \mathsf{H}^{-1}\mathsf{A}_{\omega_0}^{-1} \quad et \quad \mathsf{A}_{\omega_0}^{-1}\mathsf{K}^{-1} = \mathsf{K}^{-1}\mathsf{A}_{\omega_0}^{-1}$$

Pour $\omega \geqq \omega_0$, $\mathsf{B}_\omega = (-\mathsf{A}_\omega)^{\frac{1}{2}}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique dans E (voir [3]). De plus, puisque :

$$0 \in \rho(\mathsf{A}_\omega) \quad alors \quad 0 \in \rho(\mathsf{B}_\omega)$$

On définit aussi les opérateurs linéaires fermés Π_ω et Λ_ω par :

$$\Pi_\omega = {\mathsf{B}_\omega}^2 \alpha\beta \mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1} - \gamma\delta \mathsf{I}$$

Et :

$$\Lambda_\omega = \Pi_\omega(\mathsf{I} - e^{2\mathsf{B}_\omega}) + 2(\alpha\delta\mathsf{H}^{-1} + \gamma\beta\mathsf{K}^{-1})\mathsf{B}_\omega\, e^{\mathsf{B}_\omega}$$

3.2 Lemmes techniques

Lemme 3.1 *Sous les hypothèses : 2.7 et 3.3$\sim$ 3.6, supposons aussi que une de ses conditions est satisfaite :*

1. $\alpha\beta = 0$

2. $\gamma\delta = 0$ *et* $\mathsf{H}, \mathsf{K} \in L(\mathsf{E})$

3. $\alpha\beta \neq 0$ *et* $\mathsf{H}, \mathsf{K} \in L(\mathsf{E})$

Alors :

(3.7) $$\exists\, \omega_1 \geqq \omega_0;\ \exists\, c_1 \geqq 0 \ \ :\ \ \forall \omega \geqq \omega_1; 0 \in \rho(\Pi_\omega)\ et\ \|\Pi_\omega^{-1}\|_{L(\mathsf{E})} \leqq c_1.$$

Preuve : Tout d'abord on note par $\mathcal{I}(\mathsf{E})$: l'ensemble des éléments de $L(\mathsf{E})$ qui sont inversibles donc :

(3.8) $$\begin{cases} \mathcal{I}(\mathsf{E})\, est\, un\, ouvert\, de\, L(\mathsf{E}) \\ \begin{cases} \mathsf{T} \longrightarrow \mathsf{T}^{-1}\ est\ continue\ de\ \mathcal{I}(\mathsf{E})\ dans\ L(\mathsf{E}) \\ \text{c'est-à-dire} : \exists\, c > 0 \quad tel\ que \quad : \|\mathsf{T}^{-1}\| \leqq c\, \|\mathsf{T}\|. \end{cases} \end{cases}$$

De plus et à partir de l'hypothèse 3.3 on a :

(3.9) $$\exists\, c \geqq 0\ \ tel\ \ que\ \ \forall \omega > \omega_0 : \|{\mathsf{A}_\omega}^{-1}\|_{L(\mathsf{E})} \leqq \|[(\mathsf{A}_{\omega_0} - (\omega - \omega_0)\mathsf{I}]^{-1}\|_{L(\mathsf{E})} \leqq \frac{c}{\omega - \omega_0}.$$

1. Soit $\alpha\beta = 0$:
cela implique que :

$$\Pi_\omega = -\gamma\delta \mathsf{I}$$

Et comme $\gamma\delta \neq 0$ d'après i de la remarque 2.1 alors 3.7 est satisfaite.

2. On suppose que $\gamma\delta = 0$ et $\mathsf{H}, \mathsf{K} \in L(\mathsf{E})$; donc d'après i de la remarque 2.1 :

$$\alpha\beta \neq 0 \quad \text{et} \quad \Pi_\omega{}^{-1} = (\alpha\beta)^{-1}\mathsf{KHB}_\omega{}^{-1} = -(\alpha\beta)^{-1}\mathsf{KHA}_\omega{}^{-1} \in L(\mathsf{E})$$

Et la relation 3.8 nous donne 3.7.

3. Supposons maintenant que 3 est satisfaite et on pose :

$$\Delta_\omega = \alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1} - \gamma\delta\mathsf{A}_\omega{}^{-1}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \Pi_\omega &= \mathsf{B}_\omega^2\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1} - \gamma\delta\mathsf{I} \\ &= \mathsf{A}_\omega\Delta_\omega. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.2 Π_ω *est inversible pour* ω *assez grand.*

Preuve : On veut montrer que Π_ω est inversible ,pour cela il suffit de montrer que Δ_ω est inversible, en effet :

On a :

$$\begin{array}{lcl} \Delta_\omega & \longrightarrow & \alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1} \\ \text{dans } L(\mathsf{E}) \text{ lorsque } \omega & \longrightarrow & +\infty \text{ (car 3.9)} \end{array}$$

