MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Louiza BERBER

Le q-Analogue De Quelques Inégalités Pour Les Fonctions Spéciales

soutenu publiquement juin 2019 devant le jury composé de :

Président :	Zoubir DAHMANI	Professeur	(Université de Mostaganem, Algérie)
Examinatrice :	Amel TAIEBE	MCB	(Université de Mostaganem, Algérie)
Encadreuse :	Sabrina TAF	MCB	(Université de Mostaganem, Algérie)

Année Universitaire : 2018 / 2019

MASTER

𝒟édicaces

𝒜 l'aide de dieu tout puissant, on a pu achever ce modeste travail que je dédie :

𝒜 mon père et ma mère que le dieu les protège, qui mon offert tous les moyennes ainsi leur encouragements avec lesquelles j'ai pu atteindre ce niveau .

𝒜 mes frères .

𝒜 toutes les familles BERBER et BENCHAA grands et petits .

𝒜 tous mes amis , la promotion 2éme année master MCO .

𝒜 mon encadreuse Sabrina Taf.

𝒜 tous mes enseignants durant tout mon cursus universitaire.

Remerciements

***N** ous remercions ALLAH le tout puissant de nous avoir permis et aider à mener a terme ce travail et le courage qui nous avons données durant ces années d'études.*

***J** e tiens a remercie chaleureusement ma encadreuse madame Sabrina Taf, pour son talent et sa patience pour son travail, ainsi que pour les conseils et astuces qui ont alimenté ma réflexion.*

***J** e tiens également à exprimer mes remerciements pour leur disponibilité chaque fois que je demande assistance et consultation..*

***J** e tiens également à remercier le Professeur Zoubir Dahmani pour avoir accepter de présider le jury de ce mémoire.*

***J** e remercie vivement Examinatrice Madame Amel Taiebe pour avoir accepté d'examiner ce travaille.*

***J** e profite de cette occasion pour remercier tous les professeurs qui nous ont enseigné et par leur paroles, leur écrits, leur conseils, leur critiques, et qui nous ont soutenu dans la poursuit de nos étude.*

***J** e tiens également à remercier les étudiant master 2 MCO, pour leur aide morale durant tout la période de préparation .*

***E** nfin, j'adresse mes remerciements a mes parents pour leur soutien constant et leur encouragements.*

Table des matières

Index des notations

E[ ]	:	Une partie entière .
$\mathbb{C}$	:	L'ensemble des entiers complexe .
$\mathbb{Z}$	:	L'ensemble des entiers relatifs .
Γ	:	Fonction Gamma d'Euler.
$\Gamma^{(n)}$	:	La dérivée nième d'une fonction Gamma d'Euler.
β	:	Fonction Bêta d'Euler.
ζ	:	Fonction Zêta de Riemann.
D_q	:	La q-dérivée.
Γ_q	:	Fonction q-Gamma .
$\Gamma_q^{(n)}$	:	La dérivée nième d'une fonction q-Gamma .
β_q	:	Fonction q-Bêta .
ζ_q	:	Fonction q-Zêta .
Γ_k	:	Fonction k-Gamma .
$\Gamma_k^{(n)}$	:	La dérivée nième d'une fonction k-Gamma .
β_k	:	Fonction k-Bêta .
ζ_k	:	Fonction k-Zêta .
$\Gamma_{q,k}$	:	Fonction q,k-Gamma .
$\Gamma_{q,k}^{(n)}$	:	La dérivée nième d'une fonction q,k-Gamma .
$\beta_{q,k}$	:	Fonction q,k-Bêta .

$\mathscr{R}$ésumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude le q-analogue des fonctions spéciales (Gamma, Bêta et Zêta) et les fonctions k et q,k-spéciales, ainsi on va donnée des inégalités impliquant ces fonctions d'après une technique développée par Mercer.

Mots-Clés. Fonction Gamma, Fonction Bêta , Fonction Zêta , Fonction q-Gamma, Fonction q-Bêta, Fonction q-Zêta, q-dérivée.......

Introduction

Le q-analogue est une extension utilisée dans plusieurs domaines des mathématiques et de la physique, comme la théorie des nombres, les polynômes orthogonaux, la combinatoire, la théorie quantique et la mécanique, il trouve des applications dans un certain nombre des domaines, notamment l'étude des mesures fractales et multi-fractales, et des expressions pour l'entropie des systèmes dynamiques chaotiques qui furent introduit dans le travail de Leonhard Euler et furent ensuite étendus par Frank Hilton Jackson.

D'une manière générale, le q-analogue d'un concept mathématique est une expression polynomiale dans une variable réelle q qui se réduit a un objet simple et classique situé a la limite $q \longrightarrow 1$.

Au début du 20 siècle, le révérend Frank Hilton a beaucoup travaillé sur le q-analogue, il a donné des définitions plus élémentaires sur le q-calcule [14]. En 1910 Jackson a commencé étude d'un système du q-calcule et introduit la notion de q-dérivé, q-intégrale et q-shift factorielle...
En se référant à l'expression des fonctions spéciales (la fonction Gamma, la fonction Bêta et la fonction Zêta), plusieurs auteurs définissent le q-analogue des fonctions spéciales. La première définition est donnée par Thomae [22] et plus tard par Jackson [13] qui a définie nouveaux représentation intégrale des q-fonctions spéciales, on réfère le lecteur à ([3], [11], [14], [17]) .

La plupart des mathématiciens s'intéressaient aux les fonctions spéciales, parmi eux Mercer [16] qui a introduit une inégalité impliquant un opérateur linéaire positif agissant sur la composition de deux fonctions continues. Cette inégalité entraîne des nouvelles inégalités impliquant les fonctions spéciales et une grande famille des fonctions transformées par Mellin (voir [5], [6]). En effet il à considère une application linéaire positive L qui définie sur un sous-espace $\mathbf{C}^*(\mathrm{I}) \subset \mathbf{C}(\mathrm{I})$, telle que $\mathrm{I} \in [0,a]$ avec $a \succ 0$ ou $[0,\infty[$.
il a considéré deux fonctions qui sont strictement croissantes et positives sur $\mathbf{C}^*(\mathrm{I})$ sachant que
$f(x) \longrightarrow 0$ et $g(x) \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 0^+$,
et puis il a supposé que $\frac{f}{g}$ strictement croissante. Alors la fonction ϕ est définie par

$$\phi = g\frac{\mathrm{L}(f)}{\mathrm{L}(g)}.$$

Ainsi, on propose une fonction F définie sur les gammes de f et g telle que les compositions $\mathrm{F}(f)$ et $\mathrm{F}(g)$ appartiennent chacun à $\mathbf{C}^*(\mathrm{I})$ tel que

a) F est convexe si

$$\mathrm{L}\left[\mathrm{F}\left(f\right)\right] \geq \mathrm{L}\left[\mathrm{F}\left(\phi\right)\right].$$

b) F est concave si

$$L\left[F\left(f\right)\right] \leq L\left[F\left(\phi\right)\right].$$

Donc, nous pouvons étudier pour un plus grand sous-espace $\mathbf{C}^*(I)$ de $\mathbf{C}(I)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose la fonction $F(f) = f^\alpha$ est convexe si $(\alpha \prec 0$ ou $\alpha \succ 1)$ et concave si $(0 \prec \alpha \prec 1)$.
D'où

$$L\left(f^\alpha\right) \gtrless L\left(\phi^\alpha\right).$$

Si $(\alpha \prec 0$ ou $\alpha \succ 1)$ et $(0 \prec \alpha \prec 1)$ respectivement.
En remplaçant ϕ, on trouve

$$\frac{\left[L\left(g\right)\right]^\alpha}{L\left(g^\alpha\right)} \gtrless \frac{\left[L\left(f\right)\right]^\alpha}{L\left(f^\alpha\right)}. \tag{1}$$

Dans le cas $(\alpha \prec 0$ ou $\alpha \succ 1)$ et $(0 \prec \alpha \prec 1)$ respectivement.
On pose

$$f(x) = x^\beta \quad et \quad g(x) = x^\delta \qquad \text{avec,} \quad \beta \succ \delta \succ 0.$$

Finalement la formule (1) devient

$$\frac{\left[L\left(x^\delta\right)\right]^\alpha}{L\left(x^{\alpha\delta}\right)} \succ \frac{\left[L\left(x^\beta\right)\right]^\alpha}{L\left(x^{\alpha\beta}\right)} \quad \text{si} \quad \alpha \prec 0 \quad ou \quad \alpha \succ 1 \tag{2}$$

$$\frac{\left[L\left(x^\delta\right)\right]^\alpha}{L\left(x^{\alpha\delta}\right)} \prec \frac{\left[L\left(x^\beta\right)\right]^\alpha}{L\left(x^{\alpha\beta}\right)} \quad \text{si} \quad 0 \prec \alpha \prec 1. \tag{3}$$

Ce mémoire se comporte essentiellement de quatres chapitres et d'une conclusion.
Le premier chapitre comporte une partie préliminaire, dans laquelle on rappelle les fonctions spéciales et leurs propriétés, puis nous prouvons certaines inégalités impliquant ces fonctions par la méthode géométrique qui a été développée par Mercer.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la notion de q-analogue et l'introduction de la définition de q-analogue des fonctions spéciales ainsi leur propriétés, puis on passe a défini les inégalités de ces fonctions qui sont donné par la technique de Mercer.

Dans les troisième et quatrième chapitres, nous présentons quelques définitions fondamentales pour les fonctions k-spéciales et q,k-spéciales qui sont introduit par les chercheurs ([7], [8] , [15]) et ces applications.
Finalement, nous terminons notre mémoire par une conclusion générale et une bibliographie sont données à la fin de ce document.

Chapitre 1

Les Fonctions Spéciales

Dans ce chapitre, on présente les fonctions spéciales (la fonction Gamma, la fonction Bêta et la fonction Zêta) ainsi que leur propriétés (voir [3], [14], [18]).
Dans la deuxième section, on introduit ses applications par la technique de Mercer [16].

1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.1 *[18] La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante*

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \quad \textit{avec } \mathrm{Re}(t) > 0.$$

La définition suivante de la fonction Gamma par produits infinis due à Euler, a un sens pour les nombres complexes t qui ne sont pas des entiers négatifs ou nuls.

$$\Gamma(t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^t}{t(t+1)..............(t+n)}.$$

Proposition 1.1 *[18] Soit t un nombre complexe tel que* $\mathrm{Re}(t) > 0$*. Alors*

I-

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t). \tag{1.1}$$

II- On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \textit{cas particulier,} \quad \Gamma(1) = 1.$$

Preuve.

