République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique
Université Abdelhamid ibn badis- Mostaganem

Département de Mathématiques - Informatique

Discipline : Mathématiques

CARACTÉRISATION CONCISE DES OPÉRATEURS RIESZ

Mémoire présenté pour l'obtention du Diplome de Master en mathématique

Par : **ZIANE IMENE**

Sous la direction de Dr. Abdellah GHERBI,

Membres du jury:

Président : Mohand Ouldali, Prof. Université de Mostaganem.

Encadreur : Abdellah Gherbi, MCB. ESGEE d'Oran.

Examinateur : Amina Feraoun, MCB. Université de Mostaganem.

Date de soutenance : xx/xx/ 2019

Remerciements

Mes premiers remerciements sont adressés à mon encadreur, Docteur GHERBI Abdellah, sans qui ce travail n'aurait pas vu le jour. Je lui suis reconnaissante pour les qualités scientifiques et pédagogiques de son encadrement et pour sa grande disponibilité.

Aussi je tiens à remercier par l'occasion tous les membres du jury, Monsieur le president, Pr. Ouldali Mohand et l'examinatrice Dr. Feraoun Amina, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Finalement, j'adresse mes remerciements les plus vifs à mes parents pour leur soutient exemplaire et leurs sacrifices loyaux durant ces longues années de quête sur la voie du savoir.

Résumé

Les opérateurs de Riesz forment une classe très spéciale des opérateurs bornés qui est d'une grande importance dans la théorie spectrale. Ceci est principalement dû à leur très simple décomposition spectrale et au fait que les opérateurs de Riesz ont une théorie spéctrale similaire à celle des opérateurs compacts. Dans ce mémoire, on donne une étude complète sur cette classe d'opérateurs, on traite les différentes propriétés algébriques, topologiques et spectrales des opérateurs de Riesz et ceci après avoir un aperçu général sur les opérateurs compacts et les opérateurs de Fredholm.
Mots Clés : Opérateur linéaire borné, opérateur compact, opérateur de Fredholm, opérateur de Riesz, spectre.
AMS Classification : 47A10, 47A53, 46B07

Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail et nous supposons que les opérateurs sont linéaires sur X.

X	Espace de Banach.
$X \times X$	Espace produit .
$\mathcal{B}(X)$	Algèbre des opérateurs linéaires et bornés sur X.
$\mathcal{K}(X)$	Idéal des opérateurs compacts sur X.
$\mathcal{K}_0(X)$	Ensemble des opérateurs de rang fini sur X.
$\Phi_+(X)$	Ensemble des opérateurs semi-Fredholm à droite sur X.
$\Phi_-(X)$	Ensemble des opérateurs semi-Fredholm à gauche sur X.
$\Phi(X)$	Ensemble des opérateurs de Fredholm sur X.
$\mathcal{R}(X)$	Ensemble des opérateurs de Riesz sur X.
$\mathcal{B}r(X)$	Ensemble des opérateurs de Browder sur X.
$\mathcal{W}(X)$	Ensemble des opérateurs de Weyl sur X.
I	L'opérateur identité sur$X$.
$\ker(A)$	Noyau de A.
$R(A)$	Image de A.
$\dim(.)$	Dimension algébrique.
codim	Codimension algébrique.
$\alpha(A) = \dim(\ker(A))$	Nullité de A.
$\beta(A) = \mathrm{codim}(R(A))$	Déficience de A.
$p(A)$	L'ascente de A.
$q(A)$	Descente de A.
A^*	Adjoint de A.
$\lvert A\rvert = \sqrt{A^*A}$	Valeur absolue de A.

P_M	Projection orthogonale sur un sous ensemble M de X.
$\overline{M}$	Adhérence de M.
$M^{\perp}$	L'othogonale de M dans X.
resp.	respectivement.
$\widetilde{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
$\sigma(A)$	le spectre de A.
$\sigma_p(A)$	le spectre ponctuel de A.
$\sigma_c(A)$	le spectre continu de A.
$\sigma_r(A)$	le spectre résiduel de A.
$\sigma_{ess}(A)$	le spectre issentiel de A.
$\varrho(A)$	l'ensemble résolvant de A.

Sommaire

Introduction

Ce n'est plus un secret que Le modèle original de la théorie des opérateurs est l'étude des matrices. Historiquement, dans le premier ouvrage sur la théorie des opérateurs, "Théorie des Opérations Linéaires", publié à Varsovie en 1932, Stefan Banach déclare que le sujet de l'ouvrage est l'étude des fonctions (opérateurs linéaires) agissant comme des matrices sur des espaces de dimension infinie, en particulier ceux qu'il appelle timidement les espaces de type B, ou bien les espaces de Banach. Un opérateur linéaire est donc le prototype équivalent à la notion d'une matrice en dimension infinie.

Comme on le sait, sur un $\mathbb{C}-$espace vectoriel (de Banach) X de dimension infinie, on peut distinguer deux classes d'opérateurs linéaires, la classe des opérateurs linéaires bornés $\mathcal{B}(X)$ qui contient aussi l'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ des matrices à n lignes et m colonnes et la classe des opérateur linéaire non borné $\mathcal{L}(X)$.

Avec l'immense progrès de la théorie spectrale, il a été constaté que la caractérisation de l'ensemble des opérateurs bornés qui ont les mêmes propriétés algébriques et la même théorie spectrale que celle des matrices, est devenue un sujet de recherche très porteux.
Ce sujet a connu des efforts sans relâche pour mettre à l'œuvre des outils permettant des dégager toutes les difficultés liées à cette question. Dans ce cadre, Riesz (en 1918) et Shouder (en 1930) ont montré que les opérateurs linéaires bornés les plus proche à la classe des matrices au point de vue algébrique et spectrale sont respectivement les opérateurs de rang fini et les opérateurs compacts [1].
En suivant le même enchainement logique, Il est donc devenu impérieux de s'interroger sur la classe d'opérateur qui suit. ? La réponse à cette question est la classe des opérateurs de Riesz.

Le concept d'opérateur de type Riesz a été introduit par A. F. Ruston en utilisant comme système axiomatique les propriétés d'opérateur compact utilisées par F. Riesz dans son travail sur les équations intégrales.
Un opérateur de Riesz est une généralisation de la notion d'opérateur compact, il a

1. Voir chapitre 1

les mêmes propriétés spectrales que l'opérateur compact. Cependant, ils ne possèdent pas les mêmes propriétés algébriques.

Dans ce mémoire, notre objectif est de donner une étude concise de la classe des opérateurs de Riesz.

Structure du mémoire : Ce mémoire est composé de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on rappelle tous les outils nécessaires pour l'élaboration de ce travail. On donne au départ un aperçu général sur les espaces métrique complets, espaces compacts et espaces de Banach. Dans la deuxième partie de chapitre on donne quelques définitions de bases liées aux différentes notions d'opérateur linéaire telles que la norme, le noyau, l'image, nullité, déficience, accent, décente, l'invisibilité, l'inverse de Drazin, l'adjoint. . . etc.

Le deuxième chapitre est entièrement consacré à l'étude de la classe des opérateurs linéaire compacts. Après avoir donné les définitions équivalentes d'un opérateur compact, on traite par la suite la structure algébrique et topologique de la classe $\mathcal{K}(X)$ des opérateurs compacts définis sur un espace de Banach X. D'autres propriétés topologiques telles que la restriction et le passage à l'adjoint ont aussi étudiées. L'algèbre de Calkin et les opérateurs de rang finis font aussi une partie importante de ce chapitre. A la fin, une étude spectrale sur les opérateurs compacts a été réalisée.

L'objet principal du troisième chapitre est la classe des opérateurs Fredholm. On donne au premier lieu quelques caractérisations (dans le cas borné) de la notion d'opérateur linéaire a image fermée, d'opérateur semi-Fredholm supérieurement et inférieurement, d'opérateur de Fredholm. On s'intéresse également aux différentes propriétés fondamentales de ces opérateurs, à savoir la stabilité, l'alternative de Fredholm et la théorie perturbation.

Dans le quatrième chapitre on met la lumière sur la notion d'opérateur de Riesz et ces différentes propriétés algébrique, topologique et spectrale. On donne les différentes caractérisations des opérateurs de Riesz et on montre par un contre exemple que ni la somme ni le produit de deux opérateurs Riesz ni la limite d'une suite d'opérateurs de Riesz ne sont des opérateurs Riesz. on donne par la suite des conditions suffisantes qui peuvent rendre la classe $\mathcal{R}(X)$ des opérateurs de Riesz fermé par rapport à la somme, le produit et la limite. La possibilité de décomposer un opérateur Riesz en un opérateur compact et un opérateur quasi-potentiel est aussi discutée.

Chapitre 1

Préliminaires

On rappel dans ce chapitre tous les outils de base nécessaire pour la suite de notre travail. On donne au départ quelques notions préliminaires sur les espaces de Banach. Puis on introduit des différentes propriétés algébriques, topologiques et spectrales des opérateurs linéaires bornés, on note que les résultats présentés dans ce chapitre sont cités sans démonstrations. Pour plus de détail il serait souhaitable de voir [**9**].

1.1 Espace de Banach

1.1.1 Espace complet

Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite d'éléments dans X.

Définition 1.1.1. *La suite $(x_n)_n$ est de Cauchy si elle vérifie condition suivante : Pour tout $\epsilon > 0$ il existe N_ϵ tel que $d(x_m, x_n) < \epsilon$ pour tout $m, n \geq N_\epsilon$*

Toute suite convergente est évidemment de Cauchy. La réciproque est fausse en général.
Contre exemple : $X =]0, 1[$ et $x_n = 2^{-n}$.

Proposition 1.1.1. *Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, elle est convergente.*

Définition 1.1.2. *Un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente.*

Proposition 1.1.2. *Si (X, d) est complet et $Y \subset X$. Alors (Y, d) est complet si et seulement si Y est fermé dans X.*

1.1.2 Espace métrique compact

Les espaces métriques compacts sont ceux qui sont "approximativement finis"

Définition 1.1.3. *Un espace métrique* (X, d) *est compact si et seulement si toute suite de points de* X *admet une valeur d'adhérence (c'est à dire contient une sous-suite convergente).*

Pour démontrer qu'un espace métrique est compact, la notion suivante est souvent utile

Définition 1.1.4. *Un espace métrique* (X, d) *est précompact si et seulement si, pour tout* $\epsilon > 0$*,* X *admet une recouvrement fini par des boules de rayon* ϵ*.*

En effet, on a la caractérisation suivante :

Proposition 1.1.3. *Un espace métrique* (X, d) *est compact si et seulement si il est précompact et complet.*

Corollaire 1.1.1. *Soit* (X, d) *espace métrique complet. Pour tout* $A \subset X$*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\overline{A}$ *est compact dans* (X, d) *;*

b) A *est précompact.*

Proposition 1.1.4. *Les parties compactes de* $\mathbb{R}^n$ *(ou de* $\mathbb{C}^n$ *) sont les parties fermées et bornées.*

Le résultat suivant est un corollaire immédiat de la définition.

Proposition 1.1.5. *Si* (X, d) *est un espace métrique compact et* $F \subset X$ *est fermé dans* X*, alors* (F, d) *est compact.*

1.1.3 Généralités sur les espaces de Banach

Définition 1.1.5. *On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, complet pour la distance issue de sa norme. Si la norme (est euclidienne) est deduite d'un produit scalaire, on parle d'un espace de Hilbert.*

Comme la topologie induite par sa distance est compatible avec sa structure d'espace vectoriel, c'est un espace vectoriel topologique.

Voici un corollaire immédiat de la proposition 1.1.5 et de la définition ci-dessus :

Corollaire 1.1.2. *Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach pour la norme induite.*

On rappelle le résultat suivant :

Théorème 1.1.1. *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Corollaire 1.1.3. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Une différence topologique fondamentale entre espaces vectoriels normés de dimension finie et espaces vectoriels normés de dimension infinie réside dans la caractérisation des parties compactes.

Théorème 1.1.2. *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.*

Théorème 1.1.3. *(Riesz). Dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, la boule unité fermée n'est jamais compacte.*

1.2 Opérateurs linéaires bornés

1.2.1 Définitions et notations

Définition 1.2.1. *Soit X un espace de Banach muni d'une norme $\|.\|$. Une application A définie de X dans X est opérateur linéaire sur X si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

L'additivité $A(x+y) = Ax + Ay$ *pour tout* $x, y \in X$.

L'homogénéité $A(\alpha x) = \alpha Ax$ *pour tout* $x \in X$ *et* $\alpha \in \mathbb{C}$.

Définition 1.2.2. *Un opérateur linéaire A défini sur X est dit borné ou bien continu s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que*

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \text{ pour tout } x \in X.$$

La norme opérateur $\|A\|$ de A est définie par :

$$\|A\| = \inf\{c > 0, \ \|Ax\| \leq c\|x\| \text{ pour tout } x \in X\}.$$

Théorème 1.2.1. *Si A est un opérateur borné sur X, alors :*

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\{\|Ax\|,\ \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|},\ \|x\| \leq 1\right\}. \end{aligned}$$

Théorème 1.2.2. *Soit A un opérateur linéaire sur X. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est continu en* 0.
2. *A est borné sur la boule unité de X*
3. *A est borné sur la sphère unité de X.*

Théorème 1.2.3. *Si X est de dimension finie, alors tout opérateur défini de X dans X est borné.*

Notation : On note par $\mathcal{B}(X)$, l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés sur X.

Proposition 1.2.1. *Soit $A, B \in \mathcal{B}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors :*

(a) *$A + B \in \mathcal{B}(X)$ et on a, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.*

(b) *$\alpha A \in \mathcal{B}(X)$ et on a $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$.*

(c) *$AB \in \mathcal{B}(X)$ et on a $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.*

Il vient de cette proposition que l'ensemble $\mathcal{B}(X)$ admet une structure d'un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.

Théorème 1.2.4. *L'espace $\mathcal{B}(X)$ muni de la norme d'opérateur est un $\mathbb{C}-$espace de Banach.*

Rappelons qu'un Algèbre est un espace vectoriel $\mathcal{A}$ muni d'une loi de composition interne supplémentaire notée multiplicativement "." qui vérifie les conditions suivantes :
Pour tout $x, y, z \in \mathcal{A}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{array}{lcl} (xy)z = x(yz) & \text{et} & (\alpha x)y = \alpha(xy) \\ x(y+z) = xy + xz & \text{et} & (x+y)z = xz + yz \end{array}$$

Si $\mathcal{A}$ admet un élément d'unité par rapport cette nouvelle loi, on parle d'un algèbre unitaire.
Si de plus l'algèbre $\mathcal{A}$ est un espace Banach tel que pour tout $x, y \in \mathcal{A}$ on a

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|,$$

on dit alors que $\mathcal{A}$ est un algèbre de Banach.