Puisque :

$$\mathsf{H}, \mathsf{K} \in \mathcal{I} \in \mathcal{I}(\mathsf{E})$$

alors :

$$\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1} \in \mathcal{I}(\mathsf{E}).$$

Par suite :

$$\Delta_\omega \in \mathcal{I}(\mathsf{E}).$$

Ainsi que :

$$\exists\, \omega_1 \geqq \omega_2 \text{ et } k \geqq 0 \ : \begin{cases} \Delta_\omega \longrightarrow \Delta_\omega{}^{-1} \\ \|\Delta_\omega{}^{-1}\| \leqq c\,\|\Delta_\omega\| \leqq k \text{ (grâce à 3.8).} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$0 \;\in\; \rho(\Pi_\omega)\;;\; {\Pi_\omega}^{-1} = \Delta_\omega^{-1}{\mathsf{A}_\omega}^{-1}.$$

Et :

$$\|{\Pi_\omega}^{-1}\|_{L(\mathsf{E})} \leqq \|{\Delta_\omega}^{-1}{\mathsf{A}_\omega}^{-1}\|_{L(\mathsf{E})} \leqq \frac{c\,k}{\omega-\omega_0}.$$

D'où le résultat. □

Lemme 3.3 *On suppose 3.3∼ 3.6*
Et :

$$\exists\ \omega_1 \geqq \omega_0; \exists\, c_1 \geqq 0\ :\ \ \forall \omega \geqq \omega_1;\ 0 \in \rho(\Pi_\omega)\ \ et\ \ \|{\Pi_\omega}^{-1}\|_{L(\mathsf{E})} \leq\ c_1$$

Alors :

$\exists\ \ \omega^* \geqq \omega_1 \geqq \omega_0$ *tel que pour* $\omega \geqq \omega^*$: Λ_ω *est inversible et son inverse est borné*

Et on écrit :

$$\Lambda_\omega^{-1} = (\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}_\omega})^{-1}\left[\mathsf{I} + 2{\Pi_\omega}^{-1}(\alpha\delta\mathsf{H}^{-1})\mathsf{B}_\omega e^{\mathsf{B}_\omega}(\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}_\omega})^{-1}\right]^{-1}{\Pi_\omega}^{-1}$$

Preuve : Soit :

$$\begin{aligned}
\Lambda_\omega &= (\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}{\mathsf{B}_\omega}^2-\gamma\delta\mathsf{I})(\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}_\omega}) + 2(\alpha\delta\mathsf{H}^{-1}+\gamma\beta\mathsf{K}^{-1})\mathsf{B}_\omega\, e^{\mathsf{B}_\omega}\\
&= (\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}{\mathsf{B}_\omega}^2-\gamma\delta\mathsf{I})(\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}_\omega}) + 2(\alpha\delta\mathsf{H}^{-1}+\gamma\beta\mathsf{K}^{-1})\mathsf{B}_\omega\, e^{\mathsf{B}_\omega}(\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}_\omega})^{-1}(\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}_\omega})\\
&= \left[(\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}{\mathsf{B}_\omega}^2-\gamma\delta\mathsf{I}) + 2(\alpha\delta\mathsf{H}^{-1}+\gamma\beta\mathsf{K}^{-1})\mathsf{B}_\omega\, e^{\mathsf{B}_\omega}(\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}_\omega})^{-1}\right](\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}_\omega})\\
&= \Big[(\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}{\mathsf{B}_\omega}^2-\gamma\delta\mathsf{I}) + 2(\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}{\mathsf{B}_\omega}^2-\gamma\delta\mathsf{I})(\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}{\mathsf{B}_\omega}^2-\gamma\delta\mathsf{I})^{-1}(\alpha\delta\mathsf{H}^{-1}+\gamma\beta\mathsf{K}^{-1})\\
&\quad \times\mathsf{B}_\omega\, e^{\mathsf{B}_\omega}(\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}_\omega})^{-1}\Big](\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}_\omega})\\
&= \Pi_\omega\left[\mathsf{I} + 2\Pi^{-1}(\alpha\delta\mathsf{H}^{-1}+\gamma\beta\mathsf{K}^{-1})\mathsf{B}_\omega\, e^{\mathsf{B}_\omega}(\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}_\omega})^{-1}\right](\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}_\omega}).
\end{aligned}$$

Et si on pose :

$$L_\omega = -2{\Pi_\omega}^{-1}(\alpha\delta\mathsf{H}^{-1}+\gamma\beta\mathsf{K}^{-1})\mathsf{B}_\omega\, e^{\mathsf{B}_\omega}(\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}_\omega})^{-1}$$

On aura :

$$\Lambda_\omega = \Pi_\omega(\mathsf{I} - L_\omega)(\mathsf{I} - e^{2\mathsf{B}_\omega}).$$

D'après le lemme précédent, Π_ω est inversible et comme $(\mathsf{I} - e^{2\mathsf{B}_\omega})$ est inversible, il suffit

donc de montrer que :

$$(\mathsf{I} - L_\omega)$$

est inversible pour montrer l'inversibilité de Λ_ω.

