Mémoire

Présentée à

L'université de Mostaganem Abdelhamid Ibn Badis

Par

NAIB Djemia

Pour obtenir le diplôme de
Master en Mathématiques.

Equations Différentielles Opérationnelles du Second Ordre de Type Elliptique avec Condition de Robin : Cadre non Commutatif

Soutenue :le 27 juin 2019

Devant le jury :

Président	**ANDASMAS Maamer**	**Université de mostaganem**
Examinateurs	**MENAD Abedallah**	**Université de Mostaganem**
Encadreur	**KAID Mohammed**	**Université de Mostaganem**

Table des matières

Remerciements

Avant tout, louange à *ALLAH* le tout puissant de m'avoir aidé à réaliser ce modeste travail.

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de mémoire, Monsieur **KAID Mohammed**, pour ses conseils précieux, ainsi que pour sa patience tout au long de mon encadrement en master.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement Monsieur **ANDASMAS Maamer,** de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette mémoire.

Je remercie vivement Monsieur **MENAD Abedallah**, d'avoir eu l'amabilité d'examiner cette mémoire.

Je souhaite tout particulièrement exprimer ma profonde reconnaissance à mes parents, mon fiancé, mes soeurs et frères et tous les membres de ma grande famille.

Dédecaces

A mes chers parents, pour tout leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, et leur priéres tout au long de mes études.

A mes chères sours pour leur encoragements parmaneents, et leur soutien maral.

A mes chers frèeres, Ahmed et Zakaria, pour leur appui et leur encouragement.

A mes amies les plus proches SALAA Bouchra, MASBAH Amel etc qui s'ont aidés préparé ma mémoires.

A tout ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,

Que ce travail soit l'accomplissement de voeux tant allégués, et le fuit de votre soutien infaillible,

Merci d'etre toujours là pour moi.

Introduction

0.1 Objectif principal de ce mémoire

Les problèmes aux limites que l'on se propose d'étudier ici, consistent en l'équation différentielle

$$u''(x) + Au(x) - \omega u\,(x) = f(x), \qquad x \in (0,1)\,, \tag{1}$$

munie de conditions aux limites de type Robin généralisé :

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{2}$$

Ici, A et H sont deux opérateurs linéaires fermés dans X, de domaines respectifs $D(A)$ et $D(H)$, u_0, et d_0 sont des éléments donnés dans X et ω est un paramètre spectral positif. Notre étude se fera lorsque le second membre f appartient à

$$L^p\,(0,1;X) \text{ avec } 1 < p < \infty,$$

On s'intéressera à l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution classique pour les Problèmes (1)-(2) sous des conditions nécessaires et suffisantes de compatibilité des données u_0, d_0 et f. Pour des raisons de commodité, on va traiter l'équation (1) avec la notation

$$A_\omega = A - \omega I, \quad \omega > 0.$$

Le premier chapitre est détudié aux rappels d'usage sur les outils mathématiques utilisés dans cette mémoire.

Le deuxième et le troisième chapitre sont consacré à la construction d'une formule de représentation de la solution grâce à un raisonnement heuristique en supposant l'existence d'une solution vérifiant la régularité optimale.

Pour avoir une représentation de la solution, on utilise celle du cas commutatif. On suppose qu'il existe une solution u au Problème (1)-(2) et on remplace la fonction f et u_1, d_0 dans la solution du cas commutatif par u_1^*, d_0^* et f^*et pour obtenir la représentation finale de la solution u de notre cas il faudra trouver ces inconnus sous les hypothéses suivantes :

$$X \text{ est un espace } U.M.D, \tag{3}$$

et qu'il existe un réel positif fixé ω_0 tel que les opérateurs linéaires fermés A_ω et H vérifient

$$\begin{cases} \exists C_0 > 0 : \forall \omega \geqslant \omega_0, \ \ [0,+\infty[\,\subset \rho\,(A_\omega)\,, \\ \text{et } \sup\limits_{\lambda>0} \left\| \lambda\,(A_\omega - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C_0, \end{cases} \tag{4}$$

et

$$\begin{cases} \exists \theta_A \in]0,\pi[, \exists C \geqslant 1, \forall \omega \geqslant \omega_0, \forall s \in \mathbb{R}, \\ (-A_\omega)^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \left\| (-A_\omega)^{is} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Ce^{\theta_A |s|}, \end{cases} \tag{5}$$

ainsi que

$$\begin{cases} \exists \nu \in]0, \frac{1}{2}[, \exists C > 0 : \forall \mu > 0, \forall \omega \geqslant \omega_0, \ D(A_\omega) \subset D\,(H) \\ \text{et } \left\| H\,(A_\omega - \mu I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{|\omega + \mu|^{1/2+\nu}}. \end{cases} \tag{6}$$

Chapitre 1

Rappels

1.1 Les opérateurs :

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Soient X, Y et Z des espaces de Banach.

Definition 1.1 *On dit qu'un opérateur A, définie de X dans Y est borné si*

$$D(A) = X \quad \textit{et} \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|A\xi\| < \infty.$$

Definition 1.2 *On appelle* ensemble résolvant de A *l'ensemble*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X)\}.$$

Un élément de $\rho(A)$ est appelé valeur résolvante de A.

1. Si $\lambda \in \rho(A)$ on définit $R_\lambda(A)$ la résolvante de A au point λ par

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

2. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ est appelé le spectre de A et un élément de $\sigma(A)$ est appelé valeur spectrale de A.