Théorème 1.2.5. *L'ensemble $\mathcal{B}(X)$ muni de la norme d'opérateur est un algèbre de Banach unitaire pour les opérations définis dans la proposition 1.2.1.*

L'opérateur identité sur X est noté I et il est défini par : $Ix = x$ pour tout $x \in X$. L'opérateur nul est l'opérateur 0 défini par : $0x = 0$ pour tout $x \in X$.

Définition 1.2.3. *Un opérateur $A \in \mathcal{B}(X)$ est dit inversible s'il existe un opérateur borné dans $\mathcal{B}(X)$ noté A^{-1} tel que*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$, on note par :

$$\begin{array}{ll} R(A) = \{Ax,\ x \in X\} & \text{l'image de } A \\ \ker(A) = \{x \in X,\ A = 0\} & \text{le noyau de } A \end{array}$$

Proposition 1.2.2. *Soit $A \in \mathcal{B}(X)$.*
- *Si* $\ker A = \{0\}$*, alors A est injectif.*
- *Si $R(A) = X$, alors A est surjectif.*
- *Si A est injectif et surjectif à la fois , il est donc bijectif (inversible).*

Théorème 1.2.6. *Un opérateur linéaire borné $A \in \mathcal{B}(X)$ est inversible si et seulement s'il existe $m > 0$ tel que*

$$\|Ax\| \geq m\|x\|.$$

La condition est clairement nécessaire. En effet, si A^{-1} existe, on a

$$\|x\| = \|AA^{-1}x\| \leq \|A^{-1}\|\|Ax\|$$

d'où,

$$\|Ax\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}\|x\|.$$

Vérifions maintenant que la condition est suffisante. il découle de cette condition que A est injectif. Sur l'espace

$$R(A) = \{y \in X,\ y = Ax \text{ pour } x \in X\}$$

on définit l'opérateur $A^{-1}y = x$, il est claire que

$$\|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{m\|y\|}$$

A^{-1} étant un opérateur borné de $R(A)$ dans X.

1.2.2 Adjoint d'un opérateur

Le dual topologique X^* d'un espace de Banach X est l'espace de toutes les formes linéaires continue de X à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour tout $x^* \in X^*$ et $x \in X$, on note généralement $\langle x, x^* \rangle$ au lieu de $x^*(x)$.

Définition 1.2.4. *Pour tout opérateur linéaire borné A dans $\mathcal{B}(X)$, on définit l'opérateur $A^* : X^* \longrightarrow X^*$ par :*

$$\langle Ax, x^* \rangle = \langle x, A^*x^* \rangle \text{ pour tout } x \in X \text{ et } x^* \in X^*.$$

A^* est appelé l'opérateur adjoint de A.

Théorème 1.2.7. *Soit $A, B \in \mathcal{B}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors :*

1. $\|A\| = \|A^*\|$.
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$.
3. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.
4. $(AB)^* = B^*A^*$.
5. $A^{**} = A$.
6. $(\ker A^*)^\perp = \overline{R(A)}$.

1.2.3 Nullité, déficience et conorme

Soit A un opérateur linéaire borné sur X. Alors :

⋆ **La nullité de** A est l'entier naturel $\alpha(A) = \dim \ker(A)$.

⋆ **La déficience de** A est l'entier naturel $\beta(A) = \mathrm{codim} R(A)$.

1.2.4 Conorme

On appelle conorme d'un opérateur A, la quantité $\gamma(A)$ définie par :

$$\gamma(A) = \inf_{x \notin N(A)} \frac{\|Ax\|}{d(x, \ker(A))}$$

où $d(x, \ker(A)) = \inf_{y \in N(A)} \|x - y\|$. Si $A = 0$, on prend $\gamma(A) = \infty$.

Exemple 1.2.1. *Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite bornée des nombres réels. Soit A l'opérateur défini sur l'espace l^2, des suites complexes a carré sommable défini pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par*

$$A(x) = [A(x)]_k = (\lambda_k x_{k \in \mathbb{N}^*})$$

Posons $E = \{k \in \mathbb{N} \ : \ \lambda_k \neq 0\}$. Alors, $N(A)$ est l'ensemble des éléments de type $y = (y_1, y_2, ...) \in l^2$ ou y_j est arbitraire si $j \notin E$ et $y_j = 0$ si $j \in E$.
On se propose de calculer $\gamma(A)$:

$$\gamma(A) = \inf_{x \notin N(A)} \frac{\|Ax\|}{d(x, N(A))}$$

avec $d(x, N(A)) = \inf_{y \in N(A)} \|x - y\|$. Soit $x \in l^2$, alors pour tout $y \in N(A)$ on a :

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k|^2 \\ &= \sum_{k \notin E} |x_k - y_k| + \sum_{k \in E} |x_k|^2. \end{aligned}$$

Vu que les y_k sont arbitraires si $k \notin E$, choisissons $y_k = x_k$ pour $k \notin E$.
D'où,

$$d(x, N(A)) = (\sum_{k \in E} |x_k|^2)^{1/2}.$$

et

$$\frac{\|Ax\|}{d(x, N(A)} = \left(\frac{\sum_{k \in E} |\lambda_k|^2 |x_k|^2}{(\sum_{k \in E} |x_k|^2)} \right)^{1/2} \geq \inf_{k \in E} |\lambda_k|^2.$$

D'où,

$$\gamma(A) \geq \inf_{k \in E} |\lambda_k|^2 = m.$$

D'après la définition de la borne inf *:* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists i \in E;\ |\lambda_i| < m + \varepsilon.$
Soit $u = (0, 0, ..., 0, \overset{i^{eme} position}{1}, 0, ...) \in l^2$. *Alors :*

$$m \leq \gamma(A) \leq \frac{\|Au\|}{d(x, N(A))} = |\lambda_i| < m + \varepsilon.$$

D'où,

$$\gamma(A) = \inf_{k \in E} |\lambda_k|^2.$$

On note aussi que $\alpha(A) =$ *le nombre des* $\lambda_k \neq 0$ *et* $\beta(A) = 0$ *si* $(1/\lambda_k)_k$ *est une suite borné, sinon* $\beta(A) = \infty$.

1.2.5 Ascente et descente

Rappelons que les noyaux et les images des itérés d'un opérateur linéaire borné A sur X forment respectivement deux suites croissante et décroissante de sous espaces de X :

$$\ker(A^0) = \{0\} \subseteq \ker(A) \subseteq \ker(A^2) \subseteq ...$$

et

$$R(A^0) = X \supseteq R(A) \supseteq R(A^2) \supseteq ...$$

Généralement, ces inclusions sont strictes. Mais, s'il existe un certain rang à partir duquel, ces suites deviennent constantes, alors on appelle :

- ⋆ **L'ascente de** A, le plus petit entier naturel $p = p(A)$ tel que

$$\ker(A^p) = \ker(A^{p+1}).$$

- ⋆ **La descente de** A, le plus petit entier naturel $q = q(A)$ tel que

$$R(A^q) = R(A^{q+1}).$$

Si la suite $(N(A^n))_n$ (resp. $(R(A^n))_n$) est strictement croissante (resp. strictement décroissante), on écrit $p(A) = \infty$ (resp. $q(A) = \infty$).

Il est clair que :

$$p(A) = 0 \Longleftrightarrow A \text{ est injectif.}$$
$$q(A) = 0 \Longleftrightarrow A \text{ est surjectif.}$$

1.2.6 Opérateur à image fermée :

Théorème 1.2.8. *Si X est un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{B}(X)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$R(A)$ est fermée ;*
2. *$R(A^*)$ est fermée ;*
3. *$R(A) = \ker(A^*)^\perp$;*
4. *$R(A^*) = \ker(A)^\perp$;*
5. *$\gamma(A) > 0$;*
6. *$\beta(A) < \infty$.*

1.2.7 Opérateur inversible au sens de Drazin

Définition 1.2.5. *Soit $A \in \mathcal{B}(X)$, s'il existe un opérateur $D \in \mathcal{B}(X)$ vérifiant les trois équations d'opérateurs suivantes :*

$$\begin{array}{l} AD = DA \\ DAD = D \\ A^{k+1}D = A^k \end{array} ,$$

alors D est dit un inverse de Drazin de A est on le note par A^D. Le plus petit entier k pour lequel la troisième équation est vérifiée est appelé l'indice de Drazin de A, on le note par $i(A)$.

Les conditions ci-dessus sont équivalentes à

$$AA^D = A^DA,\ A^DAA^D = A^D \text{ et } A(I - AA^D) \text{ est nilpotent.}$$

Si $A(I - AA^D)$ est quasinilpotent [1], on dit que A est inversible au sens généralisé du Drazin, A^{GD} représente dans ce cas l'inverse généralisé au sens de Drazin de A.

1. Voir chapitre 4

Théorème 1.2.9. *$A \in \mathcal{B}(X)$ est inversible au sens généralisé du Drazin si et seulemznt s'il a une ascente finie et une descente finie.*

Ceci est équivalent à dire que 0 est un pôle d'ordre fini k de l'opérateur résolvent $(\lambda I - A)^{-1}$. Dans ce cas, on a

$$i(A) = p(A) = q(A) = k.$$

1.2.8 Résolvante et spectre

Soit T un opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(T)$ dans H. On définit

⋆ **Le spectre $\sigma(T)$ de T** par

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (T - \lambda I) \text{ n'est pas inversible } \}.$$

⋆ **L'ensemble résolvant $\varrho(T)$** par

$$\varrho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (T - \lambda I) \text{ est inversible d'inverse borné}\}.$$

c'est à dire, le complémentaire de $\sigma(T)$ dans $\mathbb{C}$.

⋆ Si $\lambda \in \varrho(T)$, alors l'opérateur $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ est appelé La résolvante de $(T - \lambda I)$.

Le spectre $\sigma(T)$ se décompose en trois parties disjointes :

1. **Spectre ponctuel $\sigma_P(T)$:**

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (T - \lambda) \text{ n'est pas injectif}\}.$$

2. **Spectre continu $\sigma_c(T)$:**

$$\begin{aligned} \sigma_c(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \ : (T - \lambda I) \text{ est injectif et } R(T - \lambda I) \text{ est dense dans } H\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ N(T - \lambda I) = \{0\} \text{ et } \overline{R(T - \lambda I)} = H\}. \end{aligned}$$

3. **Spectre résiduel $\sigma_r(T)$:**

$$\begin{aligned} \sigma_r(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \ : (T - \lambda I) \text{ est injectif et } R(T - \lambda I) \text{ n'est pas dense dans } H\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ N(T - \lambda I) = \{0\} \text{ et } \overline{R(T - \lambda I)} \subsetneq H\}. \end{aligned}$$

Les ensembles $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ et $\sigma_r(T)$ forment une partition de $\sigma(T)$, c'est à dire $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$.

Chapitre 2

Concept général des opérateurs compacts

Le présent chapitre est une introduction à la théorie des opérateurs compacts définis sur un espace de Banach. On s'intéresse essentiellement à rappeler les définitions et les propriétés de base des opérateurs compacts, notamment la structure algébrique et topologique de cette classe d'opérateurs. D'une façon détaillée, on va voir de près la stabilité du caractère compact par rapport à : la somme et le produit finis, le passage à la limite, la restrection et l'adjoint. on donne par la suite une caractérisation de la notion d'opérateur de rang fini. À la fin de ce chapitre, un aperçu général sur le spectre et la théorie spéctrale des opérateurs compacts à été donné.

2.1 Définitions et notations

Définition 2.1.1. *Soit X un espace de Banach et K un opérateur linéaire borné sur X. On dit que K est compact sur X s'il transforme tout sous ensemble borné de X en un sous ensemble relativement compact.*

Ceci est revient à dire que :

Définition 2.1.2. *L'opérateur K est dit compact sur l'espace de Banach X si l'image $K(\overline{B}_X)$ par l'opérateur K de la Boule unité fermée $\overline{B}_X$ de X est relativement compact.*

En d'autre terme, K est un opérateur compact si pour toute suite $(x_n)_n$ bornée dans X, la suite $(Kx_n)_n$ admet une suite extraite convergente.
On désignera par $\mathcal{K}(X)$, l'ensemble des opérateur compact de X dans lui-même.

Exemple 2.1.1. *Soit K un opérateur dans $L^2([a,b])$ définie par :*

$$(Kx)(s) = \int_a^b l(s,t)x(t)dt$$

ou a et b des constants dans $\mathbb{R}$ et $l(.,.)$ est continue sur $[a,b] \times [a,b]$. K est un opérateur compact. En effet ;

Soit $x_n \in L^2([a,b])$ et $\|x_n\| \leq M$ pour $n = 1,2,3,.....,$ et $M > 0$.

$$|(Kx_n(s))| \leq \int_a^b |l(s,t)x_n(t)|dt \leq M\ sup|l(s,t)|\sqrt{b-a}$$

D'où Kx_n est uniformément bornée, de plus pour $s_1, s_2 \in [a,b]$ on a :

$$\begin{aligned}|(Kx_n)(s_1) - (Kx_n)(s_2)| &\leq \int_a^b |l(s_1,t) - l(s_2,t)||x_n(t)|dt \\ &\leq \sqrt{\int_a^b |l(s_1,t) - l(s_2,t)|}\sqrt{\int_a^b |x_n(t)|^2 dt} \\ &\leq M\sqrt{b-a}(\max_{t\in[a,b]} |l(s_1,t) - l(s_2)|\end{aligned}$$

vu que l est uniformément continue,la dernière inégalité implique que la suite $\{Kx_n\}$ est équicontinue, d'où, l'ensemble $\{Kx_n\}$ est compacte.

Théorème 2.1.1. **[2]** *Tout opérateur compact est borné, autrement dit, $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{B}(X)$.*

Démonstration. Soit K un opérateur compact sur X, donc $\overline{K(B_X)}$ est compact. Comme l'application

$$x \longrightarrow \|x\|$$

est continue de X dans $\mathbb{R}$, on en déduit que l'ensemble

$$\{\|y\|;\ y \in \overline{K(B_X)}\}$$

est compact dans $\mathbb{R}$. Donc, il existe une constante M telle que

$$\|y\| \leq M < \infty \text{ pour tout } y \in \overline{K(B_X)},$$

ainsi, $\|Kx\| \leq M$ pour tout $x \in B_X$. Autrement dit, K est borné. □

La réciproque de ce théorème n'est évidemment pas vraie en général. Les opérateurs compacts sont très particuliers ; par exemple si X est de dimension infinie, l'identité n'est pas un opérateur compact, puisque cela entraînerait l'existence d'un voisinage de l'origine relativement compact dans X et par suite X serait de dimension finie. En revanche, si X est de dimension finie, tout opérateur linéaire A dans $\mathcal{B}(X)$ est compact, puisque si M est un sous-ensemble borné de X, son image $A(M)$ est bornée et donc son adhérence $\overline{A(M)}$ est compacte.