Pour cela on doit montrer que :

$$\|L_\omega\|_{L(\mathsf{E})} < 1.$$

Soit :

$$\begin{aligned}
\|L_\omega\| &= \| - 2\Pi_\omega{}^{-1}(\alpha\delta\mathsf{H}^{-1} + \gamma\beta\mathsf{K}^{-1})\mathsf{B}_\omega\, e^{\mathsf{B}_\omega}(\mathsf{I} - e^{2\mathsf{B}_\omega})^{-1}\|_{L(\mathsf{E})} \\
&\leqq 2\|\Pi_\omega{}^{-1}\|(|\alpha\delta|\,\|\mathsf{H}^{-1}\|_{L(\mathsf{E})} + |\gamma\beta|\,\|\mathsf{K}^{-1})\|_{L(\mathsf{E})}\,\|\mathsf{B}_\omega e^{2\mathsf{B}_\omega}\|_{L(\mathsf{E})}\,\|(\mathsf{I} - e^{2\mathsf{B}_\omega})\|_{L(\mathsf{E})} \\
&\leqq \|\Pi_\omega{}^{-1}\|(|\alpha\delta|\,\|\mathsf{H}^{-1}\|_{L(\mathsf{E})} + |\gamma\beta|\,\|\mathsf{K}^{-1})\|_{L(\mathsf{E})}\, 2\,.\, \frac{\|\mathsf{B}_\omega e^{2\mathsf{B}_\omega}\|_{L(\mathsf{E})}}{1 - \|e^{2\mathsf{B}_\omega}\|_{L(\mathsf{E})}}
\end{aligned}$$

D'après Dore-Yakubov : (voir [12])

$\forall\, \alpha\, \in \mathbb{R}$, $\exists\, c\,,\, k\, > 0$ (indépendants de ω) tel que $\forall\, x \geqq 1 \quad : \quad \| - (\mathsf{A} + \omega\mathsf{I})^{\alpha}\, e^{-x(-\mathsf{A}+\omega\mathsf{I})^{\frac{1}{2}}}\|_{L(\mathsf{E})} \leqq c\, e^{-k\,x\,\sqrt{w}}$

En particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $x = 1$, on aura :

$$\|\mathsf{B}_\omega e^{2\mathsf{B}_\omega}\|_{L(\mathsf{E})} \quad \leqq \quad c_1\, e^{-k\,\sqrt{w}}$$

Et pour $\alpha = 0$ et $x = 2$, on aura :

$$\begin{aligned}
\|e^{2\mathsf{B}_\omega}\|_{L(\mathsf{E})} \leqq c_2\, e^{-2\,k\,\sqrt{w}} \quad &\Longrightarrow \quad -c_2\, e^{-2\,k\,\sqrt{w}} \leqq -\|e^{2\mathsf{B}_\omega}\|_{L(\mathsf{E})} \\
&\Longrightarrow \quad 1 - c_2\, e^{-2\,k\,\sqrt{w}} \leqq 1 - \|e^{2\mathsf{B}_\omega}\|_{L(\mathsf{E})} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{1 - \|e^{2\mathsf{B}_\omega}\|_{L(\mathsf{E})}} \leqq \frac{1}{1 - c_2\, e^{-2\,k\,\sqrt{w}}} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{2\mathsf{B}_\omega\,\|\mathsf{B}_\omega\, e^{2\mathsf{B}_\omega}\|_{L(\mathsf{E})}}{1 - \|e^{2\mathsf{B}_\omega}\|_{L(\mathsf{E})}} \leqq \frac{2\,\|\mathsf{B}_\omega\, e^{2\mathsf{B}_\omega}\|_{L(\mathsf{E})}}{1 - c_2\, e^{-2\,k\,\sqrt{w}}} \\
&\qquad\quad \leqq \frac{c_1\, e^{-k\,\sqrt{w}}}{1 - c_2\, e^{-2\,k\,\sqrt{w}}}
\end{aligned}$$

Donc il existe $\omega*$ tel que $\forall\, \omega \geqq \omega^*$; Λ_ω est inversible et son inverse est borné. $\square$

3.3 Résultat principal

On obtient de ce qui précède le résultat :

Théorème 3.1 *Supposons 3.2 $\sim$ 3.6 et 3.3 ; Soit* $f \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,1;\mathsf{E})$ *avec* $1 < p < \infty$ *et* $\omega \geqq \omega^*$, *ces deux assertions sont équivalentes :*

i. $\mathsf{B}_\omega \alpha \Pi_\omega{}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1 + \delta\Pi_\omega{}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\left[d_0 - \alpha\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}_\omega}f(s)ds\right] \in (\mathsf{D}(\mathsf{B}^2),\mathsf{E})_{\frac{1}{2p},p}$