1.1.2 Opérateurs linéaires

Definition 1.3 *Soient $A : D(A) \subset X \to Y$ et $B : D(B) \to Z$ deux opérateurs linéaires. On peut définir l'opérateur BA par*

$$\begin{cases} D(BA) = \{x \in D(A),\ Ax \in D(B)\}, \\ (BA)x = B(Ax), \qquad x \in D(BA). \end{cases}$$

Si A est injectif, on peut définir l'inverse de A, noté A^{-1}, par :

$$\begin{array}{rcl} A^{-1} : A(D(A)) & \to & D(A) \\ y & \to & A^{-1}y = x. \end{array}$$

1.1.3 Opérateurs linéaires fermés

Definition 1.4 *Un opérateur linéaire* $A : D(A) \subset X \to Y$ *est dit fermé si et seulement si, pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)$ *telle que*

$$\begin{cases} x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x, & \text{dans } X \\ Ax_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y, & \text{dans } Y, \end{cases}$$

on a $x \in D(A)$ *et* $Ax = y$.

Proposition 1.1 *Soit* A *un opérateur linéaire fermé sur* X. *Alors l'application* $R_\lambda : \lambda \in \rho(A) \to R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ *est analytique sur* $\rho(A)$.

1.2 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires

Definition 1.5 *Soit* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *une famille d'opérateurs linéaires dans* X. *On dit que cette famille forme un semi-groupe dans* X *si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $G(0) = I_X$,
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}^+, G(t+s) = G(t)G(s)$.

Lorsque la famille $\{G(t)\}_t$ est définie pour $t \in \mathbb{R}$ et que la deuxième propriété est vérifiée pour tout s, t de $\mathbb{R}$ on dira qu'on a un groupe.

1.2.1 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Definition 1.6 *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$, *l'opérateur* A *défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ \varphi \in X : \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{G(h)\varphi - \varphi}{h} \text{ existe} \right\}, \\ A\varphi = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{G(h)\varphi - \varphi}{h}, \qquad \varphi \in D(A). \end{cases}$$

$D(A)$ *est non vide* $(0 \in D(A))$ *et est bien un sous espace vectoriel de* X. A *est linéaire de* $D(A)$ *dans* X.

1.2.2 Semi-groupes analytiques

On définit, pour tout $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$, le secteur

$$\Sigma_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \alpha\}.$$

Definition 1.7 *Soit* $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$. *Une famille* $\{G(z)\}_{z\in\Sigma_\alpha}$ *d'éléments de* $\mathcal{L}(X)$ *forme un semi-groupe analytique de type* α *dans* X, *un espace de Banach complexe, si elle vérifie les conditions suivantes :*

1. $G(0) = I$,

2. $\forall\ z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha$, tel que $z_1 + z_2 \in \Sigma_\alpha$, $G(z_1 + z_2) = G(z_1)\, G(z_2)$,

3. $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in X$, $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in \Sigma_\alpha}} G(z)\, x = x$,

4. l'application $z \to G(z)$ est holomorphe sur Σ_α.

1.3 Les espaces d'interpolation

Soit X un espace de Banach. On désigne par $L^p_*(\mathbb{R}_+; X)$ avec $p \in [1, +\infty]$, l'espace de Banach des fonctions f fortement mesurables définies pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$ et telles que

$$\left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} = \|f\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+;X)} < +\infty.$$

Definition 1.8 *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine*

$$D(A) \subset X,$$

muni de sa norme du graphe :

$$\forall\ x \in D(A),\ \ \|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X\,.$$

On pose alors, en suivant les notations de P. Grisvard [6].

$$D_A(\theta, p) = (D(A), X)_{1-\theta,p}\,,$$

où $p \in [1, +\infty]$ et $0 < \theta < 1$.

1.4 Les espaces sobolev

Soient $a < b$ finis ou infinis, $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $p \in [1, +\infty]$. On définit pour $p \in [1, +\infty[$

$$L^p((a,b); X) = \left\{ f \text{ mesurable de } (a,b) \text{ vers } X \text{ avec } \int_a^b |f(x)|^p\, dx < \infty \right\},$$

et pour $p = +\infty$

$$L^p((a,b); X) = \left\{ f \text{ mesurable de } (a,b) \text{ vers } X \text{ et } \exists C \geqslant 0 : \sup_{x \in (a,b)} |f(x)| \leqslant C \text{ p.p sur } (a,b) \right\}.$$

1.5 Les espaces UMD

On considère un espace de Banach X.

Definition 1.9 *Pour* $\varepsilon\in]0,1[$ *et* $p\in]1,+\infty[$, *on définit l'opérateur*

$$\mathcal{H}_\varepsilon\in\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R};X)),$$

par

$$\forall f\in L^p(\mathbb{R};X),\quad (\mathcal{H}_\varepsilon f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|s|<\frac{1}{\varepsilon}}\frac{f(x-s)}{s}ds,\ \ p.p.\ x\in\mathbb{R},$$

Definition 1.10 X *est appelé espace* UMD *(Unconditional Martingale Differences), s'il existe* $p\in]1,+\infty[$ *tel que*

$$\forall f\in L^p(\mathbb{R};X),\ \lim_{\varepsilon\to0^+}\mathcal{H}_\varepsilon f\ \text{ existe dans } L^p(\mathbb{R};X).\tag{1.1}$$

Dans ce cas, l'application

$$\begin{array}{llll}\mathcal{H}: & L^p(\mathbb{R};X) & \to & L^p(\mathbb{R};X)\\ & f & \to & \mathcal{H}\ f=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\mathcal{H}_\varepsilon f\ ,\end{array}$$

est un élément de $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R};X))$, *appelé la transformée de Hilbert sur* $L^p(\mathbb{R};X)$.