I- Pour tout $\mathrm{Re}(t) > 0$ et par une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \Gamma(t+1) &= \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = \left[x^t(-e^{-x})\right]_0^{\infty} - \int_0^{+\infty} t x^{t-1}(-e^{-x}) dx \\ &= t\Gamma(t). \end{aligned}$$

II- D'après un raisonnement par récurrence, on a

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= (n)\Gamma(n) \\ &= (n)(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= \vdots \\ &= (n)(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= (n)!. \end{aligned}$$

■

2 Fonction Bêta d'Euler

Définition 1.2 *[14]La fonction Bêta est définie par l'intégrale suivante*

$$\beta(t,s)=\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{s-1}\,dx, \quad \textit{avec } \operatorname{Re}(t)>0, \operatorname{Re}(s)>0. \tag{1.2}$$

Propriétés 1.1 *[14] La fonction Bêta vérifie les propriétés suivantes*

1- Le lien entre la fonction Gamma et la fonction Bêta est

$$\beta(t,s)=\frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}, \quad \textit{avec } \operatorname{Re}(t)>0,\ \operatorname{Re}(s)>0.$$

2- La fonction Bêta est symétrique

$$\beta(t,s)=\beta(s,t), \quad \textit{avec } \operatorname{Re}(t)>0,\ \operatorname{Re}(s)>0.$$

3 Fonction Zêta De Riemann

Définition 1.3 *[9] La fonction $\zeta(x)$ de Riemann est une fonction analytique complexe méromorphe définie pour tout nombre complexe s tel que* $\operatorname{Re}(s)>1$, *par la série de Riemann*

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}, \quad \textit{avec } \operatorname{Re}(s)>1.$$

La fonction zêta de Riemann s'écrit aussi sous forme intégrale, pour $\operatorname{Re}(s)>1$

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{(-\ln u)^{s-1}}{1-u}\,du.$$

Théorème 1.1 *[9] Le lien entre la fonction Zêta et la fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante*

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\frac{1}{e^x-1}\,dx, \quad \operatorname{Re}(s)>1.$$

Preuve. D'après la définition de la fonction Gamma et Zêta on a

$$\begin{aligned}\zeta(s)\Gamma(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Gamma(s)}{n^s}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{n}\right)^{s-1}\frac{du}{n}.\end{aligned}$$

Posant $u=nx$, alors

$$\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{n}\right)^{s-1}\frac{du}{n} = \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx.$$

Puis d'après le théorème de convergence monotone, on a

$$\begin{aligned}\zeta(s)\Gamma(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx=\int_0^\infty x^{s-1}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}dx\\ &= \int_0^\infty x^{s-1}\frac{1}{e^x-1}dx.\end{aligned}$$

■

4 Applications

Dans la dernière section, nous établissons des nouvelles inégalités impliquant les fonctions spéciales par la technique de Mercer[16].

4.1 Fonction Gamma

Théorème 1.2 *[16] Soit la fonction f définie par*

$$f(x) = \frac{\left[\Gamma^{(2n)}(1+x)\right]^{\alpha}}{\Gamma^{(2n)}(1+\alpha x)},$$

alors

a) la fonction f est croissante si $0 \prec \alpha \prec 1$ sur $]0,\infty[$.

b) la fonction f est décroissante si $\alpha \succ 1$ sur $]0,\infty[$.

Preuve. La fonction Gamma est infiniment différentiable sur $[0,\infty[$ et ses dérivées successives sont données par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,\infty[,\ \Gamma^{(2n)}(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}\left[\log(x)\right]^{2n} e^{-x} dx.$$

On considère une application linéaire positive L définie sur un sous-espace $\mathbf{C}^*(\mathrm{I}) \subset \mathbf{C}\mathrm{I})$, par

$$\mathrm{L}(v) = \int_0^{\infty} v(x)\left[\log(x)\right]^{2n} e^{-x} dx.$$

pour tout v dans $\mathbf{C}^*(\mathrm{I})$, les conditions d'existence et de la convergence de l'intégrale sont

$$v(x) = \begin{cases} \mathrm{O}\left(x^{\beta}\right) & \text{si } \beta \succ -1 \text{ lorsque } x \longrightarrow 0 \\ \mathrm{O}\left(x^{\delta}\right) & \forall\ \delta \text{ lorsque } x \longrightarrow \infty. \end{cases}$$

Alors d'après les inégalités (2) et (3), on obtient pour $\beta \succ \delta \succ 0$

$$\frac{\left[\Gamma^{(2n)}(1+\delta)\right]^{\alpha}}{\Gamma^{(2n)}(1+\alpha\delta)} \succ \frac{\left[\Gamma^{(2n)}(1+\beta)\right]^{\alpha}}{\Gamma^{(2n)}(1+\alpha\beta)} \quad ; \quad \alpha \succ 1, \tag{1.3}$$

et

$$\frac{\left[\Gamma^{(2n)}(1+\delta)\right]^{\alpha}}{\Gamma^{(2n)}(1+\alpha\delta)} \prec \frac{\left[\Gamma^{(2n)}(1+\beta)\right]^{\alpha}}{\Gamma^{(2n)}(1+\alpha\beta)} \quad ; \quad 0 \prec \alpha \prec 1. \tag{1.4}$$

■

Corollaire 1.1 *Pour tout $x \in [0,1]$, on obtient*

i.

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \leq \frac{[\Gamma(1+x)]^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha x)} \leq 1 \qquad si \quad \alpha \geq 1. \tag{1.5}$$

ii.

$$1 \leq \frac{[\Gamma(1+x)]^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha x)} \leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \qquad si \quad 0 \prec \alpha \leq 1. \tag{1.6}$$

Preuve.

i. On prend $n=0$ dans l'inégalité (1.3), on trouve

$$\frac{\left[\Gamma(1+\beta)\right]^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha\beta)} < \frac{[\Gamma(1+\delta)]^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha\delta)}.$$

Posons $\beta=1$ et $\delta=x$, alors pour tout $x\in[0,1]$ tel que $\beta>\delta$, on obtient

$$\frac{[\Gamma(2)]^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} < \frac{[\Gamma(1+x)]^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha x)}.$$

D'autre part, on prend $\beta=x$ et $\delta=0$, on obtient

$$\frac{[\Gamma(1+x)]^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha x)} < \frac{[\Gamma(1)]^{\alpha}}{\Gamma(1)}.$$

Si $\alpha=1$, on obtient l'inégalité (1.5).

ii. Du même principe, on trouve (1.6).

■

4.2 Fonction Bêta

Théorème 1.3 *[16] Soit la fonction f définie pour tout $s>0$ par*

$$f(x)=\frac{\left[\beta(1+x,s)\right]^{\alpha}}{\beta\,(1+\alpha x,s)},$$

alors

a) la fonction f est croissante pour tout $0<\alpha<1$ sur $]0,\infty[$.

b) la fonction f est décroissante pour $\alpha>1$ sur $]0,\infty[$.

Preuve. Soit la fonction Bêta donnée par

$$\beta(t,s)=\int_0^1 x^{t-1}\,(1-x)^{s-1}\,dx,\qquad \mathrm{Re}(t)>0,\ \mathrm{Re}(s)>0.$$

On définit une application linéaire positive L sur un sous-espace $\mathbf{C}^*(\mathrm{I})\subset\mathbf{C}(\mathrm{I})$, tel que $\mathrm{I}=[0,1]$ par

$$\mathrm{L}(v)=\int_0^1 v(x)\,(1-x)^{s-1}\,dx,\qquad s>0.$$

Pour tout v dans $\mathbf{C}^*(\mathrm{I})$ les conditions d'existence et de la convergence de l'intégrale sont

$$v(x)=\begin{cases} \mathrm{O}\left(x^{\beta}\right) & \text{si }\ \beta>-1\ \text{ lorsque } x\longrightarrow 0\\ \mathrm{O}(1) & \text{lorsque } x\longrightarrow 1.\end{cases}$$

On applique les inégalités (2) et (3) pour $\beta>\delta>0$, on obtient

$$\frac{\left[\beta\,(1+\delta,s)\right]^{\alpha}}{\beta\,(1+\alpha\delta,s)} > \frac{\left[\beta\left(1+\beta,s\right)\right]^{\alpha}}{\beta\left(1+\alpha\beta,s\right)}\quad;\quad \alpha>1, \tag{1.7}$$

et

$$\frac{\left[\beta\,(1+\delta,s)\right]^{\alpha}}{\beta\,(1+\alpha\delta,s)} < \frac{\left[\beta\left(1+\beta,s\right)\right]^{\alpha}}{\beta\left(1+\alpha\beta,s\right)}\quad;\quad 0<\alpha<1. \tag{1.8}$$

■

Corollaire 1.2 *Pour tout* $x \in [0,1]$ *et* $s > 0$, *on a*

i.

$$\frac{[\beta(2,s)]^{\alpha}}{\beta(1+\alpha s)} \leq \frac{[\beta(1+x,s)]^{\alpha}}{\beta(1+\alpha x,s)} \leq [\beta(1,s)]^{\alpha-1} \qquad si \quad \alpha \geq 1. \tag{1.9}$$

ii.

$$[\beta(1,s)]^{\alpha-1} \leq \frac{[\beta(1+x,s)]^{\alpha}}{\beta(1+\alpha x,s)} \leq \frac{[\beta(2,s)]^{\alpha}}{\beta(1+\alpha s)} \qquad si \quad 0 < \alpha \leq 1. \tag{1.10}$$

Preuve.

i. On pose $\beta = 1$ et $\delta = x$, alors pour tout $x \in [0,1]$ tel que $\beta > \delta$, l'inégalité (1.7), devient

$$\frac{[\beta(2,s)]^{\alpha}}{\beta(1+\alpha,s)} < \frac{[\beta(1+x,s)]^{\alpha}}{\beta(1+\alpha x,s)}. \tag{1.11}$$

Si on pose $\beta = x$ et $\delta = 0$, on trouve

$$\frac{[\beta(1+x,s)]^{\alpha}}{\beta(1+\alpha x,s)} < [\beta(1,s)]^{\alpha-1}. \tag{1.12}$$

D'après (1.11), (1.12) et si $\alpha = 1$, on trouve (1.9). D'où le résultat.

ii. De la même méthode, on peut le démontrer (1.10).

■

4.3 Fonction Zêta

Théorème 1.4 *[16] Soit la fonction* f *définie par*

$$f(x) = \frac{[\zeta(2+x)\,\Gamma(2+x)]^{\alpha}}{\zeta(2+\alpha x)\,\Gamma(2+\alpha x)},$$

alors

a) la fonction f *est croissante pour tout* $0 < \alpha < 1$ *sur* $]0,\infty[$.

b) la fonction f *est décroissante pour* $\alpha > 1$ *sur* $]0,\infty[$.