Et

$-\mathsf{B}_\omega \beta \Pi_\omega{}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}d_0 - \gamma\Pi_\omega{}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\left[d_1 + \beta\int_0^1 e^{(s\mathsf{B}_\omega}f(s)ds\right] \in (\mathsf{D}(\mathsf{B}^2),\mathsf{X})_{\frac{1}{2p},p}$

ii. *Le problème 3.1 admet l'unique solution stricte donnée par 2.6*

Chapitre 4

Étude de quelques cas particuliers

4.1 Problème de Dirichlet

Soit E un espace de Banach UMD. Prenons dans ce cas $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = -1$, $\delta = 1$ et $\mathsf{K} = \mathsf{H} = \mathsf{I}$.
Le problème (1) devient :

$$(4.1) \qquad \begin{cases} u''(x) + \mathsf{A}u(x) = f(x)); \quad x \in (0,1) \\ \\ u(0) = d_0 \\ \\ u(1) = d_1 \end{cases}$$

On aura besoin que de 3 et 4

L'expression du déterminant sera donné par :

$$\Lambda = \mathsf{I} - e^{2\mathsf{B}} \quad car \quad \mathsf{H}^{-1} = \mathsf{K}^{-1} = \Pi = \mathsf{I}$$

$$\Lambda \; est \; inversible \; (voir \; A.Lunardi \, [18] \, p \, 60).$$

On obtient le résultat analogue suivant :

Théorème 4.1 *Soit* E *un espace de Banach UMD ; Supposons 3 et 4 et soit* $f \in \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{E})$

avec $1 < p < \infty$ *alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

i. $d_0, d_1 \in (\mathsf{D}(\mathsf{B}^2), \mathsf{E})_{\frac{1}{2p},p}$.

ii. *Le problème précédent admet une solution unique et stricte :*

$$u \in \mathsf{W}^{2,p}(0,1;\mathsf{E}) \cap \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{D}(\mathsf{A})).$$

4.2 Problème de Neumann :

On considère l'équation du problème 1 ; si $\alpha = \beta = 1$; $\gamma = \delta = 0$ et H, K sont quelconques.

peuvent être arbitraires ; les conditions aux limites s'écrivent :

$$u'(1) = d_0 \quad et \quad u'(0) = d_1$$

Et le problème devient :

$$(4.2) \qquad \begin{cases} u''(x) + \mathsf{A}u(x) = f(x); \quad x \in (0,1) \\ u'(1) = d_0 \\ u'(0) = d_1 \end{cases}$$

On suppose que E est un espace de Banach UMD ; On suppose aussi 3 et 4.

Le déterminant Λ s'écrit :

$$\Lambda = \mathsf{B}^2(\mathsf{I} - e^{2\mathsf{B}}) \quad car \quad \Pi = \mathsf{B}^2 = -\mathsf{A}.$$

Λ est inversible car A et $(\mathsf{I} - e^{2\mathsf{B}})$ sont inversibles.

Dans ce cas u sera donnée par :

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{\mathsf{B}x}e^{\mathsf{B}}\left[-(\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}})^{-1}\mathsf{B}^{-3}d_0 + (\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}})^{-1}\mathsf{B}^{-3}\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}}f(s)ds\right] \\ &+ e^{\mathsf{B}(1-x)}e^{\mathsf{B}}\left[(\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}})^{-1}\mathsf{B}^{-3}d_1 + (\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}})^{-1}\mathsf{B}^{-3}\int_0^1 e^{s\mathsf{B}}f(s)ds\right] \\ &- (\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}})^{-1}\mathsf{B}^{-1}e^{\mathsf{B}(1-x)}d_0 + (\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}})^{-1}\mathsf{B}^{-1}e^{\mathsf{B}x}d_1 + \frac{1}{2}(\mathsf{I}-e^{2\mathsf{B}})^{-1}\mathsf{B}^{-1}e^{\mathsf{B}x}\int_0^1 e^{s\mathsf{B}}f(s)ds \\ &+ \frac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}\int_0^x e^{(x-s)\mathsf{B}}f(s)ds + \frac{1}{2}\mathsf{B}^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)\mathsf{B}}f(s)ds. \end{aligned}$$

Et le résultat sera donné par :

Théorème 4.2 *Soit* E *un espace de Banach UMD ; Supposons 3 et 4 et soit* $f \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,1;\mathsf{E})$

avec $1 < p < \infty$ *alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

i. $d_0, d_1 \in (\mathsf{D}(\mathsf{B}), \mathsf{E})_{\frac{1}{p},p}$

ii. *Le problème 4.3 admet l'unique solution stricte donnée par :*

$$u \in \mathsf{W}^{2,p}(0,1;\mathsf{E}) \cap \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,1;\mathsf{D}(\mathsf{A}))$$

Remarque : 4.1 *Lorsque :* $\mathsf{K} = \mathsf{I}$, $\alpha = \gamma = \delta = 1$, $\beta = 0$ *; Ce cas a été déjà étudié par Aissa Aibeche(voir[2])*

.