1.6 Quelques résultats avec les espaces de Lp

Lemme 1.1 *Supposons que l'hypothèse (4) est réalisée et soient* B *un générateur infinitésimal de semi-groupe analytique* $(e^{tB})_{t\geq0}$, $\varphi\in X$, $p\in]1,+\infty[$, *on a*

1. $e^{\cdot B}\varphi\in L^p(0,1,X)$,
2. $B^n e^{\cdot B}\varphi\in L^p(0,1,X)$ *si et seulement si* $\varphi\in(D(B^n),X)_{\frac{1}{np},p}$.

Lemme 1.2 *Soit* $f\in L^p(0,1,X)\,,1<p<+\infty$. *Sous les hypothèses (3), (4) et (5), nous avons*

1. $$x\to L(x,f)=Q\int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)\,ds\in L^p(0,1,X).$$

2. $$x\to L(1-x,f(1-.))=Q_\omega\int_x^1 e^{(s-x)Q}f(s)\,ds\in L^p(0,1,X).$$

3. $$x\to\mathcal{L}(x,f)=Q\int_0^1 e^{(x+s)Q}f(s)\,ds\in L^p(0,1,X).$$

4. $$\int_0^1 e^{sQ}f(s)ds,\ \int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)ds\in(D(Q),X)_{\frac{1}{p},p}=(D(A),X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}.$$

Chapitre 2

Equations différentielles opérationnelles avec des C-L de type Robin généralisé : cas non commutatif sur les espaces L^p

Notre but dans ce chapitre est d'étudier, **dans un cadre non commutatif**, l'équation différentielle opérationnelle elliptique du second ordre :

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{2.1}$$

munie des conditions aux limites de type Robin généralisé

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1, \end{array} \right. \tag{2.2}$$

où A et H sont des opérateurs linéaires fermés sur un espace de Banach complexe X, $f \in L^P(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$; d_0, u_1 sont des éléments donnés dans X. On s'intéresse à l'existence, l'unicité et la régularité maximale d'une solution classique du Problème (2.1)-(2.2), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \\ u(0) \in D(H), \end{array} \right.$$

et u satisfait le Problème (2.1)-(2.2).

2.1 Les hypothèses

On suppose que

$$X \text{ est un espace de type } UMD, \tag{2.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \; [0,+\infty[\subset \rho(A) \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{array} \right. \tag{2.4}$$

cette hypothèse implique que

$$Q = -\left(-A\right)^{1/2},$$

existe et génère un semi-groupe analytique $\left(e^{xQ}\right)_{x\geqslant 0}$ (voir A. V. Balakrishnan [1]).

$$\left\{\begin{array}{l} \exists\theta_A \in]0,\pi[, \exists C \geqslant 1 : \forall s \in \mathbb{R}, (-A)^{is} \in \mathcal{L}(X) \\ \text{ et } \left\|(-A)^{is}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Ce^{\theta_A|s|}, \end{array}\right. \tag{2.5}$$

on dit dans ce cas que A est BIP (Bounded Imaginary Power).

On suppose également

$$H \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \tag{2.6}$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(A^k\right) \subset D\left(H\right), \tag{2.7}$$

$$Q \pm H \text{ est inversible,} \tag{2.8}$$

$$0 \in \rho\left(\Lambda\right) \text{ et } 0 \in \rho\left(\Pi\right), \tag{2.9}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} \Lambda = \left(Q-H\right) + e^{2Q}\left(Q+H\right), \\ \Pi = \left(Q-H\right) + \left(Q+H\right)e^{2Q}. \end{array}\right.$$

Notons que, dans le cas commutatif, les opérateurs Λ et Π coïncident sur le domaine $D\left(Q\right) \cap D\left(H\right)$.

Remarque 2.1 *Sous les hypothèses (2.4) et (2.7) on a*

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_\omega^{-1} & = & \left(Q_\omega - H\right)^{-1}\left(I + T_\omega\right)^{-1}\left(I + S_\omega\right)^{-1} \\ & = & \left(Q_\omega - H\right)^{-1}\left(I - T_\omega\left(I+T_\omega\right)^{-1}\right)\left(I - S_\omega\left(I+S_\omega\right)^{-1}\right), \end{array}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} T_\omega = 2e^{2Q_\omega}\left(I - e^{2Q_\omega}\right)^{-1} Q_\omega\left(Q_\omega - H\right)^{-1} \in \mathcal{L}\left(X\right), \\ S_\omega = -e^{2Q_\omega} \in \mathcal{L}\left(X\right) \text{ et} \\ T_\omega\left(X\right), S_\omega\left(X\right) \subset \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} D(Q_\omega^k), \end{array}\right.$$

Voir (M. Kaid et K. Ould Melha [7]).

