Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Linda Haddad

Transformation de Sumudu

soutenu publiquement le 26 Juin 2019 devant le jury composé de :

Présidente :	Louiza Tabharit	MCB	(Université de Mostaganem, Algérie)
Examinatrice :	Amina Ferraoun	MCB	(Université de Mostaganem, Algérie)
Encadreuse :	Sabrina Taf	MCB	(Université de Mostaganem, Algérie)

Année Universitaire : 2018 / 2019

MASTER

Dédicaces

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance, c'est tous simplement que :

Je dédie ce mémoire de Master à :

***A ma tendre mère :** Tu représente pour moi la source de tendresse et l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager. Tu as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études.*

***A mon très cher père :** Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail est le fruit de tes sacrifice que tu as consentis pour mon éducation et ma formation le long de ces années.*

***A mon cher frère HAKIM :** qui m'est le père et la mère, les mots ne suffisent guère pour exprimer l'attachement, l'amour et l'affection que je porte pour vous.*
***A mes sœurs :** SAMIA- ZOHRA- NADIA- IMENE- AYA.*
***Je dédie ce mémoire spécialement à mon encadreuse Mme Taf Sabrina :**veuillez trouver dans ce modeste travail l'expression de mon affection.*
***A tous les membres de ma famille :** HADDAD et BEKOUCHE , petits et grands.*
A tous les membres de ma promotion.
A tous mes enseignants depuis mes premières années d'études.

Remerciements

Je remercie tout d'abord ≪ Allah ≫ de m'avoir donné le courage d'entamer et de finir ce mémoire dans des bonnes conditions .

Je tiens à remercier chaleureusement mon encadreuse " Mme Taf Sabrina", d'avoir encadré ce travail avec beaucoup de compétence , je lui en suis très reconnaissante, Merci.

Je remercie également les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et d'ènrichir par leurs propositions.

Je remercie tous nos professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.

Je tiens à remercier le professeur "Mr Benmehidi Djamel" qui m'a fait aide dans le domaine de géométrique, Merci.

Je remercie spécialement le professeur "Mme Bouzid Leila" de m'avoir aidé, Merci.

Je n'oublie pas dans mes remerciements tout le personnel du département Mathématique et Informatique .

Enfin, j'adresse mes remerciements à toute personne ayant intervenus de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je tiens à saluer tous les membres de ma promotion.
A toute ma famille.
A tous mes amis.
Merci.

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures

Index des notations

$\mathbb{R}^+$	:	L'ensemble des nombres réells positifs.
$\mathbb{C}$	:	L'ensemble des nombres Complexes.
$\mathscr{C}^n$	:	L'ensemble des fonctions n fois dérivables.
$\mathscr{L}$	:	Transformée de Laplace.
$\star$	:	Produit de Convolution.
S	:	Transformée de Sumudu.
Γ	:	Fonction Gamma.
C_n^m	:	Combinaison.
P_n^m	:	Permutation.
$\delta(t)$	:	Fonction de Dirac.
$H(t)$	:	Fonction de Heaviside.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié la transformée de Sumudu qui est similaire à la transformée de Laplace. Ce mémoire contient les deux formes de définition avec des exemples et quelques propriétés de cette transformation. Ainsi, nous présentons certaines applications pour cette transformée à l'aide de sa formule d'inversion sur les équations différentielles et intégrales.

La transformée de Sumudu est fortement reliée à la transformée de Laplace.

Mots-Clés. Transformée de Laplace, Transformée de Sumudu, Produit de Convolution, Les équations différentielles.

Introduction

En science mathématique une transformation est un dispositif utile pour la conversion d'une fonction $f(t)$ dans une autre fonction de nouvelle variables $f(p)$,$f(z)$, $\cdots$,etc. Les méthodes de transformations intégrales ont leurs origine aux **XIX**e siècle par des travaux de Joseph Fourier et Oliver Heaviside. L'idé fondamentale est de représenter une fonction $f(x)$ en terme de transformation $\mathrm{F}(u)$,

$$\mathrm{F}(u) = \int_a^b k(u,x)f(x)dx.$$

Où les fonctions $k(u,x)$ sont appelées noyaux .

Dans la littérature, il existe de nombreuses transformées intégrales largement utilisée en physique, en astronomie et en ingénierie, une partie dans sont les transformées de Laplace, Fourier, Mellin et Hankel. Voir ([13], [14]).
La méthode de transformée intégrale est également une méthode efficace pour résoudre les équations différentielles.
En 1990, Watugala introduit un nouvelle transformée à savoir la transformation de Sumudu qui porte le nom de sa fille, la signification de Sumudu est lissé c'est le mot Cinghalais. La transformée de Sumudu est la double théorique de la transformée de Laplace, sa formulation simple et ses applications directes aux équations différentielles et intégrales, cette transformation peu connue et non largement utilisée.
Le travail séminal de Watugala [17] a montré comment utilisé cette transformation pour convertir des équations intégrales et différentielles en équations algébriques. Il a été suivi par Weerakoon ([18], [19]), Asiru ([1], [2]). Certain propriétés fondamentales ont été établies par Belgacem et all [4], tandis que Belgacem [6] a analysé des propriétés et des connexions plus profondes de Sumudu.
En fait, il a été démontré qu'il existe une forte relation entre Sumudu et d'autres transformées intégrales. Voir [10]. En particulier, la relation entre la transformée de Sumudu et la transformée de Laplace a été démontrée dans [4], [10] et [16].
Asiru [2], a étudié ensuite le théorème de convolution de la transformée de Sumudu. Après les théorèmes d'inversion de la transformée de Sumudu (basés sur les mêmes théorèmes pour calculer la transformée inverse de Laplace) établis par Weerakoon [18] et Belgacem ([6], [7]), la transformée de Sumudu est maintenant considérée parmi les transformations intégrales populaire.

L'objectif principale de ce mémoire est d'étudie la transformation de Sumudu et ses applications et donner quelques propriétés et théorèmes fondamentaux.
Notre mémoire est composé de trois chapitres, il est organisé selon le plan suivant

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques préliminaires concernant la transformée de Laplace et données quelques théorèmes importants.

Dans le deuxième chapitre, on définit la transformation de Sumudu et donne les différentes formes de la définition et démontrons ses importantes propriétés et théorèmes et donner la formule de convolution et la formule inverse de Sumudu.

Par la suite, le dernier chapitre est basées sur des applications de la transformée de Sumudu dans la résolution des équations différentielles et intégrales on donnons les exemples pour les deux.

On termine ce mémoire par une conclusion générale .

Chapitre 1

Transformée de Laplace

La transformation de Laplace est un outil important et très simple d'emploi pour résoudre les problèmes d'évolution (équations différentielles ou aux dérivées partielles, équations aux différences ou intégrales)

1 La transformée de Laplace

Définition 1.1 *Soit f une fonction de la variable réelle t, la transformée de Laplace de f est la fonction $\mathscr{F}$ de la variable complexe z définie par l'intégrale*

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](z) = \mathscr{F}(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt}dt. \tag{1.1}$$

On divise la transformée de Laplace en deux types

1- **Transformée fonctionnelle** : C'est la transformée de Laplace d'une fonction spécifique, comme $\sin(at)$, t, e^{-at}...etc.

2- **Transformée opérationnelle** : C'est une propriété mathématique de la transformée de Laplace comme le calcul de la dérivée, de la primitive....de $f(t)$.

2 Existence de la transformée de Laplace

Définition 1.2 *[14] Une fonction f est d'ordre exponentielle, s'il existe $\mathrm{M} > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\left|f(t)\right| \leq \mathrm{M}e^{\alpha t}. \quad \forall t$$

Théorème 1.1 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction, $\mathscr{L}\left[f(t)\right]$ qu'est définie par une intégrale généralisée existe si,*

i) *f soit continue par morceaux.*

ii) *f soit d'ordre exponentiel.*

iii) $\exists \beta \in]0,1[$ *tel que* $\lim\limits_{t\to 0} t^{\beta}\left|f(t)\right| \to 0.$

Exemple 1.1 *On considère la fonction*

$$f(t) = \begin{cases} e^{at} & si \quad t \geq 0 \quad a = (\alpha + i\beta) \in \mathbb{C}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Alors, $\forall z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](z) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-zt}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-t(z-a)}\,dt$$
$$= \frac{-1}{z-a} \quad \mathrm{Si}\ \Re(z) = x > \Re(a) = \alpha.$$

3 Propriétés de la transformée de Laplace

Transformée opérationnelle : Les transformées opérationnelles indiquent comment des opérations effectuées sur $f(t)$ ou $\mathcal{F}(z)$ sont faites dans l'autre domaine. Les opérations les plus importantes sont : multiplication par une constante, dérivé, intégrale, translation $\cdots$

3.1 Linéarité

Proposition 1.1 *[15] Soient f et g :* $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ *deux fonctions admettant des transformées de Laplace et soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. On a*

$$\mathcal{L}\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right](z) = \alpha \mathcal{L}\left[f(t)\right](z) + \beta \mathcal{L}\left[g(t)\right](z).$$