4.3 Le cas : $\mathsf{H} = \mathsf{K} = \mathsf{B}$

Pour le cas $\mathsf{H} = \mathsf{K} = \mathsf{B}$, le problème 1 devient :

$$\text{(4.3)} \qquad \begin{cases} u''(x) + \mathsf{A}u(x) = f(x); \;\; x \in (0,1) \\ \alpha\, u'(1) - \gamma\, \mathsf{B}u(0) = d_0 \\ \beta\, u'(0) + \delta\, \mathsf{B}u(1) = d_1 \end{cases}$$

On remplace l'hypothèse 3 par l'hypothèse suivante :

$$\text{(4.4)} \qquad \begin{cases} \mathsf{A}\,\text{est un opérateur linéaire fermé.};\; \sigma(\mathsf{A}) \subset\,]-\infty, 0[\\ \forall\, \theta \in]0,\pi[,\ \sup_{\lambda \in S_\theta} \|\lambda(\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I})^{-1}\|_{L(\mathsf{E})} < \infty. \end{cases}$$

Avec $S_\theta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |argz| < \theta\}$.

Remarque : 4.2 *Dans ce cas :*

$$\begin{aligned} \Lambda &= (\alpha\beta\mathsf{I} - \gamma\delta\mathsf{I})(\mathsf{I} - e^{2\mathsf{B}}) + 2(\alpha\delta\mathsf{B}^{-1} + \gamma\beta\mathsf{B}^{-1})\mathsf{B}e^{\mathsf{B}} \\ &= (\alpha\beta\mathsf{I} - \gamma\delta\mathsf{I})(\mathsf{I} - e^{2\mathsf{B}}) + 2(\alpha\delta + \gamma\beta)e^{\mathsf{B}}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \Pi &= \mathsf{B}^2\alpha\beta\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1} - \gamma\delta\mathsf{I} \\ &= \mathsf{B}^2\alpha\beta\mathsf{B}^{-1}\mathsf{B}^{-1} - \gamma\delta\mathsf{I} \\ &= \alpha\beta\mathsf{I} - \gamma\delta\mathsf{I} \\ &= (\alpha\beta - \gamma\delta)\mathsf{I} \end{aligned}$$

1. *Si* $\alpha\beta - \gamma\delta = 0$ *alors :*

$$\Pi \text{ n'est pas inversible.}$$

2. *Si* $\alpha\beta - \gamma\delta \neq 0$ *et* $\alpha\delta + \gamma\beta = 0$ *alors :*

$$\Lambda = (\alpha\beta - \gamma\delta)(\mathsf{I} - e^{2\mathsf{B}}) \text{ est inversible.}$$

3. *Si* $\alpha\delta + \gamma\beta \neq 0$ *et* $\frac{\alpha\delta+\gamma\beta}{\alpha\beta-\gamma\delta} \notin \mathbb{R}_-$ *alors :*

$$\Lambda = (\alpha\beta - \gamma\delta)(\mathsf{I} - e^{2\mathsf{B}}) + 2(\alpha\delta + \gamma\beta)e^{\mathsf{B}}.$$

4.3.1 Calcul de Λ^{-1} :

Tout d'abord on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.1 *Soit* $\Upsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. *Soit :*

$$F(z) = 1 + 2\Upsilon\, e^{-z} - e^{-2z}.$$

Alors :

1. $F(x) \neq 0; \ \forall x \in [0, +\infty[$

2. *Il existe* $R_0 > 0$; $z \in \mathbb{C}$ *avec* $Re(z) \geqq R_0$ *alors* : $F(z) \neq 0$.

3. *Il existe* $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ *tel que* F *ne s'annule pas dans* $\overline{S_\varphi}$, *où :*

$$S_\varphi = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |argz| < \varphi\}$$

Preuve 4.1

1. *Soit* $x \in [0, +\infty[$

$$\begin{aligned}
F(x) &= 1 + 2\Upsilon\, e^{-x} - e^{-2x}. \\
&= \frac{2}{2}\, e^{-x}\, e^{x} + 2\Upsilon\, e^{-x} - \frac{2}{2}\, e^{-x}\, e^{x} \\
&= 2\, e^{-x}(\frac{1}{2}\, e^{x} + \Upsilon - \frac{1}{2}\, e^{-x}) \\
&= 2\, e^{-x}(\sinh(x) + \Upsilon) \\
&\neq 0 \ (car\, \Upsilon \notin \mathbb{R}_-).
\end{aligned}$$