2.2 Représentation de la solution

La formule de représentation trouvée, quand Q et H commutent au sens des résolvantes, est écrite sous la forme :

$$\begin{aligned}
u(x) &= \left(e^{xQ}-e^{(2-x)Q}\right)\Lambda^{-1}d_0+e^{(1-x)Q}u_1 \\
&+\left(e^{xQ}-e^{(2-x)Q}\right)Q^{-1}(Q+H)\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\
&+\frac{1}{2}e^{xQ}Q^{-1}(Q+H)\Lambda^{-1}\int_0^1\left(e^{sQ}-e^{(2-s)Q}\right)f(s)\,ds \\
&-\frac{1}{2}e^{(2-x)Q}Q^{-1}(Q+H)\Lambda^{-1}\int_0^1\left(e^{sQ}-e^{(2-s)Q}\right)f(s)\,ds \\
&-e^{(1-x)Q}\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)\,ds+\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)\,ds+\frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}f(s)\,ds.
\end{aligned}$$

La formule de représentation précédente pourra s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
u(x) &= T(x)\Lambda^{-1}d_0+e^{(1-x)Q}u_1 \\
&+T(x)Q^{-1}(Q+H)\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\
&+\frac{1}{2}T(x)Q^{-1}(Q+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f(s)\,ds \\
&-e^{(1-x)Q}I(1)+I(x)+J(x),
\end{aligned} \tag{2.10}$$

où

$$\begin{cases}
T(x)=e^{xQ}-e^{(2-x)Q}, \\
I(x)=\dfrac{1}{2}Q^{-1}\displaystyle\int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)\,ds, \\
J(x)=\dfrac{1}{2}Q^{-1}\displaystyle\int_x^1 e^{(s-x)Q}f(s)\,ds.
\end{cases}$$

En remplaçant la fonction f et les données u_1, d_0 dans (2.10) par f^*, u_1^* et d_0^*, on trouve pour presque tout $x\in(0,1)$

$$\begin{aligned}
u(x) &= T(x)\Lambda^{-1}d_0^*+e^{(1-x)Q}u_1^* \\
&+T(x)Q^{-1}(Q+H)\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1^* \\
&+\frac{1}{2}T(x)Q^{-1}(Q+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f^*(s)\,ds \\
&-e^{(1-x)Q}I(1)+I(x)+J(x).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Le but est de déterminer les inconnus u_1^*, d_0^* et f^*en utilisant les conditions aux limites (2.2).

2.2.1 Le calcul de u_1^* :

Notons que $T(1)=0$, alors pour $x=1$, on obtient

$$u(1)=u_1^*-I(1)+I(1),$$

il s'ensuit que

$$u_1^* = u(1) = u_1.$$

2.2.2 Le calcul de d_0^* :

Par un calcul analogue, pour $x = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} u(0) &= T(0)\Lambda^{-1}d_0^* + e^Q u_1 \\ &+T(0)Q^{-1}(Q+H)\Lambda^{-1}Qe^Q u_1 \\ &+\frac{1}{2}T(0)Q^{-1}(Q+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f^*(s)\,ds \\ &-e^Q I(1) + J(0). \end{aligned}$$

Le fait que $T(0) = I - e^{2Q}$, la formule précédente peut être écrite sous la forme suivante

$$\begin{aligned} u(0) &= T(0)\Lambda^{-1}d_0^* \\ &+Q^{-1}\left[\Lambda + \left(I - e^{2Q}\right)(Q+H)\right]\Lambda^{-1}Qe^Q u_1 \\ &+\frac{1}{2}Q^{-1}\left[\Lambda + \left(I - e^{2Q}\right)(Q+H)\right]\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f^*(s)\,ds. \end{aligned} \tag{2.12}$$

On a

$$\begin{aligned} & \Lambda + \left(I - e^{2Q}\right)(Q+H) \\ = \; & (Q-H) + e^{2Q}(Q+H) + (Q+H) - e^{2Q}(Q+H) \\ = \; & 2Q, \end{aligned} \tag{2.13}$$

en introduisant (2.13) dans la formule de (2.12), on trouve

$$u(0) = T(0)\Lambda^{-1}d_0^* + 2\Lambda^{-1}Qe^Q u_1 + \Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f^*(s)\,ds.$$

On remarque que ce dernier terme appartient à $D(H)$, en appliquant l'opérateur H à $u(0)$, il s'ensuit

$$\begin{aligned} Hu(0) &= HT(0)\Lambda^{-1}d_0^* + 2H\Lambda^{-1}Qe^Q u_1 \\ &+H\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f^*(s)\,ds. \end{aligned} \tag{2.14}$$

En dérivant la fonction u, on trouve pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} u'(x) &= Q\left(e^{xQ} + e^{(2-x)Q}\right)\Lambda^{-1}d_0^* - Qe^{(1-x)Q}u_1 \\ &+\left(e^{xQ} + e^{(2-x)Q}\right)(Q+H)\Lambda^{-1}Qe^Q u_1 \\ &+\frac{1}{2}\left(e^{xQ} + e^{(2-x)Q}\right)(Q+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f^*(s)\,ds \\ &+Qe^{(1-x)Q}I(1) + QI(x) - QJ(x). \end{aligned}$$

Pour $x=0$, on obtient

$$\begin{aligned} u'(0) &= Q\left(I+e^{2Q}\right)\Lambda^{-1}d_0^* - Qe^{Q}u_1 \\ &+\left(I+e^{2Q}\right)(Q+H)\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ &+\frac{1}{2}\left(I+e^{2Q}\right)(Q+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f^*(s)\,ds \\ &+Qe^{Q}I(1)-QJ(0). \end{aligned}$$

La formule précédente peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} &u'(0) \\ =\; & Q\left(I+e^{2Q}\right)\Lambda^{-1}d_0^* + \left[\left(I+e^{2Q}\right)(Q+H)-\Lambda\right]\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ &+\frac{1}{2}\left[\left(I+e^{2Q}\right)(Q+H)-\Lambda\right]\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f^*(s)\,ds, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} &\left(I+e^{2Q}\right)(Q+H)-\Lambda \\ =\; &(Q+H)+e^{2Q}(Q+H)-(Q-H)-e^{2Q}(Q+H) \\ =\; &2H, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} u'(0) &= Q\left(I+e^{2Q}\right)\Lambda^{-1}d_0^* + 2H\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ &+H\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f^*(s)\,ds. \end{aligned} \tag{2.15}$$