Preuve. On a pour tout $s > 1$

$$\zeta(s)\Gamma(s) \;=\; \int_0^{\infty} x^{s-1}\frac{1}{e^x-1}\,dx.$$

Soit L une application linéaire positive de $\mathbf{C}^*(\mathrm{I}) \subset \mathbf{C}(\mathrm{I})$ telle que

$$\mathrm{L}(v) = \int_0^{\infty} v(x)\frac{x}{e^x-1}\,dx,$$

pour tout v dans $\mathbf{C}^*(\mathrm{I})$

$$v(x) = \begin{cases} \mathrm{O}\left(x^{\beta}\right) & \text{si } \beta > -1 \text{ lorsque } x \longrightarrow 0 \\ \mathrm{O}\left(x^{\delta}\right) & \forall\ \delta \text{ lorsque } x \longrightarrow \infty. \end{cases}$$

Alors d'après l'inégalité (2) et (3), on obtient pour $\beta > \delta > 0$

$$\frac{[\Gamma(2+\delta)\zeta(2+\delta)]^{\alpha}}{\Gamma(2+\alpha\delta)\zeta(2+\alpha\delta)} > \frac{[\Gamma(2+\beta)\zeta(2+\beta)]^{\alpha}}{\Gamma(2+\alpha\beta)\zeta(2+\alpha\beta)} \quad ; \quad \alpha > 1,$$

et

$$\frac{[\Gamma(2+\delta)\zeta(2+\delta)]^{\alpha}}{\Gamma(2+\alpha\delta)\zeta(2+\alpha\delta)} < \frac{[\Gamma(2+\beta)\zeta(2+\beta)]^{\alpha}}{\Gamma(2+\alpha\beta)\zeta(2+\alpha\beta)} \quad ; \quad 0 < \alpha < 1.$$

■

Chapitre 2

Les Fonctions q-Spéciales

Dans ce chapitre, on présente des notions de base de q-analogue et on étudie le q-analogue des fonctions spéciales (la fonction q-Gamma, la fonction qBêta et la fonction q-Zêta) ainsi que leurs propriétés. Finalement, on termine le chapitre par des applications.

1 Généralités

Gasper et Rahman [11], Kac et Cheung [14] ont donné les définitions de base de q-analogue.

Définition 2.1 *[14] La q-théorie classique commence par la définition des q-analogues des entiers positifs par*

$$\lim_{q\to 1}\frac{1-q^n}{1-q}=n.$$

Soit $0 \prec q \prec 1$*, on définit le q-analogue de n comme étant [14]*

$$[n]_q=\frac{1-q^n}{1-q}=1+q+q^2+......+q^{n-1},\quad n\in\mathbb{C},$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$*, le q-shift factorielle est définie par[11]*

$$\left(a;q\right)_n=\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-aq^k\right),\quad n=1,2.....\infty,\quad \left(a;q\right)_0=1.$$

On peut définir le q-analogue de la factorielle connue sous le nom de q-factorielle, par [11]

$$[n]_q!=\prod_{k=0}^{n-1}[k]_q=\frac{\left(q;q\right)_n}{\left(1-q\right)^n}\quad avec\ n\in\mathbb{N},\ \text{où}\quad \left(q;q\right)_n=\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-q^k\right),$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$ *et pour tout* $a, b\in\mathbb{C}$*, le q-analogue de la fonction* $(x-a)^n$ *est définie comme suit [1]*

$$(x-a)_q^n=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-aq^k\right),\quad en\ particulier\quad (x-a)_q^0=1. \tag{2.1}$$

d'où

$$(a-x)_q^n=\prod_{k=0}^{n-1}\left(a-xq^k\right). \tag{2.2}$$

[11] On a aussi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left(1-q\right)_q^{n-1} = \frac{\left(1-q\right)_q^{\infty}}{\left(1-q^n\right)_q^{\infty}}.$$

Définition 2.2 *[14] La q-différentielle de la fonction $f(x)$ est donnée par*

$$d_q f(x) = f\left(qx\right) - f(x).$$

Définition 2.3 *[14] La q-dérivée de la fonction $f(x)$ est définie par l'expression suivante*

$$\mathrm{D}_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f\left(qx\right) - f(x)}{\left(q-1\right)x}. \tag{2.3}$$

Exemple 2.1 *La q-dérivée de la fonction $f(x) = x^n$, où n est un entier positif est*

$$\mathrm{D}_q x^n = \frac{\left(qx\right)^n - x^n}{\left(q-1\right)x} = \frac{q^n-1}{q-1}x^{n-1} = [n]_q\, x^{n-1}. \tag{2.4}$$

Définition 2.4 *[14] La q-dérivée du produit de la fonction $f(x)$ et la fonction $g(x)$ est comme suit*

$$\mathrm{D}_q\left(f(x)g(x)\right) = f(x)\,\mathrm{D}_q g(x) + g\left(qx\right)\mathrm{D}_q f(x). \tag{2.5}$$

Proposition 2.1 *[1] Pour tout entier n et $a \in \mathbb{C}$ on a*

I-

$$\mathrm{D}_q\left(x-a\right)_q^n = [n]_q\left(x-a\right)_q^{n-1}. \tag{2.6}$$

II-

$$\mathrm{D}_q\left(a-x\right)_q^n = -[n]_q\left(a-qx\right)_q^{n-1}. \tag{2.7}$$

Preuve.

I- On raisonne par récurrence, la propriété est vraie pour $n=0$, car $[0]_q = 0$ et on suppose qu'elle est vrais pour certain rang m, (i.e)

$$\mathrm{D}_q\left(x-a\right)_q^m = [m]_q\left(x-a\right)_q^{m-1}.$$

On vérifie la propriété pour $m+1$, sachant que $\left(x-a\right)_q^{m+1} = \left(x-a\right)_q^m\left(x-q^m a\right)$. En utilisant la dérivée du produit (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_q\left(x-a\right)_q^{m+1} &= \mathrm{D}_q\left(x-a\right)_q^m\left(x-q^m a\right) \\
&= \left(x-a\right)_q^m + \left(qx-q^m a\right)\mathrm{D}_q\left(x-a\right)_q^m \\
&= \left(x-a\right)_q^m + q\left(x-q^{m-1}a\right)[m]_q\left(x-a\right)_q^{m-1} \\
&= \left(1+q[m]_q\right)\left(x-a\right)_q^m \\
&= [m+1]_q\left(x-a\right)_q^m.
\end{aligned}$$

II- D'après (2.2), pour $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned}
\left(a-x\right)_q^n &= \left(a-x\right)\left(a-qx\right)\left(a-q^2x\right)\cdots\left(a-q^{n-1}x\right) \\
&= \left(a-x\right)q\left(q^{-1}a-x\right)q^2\left(q^{-2}a-x\right)\cdots q^{n-1}\left(q^{-n+1}a-x\right) \\
&= \left(-1\right)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(x-q^{-n+1}a\right)\cdots\left(x-q^{-2}a\right)\left(x-q^{-1}a\right)\left(x-a\right).
\end{aligned}$$

D'où,

$$(a-x)_q^n \;=\; (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(x-q^{-n+1}a\right)_q^n. \tag{2.8}$$

En utilisant la formule (2.8) et la propriété (2.6), on trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_q(a-x)_q^n &= (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathrm{D}_q\left(x-q^{-n+1}a\right)_q^n \\
&= (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} [n]_q \left(x-q^{-n+1}a\right)_q^{n-1} \\
&= -[n]_q q^{n-1} (-1)^{n-1} q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \left(x-q^{-n+2}\left(q^{-1}a\right)\right)_q^{n-1} \\
&= -[n]_q q^{n-1}\left(q^{-1}a-x\right)_q^{n-1} \\
&= -[n]_q\left(a-qx\right)_q^{n-1}.
\end{aligned}$$

■

Définition 2.5 *[1] On définit deux q-analogues de la fonction exponentielle respectivement par*

$$e_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!} = \frac{1}{\left(1-(1-q)x\right)_q^{\infty}},$$

et

$$\mathrm{E}_q^x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{[n]_q!} = \left(1+(1-q)x\right)_q^{\infty}. \tag{2.9}$$

Les deux fonctions q-exponentielles sont étroitement liées

$$e_q^x \mathrm{E}_q^{-x} = 1.$$

Proposition 2.2 *[1]*

I-

$$\mathrm{D}_q e_q^x = e_q^x \quad \textit{en particulier} \quad e_q^0 = 1.$$

II-

$$\mathrm{D}_q \mathrm{E}_q^x = \mathrm{E}_q^{qx} \quad \textit{en particulier} \quad \mathrm{E}_q^0 = 1.$$

Preuve.

I- Pour démontrer la première propriété, on a besoin d'utiliser la définition (2.3)

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_q e_q^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{D}_q x^n}{[n]_q!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_q x^{n-1}}{[n]_q!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{[n-1]_q!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!}.
\end{aligned}$$

II- D'après (2.3) on a

$$\begin{aligned} D_q E_q^x &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{D_q x^n}{[n]_q!} = \sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{[n]_q x^{n-1}}{[n]_q!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} q^{n-1} \frac{x^{n-1}}{[n-1]_q!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{q^n x^n}{[n]_q!}. \end{aligned}$$

■

Définition 2.6 *[12] Soit $f(x)$ une fonction d'une variable réelle x, la q-intégrale de Jackson de la fonction f sur $[0,a]$ est donnée par*

$$\int_0^a f(x)\, d_q x = (1-q)\, a \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)\, q^n.$$

Définition 2.7 *[12] La q-intégrale de Jackson de la fonction f sur $[0,\infty[$ est définie par*

$$\int_0^{\infty} f(x)\, d_q x = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(q^n)\, q^n.$$

Proposition 2.3 *[1] Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions q-dérivables sur $[a,b]$, la q-intégration par parties est définie par*

$$\int_a^b g(x) D_q f(x)\, d_q x = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) - \int_a^b f(qx) D_q g(x)\, d_q x. \tag{2.10}$$

2 Fonction q-Gamma

Définition 2.8 *[14] La fonction q-Gamma notée Γ_q est définie par*

$$\Gamma_q(t) = \frac{(1-q)_q^{t-1}}{(1-q)^{t-1}}, \qquad t > 0. \tag{2.11}$$

Elle admet aussi une représentation q-intégrale

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{\frac{1}{1-q}} x^{t-1} E_q^{-qx}\, d_q x.$$

Propriétés 2.1 *[14] Les propriétés de la fonction q-Gamma sont*

1-

$$\Gamma_q(t+1) = [t]_q \Gamma_q(t), \qquad t > 0.$$

2-

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \Gamma_q(n+1) = [n]_q!. \quad \text{En particulier } \Gamma_q(1) = 1.$$

Preuve.