3.2 Transformée de Laplace de la translation

Proposition 1.2 *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ *une fonction causale admettant une transformée de Laplace* $\mathcal{L}\left[f(t)\right](z)$*. On considère la fonction* f_α *définie par* $f_\alpha(t) = f(t-\alpha), (\alpha > 0)$*. Alors*

$$\mathcal{L}\left[f_\alpha(t)\right](z) = e^{-\alpha z} \mathcal{L}\left[f(t)\right](z).$$

3.3 Transformée de Laplace de l'homothétie

Proposition 1.3 *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ *une fonction admettant une transformée de Laplace* $\mathcal{L}\left[(f(t)\right](z)$ *et soit* $k > 0$*. On considère la fonction* f_k *définie par* $f_k(t) = f(kt)$*. Alors*

$$\mathcal{L}\left[f_k(t)\right](z) = \frac{1}{k} \mathcal{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{z}{k}\right).$$

3.4 Transformée de Laplace de la dérivée

Théorème 1.2 *[15] Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ *une fonction d'ordre exponentielle dont la dérivée est continue. Alors,* $\mathcal{L}\left[f'(t)\right]$ *existe et elle est donnée par*

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right](z) = z\mathcal{L}\left[f(t)\right](z) - f(0).$$

Proposition 1.4 *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ *une fonction vérifiant*

1. $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$
2. $\exists \mathrm{M} > 0$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tels que* $\forall k \leq n$ *on a* $\left|f^{(k)}(t)\right| \leq \mathrm{M}e^{\alpha t}$,

alors

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right](z) = z^n \mathcal{L}\left[f(t)\right](z) - \sum_{k=1}^{n} z^{k-1} f^{(n-k)}(0).$$

3.5 Transformée de Laplace d'une intégrale

Théorème 1.3 *[15] Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ *et* $\mathrm{F}(t) = \int_0^t f(u)du$, *alors* $\mathrm{F}'(t) = f(t)$ *et* $\mathrm{F}(0) = 0$. *D'où*

$$\mathscr{L}\left[\mathrm{F}(t)\right](z) = \frac{1}{z}\mathscr{L}\left[f(t)\right](z),$$

plus généralement

$$\mathscr{L}\left[\iint_0^t \cdots \int_0^t f(u)du\right](z) = \frac{1}{z^n}\mathscr{L}\left[f(t)\right](z).$$

Remarque 1.1 *Le tableau suivant présente la liste des transformées de Laplace opérationnelle.*

Fonction	Transformée de Laplace
$e^{at}f(t)$	$\mathscr{F}(z+a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}\mathscr{F}(\frac{z}{a})$
$t^n f(t)$	$(-1)^n\mathscr{F}^n(z)$
$f(t-a)$	$e^{-az}\mathscr{F}(z)$

TABLEAU 1.1 – Transformée de Laplace de quelques opérations.

Transformée fonctionnelle : Une transformée fonctionnelle est tout simplement la transformée de Laplace d'une fonction spécifique de t. Dans ce qui suit, on considère que les fonctions sont nulles pour $t < 0$.

Exemple 1.2 *Soit* $f(t) = 1$ *pour* $t \in \mathbb{R}^+$, *on a*

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](z) = \int_0^{\infty} e^{-zt}dt = \left[\frac{-e^{-zt}}{z}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{z}.$$

Remarque 1.2 *Le tableau suivant présente la liste des transformées de Laplace des fonctions spécifiques.*

Fonction	$f(t)$	$\mathscr{F}(z)$
Implusion	$\delta(t)$	1
échelon	$u(t)$	$\frac{1}{z}$
polynôme(général)	t^n	$\frac{n!}{z^{n+1}}$
exponentiel	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{z+\alpha}$
Sinus	$\sin(wt)$	$\frac{w}{z^2+w^2}$
Cosinus	$\cos(wt)$	$\frac{z}{z^2+w^2}$

TABLEAU 1.2 – Transformée de Laplace des fonctions spécifiques.

4 Transformée de Laplace du produit de convolution

Définition 1.3 *Soient les fonctions $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ s'annulant sur le demi plan négatif. On définit le produit de convolution par*

$$(f \star g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt.$$

Proposition 1.5 *Le produit de convolution est commutatif*

$$f \star g = g \star f.$$

Proposition 1.6 *[13] Soient $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ s'annulant sur le demi plan négatif (dites causales) ayant des transformées de Laplace $\mathscr{L}\left[f(t)\right](z)$, $\mathscr{L}\left[g(t)\right](z)$ respectivement. Alors*

$$\mathscr{L}\left[\left(f \star g\right)(t)\right](z) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](z)\mathscr{L}\left[g(t)\right](z).$$

5 Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

Théorème 1.4 *[14] Soit f une fonction admettant une transformée de Laplace $\mathscr{F}(z)$, alors*

- $\lim\limits_{z \to +\infty} \mathscr{F}(z) = 0.$
- $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{z \to 0} z\mathscr{F}(z).$
- $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = \lim\limits_{z \to +\infty} z\mathscr{F}(z).$

6 Transformée inverse de Laplace

Théorème 1.5 *[13] Soit $\mathscr{F}(z)$ la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, alors la formule d'inversion de Laplace est donnée par*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \mathscr{F}(z)e^{zt}dz. \tag{1.2}$$

Chapitre 2

Transformée de Sumudu

En mathématique, La transformation de Sumudu est une transformation intégrale sommable à la transformation de Laplace, introduite au début des années 1990 par Gracia K.Watugala [17] , pour résoudre les équations différentielles et les problèmes d'ingénierie de contrôle, elle est équivalent à la transformation de Laplace Carson avec la substitution $p = \frac{1}{u}$.

1 La transformée de Sumudu

1.1 Forme intégrale de la transformée de Sumudu

Définition 2.1 *[4] La transformation de Sumudu $\mathbb{S}(u)$ d'une fonction $f(t)$ est donnée par la formule suivante*

$$\mathrm{S}\left[f(t)\right](u) = \mathbb{S}(u) = \frac{1}{u}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{u}} f(t)dt, \quad u \in [-\tau_1, \tau_2], \tag{2.1}$$

ou bien

$$\mathrm{S}\left[f(t)\right](u) = \mathbb{S}(u) = \int_0^{\infty} e^{-t} f(ut)dt, \quad u \in [-\tau_1, \tau_2], \tag{2.2}$$

sur l'ensemble,

$$\mathbf{A} = \left\{ f(t)/\exists \mathrm{M}, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < \mathrm{M}e^{\frac{|t|}{\tau_j}}, \mathrm{S}i\ t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\}.$$

Exemple 2.1 *Transformée de Sumudu de la fonction $f(t) = cos(t)$ est*

$$\mathrm{S}\left[f(t)\right](u) = \frac{1}{1+u^2}.$$

En effet $cos(t) = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$*, en utilisant la forme intégrale* (2.1). *On trouve*

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}\left[cos(t)\right](u) &= \frac{1}{u}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{u}} \left[\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right] dt \\
&= \frac{1}{2u}\left[\int_0^{\infty} e^{-t(\frac{1}{u}-i)} dt + \int_0^{\infty} e^{-t(\frac{1}{u}+i)} dt\right] \\
&= \frac{1}{1+u^2}.
\end{aligned}$$

Donc $S\left[cos(t)\right](u) = \frac{1}{1+u^2}$.

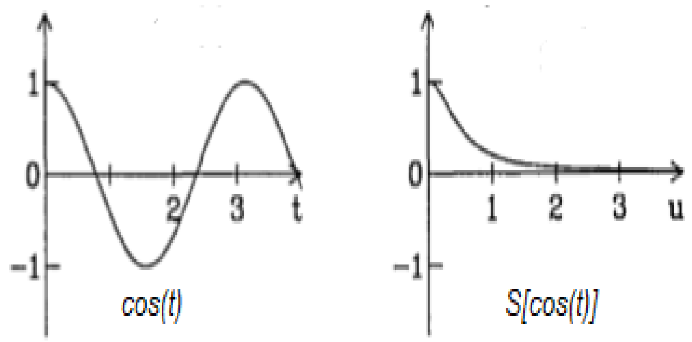

FIGURE 2.1 – Le graphe de cos(t) et de sa transformée de Sumudu

Exemple 2.2 *Transformée de Sumudu de la fonction* $f(t) = sin(t)$ *est*

$$S\left[f(t)\right](u) = \frac{u}{1+u^2}.$$

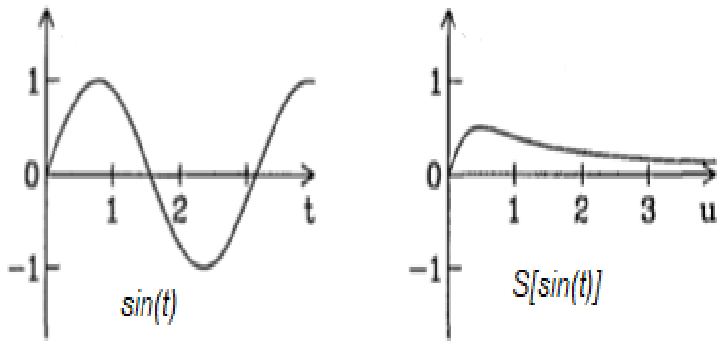

FIGURE 2.2 – Le graphe de sin(t) et de sa transformée de Sumudu

1.2 Forme sommable de la transformée de Sumudu

Théorème 2.1 *[3] La transformée de Sumudu amplifie les coefficients de la série entière de la fonction f*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \tag{2.3}$$

en l'envoyant à la série entière de la fonction

$$\mathbb{S}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} n! a_n u^n. \tag{2.4}$$