On exploite les conditions aux limites (2.2), on trouve

$$\begin{aligned} &u'(0)-Hu(0) \\ =\; & Q\left(I+e^{2Q}\right)\Lambda^{-1}d_0^* + 2H\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 + H\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f^*(s)\,ds \\ &-H\left(I-e^{2Q}\right)\Lambda^{-1}d_0^* - 2H\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 - H\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f^*(s)\,ds, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} u'(0)-Hu(0) &= \left[Q\left(I+e^{2Q}\right)-H\left(I-e^{2Q}\right)\right]\Lambda^{-1}d_0^* \\ &= \left(Q-H+(Q+H)e^{2Q}\right)\Lambda^{-1}d_0^* \\ &= \Pi\Lambda^{-1}d_0^* \\ &= d_0, \end{aligned}$$

où

$$\Pi = Q - H + (Q + H)\, e^{2Q},$$

et grâce au Lemme 2.4, on déduit alors

$$d_0^* = \Lambda \Pi^{-1} d_0.$$

2.2.3 Le calcul de f^* :

En dérivant deux fois la fonction u donnée par la formule (2.11), on trouve pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} u''(x) &= Q^2 T(x)\Lambda^{-1} d_0^* + e^{(1-x)Q} u_1^* \\ &\quad + Q^2 T(x) Q^{-1} (Q+H)\, \Lambda^{-1} Q e^Q u_1^* \\ &\quad + \frac{1}{2} Q^2 T(x) Q^{-1} (Q+H)\, \Lambda^{-1} \int_0^1 T(s) f^*(s)\, ds \\ &\quad - Q^2 e^{(1-x)Q} I(1) + Q^2 I(x) + Q^2 J(x) + f^*(x) \\ &= Q^2 u(x) + f^*(x), \end{aligned}$$

et le fait que

$$A = -Q^2,$$

et

$$u''(x) + A u(x) = f(x),$$

on obtient alors, pour presque tout $x \in (0,1)$

$$f^*(x) = f(x).$$

Finalement, en remplaçant u_1^*, d_0^* et f^* par leur expression dans la formule (2.11), on trouve pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} u(x) &= T(x)\, \Pi^{-1} d_0 + e^{(1-x)Q} u_1 \\ &\quad + T(x)\, Q^{-1} (Q+H)\, \Lambda^{-1} Q e^Q u_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} T(x)\, Q^{-1} (Q+H)\, \Lambda^{-1} \int_0^1 T(s) f(s)\, ds \\ &\quad - e^{(1-x)Q} I(1) + I(x) + J(x). \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.3 Régularité de la solution

Soit

$$T(x) = e^{xQ} - e^{(2-x)Q},$$

donc, la formule (2.16) peut être écrite comme suit

$$u\,(.) = S(., d_0, u_1, f) + R(., d_0, u_1, f), \tag{2.17}$$

où $S(., d_0, u_1, f)$ est la partie singulière donnée par

$$S(., d_0, u_1, f) = S_1(., d_0, u_1) + S_2(., f),$$

avec, pour presque tout $x \in (0, 1)$

$$S_1(x, d_0, u_1) = e^{xQ}\Pi^{-1}d_0 + e^{(1-x)Q}u_1, \tag{2.18}$$

et

$$\begin{aligned} S_2(x, f) \quad = \quad & \frac{1}{2}e^{xQ}Q^{-1}\,(Q+H)\,\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f\,(s)\,ds \\ & +e^{xQ}Q^{-1}\,(Q+H)\,\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ & -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q}I(1) + I(x) + J(x), \end{aligned} \tag{2.19}$$

et $R(., d_0, u_1, f)$ est la partie régulière donnée, pour presque tout $x \in (0, 1)$, par

$$\begin{aligned} R(x, d_0, u_1, f) \quad = \quad & -e^{(2-x)Q}Q^{-1}\,(Q+H)\,\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ & -e^{(2-x)Q}\Pi^{-1}d_0 - \frac{1}{2}e^{(2-x)Q}Q^{-1}\,(Q+H)\,\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f\,(s)\,ds, \end{aligned} \tag{2.20}$$

Lemme 2.1 *On suppose (2.4) et (2.7). Soient $d_0, u_1 \in X$ et*

$$f \in L^p(0, 1; X), 1 < p < \infty.$$

Alors, on a

$$AR(\cdot, d_0, u_1, f) \in L^p(0, 1; X).$$

Preuve. En utilisant 2.20 ona

$$\begin{aligned} AR(\cdot, d_0, u_1, f) \quad = \quad & -Ae^{(2-\cdot)Q}Q^{-1}(Q+H)\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ & -Ae^{(2-\cdot)Q}\Pi^{-1}d_0 - \frac{1}{2}Ae^{(2-\cdot)Q}Q^{-1}(Q+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)e^{SQ}f(s)ds. \end{aligned}$$

■

Il est claire que

$$e^{(2-\cdot)Q} = e^{Q}e^{(1-\cdot)Q},$$

en plus

$$\forall\phi \in X, \quad e^{Q}\phi \in \cap_{K=1}^{\infty} D(Q^{K}),$$

on peut alors, verifier faculement que l'operateur $AR(\cdot, d_0, u_1, f)$ peut etre écrit sous forme d'une somme des termes

$$e^{(1-\cdot)Q}Ae^{Q}P_j\varepsilon_j, \ j = 1, ..., 3.$$

Ou $(P_j)_{j=1,3}$ sont des opérateur borneès et les autres terme $(\varepsilon_j)_{j=1,3}$ sont des élement de X.