1- On applique (2.11) puis (2.1), on trouve

$$\begin{aligned}\Gamma_q(t+1) &= \frac{(1-q)_q^t}{(1-q)^t}\\ &= \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots\ldots\ldots\ldots(1-q^t)}{(1-q)^t}\\ &= \frac{(1-q^t)}{(1-q)}\frac{(1-q)_q^{t-1}}{(1-q)^{t-1}}\\ &= [t]_q\Gamma_q(t).\end{aligned}$$

2- D'après un raisonnement par récurrence, on a

$$\begin{aligned}\Gamma_q(n+1) &= [n]_q\Gamma_q(n)\\ &= [n]_q[n-1]_q\Gamma_q(n-1)\\ &= \vdots\\ &= [n]_q[n-1]_q[n-2]_q\Gamma_q(n-2)\\ &= [n]_q!.\end{aligned}$$

■

3 Fonction q-Bêta

Définition 2.9 *[14] La fonction q-Bêta est définie par l'intégrale suivante*

$$\beta_q(t,s)=\int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{s-1}\,d_qx,\qquad t,s>0. \tag{2.12}$$

Propriétés 2.2 *[14]*

1- Si $t>0$ et n un entier positif, on a

$$\beta_q(t,n)=\frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^t)_q^n}. \tag{2.13}$$

2- pour tout $t,s>0$, on a

$$\beta_q(t,s)=\frac{(1-q)(1-q)_q^{\infty}(1-q^{t+s})_q^{\infty}}{(1-q^t)_q^{\infty}(1-q^s)_q^{\infty}}. \tag{2.14}$$

Preuve.

1- Tout d'abord en utilisant la propriété (2.7) et une q-intégration par partie (2.10). Alors pour tout $t,s>0$ ona

$$\begin{aligned}\beta_q(t+1,s) &= \int_0^1 x^t(1-qx)_q^{s-1}\,d_qx\\ &= \frac{-1}{[s]_q}\int_0^1 x^t\mathrm{D}_q(1-x)_q^s\,d_qx\\ &= \frac{1}{[s]_q}\int_0^1 \mathrm{D}_qx^t(1-qx)_q^s\,d_qx,\end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\beta_q(t+1,s) = \frac{[t]_q}{[s]_q}\beta_q(t,s+1). \tag{2.15}$$

D'autre part, en utilisant la propriété (2.1), alors on a

$$\begin{aligned}
\beta_q(t,n+1) &= \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^n d_qx \\
&= \int_0^1 x^{t-1}(1-q^n x)(1-qx)_q^{n-1} d_qx \\
&= \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{n-1} d_qx - q^n \int_0^1 x^t (1-qx)_q^{n-1} d_qx.
\end{aligned}$$

D'où

$$\beta_q(t,n+1) = \beta_q(t,n) - q^n \beta_q(t+1,n). \tag{2.16}$$

Combinant (2.15) et (2.16), on trouve

$$\beta_q(t,n+1) = \beta_q(t,n) - q^n \frac{[t]_q}{[n]_q}\beta_q(t,n+1).$$

$$\text{Alors} \quad \beta_q(t,n+1) = \frac{1-q^n}{1-q^{t+n}}\beta_q(t,n).$$

Il est claire que pour tout $t > 0$ et n un entier positif

$$\beta_q(t,1) = \int_0^1 x^{t-1} = \frac{1}{[t]_q}.$$

Finalement, on conclut que

$$\begin{aligned}
\beta_q(t,n) &= \frac{(1-q^{n-1}).....(1-q)}{(1-q^{t+n-1})......(1-q^{t+1})[t]_q} \\
&= \frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^t)_q^n}.
\end{aligned}$$

2- Pour démontrer la deuxième propriété, on va utiliser les deux définitions suivantes

$$(1-q)_q^{n-1} = \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q^n)_q^\infty}. \tag{2.17}$$

$$\frac{1}{(1-q^t)_q^n} = \frac{(1-q^{t+n})_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty}. \tag{2.18}$$

On remplace (2.17) et (2.18) dans (2.13), on obtient

$$\beta_q(t,s) = \frac{(1-q)(1-q)_q^\infty (1-q^{t+s})_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty (1-q^s)_q^\infty}.$$

■

Proposition 2.4 *[1] La fonction q-Gamma et la fonction q-Bêta sont liées entre elles par les deux équations suivantes*

I-
$$\Gamma_q(t) = \frac{\beta_q(t,\infty)}{(1-q)^t}.$$

II-
$$\beta_q(t,s) = \frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)}.$$

Preuve.

I- D'après (2.12) et (2.9), on a

$$\beta_q(t,\infty) = \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^\infty d_q x = \int_0^1 x^{t-1} \mathrm{E}_q^{\frac{-qx}{1-q}} d_q x.$$

Effectuons le changement de variable $x = (1-q)y$, on obtient pour $s=\infty$

$$\begin{aligned} &= (1-q)^t \int_0^{\frac{1}{1-q}} y^{t-1}\mathrm{E}_q^{-qy} d_q y \\ &= (1-q)^t \Gamma_q(t). \end{aligned}$$

II- En utilisant (2.17) dans (2.11), on trouve

$$\Gamma_q(t) = \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q)^{t-1}(1-q^t)_q^\infty}. \tag{2.19}$$

Alors à l'aide de (2.14) et (2.19), on obtient

$$\begin{aligned} \beta_q(t,s)\Gamma_q(t+s) &= \frac{(1-q)(1-q)_q^\infty(1-q^{t+s})_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty(1-q^s)_q^\infty} \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q)^{t+s-1}(1-q^{t+s})_q^\infty} \\ &= \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q)^{t-1}(1-q^t)_q^\infty} \frac{(1-q)_q^\infty(1-q)}{(1-q)^{s-1}(1-q^s)_q^\infty} \\ &= \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q)^{t-1}(1-q^t)_q^\infty} \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q)^{s-1}(1-q^s)_q^\infty} \\ &= \Gamma_q(t)\Gamma_q(s). \end{aligned}$$

■

4 Fonction q-Zêta

[10] Pour tout $x > 0$, on note

$$\alpha(x) = \frac{\log(x)}{\log(q)} - \mathrm{E}\left[\frac{\log(x)}{\log(q)}\right],$$

$$\{x\}_q = \frac{[x]_q}{q^{x+\alpha([x]_q)}}.$$

Définition 2.10 *Le q-analogue de la fonction Zêta de Riemann si* $\mathrm{E}\left[\frac{\log(x)}{\log(q)}\right]$ *est une partie entière de* $\frac{\log(x)}{\log(q)}$ *est définie pour* $s \in \mathbb{C}$ *par*

$$\zeta_q(s) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{n\}_q^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\left(n+\alpha([n]_q)\right)s}}{[n]_q^s}.$$

De plus dans [10], le q-analogue de la fonction classique de Zêta de Riemann tel que $\frac{\log(1-q)}{\log(q)} \in \mathbb{Z}$, a une expression intégrale pour tout $\mathrm{R}e(s) \succ 1$.

$$\zeta_q(s) = \frac{1}{\tilde{\Gamma}_q(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} \mathrm{Z}_q(t)\, d_q t,$$

sachant que

$$\mathrm{Z}_q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e_q^{-\{n\}_q t},$$

$$\tilde{\Gamma}_q(s) = \frac{\Gamma_q(t)\left(-q^t, -q^{1-t}; q\right)_{\infty}}{\left(-q, -1; q\right)_{\infty}},$$

telle que

$$\left(-q^t, -q^{1-t}; q\right)_{\infty} = \left(-q^t; q\right)_{\infty}\left(-q^{1-t}; q\right)_{\infty}$$

5 Applications

Dans cette section, nous donnons des nouvelles inégalités impliquant les fonctions q-spéciales, en utilisant leurs représentations intégrales et une technique développée par Mercer [16].
Ce type d'inégalités ont été étudiées par des nombreux auteurs (voir[3], [4], [20], [16]).

5.1 Fonction q-Gamma

Théorème 2.1 *[19] On définit la fonction f par*

$$f(x) = \frac{\left[\Gamma_q^{(2n)}(1+x)\right]^{\alpha}}{\Gamma_q^{(2n)}(1+\alpha x)},$$

alors

a) la fonction f est croissante si $0 < \alpha < 1$ sur $]0,\infty[$.

b) la fonction f est décroissante si $\alpha > 1$ sur $]0,\infty[$.

Preuve. La fonction Γ_q est de classe $\mathbb{C}^{\infty}$ sur $[0,\infty[$, sa dérivée nième est donnée par

$$\Gamma_q^{(2n)}(t) = \int_0^{\frac{1}{1-q}} x^{t-1}\left[\log(x)\right]^{2n} \mathrm{E}_q^{-qx} dx, \quad \forall x \in]0,\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

On considère un intervalle $\mathrm{I} = \left[0, \frac{1}{1-q}\right]$ et L une application dans $\mathbf{C}^*(\mathrm{I}) \subset \mathbf{C}(\mathrm{I})$ tel que

$$\mathrm{L}(v) = \int_0^{\frac{1}{1-q}} v(x)\left[\log(x)\right]^{2n} \mathrm{E}_q^{-qx} d_q x,$$

pour tout v dans $\mathbf{C}^*(\mathrm{I})$, on a

$$v(x) = \begin{cases} \mathrm{O}\left(x^{\beta}\right) & \text{si } \beta > -1 \text{ lorsque } x \longrightarrow 0 \\ \mathrm{O}(1) & \text{lorsque } x \longrightarrow \frac{1}{1-q}. \end{cases}$$

Alors d'après les inégalités (2) et (3), on trouve pour $\beta > \delta > 0$

$$\frac{\left[\Gamma_q^{(2n)}(1+\delta)\right]^{\alpha}}{\Gamma_q^{(2n)}(1+\alpha\delta)} > \frac{\left[\Gamma_q^{(2n)}(1+\beta)\right]^{\alpha}}{\Gamma_q^{(2n)}(1+\alpha\beta)} \quad ; \quad \alpha > 1, \tag{2.20}$$

et

$$\frac{\left[\Gamma_q^{(2n)}(1+\delta)\right]^{\alpha}}{\Gamma_q^{(2n)}(1+\alpha\delta)} < \frac{\left[\Gamma_q^{(2n)}(1+\beta)\right]^{\alpha}}{\Gamma_q^{(2n)}(1+\alpha\beta)} \quad ; \quad 0 < \alpha < 1. \tag{2.21}$$

■

Corollaire 2.1 *Soit* $x \in [0,1]$, *alors*

i.

$$\frac{1}{\Gamma_q(1+\alpha)} \leq \frac{[\Gamma_q(1+x)]^\alpha}{\Gamma_q(1+\alpha x)} \leq 1 \qquad si \quad \alpha \geq 1. \tag{2.22}$$

ii.

$$1 \leq \frac{[\Gamma_q(1+x)]^\alpha}{\Gamma_q(1+\alpha x)} \leq \frac{1}{\Gamma_q(1+\alpha)} \qquad si \quad 0 < \alpha \leq 1. \tag{2.23}$$

Preuve.

i. On applique $n=0$ dans (2.20), on trouve

$$\frac{[\Gamma_q(1+\beta)]^\alpha}{\Gamma_q(1+\alpha\beta)} < \frac{[\Gamma_q(1+\delta)]^\alpha}{\Gamma_q(1+\alpha\delta)}.$$

Ainsi, on pose $\beta = 1$ et $\delta = x$ avec $x \in [0,1]$ et $\beta > \delta$. Alors

$$\frac{1}{\Gamma_q(1+\alpha)} < \frac{[\Gamma_q(1+x)]^\alpha}{\Gamma_q(1+\alpha x)},$$

et si on pose $\beta = x$ et $\delta = 0$, alors on trouve

$$\frac{[\Gamma_q(1+x)]^\alpha}{\Gamma_q(1+\alpha x)} < 1.$$

Si $\alpha = 1$, on a l'inégalité (2.22).

ii. De même façon, on trouve (2.23).