2.2 Structure algébrique et topologique de $\mathcal{K}(X)$

2.2.1 Somme et produit de deux opérateurs de Riesz

Théorème 2.2.1. *L'ensemble $\mathcal{K}(X)$ est :*

1. *un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(X)$.*
2. *un idéal bilatère de $\mathcal{B}(X)$, c'est-à-dire que si $K \in \mathcal{K}(X)$ et $A \in \mathcal{B}(X)$, alors KA et AK sont des opérateurs compacts sur X.*

Démonstration.

1. $\mathcal{K}(X)$ est sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(X)$:
   Il est clair que si $K \in \mathcal{K}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda K \in \mathcal{K}(X)$. Soient maintenant K_1 et K_2 deux opérateurs linéaires compacts sur X, et considérons les ensembles
   $$A_1 = K_1(\overline{B}_X), A_2 = K_2(\overline{B}_X)$$
   et
   $$A = (K_1 + K_2)(\overline{B}_X)$$
   il est clair que A est contenu dans $A_1 + A_2$, donc il est relativement compact d'après une proposition des pré-requis sur le compacts. D'où, $\mathcal{K}(X)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(X)$.
2. $\mathcal{K}(X)$ est un idéal bilatère : Supposons $A \in \mathcal{B}(X)$ et K un opérateur compact sur X, si $M \subset X$ est compact et contient l'image $A(\overline{B}_X)$, alors $K(M)$ est compact et contient l'image $KA(\overline{B}_X)$, donc KA est compact.
   Pour l'autre cas, remarquons que l'image $A(\overline{B}_X)$ est contenue dans la boule de F de centre 0 et de rayon $r = \|A\|$, si $N \subset X$ est compact et contient l'image par K de la boule unité de F , alors AN est compact et contient l'image par AK de $\overline{B}_X$.

□

Il résulte de ce théorème que :

Corollaire 2.2.1. $\mathcal{K}(X)$ *est stable par rapport à la somme et le produit finis.*

Corollaire 2.2.2.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A \in \mathcal{K}(X) \Rightarrow A^n \in \mathcal{K}(X).$$

2.2.2 Limite d'une suite d'opérateurs compacts

Théorème 2.2.2. **[2]**,**[6]** *Soit* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'opérateur compacts convergente vers un opérateur* K *défini sur* X*, c'est à dire,*

$$\lim_{n\to\infty} \|K_n - K\| \to 0$$

Alors, K *est un opérateur compact sur* X*.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans X. Puisque K_1 est compact, il existe alors une sous-suite $(x_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(K_1x_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. De même ,la suite $(K_2x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contient une sous-séquence $(K_2x_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente .En général ,pour $k \geq 2$, la suite $(K_kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contient une sous-suite $(K_kx_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Considérons la séquence $(x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$, puisqu'il s'agit d'une sous-séquence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut mettre $x_{p_n} = x_{p,n}$ ou $\{p_n\}$ est une suite croissante d'entiers positifs. Évidemment,la suite $(K_kx_{p_n})$ converge pour chaque $k \in N$. Montrons que la suite $\{Kx_{pn}\}$ est également convergente. Soit $\varepsilon > 0$ depuis $\|K_n - K\| \longrightarrow 0$ il existe $k \in N$ tel que

$$\|K_k - K\| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

ou M est une constante telle que $\|x_n\| \leq M$ pour tout $n \in N$. Ensuite, soit $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m > k_1$

$$\|K_kx_{p_n} - K_kx_{p_m}\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|Kx_{p_n} - Kx_{p_m}\| &= \|Kx_{p_n} - K_kx_{p_n} + K_kx_{pn} - K_kx_{p_m} + K_kx_{p_m} - Kx_{p_m}\| \\
&\leq \|Kx_{p_n} - K_kx_{p_n}\| + \|K_kx_{pn} - K_kx_{p_m}\| + \|K_kx_{p_m} - Kx_{p_m}\| \\
&< \tfrac{\varepsilon}{3M}M + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3M}M = \varepsilon
\end{aligned}$$

pour n et m suffisamment grands. Ainsi $(Kx_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach et est donc convergente. $\square$

Si $A \in \mathcal{B}(X)$ tel que A adhérent à $\mathcal{K}(X)$, alors Pour tout $\epsilon > 0$ donné, on peut trouver B compact telle que $\|A - B\| < \epsilon$, il en résulte que tout point de $A(\overline{B}_X)$ est approché à ϵ prés par un point du compact $\overline{S(\overline{B}_H)}$, donc A est compact. Ainsi $\overline{\mathcal{K}(X)} = \mathcal{K}(X)$. Nous avons par conséquent le résultat suivant.

Proposition 2.2.1. *L'ensemble $\mathcal{K}(X)$ des opérateurs linéaires bornés compacts constitue un idéal bilatère fermé de l'algèbre $\mathcal{B}(X)$.*

2.3 Algèbre de Calkin

l'algèbre de Calkin d'un espace de Banach X est le quotient $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ de l'algèbre de Banach $\mathcal{B}(X)$ des opérateurs linéaires bornés sur X par l'idéal fermé $\mathcal{K}(X)$ des opérateurs compacts. C'est donc encore une algèbre de Banach, pour la norme quotient.

Les éléments de cette algèbre sont les classes $[A]$ définies $A + \mathcal{K}(X)$ avec A un opérateur linéaire borné dans $\mathcal{B}(X)$. Le produit dans $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ est défini par

$$[A] \times [B] = [AB].$$

La classe $[I]$ est l'élément unité dans $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$.

La projection canonique de $\mathcal{B}(X)$ sur $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ est appelée l'homomorphisme de Calkin, on la note par π et elle est définie par :

$$\pi(A) = A + \mathcal{K}(X).$$

L'algèbre de Calkin $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ muni de la norme quotient

$$\|\pi(A)\| = \inf \|A + K\| \text{ avec } K \in \mathcal{K}(X)$$

admet d'une structure d'algèbre de Banach.

2.4 Opérateur de rang fini

Définition 2.4.1. *un opérateur A est de rang fini si son image est de dimension finie. le rang de A est la dimension de son image. L'ensemble des opérateurs de rang fini de X dans X sera noté $\mathcal{K}_0(X)$.*

Théorème 2.4.1. [2] *Un opérateur A est de rang fini si, et seulement si , son adjoint A^* l'est aussi . Dans ce cas , A et A^* ont même rang.*

Théorème 2.4.2. [6] *Tout opérateur de rang fini est compact c'est à dire que $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$.*

En effet, l'ensemble $A(\overline{B}_H)$ est alors un ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension finie. D'après le résultat précédent , toute limite A en norme d'opérateur d'une suite $(A_n)_n$ d'opérateurs de rang fini est compacte . C'est une méthode assez efficace pour vérifier que certains opérateurs sont compacts.

Théorème 2.4.3. [2] *Soit A un élément $\mathcal{B}(X)$.Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *L'opérateur A compact.*
2. *L'opérateur A^* est compact.*
3. *L'opérateur A est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

Démonstration.

L'assertion (3) implique l'assertion (1), car $\mathcal{K}_0(X)$ est inclus dans $\mathcal{K}(X)$ et celui-ci est fermé.
Montrons que (1) implique (3) : Soit B_X la boule unité de X, l'opérateur A étant compact donc $A(B_X)$ est relativement compact. Il existe donc, pour tout $\varepsilon > 0$, des éléments $y_1, y_2, ..., y_k$ tels que :

$$A(B_X) \subset \bigcup_{j=1}^{k} B(y_j, \varepsilon)$$

sachant que $B(y_j, \varepsilon)$ est la boule de centre y_j et de rayon ε. Soit N le sous-espace vectoriel engendré par $y_1, y_2, ..., y_k$ et p_N l'opérateur de projection orthogonale sur N. L'opérateur $(p_N)A$ est de rang fini et pour tout x dans la boule B_X , Ax appartient à l'une des boules $B(y_j, \varepsilon)$, donc

$$\|Ax - (p_N)Ax\| = d(Ax, N) = \inf y \in N\|Ax - y\| \leq \varepsilon$$

et par suite
$$\|A - (p_N)A\| \leq \varepsilon.$$
D'où, (1) $\Rightarrow$ (3).
Enfin l'équivalence entre (1) et (2) découle du fait que l'adjoint d'un opérateur de rang fini est de rang fini et que la norme d'un opérateur linéaire borné est égale à la norme de son adjoint. $\square$

2.5 Théorie spectrale des opérateurs compacts

Cette théorie est pour l'essentiel la création du mathématicien hongrois F. Riesz, aux alentours de 1910. Le théorème de Riesz est l'un des points-clés de cette théorie.

Lemme 2.5.1. *Soit X un espace de Banach, pour tout sous-espace vectoriel L de dimension finie de E, il existe un projecteur continu P de X sur L, c'est à dire qu'il existe un sous-espace fermé F tel que $X = L \bigoplus F$.*

Démonstration. Soit $(e_1, ůůů, e_n)$ une base de L et soit $(e_1^*, ..., e_n^*)$ la base duale pour le dual L^*, par le théorème de Hahn-Banach, on peut prolonger chaque forme linéaire $(e_j)^*$ en une forme linéaire continue $(x_j)^* \in X^*$. Il suffit alors de poser
$$\forall x \in X, p(x) = \sum_{j=1}^{n} (x_j)^*(x)e_j$$
et de poser pour finir $F = \ker(p)$. $\square$

Lemme 2.5.2. *Soit $K \in \mathcal{K}(X)$ un opérateur compact, et $A = I - K$. Si F est un sous-espace fermé de X tel que A soit injectif de F dans X , il existe une constante $c > 0$ telle que $\|A(x)\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in F$, il en résulte que l'image $A(F)$ de F par A est fermée dans X.*

Démonstration. En cas contraire, on pourrait trouver une suite $(x_n)_n$ de F de vecteurs de norme 1 telle que $\|A(x_n)\| \to 0$. Puisque K est compact, on peut trouver une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $K(x_{n_k})$ converge, mais $A(x_{n_k}) = x_{n_k} - K(x_{n_k})$ tend vers 0, donc x_{n_k} converge vers un vecteur $x \in F$ (puisque F est fermé) tel que $\|x\| = 1$, et à la limite $A(x) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse A injectif sur F. Désignons par A_1 la restriction de A à F, on a pour tout $x \in F$, et avec $c > 0$:
$$\|A_1(x)\| \geq c\|x\| \Rightarrow R(A_1) = A(F) \text{ est fermée.}$$

En effet, si $(A(x_{n_k}))_k$ est de Cauchy, il en est de même pour $(x_{n_k})_k$. $\square$

Proposition 2.5.1. **[2]**,**[6]** *Soit* $K \in \mathcal{K}(X)$ *et* $A = I - K$*, alors :*

1. *Le noyau de* A *est de dimension finie* $(\dim \ker(I - K) < \infty$.
2. *L'image* $R(A)$ *est fermée dans* X.

Démonstration. Le noyau de A est le sous-espace propre de l'opérateur compact K pour la valeur propre 1, il est donc de dimension finie d'après le théorème de Riesz. Soit F un sous-espace fermé de X tel que $X = \ker(A) \bigoplus F$, alors A est injectif sur F, donc $R(A) = A(X) = A(F)$ est fermée. $\square$

On remarquera, en utilisant la formule du binôme et la propriété d'idéal de $\mathcal{K}(X)$, que $T^n = (I - K)^n$ est de la forme $I - K_n$, avec K_n compact, donc les images de T^n sont fermées pour tout $n \geq 0$ (et leurs noyaux sont de dimension finie).

Lemme 2.5.3. *Si* F *et* G *sont deux sous-espaces vectoriels de* X *, avec* F *fermé et* $F \subset G$ *,*$F \neq G$ *, on peut trouver pour tout* $\varepsilon \in]0, 1[$ *un vecteur* $y \in G$ *tel que* $\|y\| = 1$ *et* $d(y, F) > 1 - \varepsilon$.

En effet, puisque $F \neq G$, on peut trouver un premier vecteur $y_0 \in G \backslash F$. Puisque F est fermé et $y_0 \notin F$, on a $\delta = d(y_0, F) > 0$. On peut trouver $(x_0) \in F$ tel que

$$\alpha = \|y_0 - x_0\| < \delta/(1 - \varepsilon).$$

Alors, le vecteur $y = \alpha^{-1}(y_0 - x_0) \in G$ convient.