Preuve. Soit $f(t) \in \mathbf{A}$. Si $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ dans un intervalle $\mathbf{I} \subset \mathbf{A}$, alors d'après le développement de Taylor

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n.$$

Donc par (2.2) et celle de la fonction Gamma Γ, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}\left[f(t)\right](u) &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (ut)^n e^{-t} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} u^n \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} u^n \Gamma(n+1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) u^n.
\end{aligned}$$

Par conséquent, puis que

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}\left[(1+t)^m\right](u) = \mathrm{S}\left[\sum_{n=0}^{m} \mathrm{C}_m^n t^n\right] &= \mathrm{S}\left[\sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!(m-n)!} t^n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{(m-n)!} u^n = \sum_{n=0}^{m} \mathrm{P}_n^m u^n.
\end{aligned}$$

La transformée de Sumudu transforme les combinaisons C_n^m, en permutation,P_n^m et la transformée de Sumudu $\mathrm{S}\left[f(t)\right]$ converge dans un intervalle contenant $u = 0$ si

(i) $f^{(n)}(0) \longrightarrow 0$ pour $n \longrightarrow \infty$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)} u \right| < 1$.

Cela signifie que le rayon de convergence r de $\mathrm{S}\left[f(t)\right]$ dépend de la suite $f^{(n)}(0)$, car

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)} \right|.$$

■

Exemple 2.3 *Transformée de Sumudu de la fonction échelon (unité)*
La fonction échelon unité est définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & pour \quad t < 0, \\ 1 & pour \quad t \geq 0. \end{cases}$$

En utilisant la définition sommable de Sumudu, d'après (2.4) la transformation de Sumudu de la fonction unité est

$$\mathbb{S}(u) = 1.$$

Dans ce cas la fonction $f(t)$ et sa transformée de Sumudu $\mathbb{S}(u)$ sont égales dans le demi plan positif.

Exemple 2.4 *La transformation de Sumudu de $f(t) = e^{at}$ où a est une constante est*

$$S\left[e^{at}\right](u) = \frac{1}{1-au}.$$

En utilisant l'extension de puissance de e^{at}, nous avons

$$e^{at} = 1 + (at) + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \cdots.$$

D'après (2.4), *on trouve*

$$S\left[f(t)\right](u) = \frac{1}{1-au}.$$

Remarque 2.1 *Le tableau suivant présente la transformée de Sumudu de quelques fonctions.*

Fonction	Transformée de Sumudu
1	1
t	u
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ $\quad n = 1, 2, \cdots$	u^{n-1}
$\delta(t)$	$\frac{1}{u}$
$\delta(t-a)$	$\frac{e^{\frac{-a}{u}}}{u}$
$H(t-a)$	$e^{\frac{-a}{u}}$
te^{at}	$\frac{u}{(1-au)^2}$

TABLEAU 2.1 – Transformée de Sumudu de quelques fonctions.

2 Propriétés de la transformée de Sumudu

2.1 Linéarité

Théorème 2.2 *[1] Soient $f(t)$ et $g(t)$ en* **A**, *α et β des constantes*

$$S\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right](u) = \alpha S\left[f(t)\right](u) + \beta S\left[g(t)\right](u).$$

Preuve. Pour tout α et $\beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}\left[\alpha f(t)+\beta g(t)\right](u) &= \frac{1}{u}\int_0^\infty \left(\alpha f(t)+\beta g(t)\right)e^{\frac{-t}{u}}\,dt \\
&= \frac{1}{u}\left[\int_0^\infty \alpha f(t)e^{\frac{-t}{u}}\,dt+\int_0^\infty \beta g(t)e^{\frac{-t}{u}}\,dt\right] \\
&= \alpha\frac{1}{u}\int_0^\infty f(t)e^{\frac{-t}{u}}\,dt+\beta\frac{1}{u}\int_0^\infty g(t)e^{\frac{-t}{u}}\,dt \\
&= \alpha \mathrm{S}\left[f(t)\right](u)+\beta \mathrm{S}\left[g(t)\right](u).
\end{aligned}$$

■

2.2 Multiplication par un scalaire

Théorème 2.3 *[4] Si la transformée de Sumudu de $f(t)$ est $\mathbb{S}(u)$ et pour toute constante c. Alors*

$$\mathrm{S}\left[f(ct)\right](u)=\mathbb{S}(cu).$$

Preuve. On applique la forme intégrale (2.2), alors

$$\mathrm{S}\left[f(ct)\right](u)=\int_0^\infty e^{-t}f(ctu)\,dt.$$

On fait un changement de variable, on pose

$$x=ctu \quad \text{donc} \quad t=\frac{x}{cu},\ dt=\frac{1}{cu}dx,$$

On remplace dans l'expression précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-t}f(ctu)\,dt &= \int_0^\infty f(x)e^{\frac{-x}{cu}}\frac{1}{cu}\,dx \\
&= \frac{1}{cu}\int_0^\infty f(x)e^{\frac{-x}{cu}}\,dx \\
&= \mathbb{S}(cu).
\end{aligned}$$

■

2.3 Multiplication par un paramètre

Théorème 2.4 *Soit $\mathbb{S}(u)$ la transformée de Sumudu de la fonction $f(t)$ dans* **A**, *la transformée de Sumudu de la fonction $tf(t)$ est donnée par*

$$\mathrm{S}\left[tf(t)\right](u)=u\frac{d\left[u\mathbb{S}(u)\right]}{du}. \tag{2.5}$$

Preuve. D'après (2.2), on a

$$\mathrm{S}\left[tf(t)\right](u)=\int_0^\infty utf(ut)e^{-t}\,dt.$$

On fait une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty utf(ut)e^{-t}dt &= -utf(ut)e^{-t}\Big|_0^\infty + u\int_0^\infty \frac{d\left[tf(ut)\right]}{dt}e^{-t}dt \\
&= u\int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt + u\int_0^\infty t\frac{d\left[f(ut)\right]}{dt}e^{-t}dt \\
&= u\int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt + u\int_0^\infty utf'(ut)e^{-t}dt \\
&= u\mathbb{S}(u) + u^2\frac{d\left[\mathbb{S}(u)\right]}{du} \\
&= u\frac{d\left[u\mathbb{S}(u)\right]}{du}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.5 *Si* $\mathrm{S}\left[f(t)\right](u) = \mathbb{S}(u)$, *alors*

$$\mathrm{S}\left[t^2 f(t)\right](u) = u^4\frac{d^2\mathbb{S}(u)}{du^2} + 4u^3\frac{d\mathbb{S}(u)}{du} + 2u^2\mathbb{S}(u).$$

Preuve. D'après l'intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}\left[t^2 f(t)\right](u) &= \int_0^\infty (ut)^2 f(ut)e^{-t}dt = u^2\left[-t^2e^{-t}f(ut)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{d\left(t^2 f(ut)\right)}{dt}e^{-t}dt\right] \\
&= 2u^2\int_0^\infty tf(ut)e^{-t}dt + u^3\int_0^\infty t^2 f'(ut)e^{-t}dt \\
&= 2u^2\left[\int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt + u\int_0^\infty tf'(ut)e^{-t}dt\right] \\
&+ u^3\left[\int_0^\infty 2tf'(ut)e^{-t}dt + u\int_0^\infty t^2 f^{(2)}(ut)e^{-t}dt\right] \\
&= 2u^2\int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt + 4u^3\int_0^\infty tf'(ut)e^{-t}dt + u^4\int_0^\infty t^2 f''(ut)e^{-t}dt \\
&= 2u^2\mathbb{S}(u) + 4u^3\frac{d\mathbb{S}(u)}{du} + u^4\frac{d^2\mathbb{S}(u)}{du^2}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.6 *[3] Soit* $\mathbb{S}(u)$ *la transformée de Sumudu de* $f(t)$ *dans* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbb{S}_k(u)$ *la dérivée* $k^{ième}$ *de* $\mathbb{S}(u)$ *par rapport à* u.
La transformée de Sumudu de la fonction $\left[t^n f(t)\right]$ *est donnée par*

$$\mathrm{S}\left[t^n f(t)\right](u) = u^n\sum_{k=0}^{n} a_k^n u^k \mathbb{S}_k(u),$$

où

$$a_0^n = n!,\ a_n^n = 1,\ a_1^n = n(n!).$$

Et pour $k = 2, 3, \cdots, n-2$,

$$a_k^n = a_{k-1}^{n-1} + (n+k)a_k^{n-1}.$$

Preuve. En utilise le raisonnement par récurrence pour démontrer

$$\mathrm{S}\left[t^n f(t)\right](u) = u^n \sum_{k=0}^{n} a_k^n u^k \mathbb{S}_k(u).$$