2. *Il est clair que :*

$$F(z) \neq 0 \quad car \quad \lim_{Re(z)\to+\infty} F(z) = 1$$

3. *Posons :*

$$Z(F) = \{z \in \mathbb{C} : F(z) = 0\}$$

Et

$$K = \{z \in \mathbb{C} \setminus 0 : |\arg z| \leqq \frac{\pi}{4}; Re(z) \leqq R_0\} \cup \{0\}$$

Puisque F est analytique en $\mathbb{C}$, $F \neq 0$ et K est compact, on a :

$$Z(F) \cap K \text{ est finie.}$$

De plus et d'après l'assertion 1 :

$$Z(F) \cap K \cap [0, +\infty[= \emptyset.$$

On en déduit qu'il existe $\varphi \in]0, \frac{\pi}{4}[$ assez petit tel que :

$$Z(F) \cap \{z \in \mathbb{C} \setminus 0 : |\arg z| \leqq \varphi; Re(z) \leqq R_0\} = \emptyset.$$

Enfin et d'après l'assertion 2, on en déduit que :

$$Z(F) \cap \overline{S}_\varphi = \emptyset.$$

Pour ce cas le résultat est donné par :

Théorème 4.3 *Soit E un espace de Banach UMD et soit $f \in \mathsf{L^p}(0,1;\mathsf{E})$ avec $1 < p < \infty$, on considère les deux cas suivants :*

1^{er} *cas :* $3\,et\,4$ *sont vérifiées avec* $\alpha\beta - \gamma\delta \neq 0$ *et* $\alpha\delta + \gamma\beta = 0$.

2^{eme} *cas :4.4 et 4 sont vérifiées avec* $\alpha\delta + \gamma\beta \neq 0$ *et* $\frac{\alpha\beta-\gamma\delta}{\alpha\delta+\gamma\beta} \notin \mathbb{R}_-$

Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i. $\alpha d_1 + \delta \left(d_0 - \alpha \int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}} f(s) ds \right) \in (\mathsf{D(B)}, \mathsf{E})_{\frac{1}{p},p}$

Et

$-\beta d_0 - \gamma \left(d_1 + \beta \int_0^1 e^{s\mathsf{B}} f(s) ds \right) \in (\mathsf{D(B)}, \mathsf{E})_{\frac{1}{p},p}$

ii. *Le problème 4.3 a une solution stricte.*

Preuve 4.2 *Il suffit de montrer l'inversibilité de Λ puis appliquer le théorème 2.1*

Dans le premier cas Λ est inversible (d'après 2 de la remarque précédente).

Dans le second, on peut écrire Λ sous forme :

$$\begin{aligned}
\Lambda &= (\alpha\beta - \gamma\delta)(\mathsf{I} - e^{2\mathsf{B}}) + 2(\alpha\delta + \gamma\beta)e^{\mathsf{B}} \\
&= (\alpha\beta - \gamma\delta)(\mathsf{I} - e^{2\mathsf{B}}) + (\alpha\beta - \gamma\delta)\left[2e^{\mathsf{B}}\frac{(\alpha\delta + \gamma\beta)}{\alpha\beta - \gamma\delta}\right] \\
&= (\alpha\beta - \gamma\delta)\left[\mathsf{I} - e^{\mathsf{B}} + 2e^{\mathsf{B}}\frac{(\alpha\delta + \gamma\beta)}{\alpha\beta - \gamma\delta}\right] \\
&= (\alpha\beta - \gamma\delta)\left[\mathsf{I} - e^{\mathsf{B}} + 2\Upsilon\, e^{\mathsf{B}}\right] \\
&= (\alpha\beta - \gamma\delta)F(-\mathsf{B}).
\end{aligned}$$

où : $\Upsilon = \frac{(\alpha\delta+\gamma\beta)}{\alpha\beta-\gamma\delta}$.

En utilisant le lemme précédent avec $\Upsilon = \frac{(\alpha\delta+\gamma\beta)}{\alpha\beta-\gamma\delta}$, *on peut considérer* $H = \frac{F-1}{F}$ *qui est holomorphe au voisinage de* $\sigma(-\mathsf{B})$ *et en utilisant la formule intégrale d'une fonction opérationnelle :*

$$H(-\mathsf{B}) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_{\Gamma} H(z)(z\mathsf{I} - (-\mathsf{B}))^{-1}dz \quad (voir\, M.Haase, [16]\, p\, 60)$$

On aura :

$$\begin{aligned}
(\mathsf{I} - H(-\mathsf{B})) \circ F(-\mathsf{B})) &= [(\mathsf{I} - H)'F)\,](-\mathsf{B}) \\
&= [1](-\mathsf{B}) \\
&= \mathsf{I}.
\end{aligned}$$

De la même manière, on aura :

$$F(-\mathsf{B}) \circ (\mathsf{I} - H(-\mathsf{B})) = \mathsf{I}.$$

Ce qui prouve que :

$$\Lambda = (\alpha\beta - \gamma\delta)F(-\mathsf{B})$$

a un inverse borné donné par :

$$\Lambda^{-1} = \frac{1}{\alpha\beta - \gamma\delta}(\mathsf{I} - H(-\mathsf{B})).$$

.