Lemme 2.5.4. *Soit* $K \in \mathcal{K}(X)$ *et* $A = I - K$*, il n'existe pas de chaine infinie* $(F_n)_{n \geq 0}$*(resp.* $(F_n)_{n \leq 0}$*) de sous-espaces vectoriels fermés de* X *telle que* $F_n \subsetneq F_{n+1}$ *et* $T(F_{n+1}) \subset F_n$ *pour tout* $n \geq 0$ *(resp.* $n < 0$*).*

Démonstration. On Traite le cas $n \geq 0$, (on peut refaire la preuve d'une manière identique pour le cas $n < 0$). Supposons au contraire qu'il existe une chaine infinie $(F_n)_{n \geq 0}$ de sous espaces vectoriels de X telle que $F_n \subsetneq F_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. D'après le lemme 2.5.3, il existe tout $n \geq 0$ un vecteur $x_{n+1} \in F_{n+1}$ tel que

$$\|x_{n+1}\| = 1 \text{ et } d(x_{n+1}, F_n) > 1 - \varepsilon.$$

Puisque $T(F_{n+1}) \subset (F_n) \subset (F_{n+1})$ et $K = I - T$, on a

$$K(F_{n+1}) \subset (F_{n+1}).$$

Soient alors k, l deux entiers tels que $0 < k < l$, le vecteur $T(x_l)$ est dans F_{l-1} et $K(x_k) \in F_k \subset F_{l-1}$, donc

$$T(x_l) + K(x_k) \in (F_{l-1}),$$

d'où,

$$\|x_l - (T(x_l) + K(x_k))\| \geq d(x_l, F_{l-1}) > 1 - \varepsilon.$$

Mais cette quantité est égale à $\|K(x_l) - K(x_k)\|$. L'image $\overline{K(B_X)}$ contient donc une suite infinie de points dont les distances mutuelles seraient $\geq 1-\varepsilon$, ce qui contredirait la compacité de K. $\square$

Corollaire 2.5.1. *Soit $K \in \mathcal{K}(X)$ et $A = I - K$, alors :*

1. *La suite croissante des noyaux $(\ker(A^n))_{n\geq 0}$ est stationnaire (c'est à dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker A^p = \ker A^{p+1} = ...$)*
2. *La suite décroissante des images $(R(A^n))_{n\geq 0}$ est stationnaire (c'est à dire qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $R(A^q) = R(A^{q+1}) = ...$).*

Démonstration. Posons $(F_n) = \ker(A^n)$. On a bien F_n fermé, $(F_n) \subset (F_{n+1})$ et de plus $T(F_{n+1}) \subset (F_n)$ pour tout $n \geq 0$, si la suite n'était pas stationnaire, elle contredirait le lemme précédent.
Pour le cas des images on posera $(F_{-n}) = R(A^n)$ pour $n \geq 0$, on a vu dans la Proposition 2.5.1 que toutes ces images sont fermées. $\square$

Corollaire 2.5.2. *Soit $K \in \mathcal{K}(X)$ un opérateur compact, et $A = I - K$. Alors :*
- *Si A est surjectif, alors $\ker(A) = \{0\}$.*
- *Si A est injectif, alors $R(A) = X$.*

Démonstration. Si l'opérateur A est surjectif et si $\ker(A) \neq \{0\}$, on montre par récurrence que $\ker(A^n) \neq \ker(A^{n+1})$ pour tout $n \geq 1$:
si $x \in \ker(A^{n+1}) \setminus \ker(A^n)$, on a $A^{n+1}(x) = 0$ et $A^n(x) \neq 0$. Puisque A est surjectif, il existe y tel que $A(y) = x$. Il en résulte que $A^{n+2}(y) = A^{n+1}(x) = 0$ mais $A^{n+1}(y) = A^n(x) \neq 0$. Ceci est impossible quand $A = I - K$, avec K compact, par le corollaire.

Si A est injectif et $R(A) \neq X$, on vérifie que $R(A^{n+1}) \neq R(A^n)$ pour tout $n \geq 0$ ce qui est à nouveau impossible quand $A = I - K$, avec K compact, de nouveau par le corollaire. $\square$

2.6 Spectre d'un opérateur compact

Théorème 2.6.1. [**2**],[**6**] *Soient X un espace de Banach complexe et $K \in \mathcal{K}(X)$ un opérateur compact, le spectre de K est fini ou formé d'une suite tendant vers 0. Chaque valeur $\lambda \neq 0$ dans $\sigma(K)$ est une valeur propre de K, de multiplicité finie.*

Démonstration. On va montrer que si $\lambda \neq 0$ est dans le spectre de K, alors λ est valeur propre de K et λ est isolé dans le spectre de K. En remplaçant K par $\lambda^{-1}K$ on se ramené à traiter $\lambda = 1$.

Posons $A = I - K$, si 1 n'est pas valeur propre de K, l'opérateur A est injectif, donc surjectif d'après le corollaire 2.5.2, donc $I - K$ est inversible et 1 n'est pas dans le spectre de K.
Supposons que $1 \in \sigma(K)$, donc 1 est valeur propre, remarquons que $A^n = (I - K)^n = I - K_n$ avec K_n compact (utiliser la formule du binôme), donc on sait que $\dim \ker(A^n) = \operatorname{codim} R(A^n)$ pour tout $n \geq 0$ (pour $n = 0$, c'est une évidence).
On a vu qu'il existe un entier p tel $\ker(A^p) = \ker(A^{p+1})$, et on peut prendre pour p le plus petit entier vérifiant cette propriété, on a $p \geq 1$ puisque 1 est valeur propre de K, alors

$$\ker(A) \bigcap R(A^p) = \{0\}$$

Sinon on montre facilement que $\ker(A^p) \neq \ker(A^{p+1})$ on a a fortiori $\ker(A^p) \bigcap R(A^p) = \{0\}$ (car sinon $\ker A^p \neq \ker A^{p+1}$) , et d'après l'égalité dimension-codimension il en résulte que

$$X = \ker(A^p) \bigoplus R(A^p).$$

L'espace X se trouve décomposé en deux sous-espaces fermés A-invariants. La restriction A_2 de A à $R(A^p)$ est injective, donc c'est un isomorphisme de $R(A^p)$ dans $R(A^p)$. La restriction A_1 de A à $\ker(A^p)$ est un endomorphisme en dimension finie, dont la seule valeur propre est 0, pour tout $\lambda \neq 0$,$A_1 - \lambda I$ est donc bijective de $\ker(A^p)$ dans $\ker(A^p)$, et pour λ assez petit, $A_2 - \lambda I$ est encore un isomorphisme, il en résulte que $A - \lambda I$ est un isomorphisme pour $\lambda \neq 0$ et assez petit, ce qui signifie que 0 est isolé dans le spectre de A, ou encore que 1 est isolé dans le spectre de K.
On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un nombre fini de valeurs spectrales telles que

$$|\lambda| > \varepsilon,$$

ce qui permet de ranger les valeurs spectrales non nulles de K dans une suite qui tend vers 0, à moins que le spectre ne soit fini. □

Si X est espace de Hilbert, on le résultat suivant.

Théorème 2.6.2. *Pour tour-opérateur linéaire compact normale K d'un espace de Hilbert complexe X dans lui-même, l'espace X est somme directe hilbertienne (orthogonale) de la famille des sous-espaces propres de K.*

Il en résulte que X admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de K.

Démonstration. Commençons par une remarque : si X est un Hilbert complexe non nul et si K est normal compact sur X, il existe $x \neq 0$ dans X et $\mu \in \mathbb{C}$ tels que

$$Kx = \mu x.$$

En effet, on peut appliquer la formule du rayon spectral à l'algèbre unitaire $\mathcal{B}(X)$ (parce que $X \neq \{0\}$) : il existe une valeur spectrale μ de K telle que

$$|\mu| = \rho(K) = \|K\|.$$

Si $\mu = 0$, on a $K = 0$ et tout vecteur $x \in X$ non nul répond à la question.
Si $\mu \neq 0$, on sait que μ est une valeur propre.

Soient X un espace de Hilbert complexe et$k \in \mathcal{K}(X)$ un opérateur compact et normal, soitΣ son spectre, c'est un ensemble fini ou dénombrable.
Pour $\lambda \in \Sigma$ notons $X_\lambda = \ker(K - \lambda I)$ l'espace propre de K associé. On va démontrer que les $X_\lambda, \lambda \in \Sigma$, sont deux à deux orthogonaux, et que le sous-espace engendré par les $X_\lambda, \lambda \in \Sigma$ est dense dans X. On pourra alors considérer la somme hilbertienne F des sous-espaces deux à deux orthogonaux (X_λ), et on aura $F = X$ d'après la densité de la somme des (X_λ).

On rappelle que $\ker A = \ker A^*$ quand A est normal, comme $A = K - \lambda I$ est normal et $A^* = K^* - \overline{\lambda} I$, on voit que

$$X = \ker(K - \lambda I) = \ker(K^* - \overline{\lambda} I)$$

il en résulte que chaque X_λ est stable par K et par K^*. Si $x \in X_\lambda$ et $y \in X_\mu$ alors

$$< Kx, y >= \lambda < x, y >=< x, K^* y >= \mu < x, y >$$

ce qui montre que $< x, y >= 0$ si $\lambda \neq \mu$, les sous-espaces propres de K sont donc deux à deux orthogonaux.

Notons F le sous-espace fermé de X engendré par les X_λ, pour λ valeur propre de K (ces espaces sont de dimension finie si $\lambda \neq 0$, le sous-espace $X_0 = \ker K$ peut être réduit à $\{0\}$, ou bien de dimension finie, ou infinie). Puisque chaque X_λ est stable par K et K^*, on a $K(F) \subset F$ et $K^{ast}(F) \subset F$. Il s'ensuit que

$$K(F^\perp) \subset F^\perp$$

et

$$K^*(F^\perp) \subset F^\perp.$$

Notons $K_1 \in \mathcal{B}(F^\perp)$ la restriction de K à l'orthogonal de F. Si l'on avait $X = F^\perp \neq \{0\}$, K_1 serait un opérateur normal compact sur X, qui aurait au moins un vecteur propre $x \in F^\perp, x \neq 0$ et $K_1(x) = K(x) = \mu x$ pour un certain $\mu \in \mathbb{C}$, mais alors on devrait avoir $x \in F$. Puisque F contient tous les vecteurs propres de K, on a donc $x \in F \bigcap F^\perp$, ce qui implique $x = 0$, contradiction. On a donc bien $F = X$. Pour obtenir une base orthonormée de X formée de vecteurs propres de K, on rassemble des bases orthonormées de chaque espace $X_\lambda, \lambda \neq 0$, qui sont des bases finies, et s'il y a lieu, une base orthonormée du noyau X_0. $\square$

Chapitre 3

Analyse de Fredholm des opérateurs linéaires

Dans ce chapitre, On s'intéresse à étudier une autre classe très spéciale des opérateurs linéaires bornés, c'est bien la classe des opérateurs de Fredholm. On donne au départ quelques caractérisations (dans le cas borné) de la notion d'opérateur a image fermée, d'opérateur semi-Fredholm supérieurement et inférieurement, d'opérateur de Fredholm. On s'intéresse également aux différentes propriétés fondamentales de ces opérateurs, à savoir la stabilité, l'alternative de Fredholm (le lien avec les opérateurs compacts) et la théorie de perturbation.

3.1 Opérateur semi-Fredholm

Définition 3.1.1. *Soit A un opérateur linéaire borné sur X. On dit que opérateur A est semi-Fredholm à droite (respectivement à gauche) s'il existe un opérateur linéaire B borné sur X et un opérateur K compact sur H tels que $AB = I + K$ (respectivement $BA = I + K$).*

L'ensemble des opérateurs de semi-Fredholm à droite (respectivement à gauche) est noté $\Phi_+(X)$ (respectivement $\Phi_-(X)$)

Proposition 3.1.1. [2] *Si $A \in \mathcal{B}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda \neq 0$, Alors $R(A-\lambda)$ est fermé dans X et* $\dim\ker(A-\lambda) = \dim\ker(A-\lambda)^* < \infty$.

Proposition 3.1.2. [2] *Soit $A \in \mathcal{B}(X)$. A est semi-Fredholm à gauche si $R(A)$ est fermé dans X et* $\dim\ker A < +\infty$

Démonstration. Supposons que A est semi-Fredholm à gauche c'est-à-dire il existe un opérateur B borné de X dans X et un opérateur compact K sur X , tel que

$$BA = I + K \text{ et } \ker BA = \{x \in X; BAx = 0\} \supset \{x \in X; Ax = 0\} = \ker A.$$

Donc

$$\ker BA \supset \ker A \Rightarrow \dim\ker A \leq \dim\ker BA.$$

D'autre part, $\ker BA = \ker(I+K)$, et $\ker(I+K)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = -1$, Donc il est de dimension égale à 1 qu'elle est fini, par conséquent $\dim\ker A \neq +\infty$.

$$R(BA) = \{BAx; x \in X\} = \{(1+K)x; x \in X\} = R(1+K).$$

D'après la proposition qu'elle suivre les opérateurs semi-Fredholm à droite, On a $R(BA)$ est fermé dans X, donc il existe $c > 0$ tel que :

$$\|BAh\| \geq c\|h\| \text{ pour tout } h \in X.$$

Si $h \in (\ker BA)^{\perp}$, alors :

$$c\|h\| \leq \|Ah\|\|B\| \Leftrightarrow \|Ah\| \geq \frac{c}{\|B\|}\|h\|.$$

Donc $A(\ker BA)^{\perp}$ est un fermé. Mais,

$$R(A) = A(\ker BA)^{\perp} + A(\ker BA)$$

et comme $A(\ker BA)$ est de dimension fini, on trouve $R(A)$ est fermé dans X. $\square$

Proposition 3.1.3. **[2]** *Soit $A \in \mathcal{B}(X)$, Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est semi-Fredholm à gauche.*
2. *$R(A)$ est fermé dans X et $\dim\ker A < +\infty$.*
3. *il existe un opérateur $B \in \mathcal{B}(X)$ et un opérateur F de rang fini sur X tel que $BA = 1 + F$.*

Démonstration. On démontre ce résultat sur trois étapes.

$1 \Rightarrow 2$ d'après la proposition précédente.

$2 \Rightarrow 3$ Posons $A_1 = A/(\ker A)^{\perp}$. Alors A_1 est inversible de $(\ker A)^{\perp}$ dans $R(A)$. En effet, Montrons que A_1 est bijective.

A_1 **est surjective :**

Soit $y \in R(A)$. cherchons $x \in (\ker A)^{\perp}$ tel que $A_1 x = y$.
On a d'une part, comme $y \in R(A)$, il existe alors $t \in X$ tel que $y = A(t)$.
D'autre part, comme $\ker A$ est fermé, on obtient d'après le théorème de la projection orthogonale :

$$X = \ker A \bigoplus (\ker A)^{\perp}.$$

Par conséquent :

$$t = t_1 + t_2$$

avec $t_1 \in \ker A$ et $t_2 \in (\ker A)^{\perp}$. On note ici que t_2 est l'image $p(t)$ de t par est la projection orthogonale p de X sur $(\ker A)^{\perp}$ et $t_1 = q(t)$ avec $q = 1 - p$ est la projection orthogonale sur $\ker A$ dans X.
Posons $x = t_2 \in (\ker A)^{\perp}$, $A_1 x = A_1 t_2 = At_2 = At = y$.
A_1 **est injective :** $(A_1 x = 0 \Rightarrow x = 0)$
Soit $x \in (\ker A)^{\perp}$ tel que $A_1 x = 0$. Alors

$$x \in \ker A \bigcap (\ker A)^{\perp} = \{0\}$$

Donc,

$$x = 0.$$

Soient p' la projection sur $R(A)$ dans X et B l'opérateur linéaire défini de X dans X par :

$$B = (A_1)^{-1} p'$$

Calculons BA,
Soit $x \in X$, alors il existe $x_1 \in \ker A$ et $x_2 \in (\ker A)^{\perp}$ tels que $x = x_1 + x_2$

$$BA(x) = (A_1)^{-1} p' Ax = (A_1)^{-1} Ax_2 = (A_1)^{-1} Ax_2 = (A_1)^{-1} A_1 x_2 = x_2 = x - x_1.$$

Si $F = -q$ où q est la projection dans X sur $\ker A$, Alors :

$$BA = I + F \text{ et } R(F) = R(q) = \ker A$$

Or d'après l'assertion 2, on a $\ker A$ de dimension fini, d'où F est de rang fini donc compact.