Alors, on vérifie si la proposition est vrai pour $n = 0$. On a

$$\mathrm{S}\left[t^0 f(t)\right](u) = u^0 \sum_{k=0}^{n=0} a_k^n u^k \mathbb{S}_k(u) = \mathbb{S}_0(u) = \mathbb{S}(u) = \mathrm{S}\left[f(t)\right](u),$$

donc elle est vrai.
Pour $n = 1$, on a $\mathrm{S}\left[t^n f(t)\right](u) = \mathrm{S}\left[t f(t)\right](u)$, alors l'équation (2.5) montre que la proposition est vrai pour $n = 1$.
Supposons que pour un entier n soit vrai, on montre alors que pour $n+1$ est encore vrai.
On pose $\mathrm{M}(u) = \mathrm{S}\left[t^n f(t)\right](u)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}\left[t^{n+1} f(t)\right](u) &= \mathrm{S}\left[t\left(t^n f(t)\right)\right](u) = u\mathrm{M}(u) + u^2 \frac{d\mathrm{M}(u)}{du} \\
&= u\left[u^n \sum_{k=0}^{n} a_k^n u^k \mathbb{S}_k(u)\right] + u^2 \frac{d}{du}\left[u^n \sum_{k=0}^{n} a_k^n u^k \mathbb{S}_k(u)\right] \\
&= u^{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k^n u^k \mathbb{S}_k(u) + u^2 \left[\sum_{k=0}^{n} a_k^n \frac{d}{du}\left(u^{k+n} \mathbb{S}_k(u)\right)\right] \\
&= u^{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k^n u^k \mathbb{S}_k(u) + \sum_{k=0}^{n} a_k^n (k+n) u^{k+n+1} \mathbb{S}_k(u) + \sum_{k=0}^{n} a_k^n u^{k+n+2} \mathbb{S}_{k+1}(u) \\
&= u^{n+1} \sum_{k=0}^{n} (k+n+1) a_k^n u^k \mathbb{S}_k(u) + u^{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k^n u^{k+1} \mathbb{S}_{k+1}(u).
\end{aligned}$$

Notons que pour $k < 0$ ou $k > n$, $a_n^k = 0$, nous pouvons réécrire l'équation précédente comme

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}\left[t^{n+1} f(t)\right](u) &= u^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} (k+n+1) a_k^n u^k \mathbb{S}_k(u) + u^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} a_{k-1}^n u^k \mathbb{S}_k(u) \\
&= u^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \left[(k+n+1) a_k^n + a_{k-1}^n\right] u^k \mathbb{S}_k(u),
\end{aligned}$$

d'après les conditions du théorème,

$$a_k^n = a_{k-1}^{n-1} + (k+n) a_k^{n-1},$$

alors pour $n+1$,

$$a_k^{n+1} = (k+n+1) a_k^n + a_{k-1}^n,$$

donc,

$$\mathrm{S}\left[t^{n+1} f(t)\right](u) = u^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} a_k^{n+1} u^k \mathbb{S}_k(u).$$

Alors, la proposition est vrai. ∎

2.4 Intégration

Théorème 2.7 *[17] Si la transformée de Sumudu de $f(t)$ est $\mathbb{S}(u)$, alors la transformée de Sumudu de sa primitive est*

$$\mathrm{S}\left[\int_0^t f(x)dx\right](u) = u\mathbb{S}(u). \tag{2.6}$$

Preuve. On a

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

On intègre, on obtient

$$\int_0^t f(x)dx = a_0 t + \frac{1}{2}a_1 t^2 + \frac{1}{3}a_2 t^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}a_n t^{n+1} + \cdots.$$

on applique la formule sommable de Sumudu

$$\begin{aligned}\mathrm{S}\left[\int_0^t f(x)dx\right](u) &= a_0 u + a_1 u^2 + 2!a_2 u^3 + \cdots + n!a_n u^{n+1} + \cdots \\ &= u\mathbb{S}(u).\end{aligned}$$

■

2.5 Dérivation

Théorème 2.8 *[17] Si la transformée de Sumudu de $f(t)$ est $\mathbb{S}(u)$, alors la transformée de Sumudu de $f'(t)$ est*

$$\mathrm{S}\left[f'(t)\right](u) = \frac{\mathbb{S}(u) - f(0)}{u} = \frac{\mathbb{S}(u) - \mathbb{S}(0)}{u}.$$

Preuve. En utilisant la définition intégrale de Sumudu, donc d'après (2.1) on a

$$\mathrm{S}\left[f'(t)\right](u) = \int_0^\infty \frac{1}{u} f'(t) e^{\frac{-t}{u}} dt.$$

On fait une intégration par partie, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{u} f'(t) e^{\frac{-t}{u}} dt &= \frac{1}{u}\left[f(t)e^{\frac{-t}{u}}\Big|_0^\infty + \frac{1}{u}\int_0^\infty f(t)e^{\frac{-t}{u}}dt\right] \\ &= \frac{1}{u}\left[\lim_{t\to\infty} f(t)e^{\frac{-t}{u}} - f(0) + \frac{1}{u}\int_0^\infty f(t)e^{\frac{-t}{u}}dt\right].\end{aligned}$$

On a $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{\frac{-t}{u}}$=0, d'après la forme sommable de Sumudu $f(0)$=$\mathbb{S}(0)$.
Alors,

$$\mathrm{S}\left[f'(t)\right](u) = \frac{\mathbb{S}(u) - f(0)}{u} = \frac{\mathbb{S}(u) - \mathbb{S}(0)}{u}.$$

■

Théorème 2.9 *[8] Soit $f \in \mathbf{A}$ avec $\mathbb{S}(u)$ sa transformée de Sumudu. Alors*

$$\mathrm{S}\left[tf'(t)\right](u) = u\frac{d\mathbb{S}(u)}{du}.$$

Preuve. D'après (2.2) , On a

$$\begin{aligned} S\left[tf'(t)\right](u) &= \int_0^{\infty} utf'(ut)e^{-t}dt \\ &= u\int_0^{\infty} tf'(ut)e^{-t}dt, \end{aligned}$$

et comme

$$\frac{d\left[\mathbb{S}(u)\right]}{du} = \int_0^{\infty} tf'(ut)e^{-t}dt,$$

alors,

$$S\left[tf'(t)\right](u) = u\frac{d\left[\mathbb{S}(u)\right]}{du}.$$

■

2.6 Théorème de Shift

On appelle Shift ou décalage l'application

$$f(t) \to e^{at}f(t).$$

Théorème 2.10 *[4] Soit $f(t) \in \mathbf{A}$ et $\mathbb{S}(u)$ sa transformée de Sumudu. Alors*

$$S\left[e^{at}f(t)\right](u) = \frac{1}{1-au}\mathbb{S}\left(\frac{u}{1-au}\right).$$

Preuve. D'après (2.2), On a

$$\begin{aligned} S\left[e^{at}f(t)\right](u) &= \int_0^{\infty} f(ut)e^{-t}e^{aut}dt \\ &= \int_0^{\infty} f(ut)e^{-(1-au)t}dt. \end{aligned}$$

On fait un changement de variable, on pose $w = (1-au)t$. On trouve

$$\begin{aligned} S\left[e^{at}f(t)\right](u) &= \int_0^{\infty} f\left(\frac{uw}{1-au}\right)e^{-w}\frac{dw}{1-au} \\ &= \frac{1}{1-au}\int_0^{\infty} f\left(\frac{uw}{1-au}\right)e^{-w}dw \\ &= \frac{1}{1-au}\mathbb{S}\left(\frac{u}{1-au}\right). \end{aligned}$$

■

3 Relation entre transformée de Sumudu et de Laplace

Théorème 2.11 *[10] Soit $f(t) \in \mathbf{A}$, avec transformée de Laplace $\mathscr{L}\left[f(t)\right](z)$. Alors la transformation de Sumudu $S\left[f(t)\right](u)$ de $f(t)$ est donnée par*

$$S\left[f(t)\right](u) = \frac{1}{u}\mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{1}{u}\right). \tag{2.7}$$

Preuve. Soit $f(t) \in \mathbf{A}$, alors pour $-\tau_1 < u < \tau_2$. On a

$$\mathrm{S}\left[f(t)\right](u) = \int_0^\infty e^{-t} f(ut)dt.$$

Si nous définissons $w = ut$ $(t = \frac{w}{u})$, alors le côté droit peut être écrit sous la forme

$$\mathrm{S}\left[f(t)\right](u) = \int_0^\infty e^{-\frac{w}{u}} f(w)\frac{dw}{u} = \frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-\frac{w}{u}} f(w)dw.$$