Chapitre 5

Applications aux EDP

5.1 Exemple 1

Posons $\mathsf{E} = \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})$ avec $1 < p < \infty$. On définit l'opérateur A par :

(5.1)
$$\begin{cases} D_A = \ W^{2,p}(\mathbb{R}) \\ \\ Au = u'', \quad \forall u \in D_A. \end{cases}$$

Soient H, K deux opérateurs bornés et inversibles qui commutent avec A et soit $\omega_0 > 0$.
Un simple calcul montre que les hypothèses 3.2 ∼ 3.6 sont vérifiées (en résolvant l'équation spectrale de A) .
A satisfait 3.4 (voir Pruss-Sohr,[21]).
Donc on peut appliquer le théorème 3.1 et on aura résultat suivant :

Proposition 5.1 *Soit* $f \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,1;\mathsf{E})$ *et :*
(5.2)
$$\begin{cases} \mathsf{B}_\omega \alpha \Pi_\omega{}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\mathsf{K}^{-1}d_1 + \delta\Pi_\omega{}^{-1}\mathsf{H}^{-1}\left[d_0 - \alpha\int_0^1 e^{(1-s)\mathsf{B}_\omega}f(s)ds\right] \in (\mathsf{W}^{2,\mathsf{p}}(\mathbb{R}), \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p},p} \\ \\ -\mathsf{B}_\omega \beta \Pi_\omega{}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}^{-1}d_0 - \gamma\Pi_\omega{}^{-1}\mathsf{K}^{-1}\left[d_1 + \beta\int_0^1 e^{s\mathsf{B}_\omega}f(s)ds\right] \in (\mathsf{W}^{2,\mathsf{p}}(\mathbb{R}), \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p},p} \end{cases}$$

Alors : il existe $\omega^* > 0$ *tel que* $\forall\, \omega \geqq \omega^*$*, le problème :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y) & , \quad (x,y) \in (0,1)\times\mathbb{R}, \\ \\ \alpha\frac{\partial u}{\partial x}(1,y) - \gamma\,\mathsf{H}\,(u(0,y)\,) = d_0(y) & , \quad y \in \mathsf{R} \\ \\ \beta\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) + \delta\,\mathsf{K}\,(u(1,y)\,) = d_1(y) & , \quad y \in \mathsf{R}. \end{cases}$$

admet une unique solution et stricte :

$$u \in \mathsf{W}^{2,p}(0,1;\mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})) \cap \mathsf{L}^p(0,1;\mathsf{W}^{2,p}(\mathbb{R}))$$

Remarque : 5.1 *On note que l'espace d'interpolation* $(\mathsf{W}^{2,\mathsf{p}}(\mathbb{R}), \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p},p}$ *coïncide avec l'espace de Besov caractérisé dans l'article de Grisvard (voir P. Grisvard [14], p 680).*

5.2 Exemple 2

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geqq 1$ de frontière régulière. On pose $\mathsf{E} = \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$ et on définit les opérateurs A, H *et* K par :

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in W^{4,p}(\Omega) : u_{\backslash \partial\Omega} = \Delta\, u_{\backslash \partial\Omega} = 0\}, \\ \\ Au = -\Delta^2\, u, \end{cases}$$

.

$$\begin{cases} D(\mathsf{H}) = D(\mathsf{K}) = W^{2,p}(\Omega) \,\cap\, W_0^{1,p}(\Omega), \\ \\ \mathsf{H}u \;=\; \mathsf{K}u = \Delta\, u \;=\; \sqrt{-\mathsf{A}}u \end{cases}$$

Si $\alpha \;=\; \beta \;=\; 1$, $\delta \;=\; -\gamma$ avec $\gamma \neq\; i \;ou\; -i$ alors d'après 2 de la remarque 2.1 et 2 de la remarque 4.2 ; on aura :

$$0 \;\in\; \rho(\Pi) \,\cap\, \rho(\Lambda)$$

Et le théorème 2.1 sera applicable pour le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \Delta^2 u(x,y) = f(x,y) & , \quad (x,y) \;\in\; (0,1) \times \Omega, \\ \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) + \delta\, \Delta_y\, u(0,y) = d_0(y) & , \quad y \in\; \Omega \\ \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) + \delta\, \Delta_y\, u(1,y) = d_1(y) & , \quad y \in\; \Omega \\ \\ u(x,\xi) \;=\; \Delta_y\, u(x,\xi) \;=\; 0 & , \quad (x,\xi) \;\in\; [0,1] \times \partial\Omega \end{cases}$$