$3 \Rightarrow 1$ d'après la définition d'opérateur semi-Fredholm à droite , avec $K = F$.

$\square$

Définition 3.1.2. *Soit $A \in \mathcal{B}(X)$ A est dit un opérateur de Fredholm si les trois conditions suivante sont vérifiées :*

1. *$R(A)$ est fermé.*
2. *$\dim(\ker A)$ est finie.*
3. *$codim(R(A))$ est fini.*

Remarque 3.1.1. *la troisième condition est équivalent à :*

$$\dim(X/R(A)) = \dim(co\ker A) < +\infty.$$

Notation : On note l'ensemble des opérateurs de Fredholm bornés de X dans X par $\Phi(X)$. On peut définir les opérateurs de Fredholm d'une autre manière équivalente en utilisant les sous-espaces de codimension fini.

Définition 3.1.3. *Un opérateur A de Fredholm avec une ascente $p(A)$ et une descente $q(A)$ finies est appelés opérateurs de Browder. On écrit dans ce cas $A \in \mathcal{B}r(X)$.*

3.2 Opérateur presque plongement

Définition 3.2.1. *Soit $A \in \mathcal{B}(X)$. A est dit un presque plongement sur X s'il existe un sous-espace X_1 de X de codimension finie et une constante $K > 0$tel que :*

$$\|Ax\| \geq k\|x\| \text{ pour tout } x \in X_1. \tag{3.1}$$

Remarque 3.2.1. *Si A est un presque plongement et $B \in \mathcal{B}(X)$ est assez proche de A, Alors $(A + B)$ est presque plongement sur X. En effet :*

$$\begin{aligned} \|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| &\geq \|Ax\| - \|Bx\| \\ &\geq k\|x\| - \|B\|\|x\| \\ &\geq (k - \|B\|)\|x\|. \end{aligned}$$

Si $\|B\| < k$, on a le résultat.

Proposition 3.2.1. *Si $A \in \mathcal{B}(X)$ est un opérateur presque plongement alors le noyau de A est de dimension finie.*

Démonstration. Comme A est un presque plongement, il vérifie la condition (3.1) sur le sous-espace X_1 de X de codimension finie. Cherchons maintenant $\ker(A) \bigcap X_1$. Si $x \in \ker(A) \bigcap X_1$ alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & \in & \ker A \\ x & \in & X_1. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} Ax & = & 0 \\ x & \in & X_1 \end{array} \right.$$

Vu que A est supposé presque plongement, on a donc :

$$\|Ax\| \geq k\|x\| \text{ pour tout } x \in X_1$$

D'où,

$$\|x\| \leq 0 \Rightarrow x = 0.$$

Ainsi, A est injective sur X_1 ailleurs qu'en 0. Donc,

$$\ker A \bigcap X_1 = \{0\}.$$

Par conséquent,

$$\ker A \subset (X/X_1) \bigcup \{0\}.$$

D'où :

$$\dim \ker A \leq \text{codim} X_1 < +\infty.$$

□

Proposition 3.2.2. *Si $A \in \mathcal{B}(X)$ est un opérateur presque plongement alors l'image par A de tout sous-espace fermé de X est fermé dans X.*

Démonstration. Soit M un sous-espace fermé de X. Montrons que $A(M)$ est fermé dans X.
Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $A(M)$ convergente vers y dans X, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans M tell que :

$$Ax_n = y_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

D'après la relation (3.1) ,on a :

$$\|A(x_m - x_n)\| \geq c\|x_m - x_n\|$$

ou bien :

$$\|x_m - x_n\| \leq c^{-1}\|Ax_m - Ax_n\|$$

Comme $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, on trouve :

$$\|x_m - x_n\| \to 0$$

c'est-à-dire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans M qui est complet car un fermé dans un complet est complet, par conséquent elle converge vers x dans M. Par continuité de A, on obtient

$$y = Ax \in A(M)$$

ce qui montre que $A(M)$ est bien un sous espace fermé dans X. □

Remarque 3.2.2. *Si A est un presque plongement sur X et M est un sous-espace fermé quelconque de X, on écrit $M = (M \bigcap X_1) \bigoplus F$ avec F de dimension finie, alors $A(M) = A(M \bigcap X_1) + A(F)$ est fermé comme somme d'un sous-espace fermé et d'un sous-espace de dimension finie.*

Proposition 3.2.3. *Soit $A \in \mathcal{B}(X)$, si A est presque plongement dont l'image est de codimension fini alors A est Fredholm sur X.*

La preuve découle du lemme suivant.

Lemme 3.2.1. *Un opérateur $A \in \mathcal{B}(X)$ est un presque plongement si et seulement si son noyau est de dimension finie dans X et son image est fermé dans X.*

Remarque 3.2.3. *Si $A \in \mathcal{B}(X)$ est de Fredholm, Alors A est presque plongement grâce au lemme précédent.*

3.3 L'indice d'un opérateur de Fredholm

Définition 3.3.1. *On appelle indice de A est on note $ind(A)$ l'entier relatif : $ind(A) = \dim\ker(A) - codimR(A)$*

Proposition 3.3.1. *Soit $A \in \mathcal{B}(X)$. Si A est bijectif alors A est de Fredholm d'indice est nul.*

Démonstration. Comme A est bijectif, alors $\ker A = \{0\}$, par conséquent $\dim \ker A < +\infty$. De plus $R(A) = X$ est un fermé et $\text{codim}R(A) = 0$. donc l'opérateur A est de Fredholm .

$$\begin{aligned} \text{ind}(A) &= \dim \ker A - \text{codim}R(A) \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Définition 3.3.2. *Un opérateur de Fredholm d'indice nul est appelé opérateur de Weyl. L'ensemble des opérateurs de Weyl sur X est noté $\mathcal{W}(X)$.*

Exemple 3.3.1. *Soient $H = H_0 + H_1 + ... + H_n$ où les $(H_i)_{0<i<n}$ sont des espaces de Hilbert, $\forall i \in \{0, 1, 2, ...n\}$, et $\dim H_1 = \alpha$, $\forall i \in \{0, 1, 2, ...n\}$. On définie l'opérateur A par :*

$$\begin{aligned} A : H &\rightarrow H \\ x &\rightarrow Ax = (0, x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}). \end{aligned}$$

avec $x = (x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$. Calculons A^* :

$$\begin{aligned} A^* : H &\rightarrow H \\ x &\rightarrow A^*x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ax = y &\Rightarrow A(x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = (y_0, y_1, y_2, ..., y_n) \\ &\Rightarrow (0, x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = (y_0, y_1, y_2, ..., y - n) \\ &\Rightarrow 0 = y_0, x_0 = y_1, ..., x_{n-1} = y_n, x_n = 0. \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} A^* : H &\rightarrow H \\ x &\rightarrow A^*(x) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0). \end{aligned}$$

D'autre part $AA^*A^*A = I$ donc A est semi Fredholm d'indice nul.

Proposition 3.3.2. *Si $\dim X < +\infty$, alors A est de Fredholm. Dans ce cas*

$$ind(A) = \dim X - \dim X = 0.$$

Démonstration. Comme $\dim X < +\infty$, alors $\dim\ker A < +\infty$, $\mathrm{codim}R(A) < +\infty$ et $R(A)$ est fermé donc A est de Fredholm.

$$\begin{aligned} ind(A) &= \dim\ker A - \mathrm{codim}R(A) \\ &= \dim\ker A - \dim X + \dim R(A) \\ &= \dim X - \dim X = 0. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.3.1. [**2**] *Soit $A \in \mathcal{B}(X)$. A est de Fredholm si et seulement si A^* est Fredholm. Dans ce cas*

$$ind(A) = -ind(A^*).$$

La preuve du théorème est basée sur les deux lemmes suivants.

Lemme 3.3.1. [**2**] *Soit M un sous espace fermé de X,alors on a :*

$$M^* \simeq X/M^\perp$$

$$(X/M) \simeq M^\perp$$

Lemme 3.3.2. *Soit A un opérateur borné défini sur X, Alors $R(A)$ est fermé dans X si et seulement si : $R(A^*)$ est fermé dans X^*.*

Démonstration. Si A est de Fredholm, montrons que A^* l'est aussi Comme $R(A)$ est fermé. en vertu de lemme précédent que $R(A^*)$ est fermé. Calculons $\dim\ker A^*$ et $\mathrm{codim}R(A)$. Pour $M = R(A)$, il découle du premier lemme que :

$$\dim\ker A^* = \dim(R(A))^\perp = \dim(X/R(A))^* = \mathrm{codim}R(A) < +\infty$$

$$\begin{aligned} \mathrm{codim}R(A^*) &= \dim(X/R(A^*)) \\ &= \dim(X/(\ker A)^\perp) \\ &= \dim(\ker A)^* \\ &= \dim\ker A < +\infty. \end{aligned}$$

par conséquent A^* est un opérateur de Fredholm.

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}(A^*) &= \dim\ker A^* - \operatorname{codim} R(A^*) \\ &= \operatorname{codim} R(A) - \dim\ker A \\ &= -\operatorname{ind}(A).\end{aligned}$$

L'implication est vraie en vertu du fait que $A^{**} = A$. □

3.4 Produit d'opérateurs de Fredholm

Une propriété intéressante de l'indice est que l'indice d'une composition d'opérateurs de Fredholm est simplement la somme des indices des composants.

Proposition 3.4.1. *Soient $A \in \mathcal{B}(X)$, $M \subset X$ tel que $codimM = n < +\infty$ et $A_0 = A_M$. Alors, A est de Fredholm si et seulement si A_0 est de Fredholm De plus, $ind(A) = ind(A_0) + n$*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur la codimension de M.
pour $n = 1$, on pose $X = M \bigoplus X_1$ où X_1 est le sous-espace engendré par un vecteur $x_1 \neq 0$ de $X \setminus M$. Pour tout $x \in X$, il existe $x_0 \in M$ tel que $x = x_0 + \lambda x_1$ et $Ax = Ax_0 + \lambda Ax_1$. Envisageons deux cas :

1. Si $y_1 = Ax_1 \notin R(A_0)$ Alors : $R(A) = R(A_0) \bigoplus < y_1 >$. D'autre part, on a

   $$\ker A_0 = \ker A$$

   En effet, $\ker A_0 = \{x' \in M,\ A_0x' = 0\}$ et $\ker A = \{x' \in X,\ Ax' = 0\}$ On a $\ker A_0 \subset \ker A$. Il reste à montrer que que $\ker A \subset \ker A_0$. Soit $x \in \ker A$, il existe donc $x' \in M$ tel que $x = x' + \lambda x_1$. D'où, $Ax = A(x' + \lambda x_1) = 0$, donc $Ax' = A_0x' = -\lambda Ax_1$ Ce qui implique que $y_1 = 0$ et $A_0x' = 0$. Cela veut dire que $x' \in \ker A_0$. Ainsi,

   $$\dim\ker A = \dim\ker A_0$$

   et

   $$\operatorname{codim} R(A) = \operatorname{codim} R(A_0) + 1$$

Par conséquant,

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{ind}(A) & = & \dim\ker A_0 - \mathrm{codim} R(A_0) + 1 \\ & = & \mathrm{ind}(A_0 + 1).\end{array}$$

2. Si $y_1 = Ax_1 \in R(A_0)$ alors $R(A) = R(A_0)$. il existe alors un $u \in M$ tell que : $y_1 = A_0(u)$. De plus,

$$\ker A = \ker A_0 \bigoplus < (x_1 - u) >$$

En effet, on a pour tout $x \in X$, $x = x' + \lambda x_1$ avec $x' \in M$ et $x_1 \in X_1$.

$$\begin{array}{rcl}Ax & = & Ax' + \lambda y_1 \\ & = & A_0 x' + \lambda A_0 u \\ & = & A_0(x' + \lambda u).\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}Ax = 0 & \Leftrightarrow & A_0(x' + \lambda u) = 0 \\ & \Leftrightarrow & x' + \lambda u \in \ker A_0 \\ & \Leftrightarrow & x' \in \ker A_0 - \lambda u.\end{array}$$

et

$$\dim\ker A = \dim\ker A_0 + 1.$$

Donc,

$$\left\{\begin{array}{rcl}\mathrm{ind}(A) & = & \dim\ker A_0 + 1 - \mathrm{codim} R(A_0) \\ & = & \mathrm{ind}(A_0) + 1.\end{array}\right.$$

Il reste à montrer que $R(A_0)$ est fermé. Comme $R(A)$ est fermé alors il existe $c > 0$ tel que $\|Ax\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in X$.
A_0 vérifie aussi la même estimation, par conséquent $R(A_0)$ est fermé dans X.
Le cas $n = 2$ s'obtient de la même façon en décomposant X de la manière suivante : $X = (M \bigoplus X_1) \bigoplus X_2 = M' + X_2$. où $M' = M \bigoplus X_1$ et $A_0 = A/M'$.

$$\mathrm{ind}(A) = \mathrm{ind}(A_0) + 2$$

Supposons qu'elle est vraie à l'ordre n et montrons qu'elle reste vraie à l'ordre $n + 1$, c'est-à-dire : $X = M \bigoplus X'$ avec $\dim X' = n + 1$. Quitte à enlever un vecteur a de la basse de X', On peut écrire $X' = Z \bigoplus < a >$ avec $\dim Z = n$,

$$X = M \bigoplus Z \bigoplus < a >= M'' \bigoplus Z.$$

avec $M'' = M \bigoplus < a >$. D'après les deux cas précédents, On obtient le résultat :

$$\operatorname{ind}(A) = \operatorname{ind}(A_0) + n + 1.$$

$\square$

Définition 3.4.1. *Soit $A \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur de Fredholm. Alors $\ker A$ et $R(A)$ admettant des supplémentaires. On peut écrire $X = \ker A \bigoplus X_0$ et $X = R(A) \bigoplus X_1$ avec X_0 et X_1 sont deux espaces de Banach. Comme $X_0 \simeq R(A)$, alors on définit l'application bijective suivante :*

$$\begin{array}{rcl} \tilde{A} : X \times X_1 & \to & X \\ (x_0, y_0) & \to & Ax_0 + y_0. \end{array}$$

On appelle $\tilde{A}$ la bijection associée à A

Le théorème suivant nous donne une caractérisation importante de l'indice du produit des opérateurs de Fredholm bornés. Avant d'énoncer ce théorème, il est utile de donner les deux lemmes suivants.