Lemme 2.2 *On suppose (2.4)∼(2.7). Soit* $u_1 \in X$ *et*

$$f \in L^{p}(0,1;X), 1 < p < \infty.$$

Alors, on a

$$AS_2(.,f) \in L^{p}(0,1;X), 1 < p < \infty.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} AS_2(x,f) &= \frac{-1}{2}Qe^{xQ}(Q+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f(s)ds \\ &\quad -Qe^{xQ(Q+H)}\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ &\quad +\frac{1}{2}Q^2e^{(1-x)Q}I(1) - Q^2I(x) - Q^3j(x), \end{aligned}$$

■

d'ou, d'aprés le lemme (1.2), on écrit la formule précédente sous la forme

$$\begin{aligned} & AS_2(x,f) \\ = \ & \frac{-1}{2}Qe^{xQ}(Q+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f(s)ds \\ & -Qe^{xQ(Q+H)}\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ & +\frac{1}{2}Q^2e^{(1-x)Q}I(1) - \frac{1}{2}L(x,f) - \frac{1}{2}L(1-x, f(1-\cdot)), \end{aligned}$$

ou

$$\int_0^1 T(s)f(s)ds \in (D(Q),X)_{\frac{1}{p},p} \quad 1 < \infty < p,$$

$$I(1) = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)ds \in (D(A),X) \in (D(A),X)_{\frac{1}{2p},p},$$

et

$$L(.,f) - L(1-\cdot, f(1-\cdot)) \in L^p(0,1;X) \quad 1 < \infty < p.$$

En utilisant le lemme (2.3), on obtient

$$(Q+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f(s)ds \in (D(Q),X)_{\frac{1}{p},p},$$

et, d'une autre part on a

$$e^Q Q u_1 \in (D(Q),X)_{\frac{1}{p},p} \quad 1 < \infty < p,$$

on dèduit alors

$$(Q+H)\Lambda^{-1}Qe^Q u_1 \in (D(Q),X)_{\frac{1}{p},p} \quad 1 < \infty < p,$$

en vertu de l'assertion 2. du lemme (1.1) on conclut que $AS_2(.,f) \in L^p(0,1;X)$, $1 < \infty < p$.

2.4 Résultat principal

Theorem 2.1 *On suppose (2.4)~(2.7). Soit* $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. *Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le Problème (2.1)-(2.2) admet une unique solution classique* u, *c'est-à-dire*

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \ 1 < p < \infty,$$

   $u(0) \in D(H)$ *et* u *vérifiant le Problème (2.1)-(2.2) avec* u *donnée par (2.16)*

2. $$\Pi^{-1}d_0, u_1 \in (D(A),X)_{\frac{1}{2p},p}, \ 1 < p < \infty,$$

   où

$$\Pi = (Q-H) + (Q+H)e^{2Q}.$$

Chapitre 3

Problème de type Robin avec un paramètre spectral

On s'intéresse cette fois-ci, au Problème de Robin généralisé suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0 \\ u(1) = u_1, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

où A, H des opérateurs linéaires fermés **ne commutent pas** au sens des résolvantes, $f \in L^P(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$; $d_{1,0}$, u_0 sont des éléments donnés dans un espace de Banach complexe X et ω est un réel positif assez grand.

On s'intéresse à l'existence, l'unicité et la régularité maximale d'une solution classique du Problème (3.1), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$\left\{\begin{array}{l} u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \\ u(0) \in D(H), \end{array}\right.$$

et u satisfait le Problème (3.1).

Pour des raisons de commodité, on va traiter Problème (3.1) avec la notation

$$A_\omega = A - \omega I, \quad \omega > 0.$$

3.0.1 Les hypothèses

On suppose que

$$X \text{ est un espace de type } UMD, \tag{3.2}$$

et qu'il existe un réel positif fixé ω_0 tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé } X, \ [0,+\infty[\subset \rho(A_{\omega_0}) \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda (A_{\omega_0} - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(X)} < +\infty, \end{array}\right. \tag{3.3}$$

cette hypothèse implique que

$$Q_{\omega_0} = -(-A_{\omega_0})^{1/2},$$

existe et génère un semi-groupe analytique $\left(e^{xQ_{\omega_0}}\right)_{x\geqslant 0}$ (voir A. V. Balakrishnan [1]).

$$\left\{\begin{array}{l} \exists\theta_{A_{\omega_0}}\in]0,\pi[,\exists C\geqslant 1,\forall s\in\mathbb{R},(-A_{\omega_0})^{is}\in\mathcal{L}(X) \\ \text{et } \left\|(-A_{\omega_0})^{is}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\leqslant Ce^{\theta_{A_{\omega_0}}|s|}, \end{array}\right. \tag{3.4}$$

on dit, dans ce cas, que A_{ω_0} est BIP (Bounded Imaginary Power).

$$\left\{\begin{array}{l} \exists\nu\in]0,\frac{1}{2}[,\forall\omega\geqslant\omega_0,\ \exists C>0:\forall\mu>0,D(A_\omega)\subset D\left(H\right) \\ \text{et } \left\|H\left(A_\omega-\mu I\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\leqslant\dfrac{C}{|\omega+\mu|^{1/2+\nu}}, \end{array}\right. \tag{3.5}$$

3.0.2 Conséquences des hypothèses

Lemme 3.1 *On suppose (3.3). Alors, il existe deux constantes $C>0$ et $\omega_1>\omega_0$, tels que pour tout $\omega\geqslant\omega_1$, l'opérateur $Q_\omega\pm H$ admet un inverse borné et*

$$\left\|(Q_\omega\pm H)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\leqslant\frac{C}{\sqrt{\omega}}.$$