■

Remarque 2.1 *Les résultats prouvés sont des* q*-analogues de Théorème précédente, si* $q = 1$, *nous obtenons les résultats concernant la fonction Gamma d'Euler.*

5.2 Fonction q-Bêta

Théorème 2.2 *[19] Pour* $s > 0$, *la fonction* f *est donnée par*

$$f(x) = \frac{[\beta_q(1+x,s)]^\alpha}{\beta_q(1+\alpha x,s)},$$

alors

a) la fonction f *est croissante pour tout* $0 < \alpha < 1$ *sur* $]0,\infty[$.

b) la fonction f *est décroissante pour* $\alpha > 1$ *sur* $]0,\infty[$.

Preuve. Soit la fonction q-Bêta est donnée par l'intégrale suivante

$$\beta_q(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{s-1}\, d_q x, \qquad t,s > 0.$$

On considère un intervalle $I = [0,1]$ et l'application linéaire positive L sur le sous espace $\mathbf{C}^*(I)$ de $\mathbf{C}(I)$ donnée par
$\forall s > 0$ et $v \in \mathbf{C}^*(I)$

$$L(v) = \int_0^1 v(x)\left(1-qx\right)_q^{s-1} d_q x,$$

tel que la fonction $v(x)$ vérifie les conditions suivante

$$v(x) = \begin{cases} O\left(x^{\beta}\right) & \text{si } \beta > -1 \text{ lorsque } x \longrightarrow 0 \\ O(1) & \text{lorsque } x \longrightarrow 1. \end{cases}$$

En utilisant les inégalités (2) et (3), alors pour $\beta > \delta > 0$. on obtient

$$\frac{\left[\beta_q(1+\delta,s)\right]^{\alpha}}{\beta_q(1+\alpha\delta,s)} > \frac{\left[\beta_q\left(1+\beta,s\right)\right]^{\alpha}}{\beta_q\left(1+\alpha\beta,s\right)} \quad ; \quad \alpha > 1, \tag{2.24}$$

et

$$\frac{\left[\beta_q(1+\delta,s)\right]^{\alpha}}{\beta_q(1+\alpha\delta,s)} < \frac{\left[\beta_q\left(1+\beta,s\right)\right]^{\alpha}}{\beta_q\left(1+\alpha\beta,s\right)} \quad ; \quad 0 < \alpha < 1. \tag{2.25}$$

■

Corollaire 2.2 *Pour tout $x \in [0,1]$ et $s > 0$, on a*

i.

$$\frac{[\alpha+s]_q}{[\alpha]_q\,[s]_q^{\alpha}\,[s+1]_q^{\alpha}\,\beta_q(\alpha,s)} \leq \frac{\left[\beta_q(1+x,s)\right]^{\alpha}}{\beta_q(1+\alpha x,s)} \leq \frac{1}{[s]_q^{\alpha-1}} \qquad si \quad \alpha \geq 1. \tag{2.26}$$

ii.

$$\frac{1}{[s]_q^{\alpha-1}} \leq \frac{\left[\beta_q(1+x,s)\right]^{\alpha}}{\beta_q(1+\alpha x,s)} \leq \frac{[\alpha+s]_q}{[\alpha]_q\,[s]_q^{\alpha}\,[s+1]_q^{\alpha}\,\beta_q(\alpha,s)} \qquad si \quad 0 < \alpha \leq 1. \tag{2.27}$$

Preuve.

i. On prend $\beta = 1$ et $\delta = x$ tel que $x \in [0,1]$ et $\beta > \delta$. Alors (2.24) devient

$$\frac{\left[\beta_q(2,s)\right]^{\alpha}}{\beta_q(1+\alpha,s)} < \frac{\left[\beta_q(1+x,s)\right]^{\alpha}}{\beta_q(1+\alpha x,s)}, \tag{2.28}$$

Maintenant on prend $\beta = x$ et $\delta = 0$. Alors

$$\frac{\left[\beta_q(1+x,s)\right]^{\alpha}}{\beta_q(1+\alpha x,s)} < \left[\beta_q(1,s)\right]^{\alpha-1}, \tag{2.29}$$

tel que

$$\beta_q(1,s) = \frac{1}{[s]_q}.$$

$$\beta_q(2,s) = \frac{1}{[s]_q\,[s+1]_q}.$$

$$\beta_q(1+\alpha,s) = \frac{[\alpha]_q}{[\alpha+s]_q}\beta_q(\alpha,s).$$

De (2.28), (2.29), et si $\alpha = 1$ on trouve l'inégalité (2.26).

ii. De même, on prouve l'inégalité (2.27).

■

Remarque 2.2 *Si $q = 1$, on trouve les inégalités concernant la fonction Bêta d'Euler.*

5.3 Fonction q-Zêta

Théorème 2.3 *[19] Soit la fonction f définie par*

$$f(x)=\frac{\left[\tilde{\Gamma}_q(1+x)\,\zeta_q(1+x)\right]^{\alpha}}{\tilde{\Gamma}_q(1+\alpha x)\,\zeta_q(1+\alpha x)},$$

alors

a) *la fonction f est croissante pour tout* $0<\alpha<1$ *sur* $]0,\infty[$.

b) *la fonction f est décroissante pour* $\alpha>1$ *sur* $]0,\infty[$.

Preuve. Soit la fonction définie pour tout $\mathrm{R}e(s)>1$ par

$$\zeta_q(s)\,\tilde{\Gamma}_q(s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}\mathrm{Z}_q(x)\,d_qx,$$

pour v dans $\mathbf{C}^*(\mathrm{I})$, on considère donc

$$\mathrm{L}(v)=\int_0^{\infty}v(x)\mathrm{Z}_q(x)d_qx,$$

tel que

$$v(x)=\begin{cases}\mathrm{O}\left(x^{\beta}\right) & \text{si }\ \beta>-1\ \text{ lorsque } x\longrightarrow 0\\ \mathrm{O}\left(x^{\delta}\right) & \forall\ \delta\ \text{ lorsque } x\longrightarrow\infty.\end{cases}$$

Ainsi on applique les inégalités (2) et (3), on trouve pour $\beta>\delta>0$

$$\frac{\left[\tilde{\Gamma}_q(1+\delta)\,\zeta_q(1+\delta)\right]^{\alpha}}{\tilde{\Gamma}_q(1+\alpha\delta)\,\zeta_q(1+\alpha\delta)}>\frac{\left[\tilde{\Gamma}_q(1+\beta)\,\zeta_q(1+\beta)\right]^{\alpha}}{\tilde{\Gamma}_q(1+\alpha\beta)\,\zeta_q(1+\alpha\beta)}\quad;\quad\alpha>1,$$

et

$$\frac{\left[\tilde{\Gamma}_q(1+\delta)\,\zeta_q(1+\delta)\right]^{\alpha}}{\tilde{\Gamma}_q(1+\alpha\delta)\,\zeta_q(1+\alpha\delta)}<\frac{\left[\tilde{\Gamma}_q(1+\beta)\,\zeta_q(1+\beta)\right]^{\alpha}}{\tilde{\Gamma}_q(1+\alpha\beta)\,\zeta_q(1+\alpha\beta)}\quad;\quad 0<\alpha<1.$$

■

Chapitre 3

Les Fonctions k-Spéciales

Gammak2).

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions fondamentales pour les fonctions k-spéciales, ainsi que certaines propriétés (voir [7], [15]).

La dernière section va sevir à trouver des applications pour certaines inégalités développées par Mercer [16].

1 Fonction k -Gamma

Définition 3.1 *[7] La fonction k-Gamma est donnée par l'intégrale suivante*

$$\Gamma_k(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{\frac{-t^k}{k}} dt, \quad \text{Re}(s) > 0. \tag{3.1}$$

Propriétés 3.1 *[15] Pour tout s un nombre réelle positif et pour tout $k > 0$, on a*

1-

$$\Gamma_k(s) = k^{\frac{s}{k}-1} \Gamma\left(\frac{s}{k}\right). \tag{3.2}$$

2-

$$\Gamma_k(s+k) = s\Gamma_k(s), \quad \textit{en particulier } \Gamma_k(k) = 1.$$

Preuve.

1- Par la définition de la fonction k-Gamma, on a

$$\begin{aligned} \Gamma_k(s) &= \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{\frac{-t^k}{k}} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{s-k} e^{\frac{-t^k}{k}} t^{k-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(t^k\right)^{\frac{s}{k}-1} e^{\frac{-t^k}{k}} t^{k-1} dt. \end{aligned}$$

Puis, on effectue le changement de variable suivant

$$x = \frac{t^k}{k}, \; dx = t^{k-1} dt.$$

Alors

$$\begin{aligned} \Gamma_k(s) &= k^{\frac{s}{k}-1} \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{k}-1} e^{-x} dx \\ &= k^{\frac{s}{k}-1} \Gamma\left(\frac{s}{k}\right). \end{aligned}$$

2- Pour démontrer la deuxième propriété, on a besoin d'utiliser la propriété (3.2) et (1.1). Alors

$$\begin{aligned}\Gamma_k(s+k) &= k^{\frac{s+k}{k}-1}\Gamma\left(\frac{s+k}{k}\right)\\ &= sk^{\frac{s}{k}-1}\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)\\ &= s\Gamma_k(s).\end{aligned}$$

■

2 Fonction k- Bêta

Définition 3.2 *[15] La fonction k-Bêta est donnée par l'intégrale suivante*

$$\beta_k(t,s) = \int_0^{\infty} x^{t-1}\left(1+x^k\right)^{-\frac{t+s}{k}} dx, \quad t,s > 0.$$

Définition 3.3 *[15] La fonction k-Bêta est donnée aussi pour $k > 0$*

$$\beta_k(t,s) = \frac{\Gamma_k(t)\Gamma_k(s)}{\Gamma_k(t+s)}. \tag{3.3}$$

Propriétés 3.2 *[15] La fonction k-Bêta vérifie les propriétés suivantes*

1-

$$\beta_k(t,s) = \frac{1}{k}\beta\left(\frac{t}{k},\frac{s}{k}\right). \tag{3.4}$$

2-

$$\beta_k(t,s) = \frac{1}{k}\int_0^1 x^{\frac{t}{k}-1}(1-x)^{\frac{s}{k}-1}dx.$$

Preuve.