Lemme 3.4.1. *Soit M est sous-espace vectoriel fermé de codimension finie dans un espace de Banach X.*

1. *Pour tout sous-espace vectoriel V de X, il existe un sous-espace vectoriel N de X de dimension finie inclus dans v tel que,*

$$\bar{V} = (\bar{V} \bigcap M) \bigoplus N.$$

2. *Si V est dense Dans X alors $V \bigcap M$ est dense dans M.*

Lemme 3.4.2. *Soient X un espace de Banach et A un opérateur fermé à image fermé dans X. Si M est un sous-espace vectoriel de X (non nécessairement fermé dans X) tel que $M + \ker A$ est fermé dans X alors $A(M) = R(A_M)$ est fermé dans X. En particulier, Si M est fermé dans X et $\dim \ker A < +\infty$, alors $A(M)$ est fermé.*

Théorème 3.4.1. *Soient A et B deux opérateurs de Fredholm bornés sur X. Alors, $BA : X \to X$ est aussi un opérateur de Fredholm borné sur X d'indice*

$$ind(BA) = ind(A) + ind(B)$$

Démonstration. AB est évidemment borné sur X . $\ker(AB) = B^{-1}(\ker A)$ est de dimension finie puisque $\ker A$ est de dimension finie Ainsi en vertu du lemme 3.4.2, $R(AB)$ est fermé dans X. Considérons L'application :

$$\begin{array}{rcl} \eta : \ker(AB)/\ker B & \to & R(B) \bigcap \ker A \\ \tilde{x} & \to & \eta(\tilde{x}) = Bx. \end{array}$$

η est bien définit car si $\tilde{x} = \tilde{y}$ alors $x, y \in \ker(AB)$ et $(x - y) \in \ker B$ donc $B(x - y) = B(x) - B(y) = 0$ par suite $\eta(\tilde{x}) = \eta(\tilde{y})$.
D'autre part, Si $\tilde{x} \in \ker(AB)/\ker B$ alors $x \in \ker(AB)$ et donc $Bx \in \ker A$.
η est linéaire surjective par la construction.
η est aussi injective : $\eta(\tilde{x}) = Bx = 0 \Rightarrow x \in \ker B \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{0}$
η est alors un isomorphisme d'espace vectoriel et

$$\dim \ker(AB)/\ker B = \dim(R(B) \bigcap \ker A)$$

ou bien :

$$\dim \ker(AB) = \dim \ker B + \dim(R(B) \bigcap \ker A) < +\infty.$$

Soit N un supplémentaire de $(R(B) \bigcap \ker A)$ dans $\ker A$, c'est à dire

$$\ker A = (R(B) \bigcap \ker A) \bigoplus N$$

Alors,

$$\dim \ker A = \dim(R(B) \bigcap \ker A) + n \text{ avec } n = \dim N.$$

On a aussi $R(B) \bigcap N = \{0\}$, car si $y = Bx \in N \subset \ker A$. Alors, $Ay = ABx = 0$ donc $y \in (R(B) \bigcap \ker A) \bigcap N = \{0\}$.
Comme $R(B)$ est fermé dans X et $\dim N < +\infty$, alors $R(B) \bigoplus N$ est aussi fermé dans X. On peut aussi trouver d'après le lemme 3.4.2, un sous-espace vectoriel M

de X de dimension fini qui complète $R(B) \bigoplus N$ dans X, c'est-à-dire :

$$X = R(B) \bigoplus N \bigoplus M.$$

Par conséquent, $\mathrm{codim} R(B) = \dim(N \bigoplus M) = n + m < \infty$, ou $m = \dim M$. Or,

$$\ker A = (R(B) \bigcap \ker A) \bigoplus N \subset R(B) \bigoplus N.$$

Ceci implique que A est injective sur M et puisque $AN = \{0\}$ et $R(A) = A(R(B) \bigoplus A(M))$ (En général,Si $X = U \bigoplus V$ où $\ker A \subset U$ et V est un sous espace vectoriel De X, alors A est injective sur V et $R(A) = AU \bigoplus AV$).
D'autre part, $R(AB) = \{ABx, x \in X\} = A(R(B)) = R(\tilde{A})$ où $\tilde{A} = A_{R(B)}$ $\mathrm{codim}(R(AB)) = \dim X/R(AB) = \dim X/R(\tilde{A})$. On a $R(A) = R(\tilde{A}) \bigoplus AM$ et alors :

$$\mathrm{codim}(R(AB)) = \mathrm{codim}(R(AB)) = \mathrm{codim}(R(A)) + \dim AM.$$

Comme A est injective sur M, alors $\dim AM = \dim M = m$.
Donc,

$$\mathrm{codim}(R(AB)) = \mathrm{codim}(R(A)) + m < \infty.$$

D'où, AB est de Fredholm sur X et on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}(AB) &= \dim\ker(AB) - \mathrm{codim}(R(AB)) \\
&= \dim(\ker B) + \dim(R(B) \bigcap \ker A)) - \mathrm{codim}(R(A)) - m \\
&= \dim(\ker B) + \dim(\ker A)) - n - \mathrm{codim}(R(A)) - m \\
&= \dim(\ker B) - n - m + \mathrm{ind}(A) \\
&= \dim(\ker B) - \mathrm{codim}(R(B)) + \mathrm{ind}(A) \\
&= \mathrm{ind}(B) + \mathrm{ind}(A).
\end{aligned}$$

□

3.5 Alternative de Fredholm

Les perturbations par des opérateurs compacts n'ont pas non plus d'influence sur les opérateurs de Fredholm, dans le sens que si l'on somme un opérateur de

Fredholm et un opérateur compact le résultat reste Fredholm.

Théorème 3.5.1. *(Alternative de Fredholm) Soit $A \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur linéaire borné de la forme $A = I - K$, avec K compact. Alors $I - A$ est un opérateur de Fredholm d'indice nul.*

Démonstration. D'après la proposition 2.5.1, $\ker(A)$ est de dimension finie et $R(A)$ est fermée. On doit montrer de plus que $\dim\ker(A) = \mathrm{codim}R(A)$, pour cela on va procéder par récurrence sur la dimension de $\ker(A)$.
- Si $\dim\ker(A) = 0$, on sait que A est surjectif d'après le corollaire 2.5.2 donc l'indice est nul dans ce cas.
- On suppose donc que $\mathrm{ind}(A) = 0$ pour tout opérateur $A = I-K$ où K est compact et $\dim\ker(A) < n$ avec $n > 0$. Soit $A = I - K$ avec K compact et $\dim\ker(A) = n > 0$, d'après la proposition 2.6.1, on a $R(A) \neq E$, soit donc $y_0 \in R(A)$, on note que $\mathbb{C}_{Y_0} \bigoplus R(A)$ est une somme directe.
L'idée de la preuve est de construire A' de la forme $I - K'$ tel que

$$\mathrm{ind}(A') = \mathrm{ind}(A) \text{ et } \dim\ker(A') < \dim\ker(A),$$

d'après l'hypothèse de récurrence, on aura $0 = Ind(A') = Ind(A)$, ce qui donnera le résultat.
On écrit $X = \ker(A) \bigoplus X_1$ en utilisant le lemme 2.5.1 , soit$\{x_1, \cdots, x_n\}$ une base de $\ker(A)$. On définit un opérateur $A' \in \mathcal{B}(X)$ en posant pour tout $x \in X$, représenté sous la forme $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + y$, avec $y \in X_1$,

$$A'(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + y) = \lambda_1 y_0 + T(y).$$

Si $A'(x) = 0$, il en résulte que $A(y) = 0$ et $\lambda_1 y_0 = 0$, donc $y \in \ker(A) \bigcap X_1$ entraine $y = 0$, d'autre part $\lambda_1 y_0 = 0$ entraine $\lambda_1 = 0$ puisque le vecteur y_0 est non nul. Il en résulte que $\ker(A') = Vect(x_2, ..., x_n)$ est de dimension $n - 1$.
Par ailleurs, l'opérateur $R = A' - A$ est de rang 1 :
En effet, $(A' - A)(x) = \lambda_1 y_0$ pour tout x, donc l'image de R est contenue dans $\mathbb{C}_{y_0}$, on peut écrire par conséquent $A' = I - K'$ avec $K' = K - R$ compact, et on a alors $\mathrm{ind}(A') = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence, ce qui montre déjà que $\mathrm{codim}R(A')$ est finie. Il est clair que $R(A') = \mathbb{C}_{y_0} \bigoplus R(A)$ a exactement une dimension de plus

que $R(A)$ donc

$$\text{codim}R(A) = \text{codim}R(A') + 1 \text{ et } \text{ind}(A) = Ind(A') = 0.$$

□

Théorème 3.5.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur semi-Fredholm à gauche (respectivement à droite). Si K est un opérateur compact de H dans H, alors $A+K$ est un opérateur semi- Fredholm à gauche (respectivement à droite), l'indice de $A+K$ est l'indice de A.*

3.6 Théorème d'Atkinson

Théorème 3.6.1. [6] *Soient X un espace de Banach et $A \in \mathcal{B}(X)$. Alors*

$$A \text{ est Fredholm } \Leftrightarrow \pi(A) \text{ est inversible dans } \mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X).$$

Théorème 3.6.2. [6] *Soit $A \in \mathcal{B}(X)$,alors :*

$$\rho(\pi(A)) = \{\lambda : \ \lambda I - A \text{ est de Fredholm sur } X\}.$$

3.7 Perturbation des opérateurs de Fredholm

Le théorème suivant nous apprend que non seulement l'ensemble des opérateurs de Fredholm entre sur un espace de Banach est ouvert dans l'ensemble des opérateurs bornés. mais aussi que l'indice se trouve être une application continue.

Autrement dit , On cherche une condition sur la norme d'un opérateur linéaire borné B pour que l'opérateur $A+B$ soit de Fredholm, pour tout $A \in \mathcal{B}(X) \bigcap \Phi(X)$

Théorème 3.7.1. *Soient $A \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur de Fredholm et $\tilde{A}$ la bijection associée. Si $B \in \mathcal{B}(H)$ tel que $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ alors , on a :*

1. $\dim \ker(A+B) \leq \dim \ker A$.
2. $codimR(A+B) \leq codimR(A)$.
3. $A+B$ *est de Fredholm.*
4. $ind(A+B) = ind(A)$.

Démonstration. A est Fredholm et $\tilde{A} : X_0 \times (X_0)' \to X'$ est la bijection associée : $\tilde{A}(x_0, y_0) = Ax_0 + y_0$. On pose $C = A + B$ et on considère :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{C} : X_0 \times (X_0)' & \to & X' \\ (x_0, y_0) & \to & Cx_0 + y_0. \end{array}$$

$\forall (x_0, y_0 \in X_0) \times (X_0)'$:

$$\begin{array}{rcl} \|\tilde{A}(x_0, y_0) - \tilde{C}(x_0, y_0)\| & = & \|Ax_0 + y_0 A + Cx_0 y_0\| \\ & = & \|(A - C)x_0\| \leq \|A - C\|\|x_0\|. \end{array}$$

d'ou,

$$\|\tilde{A} - \tilde{C}\| \leq \|A - C\| = \|A - A + B\| = \|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}.$$

$\tilde{C}$ est un opérateur borné inversible puisque :

$$\tilde{C} = \tilde{C} - \tilde{A} + \tilde{A} = \tilde{A}[I + A^{-1}(\tilde{C} - \tilde{A})]$$

et

$$\|\tilde{A}^{-1}(\tilde{C} - A)\| < 1.$$

Donc,

$$\begin{array}{rcl} \tilde{C}^{-1} & = & [I + \tilde{A}^{-1}(\tilde{C} - \tilde{A})]^{-1} \\ 1 & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{A}^{-1}(\tilde{C} - \tilde{A}))^n \tilde{A}^{-1} \in \mathcal{B}(X', X_0 \times (X_0)'). \end{array}$$

Soit l'opérateur :

$$\begin{array}{rcl} C_0 : X_0 \times \{0\} & \to & X' \\ (x_0, 0) & \to & Cx_0. \end{array}$$

C_0 est la restriction commune de C et $\tilde{C}$ sur $X_0 \times \{0\}$. Comme $X_0 \simeq R(A)$ et A est de Fredholm, alors $\mathrm{codim} R(A) < +\infty$ et $\mathrm{codim} X_0 < +\infty$ donc $\mathrm{codim}[X_0 \times \{0\}] < +\infty$. Par conséquent, C et $\tilde{C}$ sont aussi de Fredholm, et on a :

$$\mathrm{ind}(C) = \mathrm{ind}(C_0) + \mathrm{codim} X_0.$$

Mais, $\text{ind}(C_0) = \text{ind}(\tilde{C}) - \dim(X_0)'$ car

$$\ker C_0 = \{(x,0) \in X_0 \times \{0\}, Cx = 0\} \subset \ker \tilde{C}.$$

D'où,

$$\text{ind}(C) = \text{ind}(\tilde{C}) - \dim(X_0)' + \text{codim} X_0.$$

Or $\tilde{C}$ est bijective donc $\text{ind}(\tilde{C}) = 0$, ce qui montre que $\text{ind}(C_0) = -\dim(X_0)'$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\text{ind}(C) &= \text{ind}(C_0) + \text{codim} X_0 \\
&= \dim \ker A - \text{codim} R(A) \\
&= \text{ind}(A).
\end{aligned}$$

Car $\text{codim} X_0 = \dim \ker A$ et $\dim(X_0)' = \text{codim} R(A)$. Ce qui montre que A est un opérateur de Fredholm d'indice égal à l'indice de l'opérateur A.
Comme $X = \ker A \bigoplus X_0$ et $\tilde{C}$ est inversible, alors : $\dim \ker C \leq \dim X/X_0 = \dim \ker A$.

$$\begin{aligned}
\text{codim} R(C) &= -\text{ind} C + \dim \ker C \\
&\leq -\text{ind} A \\
&\leq \text{codim} R(A).
\end{aligned}$$

□

3.8 Spectre essentiel

Si A est un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert, son spectre essentiel est l'ensemble des points limites de son spectre, c'est à dire tous les points du spectre excepté les valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. Si A est un opérateur fermé un espace de Banach X on trouve plusieurs définitions du spectre essentiel mais elles coincident toutes pour un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert. On cite cinq spectres mentionnés dans la littérature :

Soit A un opérateur borné sur X, on définit les spectres essentiels suivants :

$$\begin{array}{ll}
\text{Gustafson} & \sigma_{e1}() = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \notin \Phi_+(X)\}, \\
\text{Weidman} & \sigma_{e2}() = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \notin \Phi_-(X)\}, \\
\text{Kato} & \sigma_{e3}() = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \notin \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)\}, \\
\text{Wolf} & \sigma_{e4}() = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \notin \Phi(X)\}, \\
\text{Weyl} & \sigma_{e5}() = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \notin \mathcal{W}(X)\},
\end{array}$$

Le résultat suivant montre l'invariance du spectre essentiel aux perturbations par un opéra- teur compact.