L'intégrale du côté droit est clairement $\mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{1}{u}\right)$, ce qui donne (2.7). ■

Corollaire 2.1 *[4] Soit $f(t) \in \mathbf{A}$, ayant $\mathscr{L}$ et $\mathbb{S}$ pour transformée de Laplace et de Sumudu respectivement. Alors*

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](z) = \frac{1}{z}\mathrm{S}\left[f(t)\right]\left(\frac{1}{z}\right). \tag{2.8}$$

Preuve. L'équation (2.8) peut être obtenue à partir de (2.7), en prenant $(u = \frac{1}{z})$. ■

4 La différentiation et les intégrations multiples de Sumudu

Théorème 2.12 *[3] Soit $f(t)$ être dans $\mathbf{A}$ et $\mathbb{S}_n(u)$ désigne la transformée de Sumudu de la dérivée $n^{ième}$ $f^{(n)}(t)$ de $f(t)$, alors pour $n \geq 1$ on a*

$$\mathbb{S}_n(u) = \mathrm{S}\left[f^{(n)}(t)\right](u) = \frac{\mathbb{S}(u)}{u^n} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-k}}. \tag{2.9}$$

Preuve. On vérifié que $\mathbb{S}_1$ est vrai, c'est à dire que la proposition est vrai au rang $n = 1$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_1(u) = \mathrm{S}\left[f^{(1)}(t)\right](u) &= \frac{\mathbb{S}(u)}{u} - \sum_{k=0}^{1-1}\frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-k}}\\ &= \frac{\mathbb{S}(u)}{u} - \frac{f(0)}{u},\end{aligned}$$

puisque ça à déjà démontrer dans le Théorème 2.8, donc elle est vrai.

Supposons que pour un entier $n \geq 1$, $\mathbb{S}_n$ est vrai et montrons que $\mathbb{S}_{n+1}$ soit vraie. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{n+1}(u) = \mathrm{S}\left[\left(f^{(n)}(t)\right)'\right](u) &= \frac{\mathrm{S}\left[f^{(n)}(t)\right](u) - f^{(n)}(0)}{u}\\ &= \frac{\mathbb{S}_n(u) - f^{(n)}(0)}{u} = \frac{\mathbb{S}(u)}{u^{n+1}} - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{u^{n+1-k}}.\end{aligned}$$

Alors $\mathbb{S}_{n+1}$ est vraie.
D'où pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{S}_n = \frac{\mathbb{S}(u)}{u^n} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-k}}.$$

■

Théorème 2.13 *[8] Si $\mathrm{S}\left[f(t)\right](u) = \mathbb{S}(u)$, alors*

$$\mathrm{S}\left[tf''(t)\right](u) = u\mathrm{S}\left[f''(t)\right](u) + u^2\frac{d\mathrm{S}\left[f''(t)\right](u)}{du}.$$

Preuve. On fait une intégration par partie, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}\left[tf''(t)\right](u) &= \int_0^\infty utf''(ut)e^{-t}dt = -ute^{-t}f''(ut)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{d\left(utf''(ut)\right)}{dt}e^{-t}dt \\
&= u\int_0^\infty f''(ut)e^{-t}dt + u\int_0^\infty t\frac{df''(ut)}{dt}e^{-t}dt \\
&= u\int_0^\infty f''(ut)e^{-t}dt + u\int_0^\infty utf^{(3)}(ut)e^{-t}dt \\
&= u\mathrm{S}\left[f''(t)\right](u) + u^2\frac{d\mathrm{S}\left[f''(t)\right](u)}{du}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.14 *[3] Soit $\mathbb{S}(u)$ la transformation de Sumudu de la fonction $f(t)$, soit $f^{(n)}(t)$ la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $f(t)$ par rapport à t et $\mathbb{S}_n(u)$ désigne la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $\mathbb{S}(u)$ par rapport à u, la transformation de Sumudu de la fonction $\left[t^nf^{(n)}(t)\right]$ est donnée par*

$$\mathrm{S}\left[t^nf^{(n)}(t)\right](u) = u^n\mathbb{S}_n(u).$$

Preuve. D'après(2.2), on a

$$\mathbb{S}(u) = \int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt.$$

On dérive n fois $\mathbb{S}(u)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d^n\mathbb{S}(u)}{du^n} = \mathbb{S}_n(u) &= \int_0^\infty \frac{d^nf(ut)}{du^n}e^{-t}dt \\
&= \int_0^\infty t^nf^{(n)}(ut)e^{-t}dt \\
&= \frac{1}{u^n}\int_0^\infty (ut)^nf^{(n)}(ut)e^{-t}dt \\
&= \frac{1}{u^n}\mathrm{S}\left[t^nf^{(n)}(t)\right](u).
\end{aligned}$$

Alors

$$\mathrm{S}\left[t^nf^{(n)}(t)\right](u) = u^n\mathbb{S}_n(u).$$

■

Théorème 2.15 *[3] Soit $f(t)$ être dans **A** et soit $\mathbb{S}^n$ désigne la transformée de Sumudu du $n^{\text{ième}}$ primitive de $f(t)$, obtenue en intégrant la fonction $f(t)$ n fois successivement*

$$\mathrm{W}^n(t) = \iint_0^t \cdots \int_0^t f(\tau)(d\tau)^n,$$

puis pour $n \geq 1$,

$$\mathbb{S}^n(u) = \mathrm{S}\left[\mathrm{W}^n(t)\right](u) = u^n\mathbb{S}(u). \tag{2.10}$$

Preuve. Pour $n = 1$, on a

$$\mathrm{W}^1(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau,$$

et

$$\mathbb{S}^1(u) = \mathrm{S}\left[\mathrm{W}^1(t)\right](u) = u\mathbb{S}(u),$$

ce qui résultat à démontrer dans le Théorème 2.7. Alors la proposition est vraie.

Supposons que pour $n \geq 1$ la proposition $\mathbb{S}^n$ soit vraie et montrons que la proposition $\mathbb{S}^{n+1}$ est vraie pour tout $n+1$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{S}^{n+1}(u) &= \mathrm{S}\left[\mathrm{W}^{n+1}(t)\right](u) = \mathrm{S}\left[\int_0^t \mathrm{W}^n(\tau)d\tau\right](u)\\ &= u\mathrm{S}\left[\mathrm{W}^n(t)\right](u) = u\left[u^n\mathbb{S}(u)\right] = u^{n+1}\mathbb{S}(u).\end{aligned}$$

Alors $\mathbb{S}_{n+1}$ est vraie.
D'où pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{S}^n(u) = u^n\mathbb{S}(u).$$

■

5 Théorème de la valeur initiale et de la valeur final

Théorème 2.16 *[4] Soit $f(t) \in \mathbf{A}$, On suppose que $\lim_{t\to 0} f(t)$ et $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe. Alors,*

$$\lim_{u\to 0}\mathbb{S}(u) = \lim_{t\to 0} f(t).$$

$$\lim_{u\to\infty}\mathbb{S}(u) = \lim_{t\to\infty} f(t).$$

Preuve. D'après (2.2), on a

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0}\mathbb{S}(u) &= \lim_{u\to 0}\int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt = \int_0^\infty \left[\lim_{u\to 0} f(ut)\right]dt\\ &= \int_0^\infty\left[\lim_{w\to 0} f(w)\right]dt = \lim_{w\to 0} f(w).\end{aligned}$$

De même pour,

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty}\mathbb{S}(u) &= \lim_{u\to\infty}\int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt = \int_0^\infty \left[\lim_{u\to\infty} f(ut)\right]dt\\ &= \int_0^\infty\left[\lim_{w\to\infty} f(w)\right]dt = \lim_{w\to\infty} f(w).\end{aligned}$$

■

6 Convolution

Théorème 2.17 *[4] Soit $f(t)$ et $g(t)$ dans l'ensemble $\mathbf{A}$, ayant des transformées de Laplace $\mathscr{L}\left[f(t)\right](z)$ et $\mathscr{L}\left[g(t)\right](z)$ respectivement et des transformées de Sumudu $\mathrm{S}\left[f(t)\right](u)$ et $\mathrm{S}\left[g(t)\right](u)$ respectivement. Alors la transformée de Sumudu de produit de convolution de f et g : $\left[f\star g\right](t) = \int_0^t f(t)g(t-\tau)d\tau$ est donnée par*

$$\mathrm{S}\left[(f\star g)(t)\right](u) = u\mathrm{S}\left[f(t)\right](u)\mathrm{S}\left[g(t)\right](u).$$

Preuve. Tout d'abord, rappelons que la transformée de Laplace $(f\star g)$ est donnée par

$$\mathscr{L}\left[f\star g\right](z) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](z)\mathscr{L}\left[g(t)\right](z).$$

Maintenant, par la relation entre la Transformée de Laplace et de Sumudu, on a

$$\mathrm{S}\left[(f\star g)(t)\right](u)=\frac{1}{u}\mathscr{L}\left[(f\star g)(t)\right]\left(\frac{1}{u}\right),$$

comme, $\mathrm{S}\left[f(t)\right](u)=\dfrac{\mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{1}{u}\right)}{u}$ et $\mathrm{S}\left[g(t)\right](u)=\dfrac{\mathscr{L}\left[g(t)\right]\left(\frac{1}{u}\right)}{u}$.