Lemme 3.2 *On suppose (3.3) et (3.5). Alors, il existe $\omega_2\geqslant\omega_1$ tel que pour tout $\omega\geqslant\omega_2$, l'opérateur*

$$\Lambda_\omega=(Q_\omega-H)+e^{2Q_\omega}\left(Q_\omega+H\right),$$

de domaine

$$D\left(\Lambda_\omega\right)=D\left(Q_\omega\right)\cap D\left(H\right)=D\left(Q_\omega\right),$$

est inversible et a un inverse borné tel que

$$\Lambda_\omega^{-1}=\left(Q-H\right)^{-1}\left(I+W\right), \tag{3.6}$$

où

$$W\in\mathcal{L}\left(X\right)\ \text{ et } W\left(X\right)\subset\bigcap_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}D(Q_\omega^k).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\Lambda_\omega &= \left(I-e^{2Q_\omega}\right)\left(Q_\omega-H\right)+2Q_\omega e^{2Q_\omega}\\ &= \left(I-e^{2Q_\omega}\right)\left[I+2\left(I-e^{2Q_\omega}\right)^{-1}Q_\omega e^{2Q_\omega}\left(Q_\omega-H\right)^{-1}\right]\left(Q_\omega-H\right)\\ &= \left(I-e^{2Q_\omega}\right)\left(I+T_\omega\right)\left(Q_\omega-H\right),\end{aligned}$$

où

$$T_\omega=2\left(I-e^{2Q_\omega}\right)^{-1}Q_\omega e^{2Q_\omega}\left(Q_\omega-H\right)^{-1}.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}\|T_\omega\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|\,2\left(I-e^{2Q_\omega}\right)^{-1}Q_\omega e^{2Q_\omega}\left(Q_\omega-H\right)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\\ &\leqslant 2\,\|\left(I-e^{2Q_\omega}\right)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|\,Q_\omega e^{2Q_\omega}\,\|_{\mathcal{L}(X)}\|\left(Q_\omega-H\right)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\\ &\leqslant \frac{2}{1-\|e^{2Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)}}\|\,Q_\omega e^{2Q_\omega}\,\|_{\mathcal{L}(X)}\|\left(Q_\omega-H\right)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)},\end{aligned}$$

■

Il existe des constantes K_0, K_1 et c_0 positives (qui ne dépendent pas de ω) telles que

$$\| Q_\omega e^{2Q_\omega} \|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant K_0 e^{-2c_0\sqrt{\omega}} \text{ et } \| e^{2Q_\omega} \|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant K_1 e^{-2c_0\sqrt{\omega}},$$

(voir [5], p. 103), on obtient

$$\|T_\omega\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{2CK_1}{\omega^{1/2}\left(1 - K_0 e^{-2c_0\sqrt{\omega}}\right)} e^{-2c_0\sqrt{\omega}}.$$

Alors, Il existe $\omega_2 \geqslant \omega_1$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega_2$, on a

$$\frac{2CK_1}{\omega^{1/2}\left(1 - K_0 e^{-2c_0\sqrt{\omega}}\right)} e^{-2c_0\sqrt{\omega}} < 1,$$

ce qui implique que $I + T_\omega$ est un opérteur inversible. Donc

$$\begin{aligned} \Lambda_\omega^{-1} &= (Q_\omega - H)^{-1} (I + T_\omega)^{-1} (I + S_\omega)^{-1} \\ &= (Q_\omega - H)^{-1} \left(I - T_\omega (I + T_\omega)^{-1}\right) \left(I - S_\omega (I + S_\omega)^{-1}\right), \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} T_\omega = 2e^{2Q_\omega} \left(I - e^{2Q_\omega}\right)^{-1} Q_\omega (Q_\omega - H)^{-1} \in \mathcal{L}(X), \\ S_\omega = -e^{2Q_\omega} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ T_\omega(X), S_\omega(X) \subset \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}} D(Q_\omega^k). \end{cases}$$

3.1 Résultat principal

Theorem 3.1 *On suppose (3.2)~(3.5). Soit* $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. *Alors, il existe* $\omega^* \geqslant \omega_0$ *tel que pour tout* $\omega \geqslant \omega^*$, *les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le Problème (3.1) admet une unique solution classique* u, *c'est-à-dire*

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \ 1 < p < \infty,$$

$u(0) \in D(H)$ *et* u *vérifiant le Problème (3.1) avec* u *donnée par (2.16)*

2.

$$\Pi_\omega^{-1} d_0, u_1 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}, \ 1 < p < \infty,$$

où

$$\Pi_\omega = (Q_\omega - H) + (Q_\omega + H) e^{2Q_\omega}.$$

3.2 Exemple

Soit $X = L^2(\Omega)$ avec $\Omega =]0,1[$ est un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}$, qui est un espace de type UMD. On définit les opérateurs Q_ω et H par :

$$\begin{cases} D(Q_\omega) = D(H) = \{\varphi \in W^{2,p}(]0,1[) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}, \\ (Q_\omega \varphi)(y) = \varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - \sqrt{\omega}\varphi(y), \ y \in (0,1), \\ (H\varphi)(y) = -\varphi''(y), \ y \in (0,1), \end{cases} \tag{3.7}$$