Théorème 3.8.1. [**2**] *Soit* $A \in \mathcal{B}(X)$ *et* $K \in \mathcal{K}(X)$. *Alors :*

$$\sigma_{e4}(A + K) = \sigma_{e4}(A) \ \textit{et} \ \sigma_{e5}(A + K) = \sigma_{e5}(A).$$

Chapitre 4

Les opérateurs Riesz

Dans ce chapitre, nous étudions une classe d'opérateurs, appelés opérateurs de Riesz, qui ont une théorie spectrale semblable à celle d'un opérateur compact. De nombreuses caractérisations des opérateurs de Riesz sont données. Il est montré qu'en général, ni la somme ni le produit de deux opérateurs Riesz ne sont des opérateurs Riesz. Il est également montré que la classe des opérateurs de Riesz n'est pas fermée par rapport à la norme des opérateurs. Une condition suffisante est donnée pour que la limite d'une suite d'opérateurs Riesz soit un opérateur Riesz. La possibilité de décomposer un opérateur Riesz en un opérateur compact et un opérateur quasi-potentiel est aussi discuté.
Les références utulisés dans ce chapitre sont

4.1 Définitions

Définition 4.1.1. *Un opérateur borné $A \in \mathcal{B}(X)$ est dit de Riesz si pour tout scalaire $\lambda \neq 0$, l'opérateur $\lambda I - T$ est de Fredholm.*

L'ensemble des opérateurs de Riesz sur X est noté $\mathcal{R}(X)$. Cette définition est équivalente à la définition suivante :

Définition 4.1.2. *Un opérateur linéaire est appelé opérateur de Riesz si son spectre essentiel est réduit à $\{0\}$.*

Remarque 4.1.1. *Soit $A \in \mathcal{B}(X)$, alors : A est de Riesz si et seulement si $I + \lambda A$ est de Fredholm pour tout λ non nul.*

Proposition 4.1.1. *Soit $A \in \mathcal{B}(X)$. Alors :*

1. $A \in \mathcal{R}(X) \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \|[A]^n\|^{\frac{1}{n}} = 0.$
2. $A \in \mathcal{R}(X)$ *et* $K \in \mathcal{K}(X) \Rightarrow A + K \in \mathcal{R}(X).$

Démonstration. 1. $A \in \mathcal{R}(X)$ si et seulement si $\lambda I - A$ est de Fredholm pour tout $\lambda \neq 0$. D'après le théorème 3.6.2, ceci est vrai si et seulement si $\lambda \in \rho(\pi(A))$ pour tout $\lambda \neq 0$. Comme $r(\pi(A)) = \lim_{n \to +\infty} \|[A]^n\|^{\frac{1}{n}}$, on obtient l'assertion 1.

2. Si $A \in \mathcal{R}(X)$ et $K \in \mathcal{K}(X)$, on a

$$[A + K] = [A]$$

ce qui implique l'assertion 2.

□

On rappelle ici que la quantité $r(\pi(A))$ est le résidu spectral de $[A]$.

Corollaire 4.1.1. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, alors : $A \in \mathcal{R}(X) \Leftrightarrow r(\pi(A)) = 0$.*

Remarque 4.1.2. *L'opérateur identité I sur X n'est pas de Riesz sauf si* $\dim X < \infty$.

Définition 4.1.3. *Un opérateur $A \in \mathcal{B}(X)$ est dit quasi-nilpotent si $\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \to 0$ quand $n \to \infty$. Il est dit nilpotent si $A^n = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.*

Les opérateurs nilpotents sont quasi-nilpotents. Comme conséquence de la proposition 4.1.1 Les opérateurs de Riesz sont les opérateurs quasi-nilpotents de $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$. En particulier, l'ensemble des opérateurs de Riesz regroupe les opérateurs compacts et les opérateurs qui s'expriment comme somme d'un opérateur compact et d'un opérateur quasi-nilpotent.

Dans le théorème suivant, on résume les differentes caractérisation d' un opérateur de Riesz.

Théorème 4.1.1. **[2]** *Soit A un opérateur linéaire borné sur X et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Les assertions suivantes sont tous equivalentes.*

1. *A est un opérateur de Riesz ;*
2. *$\lambda I - A \in \Phi(X)$;*
3. *$\lambda I - A \in \Phi^+(X)$;*
4. *$\lambda I - A \in \Phi^-(X)$;*
5. *$\lambda I - A \in \mathcal{W}(X)$;*
6. *$\lambda I - A \in \mathcal{B}r(X)$.*

4.2 Somme, produit et limite

Contrairement à $\mathcal{K}(X)$, l'ensemble $\mathcal{R}(X)$ des opérateurs de Riesz n'est pas un idéal fermé de $\mathcal{B}(X)$. La somme, le produit et la limite des opérateurs de Riesz ne sont pas de Riesz que si on suppose la commutativité dans $\mathcal{B}(X)$. Précisément :

Proposition 4.2.1. *1. Soit $A, B \in \mathcal{R}(X)$ tels que $AB = BA$. Alors $A+B$, AB et λA, $\lambda \in \mathbb{C}$, sont tous des opérateurs de Riesz.*

2. Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'opérateurs de Riesz sur X limite $\lim\limits_{k\to\infty} \|A_k - A_\infty\| = 0$ (la norme de $\mathcal{B}(X)$) et $A_k A_\infty = A_\infty A_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $A_\infty \in \mathcal{R}(X)$.

Avant de donner la preuve de cette proposition, il serait très utile de noter qe le théorème spectral affirme que

$$r(\pi(A^n)) = r(\pi(A)^n) = (r(\pi(A)))^n \text{ pour tout entier positif } n.$$

Il résulte de la formule du résidu spectral que si $A, B \in \mathcal{B}(X)$ avec $AB = BA$, alors :

$$\begin{aligned} &r(\pi(A) + \pi(B)) \leq r(\pi(A)) + r(\pi(B)), \\ &r(\pi(A)\pi(B)) \leq r(\pi(A))r(\pi(B)). \end{aligned}$$

Démonstration.

1. Par hypothèse,
$$r(\pi(A)) = r(\pi(B)) = 0$$
et
$$\pi(A)\pi(B) = \pi(AB) = \pi(BA) = \pi(B)\pi(A).$$
D'où,
$$r(\pi(A+B)) = r(\pi(A) + \pi(B)) = r(\pi(AB)) = 0.$$
Ce qui montre que $A + B, AB \in \mathcal{R}(X)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Choisissons $k \in \mathbb{N}$ de sorte que $0 < \|A_k - A_\infty\| < \frac{\varepsilon}{3}$, et $l \in \mathbb{N}$ tel que $\|A_k^n\|_C^{1/n} < \frac{\varepsilon}{3}$, $n > l$. Alors comme A_k commute avec $(A_k - A_\infty)$, on obtient :
$$A_\infty^n = [A_k + (A_\infty - A_k)]^n = \sum_{j=0}^{l} C_n^j A_k^j (A_\infty - A_k)^{n-j} + \sum_{j=l+1}^{n} C_n^j A_k^j (A_\infty - A_k)^{n-j}$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
\|A_\infty^n\|_C &\leq \sum_{j=0}^{l} C_n^j \|A_k\|^j \|A_\infty - A_k\|^{n-j} + \sum_{j=l+1}^{n} C_n^j \left\|A_k^j\right\|_C \|A_\infty - A_k\|^{n-j} \\
&= \|A_\infty - A_k\|^n \sum_{j=0}^{l} C_n^j \left(\frac{\|A_k\|}{\|A_\infty - A_k\|}\right)^j + \sum_{j=l+1}^{n} C_n^j \left\|A_k^j\right\|_C \|A_\infty - A_k\|^{n-j}.
\end{aligned}$$

$\sum\limits_{j=0}^{l} C_n^j \left(\frac{\|A_k\|}{\|A_\infty - A_k\|}\right)^j$ est un polynôme en n, il existe donc une constante positive M telle que $\sum\limits_{j=0}^{l} C_n^j \left(\frac{\|A_k\|}{\|A_\infty - A_k\|}\right)^j < 2^n M$, lorsque n est suffisement grand. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|A_\infty^n\|_C &< 2^n M \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^n + \sum_{j=l+1}^{n} C_n^j \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^n \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{n-j} \\
&\leq (M+1) \left(\frac{2\varepsilon}{3}\right)^n < \varepsilon^n
\end{aligned}$$

lorsque n est suffisement grand. Alors $A_\infty \in \mathcal{R}(X)$.

□

Remarque 4.2.1. *Si $\mathcal{I}$ est un idéal dans $\mathcal{B}(X)$ (par exemple $\mathcal{I} = \mathcal{K}(X)$), on dit que A $\mathcal{I}$-commute avec B si $AB - BA \in \mathcal{I}$, c'est à dire que, si les classes de résidus de A et de B commutent dans $\mathcal{B}(X)/\mathcal{I}$. Alors, la multiplication par un scalaire, la somme, le produit et la limite des opérateurs de Riesz $\mathcal{I}$-commutent sont aussi des opérateurs de Riesz. De plus, la somme d'un opérateur de Riesz avec un opérateur arbitraire de $\mathcal{I}$ est un opérateur de Riesz.*

Si $\dim X = \infty$, $\mathcal{R}(X)$ n'est pas un idéal. En effet :

Exemple 4.2.1. *Supposons que* $\dim X = \infty$, *soit $A, B \in \mathcal{B}(X \times X)$ définis par :*

$$A(x,y) = (0,x) \text{ et } B(x,y) = (y,0) \text{ for all } (x,y) \in X \times X.$$

On a $A^2 = B^2 = 0$, donc $A, B \in \mathcal{R}(X \times X)$. $AB(x,y) = (0,y)$ et $BA(x,y) = (x,0)$, alors AB et BA sont des projections de $X \times X$ dans X et ne sont pas dans $\mathcal{R}(X \times X)$.

On remarque aussi que $A + B = I$. D'où $A + B \notin \mathcal{R}(X \times X)$ car $r(\pi(A+B)) = 1$.

Remarque 4.2.2. *$\mathcal{R}(X)$ n'est pas fermé en général, voir l'exemple 3.15 pages 75-77 de* **[6]** *où l'auteur a donné une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs de Riesz, définis sur l'espace de Hilbert l^2, qui converge vers un opérateur $A \notin \mathcal{R}(l^2)$.*

4.3 Restriction et adjoint

Théorème 4.3.1. *Soit $A \in \mathcal{R}(X)$ et M un sous espace fermé de X invariant par rapport à A (c'est à dire $AM \subset M$). Alors, $A_{|M}$ est un opérateur de Riesz sur M et on a $\sigma(A_{|M}) \subset \sigma(A)$.*

Démonstration. Voir [**6**] pages 80-81. □

Proposition 4.3.1. *Soit $A \in \mathcal{B}(X)$. Alors A est un opérateur de Riesz si et seulement si A^* l'est aussi.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{R}(X)$, alors $r(\pi(A^*)) \leq r(\pi(A))$, donc $r(\Pi(A^*)) = 0$ et $A^* \in \mathcal{R}(X)$.

Inversement, on suppose que A^* est de Riesz. Comme la restriction de A^{**} sur le sous espace fermé X du bi-dual X^{**} est A, il résulte d'après le théorème 4.3.1 que A est lui même un opérateur de Riesz. □

4.4 L'alternative de Fredholm généralisée

Théorème 4.4.1. [**3**][**6**] *Soit A un opérateur de Riesz sur H. On a pour tout $\lambda \neq 0$:*

1. *$R(\lambda I - A)$ est fermée.*
2. *$p(\lambda I - A) = q(\lambda - A) < \infty$.*
3. *$\alpha(\lambda I - A) = \beta(\lambda I - A) < \infty$.*

Il résulte de ce théorème que :

Corollaire 4.4.1. *Soit $A \in \mathcal{R}(X)$, alors pour tout $\lambda \neq 0$ on a $(\lambda I - A)$ est un opérateur de Fredholm d'indice nul.*

4.5 Spectre et calcul fonctionnel d'un opérateur de Riesz

On donne dans cette section quelques informations sur la distribution du spectre d'un opérateur de Riesz d'une manière similaire à celle des opérateurs compacts.

Le spectre d'un opérateur de Riesz est au plus dénombrable et n'a pas de point de cluster non nul. De plus, chaque élément non nul du spectre est une valeur propre.

De plus, les sous-espaces spectraux associés aux éléments non nuls du spectre sont de dimension finie.

Théorème 4.5.1. *Soit* $A \in \mathcal{R}(X)$. *Alors :*

1. *Les valeurs propres de* A *on au plus un point de cluster* 0.
2. $\sigma(A)$ *est dénombrable et n'a aucun point de cluster sauf le* 0 *(éventuellement). Tout élément non nul de* $\sigma(A)$ *est une valeur propre de* A *et un pôle de la résolvente de* A.

   Soit λ *un point non nul dans* $\sigma(A)$, *et* $\nu(A)$ *l'ordre du pôle en* λ.
3. *Pour tout entier positif* n, $N((\lambda I - A)^n)$ *est de dimension finie. De plus*

$$N((\lambda I - A)^m) = N((\lambda I - A)^{m+1}) \ , \ \textit{pour tout } m \geq \nu(A)$$

   et $asc(A) = \nu(A)$.
4. *Pour tout entier positif* n, *l'image* $R((\lambda I - A)^n)$ *est fermé dans* X. *De plus,*

$$R((\lambda I - A)^m) = R((\lambda I - A)^{m+1}) \ , \ \textit{pour tout } m \geq \nu(A)$$

   et $des(A) = \nu(A)$.
5. *La projection spectrale* $E(\lambda)$ *est à image* $R(E(\lambda)) = N((\lambda - A)^{\nu(A)})$ *de dimension non nul. L'espace de* $E(\lambda)$ *est* $N(E(\lambda)) = R((\lambda I - A)^{\nu(A)})$ *et* $1 \leq \nu(A) \leq \dim N((\lambda I - A)^{\nu(A)})$.