1- D'après la propriété (3.2) et (3.3), on a

$$\begin{aligned}\beta_k(t,s) &= \frac{k^{\frac{t}{k}-1}\Gamma\left(\frac{t}{k}\right)k^{\frac{s}{k}-1}\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)}{k^{\frac{t+s}{k}-1}\Gamma\left(\frac{t+s}{k}\right)}\\ &= \frac{1}{k}\beta\left(\frac{t}{k},\frac{s}{k}\right).\end{aligned}$$

2- D'après la propriété (3.4) et la définition de la fontion Bêta (1.2), on obtient

$$\begin{aligned}\beta_k(t,s) &= \frac{1}{k}\beta\left(\frac{t}{k},\frac{s}{k}\right)\\ &= \frac{1}{k}\int_0^1 x^{\frac{t}{k}-1}(1-x)^{\frac{s}{k}-1}dx.\end{aligned}$$

■

3 Fonction k-Zêta

Définition 3.4 *[15] La fonction $\zeta_k(x)$ est donnée par la formule suivante*

$$\zeta_k(s) = \frac{1}{\Gamma_k(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-k}}{e^x-1}dx, \quad s > k. \tag{3.5}$$

Remarque 3.1 *Si $k=1$, on trouve la fonction Zêta de Riemann $\zeta(s)$.*

4 Applications

Dans la derniére section, on applique une technique de Mercer [16] sur les fonctions k-spéciales pour trouver les inégalités impliquant ces fonctions.

4.1 Fonction k-Gamma

Théorème 3.1 *[21] Soit f la fonction définie par*

$$f(x) = \frac{\left[\Gamma_k^{(2n)}(k+x)\right]^{\alpha}}{\Gamma_k^{(2n)}(k+\alpha x)},$$

alors

a) *la fonction f est croissante si* $0 < \alpha < 1$ *sur* $]0,\infty[$.

b) *la fonction f est décroissante si* $\alpha > 1$ *sur* $]0,\infty[$.

Preuve. La fonction k-Gamma est continue et dérivable sur $]0,\infty[$ et sa dérivée n'ième est donnée par

$$\Gamma_k^{(2n)}(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}\left[\log(x)\right]^{2n} e^{\frac{-x^k}{k}}\,dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On introduit l'application linéaire $\mathrm{L} \in \mathbf{C}^*(\mathrm{I}) \subset \mathbf{C}(\mathrm{I})$ par

$$\mathrm{L}(v) = \int_0^{\infty} v(x) x^{k-1}\left[\log(x)\right]^{2n} e^{\frac{-x^k}{k}}\,dx,$$

pour tout v dans $\mathbf{C}^*(\mathrm{I})$, on a

$$v(x) = \begin{cases} \mathrm{O}\left(x^{\beta}\right) & \text{si } \beta > -k \text{ lorsque } x \longrightarrow 0 \\ \mathrm{O}\left(x^{\delta}\right) & \forall\ \delta \text{ lorsque } x \longrightarrow \infty. \end{cases}$$

En utilisant les inégalités (2) et (3) sachant que $\beta > \delta > 0$, alors

$$\frac{\left[\Gamma_k^{(2n)}(k+\delta)\right]^{\alpha}}{\Gamma_k^{(2n)}(k+\alpha\delta)} > \frac{\left[\Gamma_k^{(2n)}(k+\beta)\right]^{\alpha}}{\Gamma_k^{(2n)}(k+\alpha\beta)} \quad ; \quad \alpha > 1, \tag{3.6}$$

et

$$\frac{\left[\Gamma_k^{(2n)}(k+\delta)\right]^{\alpha}}{\Gamma_k^{(2n)}(k+\alpha\delta)} < \frac{\left[\Gamma_k^{(2n)}(k+\beta)\right]^{\alpha}}{\Gamma_k^{(2n)}(k+\alpha\beta)} \quad ; \quad 0 < \alpha < 1. \tag{3.7}$$

■

Corollaire 3.1 *Soit $x \in [0,k]$, on a*

i.

$$\frac{k^{\alpha}}{\Gamma_k(\alpha k+k)} \leq \frac{[\Gamma_k(k+x)]^{\alpha}}{\Gamma_k(k+\alpha x)} \leq 1 \qquad si \quad \alpha \geq 1. \tag{3.8}$$

ii.

$$1 \leq \frac{[\Gamma_k(k+x)]^{\alpha}}{\Gamma_k(k+\alpha x)} \leq \frac{k^{\alpha}}{\Gamma_k(\alpha k+k)} \qquad si \quad < \alpha \leq 1. \tag{3.9}$$

Preuve.

i. Pour $n=0$ dans (3.6), on trouve

$$\frac{\left[\Gamma_k\left(k+\beta\right)\right]^{\alpha}}{\Gamma_q\left(k+\alpha\beta\right)} < \frac{\left[\Gamma_k\left(k+\delta\right)\right]^{\alpha}}{\Gamma_k\left(k+\alpha\delta\right)}.$$

On prend $\beta=k$ et $\delta=x$ avec $x\in[0,k]$ et $\beta>\delta$, on trouve

$$\frac{\left[\Gamma_k\left(2k\right)\right]^{\alpha}}{\Gamma_k\left(k+\alpha k\right)} < \frac{\left[\Gamma_k\left(k+x\right)\right]^{\alpha}}{\Gamma_k\left(k+\alpha x\right)},$$

si on prend $\beta=x$ et $\delta=0$, on obtient

$$\frac{\left[\Gamma_k\left(k+x\right)\right]^{\alpha}}{\Gamma_k\left(k+\alpha x\right)} < \frac{\left[\Gamma_k\left(k\right)\right]^{\alpha}}{\Gamma_k\left(k\right)} < 1.$$

Si $\alpha=1$, on trouve l'inégalité (3.8).

ii. De la même méthode on prouve (3.9).

■

Remarque 3.2 *Ces résultats sont des k-analogues des Théorèmes donnés précédemment, si on pose $k=1$, alors on obtient les inégalités concernant la fonction Gamma d'Euler.*

4.2 Fonction k-Bêta

Théorème 3.2 *[21] Soit la fonction f définie pour tout $s>0$ par*

$$f(x)=\frac{\left[\beta_k\left(k(1+x),s\right)\right]^{\alpha}}{\beta_k\left(k\left(1+\alpha x\right),s\right)},$$

alors

a) la fonction f est croissante pour tout $0<\alpha<1$ sur $]0,\infty[$.

b) la fonction f est décroissante pour $\alpha>1$ sur $]0,\infty[$.

Preuve. Soit la fonction k-Bêta définie par

$$\beta_k(t,s) \quad = \quad \frac{1}{k}\int_0^1 x^{\frac{t}{k}-1}(1-x)^{\frac{s}{k}-1}\,dx.$$

On introduit $\mathrm{L}\in\mathbf{C}^*(\mathrm{I})\subset\mathbf{C}(\mathrm{I})$ pour $\mathrm{I}=[0,1]$
$\forall\, s>0$ et $v\in\mathbf{C}^*(\mathrm{I})$. On a

$$\mathrm{L}(v)=\int_0^1 v(x)\,(1-x)^{\frac{s}{k}-1}\,dx.$$

tel que la fonction $v(x)$ doit vérifier les conditions d'existence et de la convergence de l'intégrale suivante

$$v(x)=\begin{cases} \mathrm{O}\left(x^{\beta}\right) & \text{si } \beta>-1 \text{ lorsque } x\longrightarrow 0 \\ \mathrm{O}(1) & \quad\text{lorsque } x\longrightarrow 1. \end{cases}$$

D'après les inégalités (2) et (3), on obtient pour $\beta>\delta>0$

$$\frac{\left[\beta_k\left(k(1+\delta),s\right)\right]^{\alpha}}{\beta_k\left(k(1+\alpha\delta),s\right)} > \frac{\left[\beta_k\left(k(1+\beta),s\right)\right]^{\alpha}}{\beta_k\left(k(1+\alpha\beta),s\right)} \quad ; \quad \alpha>1, \tag{3.10}$$

et

$$\frac{\left[\beta_k\left(k(1+\delta),s\right)\right]^{\alpha}}{\beta_k\left(k(1+\alpha),s\right)} < \frac{\left[\beta_k\left(k(1+\beta),s\right)\right]^{\alpha}}{\beta_k\left(k(1+\alpha\beta),s\right)} \quad ; \quad 0<\alpha<1. \tag{3.11}$$

■

Corollaire 3.2 *Pour tout $x \in [0,k]$ et $s>0$, on a*

i.

$$\frac{k^{2(\alpha-1)}\left(\alpha k^2+s\right)}{\alpha\left(k^2+s\right)^{\alpha}}\frac{\left[\beta_k\left(k^2,s\right)\right]^{\alpha}}{\beta_k\left(\alpha k^2,s\right)} \leq \frac{\left[\beta_k\left(k(1+x),s\right)\right]^{\alpha}}{\beta_k\left(k(1+\alpha x),s\right)} \leq \left[\beta_k(k,s)\right]^{\alpha-1} \qquad si \quad \alpha \geq 1.$$

ii.

$$\left[\beta_k(k,s)\right]^{\alpha-1} \leq \frac{\left[\beta_k\left(k(1+x),s\right)\right]^{\alpha}}{\beta_k\left(k(1+\alpha x),s\right)} \leq \frac{k^{2(\alpha-1)}\left(\alpha k^2+s\right)}{\alpha\left(k^2+s\right)^{\alpha}}\frac{\left[\beta_k\left(k^2,s\right)\right]^{\alpha}}{\beta_k\left(\alpha k^2,s\right)} \qquad si \quad 0<\alpha \leq 1.$$

Remarque 3.3 *Si on a $k=1$, on trouve les inégalités pour la fonction Bêta d'Euler.*

4.3 Fonction k-Zêta

Théorème 3.3 *[21] Soit la fonction f donnée par*

$$f(x) = \frac{\left[\zeta_k(x+k+1)\,\Gamma_k(x+k+1)\right]^{\alpha}}{\zeta_k(\alpha x+k+1)\,\Gamma_k(\alpha x+k+1)},$$

alors

a) la fonction f est croissante pour tout $0<\alpha<1$ sur $]0,\infty[$.

b) la fonction f est décroissante pour $\alpha>1$ sur $]0,\infty[$.