Alors la transformée de Sumudu de $(f\star g)$ est obtenue comme suit

$$\begin{aligned}\mathrm{S}\left[(f\star g)(t)\right](u)&=\frac{1}{u}\left[\mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{1}{u}\right)\mathscr{L}\left[g(t)\right]\left(\frac{1}{u}\right)\right]\\&=\frac{1}{u}\left[u^2\mathrm{S}\left[f(t)\right](u)\mathrm{S}\left[g(t)\right](u)\right]\\&=u\mathrm{S}\left[f(t)\right](u)\mathrm{S}\left[g(t)\right](u).\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.2 *[3] Soit $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $h_1(t)$, $\cdots$, et $h_n(t)$ des fonctions dans $\mathbf{A}$, ayant les transformations de Sumudu $\mathrm{S}\left[f(t)\right](u)$, $\mathrm{S}\left[g(t)\right](u)$, $\mathrm{S}\left[h(t)\right](u)$, $\mathrm{S}\left[h_1(t)\right](u)$, $\cdots$, et $\mathrm{S}\left[h_n(t)\right](u)$ respectivement, alors la transformation de Sumudu de $(f\star g)^n(t)=\iint_0^t\cdots\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)(d\tau)^n$ est donnée par*

$$\mathrm{S}\left[(f\star g)^n(t)\right](u)=u^n\mathrm{S}\left[f(t)\right](u)\mathrm{S}\left[g(t)\right](u).$$

De plus, pour tout entier $n\geq 1$,

$$\mathrm{S}\left[h_1(t)\star h_2(t)\star\cdots\star h_n(t)\right](u)=u^{n-1}\mathrm{S}\left[h_1(t)\right](u)\mathrm{S}\left[h_2(t)\right](u)\cdots\mathrm{S}\left[h_n(t)\right](u).$$

En particulier, la transformation de Sumudu de $(f\star g\star h)$ avec f, g et h dans $\mathbf{A}$ est donnée par

$$\mathrm{S}\left[(f\star g\star h)(t)\right](u)=u^2\mathrm{S}\left[f(t)\right](u)\mathrm{S}\left[g(t)\right](u)\mathrm{S}\left[h(t)\right](u).$$

Preuve. Pour $n=1$,

$$\mathrm{S}\left[(f\star g)^1(t)\right](u)=u^1\mathrm{S}\left[f(t)\right](u)\mathrm{S}\left[g(t)\right](u).$$

Puisque ça à déjà démontrer dans le Théorème 2.17, donc elle est vrai.
Supposons que pour tout $n\geq 1$, la proposition soit vraie et montrons que la proposition est vrai pour tout $n+1$, alors on a

$$(f\star g)^{n+1}(t)=\int_0^t(f\star g)^n(\tau)d\tau,$$

donc,

$$\mathrm{S}\left[(f\star g)^{n+1}(t)\right](u)=\mathrm{S}\left[\int_0^t(f\star g)^n(\tau)d\tau\right](u),$$

alors d'après (2.6), on a

$$\begin{aligned}\mathrm{S}\left[(f\star g)^{n+1}(t)\right](u)&=u\mathrm{S}\left[(f\star g)^n(t)\right](u)\\&=u\Big(u^n\mathrm{S}\left[f(t)\right](u)\mathrm{S}\left[g(t)\right](u)\Big)\\&=u^{n+1}\mathrm{S}\left[f(t)\right](u)\mathrm{S}\left[g(t)\right](u).\end{aligned}$$

Alors pour $n+1$ la proposition est vraie, d'où pour tout $n\geq 1$ la proposition vraie.
Même principe pour $\mathrm{S}\left[h_1(t)\star h_2(t)\star\cdots\star h_n(t)\right](u)$. ■

Théorème 2.18 *[5] La transformée de Sumudu de la dérivée de convolution des fonctions f et g*

$$\mathrm{S}\left[(f\star g)'(t)\right](u)=\mathrm{S}\left[f(t)\right](u)\mathrm{S}\left[g(t)\right](u).$$

Preuve. D'après la commutativité de la convolution on a

$$[f\star g]'=[f'\star g]=[f\star g'],$$

et comme

$$\mathrm{S}\left[(f\star g)'(t)\right](u)=\frac{1}{u}\Big[\mathrm{S}\left[(f\star g)(t)\right](u)-\mathrm{S}\left[(f\star g)(0)\right](u)\Big],$$

avec

$$\mathrm{S}\left[(f\star g)(0)\right](u)=0.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{S}\left[(f\star g)'(t)\right](u)&=\frac{1}{u}\mathrm{S}\left[(f\star g)(t)\right](u)\\&=\frac{1}{u}\Big[u\mathrm{S}\left[f(t)\right](u)\mathrm{S}\left[g(t)\right](u)\Big]\\&=\mathrm{S}\left[f(t)\right](u)\mathrm{S}\left[g(t)\right](u).\end{aligned}$$

■

7 La transformée inverse de Sumudu

Théorème 2.19 *[6] Soit $\mathbb{S}(u)$ la transformation de Sumudu de $f(t)$ telle que :*

- $\dfrac{\mathbb{S}\left(\frac{1}{z}\right)}{z}$ *est une fonction méromorphe avec des singularités ayant* $\mathrm{Re}(z)<\gamma$.
- *Il existe une région circulaire* C *de rayon* R *et de constante positive* M *et* k *avec*

$$\left|\frac{\mathbb{S}\left(\frac{1}{z}\right)}{z}\right|<\mathrm{MR}^{-k},$$

puis la fonction $f(t)$ est donnée par

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{zt}\mathbb{S}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z}=\sum \text{Résidus}\left[e^{zt}\frac{\mathbb{S}\left(\frac{1}{z}\right)}{z},\mathrm{S}_i\right].\tag{2.11}$$

Preuve. On a déjà vu la formule d'inversion de Laplace,

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\mathscr{F}(z)e^{zt}dz,$$

et d'après la relation entre la transformée de Laplace et de Sumudu (2.8) on a

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{zt}\mathbb{S}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\mathrm{R}\to\infty}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{zt}\mathbb{S}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z}.$$

D'après le théorème de résidus on a

$$\int_C e^{zt}\mathbb{S}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z} = 2\pi i \sum Résidus\left[e^{zt}\frac{\mathbb{S}\left(\frac{1}{z}\right)}{z}, S_i\right],$$

où C le contour de Bromwich définit dans le figure 2.3.
D'autre part,

$$\int_C e^{zt}\mathbb{S}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z} = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{zt}\mathbb{S}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z} + \int_{Cr} e^{zt}\mathbb{S}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z},$$

alors, d'après la deuxième condition de Théorème 2.19 on a

$$\lim_{R\to\infty}\int_{Cr} e^{zt}\mathbb{S}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z} = 0,$$

donc,

$$\int_C e^{zt}\mathbb{S}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z} = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{zt}\mathbb{S}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z}.$$

Ceci implique que,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{zt}\mathbb{S}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z} = \sum Résidus\left[e^{zt}\frac{\mathbb{S}\left(\frac{1}{z}\right)}{z}, S_i\right]$$

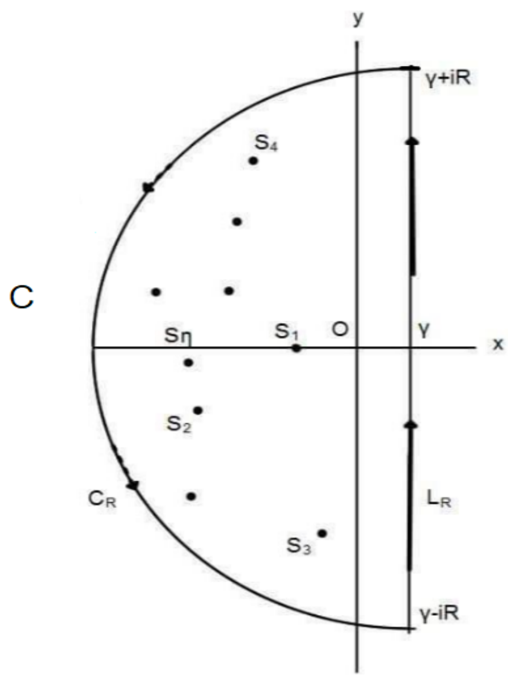

FIGURE 2.3 – Le contour de Bromwich.