Démonstration. Voir [**2**] et [**6**]. □

De l'assertion (4), on observe qu'on peut décomposer l'espace de Banach X en une somme directe :

$$X = R((\lambda - A)^{\nu(A)}) \oplus N((\lambda - A)^{\nu(A)})$$

sachant que $A_{|R((\lambda-A)^{\nu(A)})}$ est bijectif et $A_{|N((\lambda-A)^{\nu(A)})}$ est nilpotent. Nous avons donc le corollaire suivant.

Corollaire 4.5.1. *Soit* $A \in \mathcal{R}(X)$. *Alors* A *est inversible au sens de Drazin inversible d'indice* $\nu(A)$ *et*

$$A^D = A^{GD} = (A + E(0))^{-1}(I - E(0))$$

où $E(0)$ est la projection spectrale de A en 0.

Remarque 4.5.1. *Les opérateurs de Riesz satisfont la théorie de Riesz-Schauder des opérateurs compacts.*

Opérateurs Riesz à spectre fini Ce paragraphe est consacrée à la caractérisation d'un opérateur de Riesz dont le spectre est fini sous certaines conditions sur son ascension et sa descente.

Théorème 4.5.2. *Soit $A \in \mathcal{R}(X)$ avec $p(A)$ et $q(A)$ finies, alors $\sigma(A)$ est un ensemble fini.*

Démonstration. Supposons que $p(A) = q(A) = p$, alors $X = M \oplus N$ avec $M = R(A^p)$ et $N = N(A^p)$, M est fermé et $\sigma(A) = \sigma(A_{|M}) \cup \{0\}$ car $A_{|N}$ est nilpotent. D'après le théorème 4.5.1, $A_{|M}$ est un opérateur de Riesz bijectif, donc $0 \notin \sigma(A_{|M})$. Ainsi, 0 n'est pas un point d'accumulation $\sigma(A)$. D'où, $\sigma(A)$ est un ensemble fini. □

Calcul fonctionnel holomorphe Si $A \in \mathcal{B}(X)$, soit $\mathcal{H}(A)$ l'ensemble de toutes les fonctions holomorphes sur un disque ouvert contenant le spectre $\sigma(A)$ de A. Dans la proposition qui suit, on va construire un calcul fonctionnel holomorphe pour les opérateurs de Riesz.

Proposition 4.5.1. *Soient $A \in \mathcal{R}(X)$ et $f \in \mathcal{H}(A)$ avec $f(0) = 0$ alors $f(A) \in \mathcal{R}(X)$. Inversement, si f ne s'annule que pour 0, alors $f(A) \in \mathcal{R}(X)$ implique $A \in \mathcal{R}(X)$. En particulier, si $A^n \in \mathcal{R}(X)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors $A \in \mathcal{R}(X)$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{R}(X)$. Comme $f(0) = 0$, alors $f(x) = xg(x)$ avec $g \in \mathcal{H}(A)$ et $f(A) = Ag(A)$. Vu que A commute avec $g(A)$ il résulte d'après la remarque 4.2.1 que $f(A) \in \mathcal{R}(X)$.

Inversement, soit $f(A) \in \mathcal{R}(X)$ et supposons que f s'annule uniquement en 0. Alors il existe $h \in \mathcal{H}(A)$ et un entier naturel m tels que pour tout x dans le domaine de définition de f, on a $f(x) = x^m h(x)$ et $h(x) \neq 0$. Par conséquent, $f(A) = A^m h(A)$ et $h(A)$ est inversible dans $\mathcal{B}(X)$. $A^m = f(A)h(A)^{-1} \in \mathcal{R}(X)$ car $f(A)$ et $h(A)^{-1}$ commutent. Ainsi, $r(\Pi(A^m)) = (r(\Pi(A)))^m = 0$ implique que $r(\Pi(A)) = 0$ et $A \in \mathcal{R}(X)$. □

Corollaire 4.5.2. $A \in \mathcal{R}(X) \Leftrightarrow A^n \in \mathcal{R}(X)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

4.6 Opérateurs de Riesz de rang fini

Si A est un opérateur compact à image $R(A)$ fermé dans X, alors A est un opérateur de rang fini. Ce résultat est bien connu et c'est l'un des raisons qui motive la question :
Quand un opérateur de Riesz défini sur un espace de Banach est de rang fini ?
On donne dans ce qui suit des conditions pour lesquelles un opérateur de Riesz soit un opérateur de rang fini.

Théorème 4.6.1. *Soit $A \in \mathcal{R}(X)$ avec $p(A) = p$. Si $R(A^p) + N(A^p)$ est fermé dans X, alors A^p est un opérateur de rang fini.*

Démonstration. Comme $asc(A) = p$, alors $N(A^p) = N(A^{p+1})$. considérons l'application $\widehat{A^p}$ définie

$$\widehat{A^p}(\pi(x)) = A^p x \text{ avec } x \in X \text{ et } \pi(x) = x + N(A^p) \in X/N(A^p).$$

Comme $N(A^p)$ est sous espace fermé de X invariant par rapport à A^p $(A^p N(A^p) \subset N(A^p))$, l'opérateur induit $A_p : N(A^p) \longrightarrow N(A^p)$ défini par

$$A_p(\pi(x)) = \pi(A^p(x))$$

est aussi un opérateur de Riesz. De plus, A_p est injectif, donc l'opérateur inverse A_p^{-1} de A_p existe et il est défini sur $R(A_p)$. Comme $R(A^p) + N(A^p)$ est fermé X, il résulte que $\pi(R(A^p))$ est fermé dans $X/N(A^p)$. D'où A_p est à image fermé car $R(A_p) = \pi(R(A^p))$. Ainsi, A_p^{-1} est borné et l'identité $I = A_p^{-1}A_p$ est aussi un opérateur de Riesz sur l'espace quotient $X/N(A^p)$. Ceci implique que $X/N(A^p)$ est de dimension finie. Comme $R(A^p) = R(\widehat{A^p})$, il vient, $R(A^p)$ est de dimension finie. $\square$

Corollaire 4.6.1. *Soit $A \in \mathcal{R}(X)$ avec $p(A) = q(A) = p$. Alors A^p est un opérateur de rang fini.*

Démonstration. Notons que $X = R(A^p) \oplus N(A^p)$ lorsque $p(A) = q(A) = p$. Alors, $R(A^p) \oplus N(A^p)$ est fermé dans X et A^p est de rang fini. $\square$

Remarque 4.6.1. *Si $A \in \mathcal{R}(X)$ est une projection, alors $p(A) = q(A) = 1$ et donc A est un opérateur de rang fini.*

4.7 Perturbation des opérateurs de Riesz

Nous étudions ici la stabilité sous les perturbations des opérateurs de Riesz commutant entre eux. Il est évident par la caractérisation de Ruston que si $A \in \mathcal{R}(X)$ et $K \in \mathcal{K}(X)$, alors $A + K \in \mathcal{R}(X)$. Le résultat suivant est un propriété de décomposition intéressante des opérateurs de Riesz :

Théorème 4.7.1. *Soit K un opérateur compact sur X et soit $Q \in \mathcal{B}(X)$, un opérateur quasinilpotent. Alors $K + Q$ est un opérateur Riesz sur X.*

Démonstration. Soit n un entier positif. Alors, comme $\mathcal{K}(X)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{B}(X)$,

$$(K+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k K^k Q^{n-k} = Q^n + C$$

où $C = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k K^k Q^{n-k} \in \mathcal{K}(X)$. Il s'ensuit que $\|(K+Q)^n\|_C^{1/n} \leq \|Q^n\|^{1/n} \longrightarrow 0$, lorsque $n \to \infty$, donc $(K+Q) \in \mathcal{R}(X)$. $\square$

Le sens inverse de ce théorème a été prouver par West **[12]** dans le cas d'un espace Hilbert séparable de dimension infinie. Il reste alors à déterminer si le théorème de décomposition de West survivra dans le contexte de l'espace de Banach. Davison et Herrero **[4]** ont montré qu'une décomposition de type West est valide pour les opérateurs de Riesz agissant sur une grande classe d'espaces de Banach, y compris $l^p,\ 1 \leq p < \infty$.

Sous la condition de la commutativité, Aiena a montrer dans **[1]** le résultat suivant.

Théorème 4.7.2. *Soient $A \in \mathcal{B}(X)$ et $B \in \mathcal{R}(X)$ tels que A commute avec B. Alors :*

1. *Si A est un opérateur semi-Fredholm à droite (ou à gauche) alors $A+B$ est un opérateur semi-Fredholm à droite (ou à gauche) avec $ind(A+B) = ind(A)$.*
2. *Si $A \in \mathcal{W}(X)$ alors $A + B \in \mathcal{W}(X)$.*
3. *Si $A \in Br(X)$ alors $A + B \in Br(X)$.*

Dans ce qui suit, on va voir la stabilité de la classe des opérateurs inversibles au sens de Drazin sous la perturbation des opérateurs de Riesz commutant entre eux. Nous avons le résultat fondamental dû à Rakocevic.

Théorème 4.7.3. *(*[**10**]*) Soit $A \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur inversible au sens de Drazin $\alpha(A) < \infty$, $B \in \mathcal{R}(X)$ et $AB = BA$. Alors $A + B$ est un opérateur inversible au sens de Drazin et il existe un opérateur de rang fini$F \in \mathcal{B}(X)$ tel que :*

$$(A+B)^4 = A^4 + F \ , \ A^4F = FA^4,$$
$$(A+B)^{GD} = [I + (A+A^4)^{-1}(B+F)]^{-1}A^{GD} - (A + A^4 + B + F)^{-1}F.$$

Proposition 4.7.1. *Soit $A \in \mathcal{R}(X)$. Si $B \in \mathcal{B}(X)$ tel que $AB - BA \in \mathcal{K}(X)$, alors AB et $BA \in \mathcal{R}(X)$.*

Démonstration. Rappelons que la condition nécessaire et suffisante pour que $A \in \mathcal{R}(X)$ est que $\pi(A)$ soit quasinilpotent dans l'algèbre de Calkin. Comme $\pi(B)$ commute avec $\pi(A)$, on trouve

$$\pi(B)\pi(A) = \pi(A)\pi(B)$$

est quasinilpotent. En particulier, AB et $BA \in \mathcal{R}(X)$. □

4.8 Application aux matrices d'opérateurs

Soient X et Y deux espaces de Banach. Pour $A \in \mathcal{B}(X)$ et $B \in \mathcal{B}(Y)$, on note par M_C l'opérateur matriciel défini sur l'espace de Banach $X \times Y$ par :

$$M_C = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $C \in \mathcal{B}(Y, X)$, l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de X dans Y.

Une étude spectrale de M_C et de son opérateur diagonale $M_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ a récemment été réalisée par plusieurs auteurs (Voir par exemple [**5**], [**7**], [**8**]...). En particulier, nous savons que :

* Si A et B ont des ascensions infinies (respectivement, des descentes infinies), alors M_C a une ascension (respectivement. descente) infinie aussi.
* $\sigma(M_C) \subset \sigma(A) \cup \sigma(B)$, ceci montre que $\sigma(M_C)$ is fini dès que $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ sont des sous ensemble finis de $\mathbb{C}$.
* M_C est de rang si et seulement si A, B est C sont tous de rang fini.

Proposition 4.8.1. *Si M_0 est un opérateur de Fredholm, alors M_C est aussi de un opérateur de Fredholm pour tout opérateur $C \in \mathcal{B}(Y, X)$.*

Démonstration. Supposons que M_0 est de Fredholm. Alors A et B sont tous les deux Fredholm. Notons que :

$$M_C = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

où $\begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix}$ est inversible est $\begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -C \\ 0 & I \end{pmatrix}$ pour tout $C \in \mathcal{B}(Y, X)$. Comme $\begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont tous les deux de Fredholm, on obtient, M_C est de Fredholm (car M_C est un produit d'opérateurs de Fredholm. $\square$

Ainsi, nous pouvons maintenant décrire complètement l'ensemble de tout $C \in \mathcal{B}(Y, X)$ pour que M_C soit un opérateur de Riesz.

Corollaire 4.8.1. *Si M_0 est un opérateur de Riesz, alors M_C est un opérateur de Riesz pour tout $C \in \mathcal{B}(Y, X)$.*

Conclusion

Le sujet de ce mémoire de master rentre dans le cadre de la théorie des opérateurs linéaires, dont l'objectif principal est de réaliser une étude globale sur les opérateurs de Riesz définis sur un espace de Banach complexe à dimension infinie. Les résultats présentés sur cette notion montrent que sur le plan spectrale, l'opérateur de Riesz est une généralisation très naturelle de la notion d'opérateur compact. Cela signifie que par rapport aux propriétés spectrales, l'ensemble des opérateurs linéaires bornés le plus proche à la classe des matrices après les opérateurs compacts, c'est bien les opérateurs de Riesz. En d'autre terme on a :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \subset \mathcal{K}_0(X) \subset \mathcal{K}(X)\mathcal{R}(X) \subset \mathcal{B}(X).$$

Bibliographie

[1] P. Aiena : Fredholm and local spectral theory with applications to multipliers, Kluwer 2004.

[2] P. Aiena : Fredholm and local spectral theory II with applications to Weyl type theorems, Springer 2018.

[3] S.R. Caradus : Operators of Riesz type, Pacific J. Math., 18 (1966), 61-71.

[4] K.R. Davison and D.A. Herrero : Decomposition of Banach space operators, Indiana Univ. Math. J., 35 (1986), 333-343.

[5] D. Djordjevic : Perturbation of spectra of operator matrices, J. Oper. Th. 48 (2002), 467-486.

[6] H.R. Dowson : Spectral theory of linear operators. Academic Press, 1978.

[7] S. Messirdi, M. Ould Ali and B. Messirdi : Some Solutions of the Finite Spectrum Problem and Applications, Adv.Stud.Contemp.Math. (Kyungshang), 28 (3) (2018), 449-458.

[8] B. Messirdi, Sa. Messirdi and So. Messirdi : On left and right generalized Drazin spectra of operator matrices, Submitted, Seprember 2018.

[9] O. Monslave : Some characterizations of Riesz operators by means of invariant subspaces, Ren del Circ. Math. Di Palermo, 48 (3) (1999), 431-442.

[10] V. Rakocevic : Koliha–Drazin invertible operators and commuting Riesz perturbations, Acta Sci. Math. (Szeged), 68 (2002), 291-301.

[11] A.F. Ruston : Operators with a Fredholm theory, J. London Math. Soc., 29 (1954), 318-326.

[12] T.T. West : The decomposition of Riesz operators, Proc. London Math. Soc., 16 (1966), 737-752.

Table des matières