Preuve. D'après la définition de la fonction ζ_k, on trouve

$$\zeta_k(s)\,\Gamma_k(s) = \int_0^{\infty} x^{s-k}\frac{1}{e^x-1}dx, \quad s>k.$$

On introduit l'application linéaire $\mathrm{L} \in \mathbf{C}^*(\mathrm{I}) \subset \mathbf{C}(\mathrm{I})$ tel que

$$\mathrm{L}(v) = \int_0^{\infty} v(x)\frac{x}{e^x-1}dx.$$

Pour tout v dans $\mathbf{C}^*(\mathrm{I})$

$$v(x) = \begin{cases} \mathrm{O}\left(x^{\beta}\right) & \text{si } \beta > -1 \text{ lorsque } x \longrightarrow 0 \\ \mathrm{O}\left(x^{\delta}\right) & \forall\ \delta \text{ lorsque } x \longrightarrow \infty. \end{cases}$$

D'après l'inégalités (2) et (3), on obtient pour $\beta > \delta > 0$

$$\frac{\left[\Gamma_k(1+k+\delta)\,\zeta_k(k+1+\delta)\right]^{\alpha}}{\Gamma_k(1+k+\alpha\delta)\,\zeta_k(1+k+\alpha\delta)} > \frac{\left[\Gamma_k\left(1+k+\beta\right)\zeta_k\left(1+k+\beta\right)\right]^{\alpha}}{\Gamma_k\left(1+k+\alpha\beta\right)\zeta_k\left(1+k+\alpha\beta\right)} \quad ; \quad \alpha>1,$$

et

$$\frac{\left[\Gamma_k(1+k+\delta)\,\zeta_k(1+k+\delta)\right]^{\alpha}}{\Gamma_k(1+k+\alpha\delta)\,\zeta_k(1+k+\alpha\delta)} < \frac{\left[\Gamma_k\left(1+k+\beta\right)\zeta_k\left(1+k+\beta\right)\right]^{\alpha}}{\Gamma_k\left(1+k+\alpha\beta\right)\zeta_k\left(1+k+\alpha\beta\right)} \quad ; \quad 0<\alpha<1.$$

■

Remarque 3.4 *Si $k=1$, on trouve les inégalités pour la fonction Zêta .*

Chapitre 4

Les Fonctions q,k-Spéciales

Dans ce chapitre, on donne les définitions fondamentales pour les fonctions q,k-spéciales et quelques propriétés liée à ces fonctions (voir [8], [21]).
Dans la dernière section, on s'intéresse à appliquer certaines inégalités par la technique de Mercer [16].

1 Fonction q,k-Gamma

Définition 4.1 *[8] Pour tout $n \in \mathbb{Z}^+$, $x \in \mathbb{R}$, on définit le q,k-analogue des formules suivantes*

I-

$$(1-x)_{q,k}^n = \prod_{j=0}^{n-1}\left(1-q^{jk}x\right). \tag{4.1}$$

II- le q,k-analogue de la fonction exponentielle est représenté par

$$\mathrm{E}_{q,k}^x = \left(1+\left(1-q^k\right)x\right)_{q,k}^{\infty}.$$

Définition 4.2 *[8] La fonction q,k-Gamma notée $\Gamma_{q,k}$ est donnée par la formule suivante*

$$\Gamma_{q,k}(s) = \frac{\left(1-q^k\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}-1}}{\left(1-q\right)^{\frac{s}{k}-1}}, \quad s>0, \tag{4.2}$$

elle admet une représentation intégrale de Jackson par

$$\Gamma_{q,k}(s) = \int_0^{\left(\frac{[k]_q}{\left(1-q^k\right)}\right)^{\frac{1}{k}}} x^{s-1}\mathrm{E}_{q,k}^{\frac{-q^k x^k}{[k]_q}}\, d_q x, \quad s>0. \tag{4.3}$$

Proposition 4.1 *[8] La fonction $\Gamma_{q,k}$ satisfait les formules suivantes*

I-

$$\Gamma_{q,k}(s+k) = [s]_q\Gamma_{q,k}(s).$$

II-

$$\Gamma_{q,k}(k) = 1.$$

Preuve.

I- D'après (4.2), on trouve

$$\begin{aligned}\Gamma_{q,k}(s+k) &= \frac{\left(1-q^k\right)_{q,k}^{\frac{s+k}{k}-1}}{(1-q)^{\frac{s+k}{k}-1}} \\ &= \frac{\left(1-q^s\right)}{(1-q)}\frac{\left(1-q^k\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}-1}}{(1-q)^{\frac{s}{k}-1}} \\ &= [s]_q\Gamma_{q,k}(s).\end{aligned}$$

II- évident.

■

2 Fonction q,k-Bêta

Définition 4.3 *[8] La fonction q,k-Bêta notée $\beta_{q,k}$ est définie par*

$$\beta_{q,k}(t,s) = \frac{(1-q)\left(1-q^k\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}-1}}{\left(1-q^t\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}}}, \quad t,s>0. \tag{4.4}$$

elle admet aussi une représentation intégrale par

$$\beta_{q,k}(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}\left(1-q^k x^k\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}-1} d_q x.$$

Propriétés 4.1 *[8] La fonction $\beta_{q,k}$ satisfait les formules suivante pour tout $t,s>0$*

1-

$$\beta_{q,k}(t,\infty) = (1-q)^{\frac{t}{k}}\,\Gamma_{q,k}(t).$$

2-

$$\beta_{q,k}(t+k,s) = \frac{[t]_q}{[s]_q}\beta_{q,k}(t,s+k).$$

3-

$$\beta_{q,k}(t,s+k) = \beta_{q,k}(t,s) - q^s\beta_{q,k}(t+k,s).$$

4-

$$\beta_{q,k}(t,s+k) = \frac{[s]_q}{[s+t]_q}\beta_{q,k}(t,s).$$

5-

$$\beta_{q,k}(t,k) = \frac{1}{[t]_q}.$$

Preuve.

1- En utilise la définition de la fonction $\beta_{q,k}$ (4.4) et (4.1), alors par simplification, on a

$$
\begin{aligned}
\beta_{q,k}(t,\infty) &= (1-q)\frac{\left(1-q^k\right)_{q,k}^{\infty}}{\left(1-q^t\right)_{q,k}^{\infty}} = \frac{(1-q)\left(1-q^k\right)_{q,k}^{\infty}}{\left(1-q^{k\frac{(t-k)}{k}}q^k\right)_{q,k}^{\infty}} \\
&= (1-q)\left(1-q^k\right)_{q,k}^{\frac{t}{k}-1} \\
&= (1-q)^{\frac{t}{k}}\,\Gamma_{q,k}(t).
\end{aligned}
$$

2-

$$
\begin{aligned}
\frac{\beta_{q,k}(t+k,s)}{\beta_{q,k}(t,s+k)} &= \frac{\left(1-q^k\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}-1}\left(1-q^t\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}+1}}{\left(1-q^k\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}}\left(1-q^{t+k}\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}}} = \frac{\left(1-q^t\right)}{\left(1-q^s\right)} \\
&= \frac{[t]_q}{[s]_q}.
\end{aligned}
$$

3-

$$
\begin{aligned}
\frac{\beta_{q,k}(t,s+k)-\beta_{q,k}(t,s)}{\beta_{q,k}(t+k,s)} &= \frac{\left(1-q^{t+k}\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}}\left(1-q^k\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}}}{\left(1-q^t\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}+1}\left(1-q^k\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}-1}} - \frac{\left(1-q^{t+k}\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}}}{\left(1-q^t\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}}} \\
&= \frac{\left(1-q^s\right)}{\left(1-q^t\right)} - \frac{\left(1-q^{t+s}\right)}{\left(1-q^t\right)} = -q^s.
\end{aligned}
$$

4-

$$
\begin{aligned}
\frac{\beta_{q,k}(t,s+k)}{\beta_{q,k}(t,s)} &= \frac{\left(1-q^k\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}}\left(1-q^t\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}}}{\left(1-q^t\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}+1}\left(1-q^k\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}-1}} \\
&= \frac{\left(1-q^k\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}}\left(1-q^t\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}}}{\left(1-q^t\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}}\left(1-q^{t+s}\right)\left(1-q^k\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}}\left(1-q^s\right)^{-1}} \\
&= \frac{\left(1-q^s\right)}{\left(1-q^{t+s}\right)} = \frac{[s]_q}{[s+t]_q}.
\end{aligned}
$$

5- D'après (4.4) on trouve

$$
\beta_{q,k}(t,k) = \frac{(1-q)}{\left(1-q^t\right)} = \frac{1}{[t]_q}.
$$

■

Remarque 4.1

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma_{q,k}(t) \arrow[r, "q\to 1"] \arrow[d, "k\to 1"'] & \Gamma_k(t) \arrow[d, "k\to 1"] \\
\Gamma_q(t) \arrow[r, "q\to 1"'] & \Gamma(t)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B_{q,k}(t,s) \arrow[r, "q\to 1"] \arrow[d, "k\to 1"'] & B_k(t,s) \arrow[d, "k\to 1"] \\
B_q(t,s) \arrow[r, "q\to 1"'] & B(t,s)
\end{tikzcd}
$$

FIGURE 4.1 – Le diagramme commutatif pour la fonction Gamma et Bêta .

3 Applications

Dans cette section, on s'interesse à trouver des nouvelles inégalités pour les fonctions q,k-spéciales par la méthode géométrique qui a été développée par Mercer [16].

3.1 Fonction q,k-Gamma

Théorème 4.1 *[21] Soit la fonction f représentée par*

$$f(x) = \frac{\left[\Gamma_{q,k}^{(2n)}(k+x)\right]^{\alpha}}{\Gamma_{q,k}^{(2n)}(k+\alpha x)},$$

alors

a) la fonction f est croissante si $0 < \alpha < 1$ sur $]0,\infty[$.

b) la fonction f est décroissante si $\alpha > 1$ sur $]0,\infty[$.

Preuve. La fonction $\Gamma_{q,k}$ est différentiable sur $]0,\infty[$ et ses dérivées successives est donnée comme suit

$$\Gamma_{q,k}^{(2n)}(t) = \int_0^{\left(\frac{[k]_q}{(1-q^k)}\right)^{\frac{1}{k}}} x^{t-1}\left[\log(x)\right]^{2n} \mathrm{E}_{q,k}^{\frac{-q^k x^k}{[k]_q}}\, d_q x, \quad t>0\; n\in\mathbb{N}.$$

On prend une application linéaire L définie par

$$\mathrm{L}(v) = \int_0^{\left(\frac{[k]_q}{(1-q^k)}\right)^{\frac{1}{k}}} v(x) x^{k-1}\left[\log(x)\right]^{2n} \mathrm{E}_{q,k}^{\frac{-q^k x^k}{[k]_q}}\, d_q x.$$

Soit un intervalle $\mathrm{I} = \left(\frac{[k]_q}{(1-q^k)}\right)^{\frac{1}{k}}$, pour tout v dans $\mathbf{C}^*(\mathrm{I})$, la fonction $v(x)$ vérifie les conditions suivantes

$$v(x) = \begin{cases} \mathrm{O}\left(x^{\beta}\right) & \text{si } \beta > -k \text{ lorsque } x \longrightarrow 0 \\ \mathrm{O}(1) & \text{lorsque } x \longrightarrow \left(\frac{[k]_q}{(1-q^k)}\right)^{\frac{1}{k}}. \end{cases}$$

Par les inégalités (2), (3) on obtient pour $\beta > \delta > 0$

$$\frac{\left[\Gamma_{q,k}^{(2n)}(k+\delta)\right]^{\alpha}}{\Gamma_{q,k}^{(2n)}(k+\alpha\delta)} > \frac{\left[\Gamma_{q,k}^{(2n)}(k+\beta)\right]^{\alpha}}{\Gamma_{q,k}^{(2n)}(k+\alpha\beta)} \quad ; \quad \alpha > 1, \tag{4.5}$$

et

$$\frac{\left[\Gamma_{q,k}^{(2n)}(k+\delta)\right]^{\alpha}}{\Gamma_{q,k}^{(2n)}(k+\alpha\delta)} < \frac{\left[\Gamma_{q,k}^{(2n)}(k+\beta)\right]^{\alpha}}{\Gamma_{q,k}^{(2n)}(k+\alpha\beta)} \quad ; \quad 0 < \alpha < 1. \tag{4.6}$$

■

Corollaire 4.1 *Soit $x \in [0,k]$, on a*

i.

$$\frac{k^{\alpha}}{\Gamma_{q,k}(\alpha k+k)} \leq \frac{\left[\Gamma_{q,k}(k+x)\right]^{\alpha}}{\Gamma_{q,k}(k+\alpha x)} \leq 1 \qquad si\ \alpha \geq 1. \tag{4.7}$$

.

ii.

$$1 \leq \frac{\left[\Gamma_{q,k}(k+x)\right]^{\alpha}}{\Gamma_{q,k}(k+\alpha x)} \leq \frac{k^{\alpha}}{\Gamma_{q,k}(\alpha k+k)} \qquad si \quad 0 < \alpha \leq 1. \tag{4.8}$$

.