Pour vu que $f \;\in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,1;\mathsf{E})$ et :

$$\begin{cases} d_1 + \delta \left[d_0 - \int_0^1 \, e^{(1-s)\mathsf{B}} f(s) ds \right] \;\in (\mathsf{D}(\mathsf{B}), \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\Omega))_{\frac{1}{p},p} \\ \\ -d_0 + \delta \left[d_1 + \int_0^1 \, e^{s\mathsf{B}} f(s) ds \right] \;\in (\mathsf{D}(\mathsf{B}), \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\Omega))_{\frac{1}{p},p}. \end{cases}$$

Chapitre 6

Bibliographie

Bibliographie

[1] A. Aibeche, N. Amroune, S. Maingot, General non local boundary value problem for secondorder elliptic equation, *Mathematische Nachrichten.,*, **Volume, 13**, (2018), 1-16.

[2] A. Aibeche, N. Amroune, S. Maingot, On elliptic equations with general non-local boundary conditions in UMD spaces, *Mediterr. J. Math.,*, **Volume, 13**, (2016), 1051-1063.

[3] A. V. Balakrishnan, Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them, *Pacific J. Math.10,*, **Volume, 10**, (1960), 419-437.

[4] D. L. Burkholder, Geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are un-conditional, *Ann. Probab*, **Volume, 9**, (1981), 997-1011.

[5] J. R. Cannon, The solution of the heat equation subject to the specification of energy, *Quart. Appl. Math.*, **Volume, 21**, (1963), 155-160.

[6] J. R. Cannon, S. Perez-Esteva, and J. Van Der Hoek, A Galerkin procedure for the diffusion equation subject to thespecification of mass, *SIAM Numer. Anal.*, **Volume, 24**, (1987), 499-515.

[7] J. R. Cannon and L. Yanping, A Galerkin procedure for diffusion equations with boundary integral conditions, *nt. J.Engng Sci*, **Volume, 28(7)**, (1990), 579-587.

[8] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, and A. Medeghri, Sturm-Liouville problems for an abstract differentialequation of elliptic type in UMD spaces, *Differenial and Integral Equation*, **Volume, 21(9-10)**, (2008), 981-1000.

[9] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, A. Medeghri, Complete abstract differential equations of elliptictype with general Robin boundary conditions, in UMD spaces, *iscrete and continuous dynamical systems series S*, **Volume, 4(3)**, (2011).

[10] G. Daprato and P. Grisvard, Sommes d'opérateurs linéaires et équation différentielles opérationnelles, *J*.Math.Pures et .appli, **Volume, 54**, (1975), 301-87.

[11] G. Dore and A. Venni, On the closedness of the sum of two closed operators, *M*athematische Zeitschrift, **Volume, 196**, (1987), 270-286.

[12] S. Dore and S. Yakubov, Semigroup estimates and noncoercive boundary value problems, *Semigroup Forum*, **Volume, 60**, (2000), 93-121.

[13] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe, A. Yagi, Complete abstract differential equations of elliptic type in UMD space, *F*unkcialaj Ekvacioj, **Volume, 49(2)**, (2006), 193-214.

[14] P. Grisvard, Spazi di tracce e applicazioni, *R*endiconti di Matematica, **Volume, 5(4)**, 657-729.

[15] P. L. Gurevich, Elliptic problems with nonlocal boundary conditions and Feller semigroups, *Journal of MathematicalSciences*, **Volume, 186(3)**, (2012), 255-440.

[16] M. Haase, The functional calculus for sectorial Operators, Birkhauser, Basel, (2006)

[17] S. G. Krein, Linear Differential Equations in Banach Spaces, Moscou, (1967).

[18] A. Lunardi, Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhauser, Basel, (1995).

[19] A. Medeghri, Cour sur les Semi-groupes, École EDA-EDO, Tipaza, (Mai 2006).

[20] F. Nobile and C. Vergara, An effective fluid-structure interaction formulation for vascular dynamics by generalizedRobin conditions, *S*IAM J. Sci. Comput. SIAM J. Sci. Comput., **Volume, 30(2)**, 731-763.

[21] J. Pruss and H. Sohr, Boundedness of imaginary powers of second-order elliptic differential operators in L^p, *Hiroshima Math. J*, **Volume, 23**, (1993), from 161-192.

[22] E. Sinestrari, On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions, *J. Math.Anal.App.*, **Volume, 66**, (1985), from 16-66.

[23] A. L. Skubachevskii, Elliptic functional differential equations and applications, , Birkhauser, Basel-Berlin-Boston, (1997).

[24] A. L. Skubachevskii, On some problems for multidimentional diffusion processes, *S*oviet Math. Dokl, **Volume, 40**, (1990).

[25] A. L. Skubachevskii, Nonclassical boundary value problems, II, *Journal of Mathematical Sciences, Springer*, **Volume, 166(4)**, (2010), 377-561.

[26] H. Triebel, Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, Amsterdam, North Holland, (1978).