où ω un réel positif assez grand et

$$a \in C^2([0,1]) \quad \text{avec } a(0) = a(1) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
& D(Q_\omega^2) \\
= \ & \{\varphi \in D(Q_\omega) : \ Q_\omega \varphi \in D(Q_\omega)\} \\
= \ & \left\{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \ \varphi'' + a\varphi' - \sqrt{\omega}\varphi \in W^{2,p}(\Omega) \text{ et } \varphi''(\xi) + a(\xi)\varphi'(\xi) - \sqrt{\omega}\varphi(\xi) = 0, \ \ \xi \in \{0,1\}\right\} \\
= \ & \left\{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \ \varphi'' + a\varphi' \in W^{2,p}(\Omega) \text{ et } \varphi''(\xi) + a(\xi)\varphi'(\xi) - \sqrt{\omega}\varphi(\xi) = 0, \ \ \xi \in \{0,1\}\right\} \\
= \ & \left\{\varphi \in W^{3,p}(\Omega) : \ \varphi'' + a\varphi' \in W^{2,p}(\Omega), \quad \varphi''(0) = \varphi''(1) = \varphi(0) = \varphi(1) = 0\right\} \\
= \ & \left\{\varphi \in W^{3,p}(\Omega) : \ \varphi'' \in W^{2,p}(\Omega), \quad \varphi''(0) = \varphi''(1) = \varphi(0) = \varphi(1) = 0\right\} \\
= \ & \left\{\varphi \in W^{4,p}(\Omega) : \ \varphi''(0) = \varphi''(1) = \varphi(0) = \varphi(1) = 0\right\},
\end{aligned}$$

Toutes les hypothèses sont vérifiées, donc tous les résultats obtenus pour ω positif assez grand, s'appliquent au problème concret

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) - 2a(y)\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,y) - (a^2(y) + 2a'(y) - 2\sqrt{\omega})\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \\
-a(y)(a'(y) - 2\sqrt{\omega})\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \omega u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in (0,1)^2, \\
u(x,0) = u(x,1) = 0, \quad x \in (0,1), \\
\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,1) = 0, \quad x \in (0,1), \\
\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,y) = d_0(y), \quad y \in (0,1), \\
u(1,y) = u_1(y), \quad y \in (0,1),
\end{array}\right. \tag{3.8}$$

La proposition suivante donne l'existence et l'unicité de la solution de ce problème

Proposition 3.1 *Soit $f \in L^p(0,1;L^2(]0,1[))$ avec $1 < p < +\infty$. Alors, pour $\omega > 0$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le Problème (3.8) admet une unique solution classique u.*
2. *u_1, $\Pi_\omega^{-1}d_0 \in (W^{4,p}(]0,1[), L^2(]0,1[))_{\frac{1}{2p},p}$, $1 < p < \infty$.*

Bibliographie

[1] .A.V. Balakrishnan. : *Fractional Powers of Closed Operators and the Semi-groups Generated by them, Pacif. J. Math.10 (1960), 419-437.*

[2] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Medeghri. : Sturm-Liouville Problems for an Abstract Di¤erential Equation of Elliptic Type in UMD Spaces, Di¤erential and Integral Equations, volume 21, numbers 9-10 (2008), 981-100

[3] M. Cheggag, M. Kaid, R. Labbas and S. Maingot. : New Results on Elliptic Equations with Nonlocal Boundary Coe¢ cient-operator Conditions in UMD Spaces : Noncommutative Cases. Submitted.

[4] G. Dore and A. Venni. : On the Closedness of the Sum of Two Closed Operators, Mathematische Zeitschrift, 196 (1987), 270-286.

[5] G. Dore and S. Yakubov. : *Semigroup estimates and noncoercive boundady value problems, semigroups Forum,* 60(2000), 93-121.

[6] P. Grisvard. : *Spazi di trace e applicazioni (Italian), Rend. Mat. (6), 5 (1972), 657-729.*

[7] M. Kaid and K. Ould Melha. : *Sturm-Liouville abstract problems for the second order differential equations in a non commutative case.Bulletin of the South Ural State University, Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 44-61.*

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude des équations différentielles opérationnelles du second ordre de type elliptique, dans un cadre non commutatif :

$$u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \qquad x \in (0,1). \tag{1}$$

Les conditions aux limites considérées dans ce travail sont :

1. Les conditions aux limites de type Robin généralisé :

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{2}$$

Ici, A et H sont deux opérateurs linéaires fermés dans X, un espace de Banach complexe, ne commutant pas au sens des résolvantes, u_0, u_1, $u_{0,1}$ et $d_0 \in X$ et $\omega > 0$. Notre étude se fera dans un espace de Banach de géométrie différente, lorsque le second membre f appartient à classe suivante :

$$L^p(0,1;X) \text{ avec } 1 < p < \infty .$$

On s'intéresse à l'existence, l'unicité et la régularité maximale d'une solution des Problèmes (1)-(2)

Mots clés : Equations différentielles opérationnelles du second ordre de type elliptique, cadre non commutatif, semi-groupes analytiques, régularité maximale, espace UMD, espaces d'interpolation.

Abstract

This work is devoted to the study of the operational differential equations of the second order of elliptic type in non-commutative framework :

$$u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \qquad x \in (0,1). \tag{1}$$

the abstract boundary conditions of Robin's type

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{2}$$

where A and H are closed linear operators in a complex Banach space X, u_0 and $d_0 \in X$ and $\omega > 0$.

$$f \in L^P([0,1], X) \text{ with } 0 < \theta < 1 .$$

We will seek for existence, uniqueness and optimal regularity of the solution classical to Problems (1)-(2).

Keywords : second-order abstract elliptic differential equations, non-commutative case, analytic semi-group, maximal regularity, UMD space, interpolation spaces.