■

Corollaire 2.3 *[3] La transformée discrète inverse de Sumudu de la série entière de la fonction*

$$\mathbb{S}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} n! a_n u^n,$$

est donnée par,

$$f(t) = \mathrm{S}^{-1}\left[\mathbb{S}(u)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n t^n.$$

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre, on s'intéresse à donner des résultats liés aux transformations de Sumudu

1 Équations différentielles

La solution de certaines équations différentielles peut être facilement réalisée au moyen de la transformation de Sumudu [3], [17].

On considère l'équation différentielle d'ordre "n",

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_2 y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = f(t).$$

On cherche les solutions $y = y(t)$ vérifiant l'équation avec des conditions initiales connues.

On applique la transformation de Sumudu au deux membres de l'équation et d'après la linéarité, on a

$$a_n \mathrm{S}\left(y^{(n)}(t)\right) + a_{n-1}\mathrm{S}\left(y^{(n-1)}(t)\right) + \cdots + a_2\mathrm{S}\left(y^{(2)}(t)\right) + a_1\mathrm{S}\left(y^{(1)}(t)\right) + a_0\mathrm{S}\left(y(t)\right) = \mathrm{S}\left(f(t)\right).$$

D'après le théorème de la différentiation multiples, on trouve

$$a_n\left(\frac{\mathrm{S}\left(y(t)\right)}{u^n} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(0)}{u^{n-k}}\right) + a_{n-1}\left(\frac{\mathrm{S}\left(y(t)\right)}{u^{n-1}} - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{y^{(k)}(0)}{u^{n-1-k}}\right) + \cdots + a_1\left(\frac{\mathrm{S}\left(y(t)\right)}{u^1} - \frac{y(0)}{u}\right) + a_0\mathrm{S}\left(y(t)\right) = \mathrm{S}\left(f(t)\right).$$

Après les simplifications, on obtient

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{u^i}\mathrm{S}\left(y(t)\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{u^i}\sum_{k=0}^{n-1}a_{i+k}y^{(k)}(0) = \mathrm{S}\left(f(t)\right).$$

Ceci implique que ,

$$\mathrm{S}\left(y(t)\right) = \frac{1}{p(u)}\mathrm{S}\left(f(t)\right) + \frac{1}{p(u)}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{u^i}\sum_{k=0}^{n-1}a_{i+k}y^{(k)}(0)\right],$$

telle que

$$p(u) = \sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{u^i}.$$

Alors on applique la transformée inverse de Sumudu, on trouve

$$y(t) = \mathrm{S}^{-1}\left[\frac{1}{p(u)}\mathrm{S}\left(f(t)\right)\right] + \mathrm{S}^{-1}\left[\frac{1}{p(u)}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{u^i}\sum_{k=0}^{n-1}a_{i+k}y^{(k)}(0)\right]\right].$$

Exemple 3.1 *Considérons l'équation différentielle*

$$y'(t) + y(t) = 1, \tag{3.1}$$

avec la condition initiale, $y(0) = 0$.
On applique la transformée de Sumudu sur (3.1)*, on obtient*

$$\mathrm{S}\left[y'(t) + y(t)\right] = \mathrm{S}\left[1\right].$$

D'après la linéarité de Sumudu, on a

$$\mathrm{S}\left[y'(t)\right] + \mathrm{S}\left[y(t)\right] = \mathrm{S}\left[1\right], \tag{3.2}$$

et comme

$$\mathrm{S}\left[1\right] = 1 \quad et \quad \mathrm{S}\left[y'(t)\right] = \frac{\mathrm{S}\left[y(t)\right]}{u}.$$

Donc, (3.2) *devient*

$$\frac{\mathrm{S}\left[y(t)\right]}{u} + \mathrm{S}\left[y(t)\right] = 1,$$

ce qui implique,

$$\mathrm{S}\left[y(t)\right]\left(\frac{1+u}{u}\right) = 1.$$

D'où

$$\mathrm{S}\left[y(t)\right] = \frac{u}{1+u} = 1 - \frac{1}{1+u}. \tag{3.3}$$

Maintenant, on applique la transformée inverse de Sumudu pour (3.3)*, on obtient*

$$y(t) = \mathrm{S}^{-1}\left(1 - \frac{1}{1+u}\right)(t) = \mathrm{S}^{-1}\left(1\right)(t) - \mathrm{S}^{-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)(t).$$

La solution de (3.1) *est*

$$y(t) = 1 - e^{-t}.$$

Exemple 3.2 ***"Système de masse à ressort"****[9]*
Considérons les systèmes "Spring- Mass" donnés par le problème de valeur initiale de second ordre suivant

$$my" + cy' + ky = f(t), \quad (t > 0), \quad y(0) = \alpha \quad et \quad y'(0) = \beta.$$

Où m représente la masse, c le coefficient d'amortissement, k la constante de ressort déterminée par la loi de Hooke et $f(t)$ *la fonction de forçage.*
Nous considérons en particulier le problème de la valeur initiale qui consiste à avoir une fonction de forçage discontinue et $m = 1$, $c = -2$, $k = -3$, *donnée par*

$$y"(t) - 2y'(t) - 3y(t) = f(t), \quad t > 0, \tag{3.4}$$

avec

$$y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

où

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 < t \leq 1, \\ t-1 & si \quad 1 < t \leq 4, \\ 3 & si \quad t \geq 4. \end{cases}$$

La fonction $f(t)$ peut être écrite sous la forme suivante,

$$f(t) = (t-1)\big[\mathrm{H}(t-1) - \mathrm{H}(t-4)\big] + 3\mathrm{H}(t-4),$$

où H *est la fonction de Heaviside,*

$$\mathrm{H}(t-1) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 1 \\ 1 & si \quad t \geq 1 \end{cases}$$

et

$$\mathrm{H}(t-4) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 4 \\ 1 & si \quad t \geq 4 \end{cases}$$

alors, $f(t)$ devient

$$f(t) = (t-1)\mathrm{H}(t-1) - (t-4)\mathrm{H}(t-4).$$

Donc (3.4) peut être écrite sous la forme

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = (t-1)\mathrm{H}(t-1) - (t-4)\mathrm{H}(t-4), \quad t > 0 \tag{3.5}$$

avec

$$y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

En utilisant la transformation de Sumudu pour (3.5), nous obtenons

$$\mathrm{S}\left[y''(t) - 2y'(t) - 3y(t)\right] = \mathrm{S}\left[(t-1)\mathrm{H}(t-1) - (t-4)\mathrm{H}(t-4)\right].$$

D'après les propriétés de Sumudu en simplifiant l'équation ci-dessus, nous trouvons

$$\left(\frac{1}{u^2} - \frac{2}{u} - 3\right)\mathrm{S}\left[y(t)\right](u) - \frac{1}{u^2} + \frac{2}{u} = ue^{\frac{-1}{u}} - ue^{\frac{-4}{u}}.$$

D'où

$$\mathrm{S}\left[y(t)\right](u) = \frac{u^3 e^{\frac{-1}{u}}}{1-2u-3u^2} - \frac{u^3 e^{\frac{-4}{u}}}{1-2u-3u^2} + \frac{1-2u}{1-2u-3u^2},$$

et puis remplaçant u par $\frac{1}{z}$, alors nous trouvons

$$\mathrm{S}\left[y(t)\right]\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^{-z}}{z(z^2-2z-3)} - \frac{e^{-4z}}{z(z^2-2z-3)} + \frac{z^2-2z}{z^2-2z-3}. \tag{3.6}$$

Ainsi, on multiplié (3.6) par $\frac{1}{z}$. On trouve la transformée de Laplace de $f(t)$,

$$\mathscr{L}\left[y(t)\right](z) = \frac{e^{-z}}{z^2(z^2-2z-3)} - \frac{e^{-4z}}{z^2(z^2-2z-3)} + \frac{z-2}{z^2-2z-3}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[y(t)\right](z) = &\left[\frac{2}{9}\left(\frac{e^{-z}}{z}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{e^{-z}}{z^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{e^{-z}}{z+1}\right) + \frac{1}{36}\left(\frac{e^{-z}}{z-3}\right)\right] \\ &- \left[\frac{2}{9}\left(\frac{e^{-4z}}{z}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{e^{-4z}}{z^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{e^{-4z}}{z+1}\right) + \frac{1}{36}\left(\frac{e^{-4z}}{z-3}\right)\right] \\ &+ \left[\frac{3}{4}\left(\frac{1}{z+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-3}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

en utilisant la transformée inverse de Laplace pour (3.7), nous obtenons la solution de (3.4),

$$\begin{aligned} y(t) = &\left[\frac{2}{9} - \frac{1}{3}(t-1) - \frac{1}{4}e^{-(t-1)} + \frac{1}{36}e^{-3(t-1)}\right]\mathrm{H}(t-1) \\ &- \left[\frac{2}{9} - \frac{1}{3}(t-4) - \frac{1}{4}e^{-(t-4)} + \frac{1}{36}e^{-3(t-4)}\right]\mathrm{H}(t-4) \\ &+ \frac{1}{4}\left(3e^{-t} + e^{3t}\right)\mathrm{H}(t). \end{aligned}$$

2 Équations intégrales

Dans [2], l'objectif de ce travail est de démontrer l'application de cette nouvelle transformation à la solution d'équation intégrale linéaire de type

$$f(x) = \int_a^b K(x,\tau)h(\tau)d\tau, \tag{3.8}$$

et

$$h(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\tau)h(\tau)d\tau, \quad \lambda = cst \tag{3.9}$$

où $h(.)$ doit être déterminée, $f(x)$, $K(x,\tau) \equiv g(x,\tau)$ et les limites de l'intégration sont supposées connues. $K(.,.)$ Est appelé le noyau de l'équation.
On appelle (3.9) l'équation de Ferdholm si a et b sont des constantes et homogènes si $f(x) = 0$.
Si $a = 0$, $b = x$ (c'est-à-dire que la variable est une limite d'intégration), on appelle (3.9) l'équation de l'intégrale Volterra. Là, encore, elle est homogène si $f(x) = 0$.