Preuve.

i. On prend $n = 0$, l'inégalité (4.5) devient

$$\frac{\left[\Gamma_{q,k}\left(k+\beta\right)\right]^{\alpha}}{\Gamma_{q,k}\left(k+\alpha\beta\right)} < \frac{\left[\Gamma_{q,k}(k+\delta)\right]^{\alpha}}{\Gamma_{q,k}(k+\alpha\delta)}. \tag{4.9}$$

On pose $\beta = k$ et $\delta = x$ avec $x \in [0,k]$ et $\beta > \delta$. Alors on a

$$\frac{\left[\Gamma_{q,k}(2k)\right]^{\alpha}}{\Gamma_{q,k}(k+\alpha k)} < \frac{\left[\Gamma_{q,k}(k+x)\right]^{\alpha}}{\Gamma_{q,k}(k+\alpha x)},$$

si on prend $\beta = x$ et $\delta = 0$, on trouve

$$\frac{\left[\Gamma_{q,k}(k+x)\right]^{\alpha}}{\Gamma_{q,k}(k+\alpha x)} < \frac{\left[\Gamma_{q,k}(k)\right]^{\alpha}}{\Gamma_{q,k}(k)} < 1.$$

Si $\alpha = 1$, on a l'inégalité (4.7).

ii. De la même manière on prouve (4.8)

■

Remarque 4.2 *Si on pose $q = 1$ et $k = 1$, on obtient les résultats concernant la fonction Gamma d'Euler.*

3.2 La fonction q,k-Bêta

Théorème 4.2 *[21] Soit la fonction f définie pour $s > 0$ par*

$$f(x) = \frac{\left[\beta_{q,k}(k+x,s)\right]^{\alpha}}{\beta_{q,k}(k+\alpha x,s)},$$

alors

a) la fonction f est croissante pour tout $0 < \alpha < 1$ sur $]0,\infty[$.

b) la fonction f est décroissante pour $\alpha > 1$ sur $]0,\infty[$.

Preuve. Soit la fonction $\beta_{q,k}$ donnée par

$$\beta_{q,k}(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}\left(1-q^k x^k\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}-1} d_q x.$$

Alors on introduit une application linéaire $\mathrm{L} \in \mathbf{C}^*(\mathrm{I}) \subset \mathbf{C}(\mathrm{I})$ avec $\mathrm{I} = [0,1]$

$$\mathrm{L}(v) = \int_0^1 v(x) x^{k-1}\left(1-q^k x^k\right)_{q,k}^{\frac{s}{k}-1} d_q x.$$

$\forall s > 0$ et $v \in \mathbf{C}^*(\mathrm{I})$
tel que

$$v(x) = \begin{cases} \mathrm{O}\left(x^{\beta}\right) & \text{si } \beta > -k \text{ lorsque } x \longrightarrow 0 \\ \mathrm{O}(1) & \text{lorsque } x \longrightarrow 1. \end{cases}$$

D'après les inégalités (2) et (3), on trouve pour $\beta > \delta > 0$

$$\frac{\left[\beta_{q,k}(k+\delta,s)\right]^{\alpha}}{\beta_{q,k}(k+\alpha\delta,s)} > \frac{\left[\beta_{q,k}(k+\beta,s)\right]^{\alpha}}{\beta_{q,k}\left(k+\alpha\beta,s\right)} \quad ; \quad \alpha > 1, \tag{4.10}$$

et

$$\frac{\left[\beta_{q,k}(k+\delta,s)\right]^{\alpha}}{\beta_{q,k}(k+\alpha,s)} < \frac{\left[\beta_{q,k}\left(k+\beta,s\right)\right]^{\alpha}}{\beta_{q,k}\left(k+\alpha\beta,s\right)} \quad ; \quad 0 < \alpha < 1. \tag{4.11}$$

■

Corollaire 4.2 *Pour tout $x \in [0,k[$ et $s > 0$, on a*

i.

$$\frac{[k]_q^{\alpha}[\alpha k+s]_q}{[k+s]_q^{\alpha}[\alpha k]_q}\frac{\beta_{q,k}^{\alpha}(k,s)}{\beta_{q,k}(\alpha k,s)} \leq \frac{\left[\beta_{q,k}(k+x,s)\right]^{\alpha}}{\beta_{q,k}(k+\alpha x,s)} \leq \left[\beta_{q,k}(k,s)\right]^{\alpha-1} \qquad si \quad \alpha \geq 1.$$

ii.

$$\left[\beta_{q,k}(k,s)\right]^{\alpha-1} \leq \frac{\left[\beta_{q,k}(k+x,s)\right]^{\alpha}}{\beta_{q,k}(k+\alpha x,s)} \leq \frac{[k]_q^{\alpha}[\alpha k+s]_q}{[k+s]_q^{\alpha}[\alpha k]_q}\frac{\beta_{q,k}^{\alpha}(k,s)}{\beta_{q,k}(\alpha k,s)} \qquad si \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Remarque 4.3 *Si on a $q = 1$ et $k = 1$, on trouve les inégalités pour la fonction Bêta d'Euler.*

Conclusion

Dans le cadre du projet de fin d'études, nous avons constaté que les fonctions spéciales jouaient un rôle majeur dans la recherche et les applications de nombreuses branches, qui étaient utilisées par de nombreux mathématiciens, dont Mercer, qui avait mis au point une technique très intéressante qui poussait les chercheurs à appliquer des fonctions spéciales.

il existe des autres inégalités pour les fonctions spéciales comme l'inégalité de Chebychev et l'inégalité de Grüss, ces résultat utilisés pour prouver certaines inégalités .

Bibliographie

[1] **Alberto.D and Kac.G.** *On intergal representation of q-Gamma and q-beta function.Rendiconti Lincei Matematica end Applicazion, vol 16, Serie 9, pp. 11–29 .(2005)* . 11, 12, 13, 14, 17

[2] **Alsina.C and Tomas.M .** *A geometrical proof of a new inequality for the Gamma function, vol 6(2) Art, 48.(2005).* 2, 4, 19

[3] **Andrews.G,Askey.R and Roy.R .** *Special functions,Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, vol 71.(1999).* 2, 4, 19

[4] **Bougoffa.L.** *Some Inequalities involving the Gamma function, vol7(5), Art, 179.(2006).* 19

[5] **Bertrand.J, Bertrand.P and Ovarpez.J.** *The Mellin Transform : The Transforms and Applications Handbook, Second Edition-Alexander.Ed, Poularikas. D.(2000).* 2

[6] **Debnath,Lokenath, and Bhatta.D.** *Integral Transforms and Their Applications,Third Edition, Boca Raton CRC Press LLC,(2015).* 2

[7] **Diaz.R and Pariguan.E.** *On hyperge-ometric functions and Pochhammer k-symbol, Divulgaciones Matematicas, 15(2) , pp 179-192.(2007).* 3, 23

[8] **Díaz.R and Teruel.C .** *q,k-Generalized Gamma and Beta Functions, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 12(1), pp 118-134.(2005).* 3, 30, 31

[9] **Edwards.H .** *Riemann's Zeta Function,* Acad- Press, Inc ,New York.(1974). 5

[10] **Fitouhi.A ,Bettaibi.N and Brahim.K** , *The Mellin transform in quantum calculus, Constructive Approximation, 23(3), pp 305–323.* 18

[11] **Gasper.G and Rahmam. M.** *Basic Hypergeometric Series.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge University Press, Cambridge,2nd edition. (2004). 2, 11, 12

[12] **Jackson.F.** *q-Definite integrals Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, vol 41, pp 193–203.(1910).* 14

[13] **Jackson.F.** *A generalization of the Gamma function, Proc. Roy. Soc. London, (74) pp 64-72.(1904).* 2

[14] **Kac.V and Cheung.P.** *Quantum Calculus,* Springer-Verlag, New York. (2002). 2, 4, 5, 11, 12, 14, 15

[15] **Kokologiannaki.C and Krasniqi.V.** *Some properties of k-Gamma and beta function, Le Mathematiche, 68 (1) , pp 13–22 .(2013).* 3, 23, 24, 25

[16] **Mercer.A.** *Some new inequalities for the Gamma, Beta and Zeta functions, J. Ineq,Pure. App. Math,7(1).(2006).* 2, 4, 7, 8, 9, 19, 23, 26, 30, 33

[17] **Moak. D.** *The q-analogue of Stirling's formula. Rocky Mountain J. Math, 14 , no 2, pp 403-413.(1984).* 2

[18] **Philip.J and Davis.** *Leonhard Euler's Integral An Historical Profile of the Gamma Function, the American Mathematical Monthly,vol.66,No.10,pp 849-869. (1959).* 4

[19] **Sellami.M,Brahim.K and Bettaibi.N.** *New inequalities for some special and q-special functions, J. Ineq. Pure. App. Math 8 (2) Art. 47, 7pp.(2007).* 19, 20, 22

[20] **Taekyun.K and diga.C.** *On the q-analogue of gamma functions and related inequalities, vol 6(4), Art, 118.(2005).* 19

[21] **Taf.S ,Nefzi.B and Riahi.L.** *new generalization of some inequalities for k-spècial and q,k-spècial functions, doi : 10.4418,pp 103–113 .(2015).* 26, 27, 28, 30, 33, 35

[22] **Thomae.J.** *Beitrage zur Theorie der durch die Heinesche Reihe., J. reine angew.Math, (70) pp 258–281 .(1869).* 2

-