Considérer l'équation

$$f(x) = \int_0^x g(x-\tau)h(\tau)d\tau. \tag{3.10}$$

Nous prenons la transformation de Sumudu de (3.10) pour obtenir

$$F(u) = uG(u)H(u).$$

Où

$$H(u) = \frac{F(u)}{uG(u)},$$

tels qu, $F(u) = S\left[f(t)\right]$, $G(u) = S\left[g(t)\right]$ et $H(u) = S\left[h(t)\right]$.
Et par la transformée de Sumudu inverse, nous avons

$$h(x) = S^{-1}\left(\frac{F(u)}{uG(u)}\right).$$

De même. Considérons l'équation,

$$h(x) = f(x) + \lambda \int_0^x g(x-\tau)h(\tau)d\tau. \tag{3.11}$$

De nouveau, la transformée de Sumudu de (3.11) est

$$H(u) = F(u) + \lambda uG(u)H(u).$$

Où

$$H(u) = \frac{F(u)}{1-\lambda uG(u)}$$

et la transformée de Sumudu inverse donne

$$h(x) = S^{-1}\left(\frac{F(u)}{1-\lambda uG(u)}\right).$$

Exemple 3.3 *Soit l'équation intégrale suivante*

$$\sin(2x) = \int_0^x (\tau - x) h(\tau) d\tau.$$

On applique la transformée de Sumudu, on obtient

$$\mathrm{S}\big[\sin(2x)\big](u) = \mathrm{S}\left[\int_0^x (\tau - x) h(\tau) d\tau\right](u).$$

Donc, d'après les propriétés de Sumudu. On a

$$\frac{1}{u}\int_0^\infty \sin(2x) e^{\frac{-x}{u}} dx = u\mathrm{S}\big[-x\big](u)\mathrm{S}\big[h(x)\big](u),$$

alors,

$$\frac{2u}{4u^2+1} = -u^2\mathrm{S}\big[h(x)\big](u).$$

Ceci implique que,

$$\mathrm{S}\big[h(x)\big](u) = \frac{-2}{u(1+4u^2)} = \frac{8u}{1+4u^2} - \frac{2}{u},$$

d'après la formule d'inversion de Sumudu. On trouve

$$h(x) = 4\sin(2x) - 2\delta(x).$$

Exemple 3.4 *On considère l'équation intégrale suivante*

$$g(x) = 1 + \lambda\int_0^x (\tau - x) g(\tau) d\tau, \quad \lambda = cst.$$

On applique la transformée de Sumudu aux deux membres de l'équation, on trouve

$$\mathrm{S}\big[g(x)\big] = \mathrm{S}\big[1\big] + \mathrm{S}\left[\lambda\int_0^x (\tau - x) g(\tau) d\tau\right].$$

D'après les propriétés de Sumudu, on a

$$\mathrm{G}(u) = 1 + u\mathrm{S}\,[-\lambda x]\,\mathrm{G}(u),$$

donc,

$$\mathrm{G}(u) = 1 - \lambda u^2\mathrm{G}(u).$$

Alors

$$\mathrm{G}(u) + \lambda u^2\mathrm{G}(u) = 1,$$

ce qui implique que,

$$\mathrm{G}(u) = \frac{1}{1+\lambda u^2}.$$

On applique la transformée inverse de Sumudu. On obtient

$$g(x) = \mathrm{S}^{-1}\left(\frac{1}{1+\lambda u^2}\right).$$

On a déjà vu que $\mathrm{S}^{-1}\left(\dfrac{1}{1+u^2}\right) = \cos(x)$, *donc*

$$g(x) = \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Conclusion

La transformée de Sumudu est un outil important dans le calcule opérationnel. Elle est largement appliquée à la résolution des problèmes pratiques en mathématiques appliquées, physiques et en ingenierie.

La transformée de Sumudu est une nouvelle transformée employée pour résoudre des équations différentielles et intégrales, cela représente notre sujet de mémoire. pour définir cette transformation en passe par la transformation de Laplace qui est très connue et plus utilisé partout.

La transformée de Sumudu a des propriétés très spéciales et utiles et peut aider dans des applications complexes en sciences et l'ingénierie. Maintenant cette transformée considère parmi les transformations intégrales populaires.

Bibliographie

[1] **Asiru. M. A.** (2002), *Further properties of the Sumudu transform and its applications.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **Vol : 33, N°= 3**, 441 –449. 2, 11

[2] **Asiru. M. A.** (2001), *Sumudu transform and the solution of integral equations of convolution type.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **Vol : 32, N°=6**, 906 –910. 2, 27

[3] **Belgacem. F. B. M. and Abdullatif. K. A.** (2006), *Sumudu Transform Fundamental Properties Investigations And Applications.* Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, **Vol : 2006, Article ID 91083**, 1 – 23. 9, 13, 17, 18, 20, 22, 24

[4] **Belgacem. F. B. M., Karaballi. A. A. and Kalla. S. L.** (2003), *Analytical Investigation of The Sumudu Transform and Applications to Integral ProductionEquations.* Journal of Mathematical Problems in Engineering, **Vol : 2003, N°= 3**, 103 – 118. 2, 8, 12, 16, 17, 19

[5] **Belgacem. F. B. M.** (2009), *Sumudu Applications to Maxwell's Equations.* PIERS Online, **Vol : 5, N°= 4**, 355 –360. 21

[6] **Belgacem. F. B. M.** (2006), *Introducing and Analysing Deeper Sumudu Properties.* Nonlinear Studies , **Vol : 13, N°=1**, 23 – 41. 2, 21

[7] **Belgacem. F. B. M.** (2010), *Sumudu Transform Application to Bassel Functions and Equations .* Journal of Applied Mathematical Sciences , **Vol : 4, N°=74**, 3665 – 3686. 2

[8] **Eltayeb.H. and Kiliçman.A.** (2010), *A Note on The Sumudu Transforms and Differential Equations.* Journal of Applied Mathematical Sciences , **Vol : 4, N°=22**, 1089 – 1098. 15, 17

[9] **Eltayeb. H. and Kiliçman. A.** (2010), *On Some Applications of a New Integral Transform.* Journal of Math , **Vol : 4, N°=3**, 123 – 132. 25

[10] **Khalef. R. F. and Belgacem. F. B.M.** (2014), *Extraction of the Laplace, Fourier, and Mellin transforms from the Sumudu Transform.* 10th Internationel Conference on Mathematical Problems in Engineering, 1426 – 1432. 2, 16

[11] **Kiliçman. A, Eltayeb. H. and Ismail. M. R.** (2012), *A Note Integral Transforms and Differential Equations.* Malaysian Journal of Mathematical Sciences ,1 – 18.

[12] **Kiliçman. A. and Eltayeb. H.** (2010), *On a New Integral Transform and Differential Equations.* Journal of Mathematical Problems Engineering , **Vol : 2010**, 1 – 13.

[13] **Lokenath. D. and Dambaro. B.** (2007), *Integral transforms and their applications,* Second Edition. 2, 7

[14] **Lokenath. D. and Dambaro. B.** (2015), *Integral transforms and their applications,* Third Edition. 2, 4, 7

[15] **Murray R. SPIGEL, Ph. D.** (1965), *Laplace transforms,* Rensselaer Polytechnic Institute. 5, 6

[16] **Vashi. J. and Timol.M. G.** (2016), *Laplace and Sumudu Transforms and Their Applications.* International Journal of Innovative Sciences , **Vol : 3, N°=8**, 538 – 542. 2

[17] **Watugala. G.K.** (1993), *Sumudu transform :A new integral transform to solve differential equations and control engineering problems* . International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **Vol : 24, N°=1**, 35 – 43. 2, 8, 15, 24

[18] **Weerakoon. S.** (1998), *Complex Inversion formula for Sumudu Transform.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **Vol : 29, N°=4**, 618 – 621. 2

[19] **Weerakoon. S.** (1994), *Application of Sumudu Transform to Partial Differentiel Equations.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **Vol : 25, N°=2**, 277 – 283. 2