Notations,Intro, Chapitre1, Chapitre2, Chapitre3, Conclusion,Annexe, Bibliographie, resume

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité : "Modélisation Controle et Optimisation"

Présenté par :

Karima BELKRARROUBI

Stabilité des Équations Différentielles Fractionnaires

soutenu publiquement Juin 2019 devant le jury composé de :

Président :	Zoubir DAHMANI	P.r	U. MOSTAGANEM
Examinatrice :	Hafida BENDAHMANE	M.C.B	U. MOSTAGANEM
Encadrante :	Amele TAÏEB	M.C.B	U. MOSTAGANEM

Année Universitaire : 2018-2019

MASTER

Dédicaces

Je dédie ce mémoire :

À mon cher père et ma chère mère, qui m'ont aidé à affronter les difficultés.

À mon frère Houcine et mes sœurs : Nabila, Zineb, Malika, Souad et Asmaa.

À toute la famille Belkrarroubi.

À mes amis.

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie le Bon Dieu, Tout Puissant, qui m'a donné la volonté et le courage pour pouvoir achever ce travail.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadrante Madame Amele TAÏEB, Maître de Conférences à l'Université de Mostaganem, pour ses précieux conseils et ses encouragements tout au long de ce travail.

Je souhaite également remercier Monsieur Zoubir DAHMANI, Professeur à l'Université de Mostaganem, de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.

Je tiens à remercier également Madame Hafida BENDAHMANE, Maître de Conférences à l'Université de Mostaganem, qui me fait l'honneur en acceptant d'éxaminer ce mémoire.

Je ne pourrais terminer sans remercier mon père, ma mère et ma famille qui m'ont soutenu et encouragé.

Table des matières

Index des notations

$\mathbb{N}-\{0\}$: Ensemble des entiers naturels non nuls.
$\mathbb{R}^*$: Ensemble des nombres réels non nuls.
$\mathbb{R}^*_+$: Ensemble des nombres réels strictement positifs.
$\|.\|_\infty$: Norme infinie, $\|x\|_\infty = \mathrm{M}ax\,(|x(t)|\,,\, t\in[a,b])$.
$C\,([0,1])$: Espace des fonctions continues sur [0,1].
$C\,([0,1]\,,\mathbb{R})$: Espace des fonctions continues de [0,1] à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$C\,([0,1]\,,\mathbb{B})$: Espace des fonctions continues sur [0,1] à valeurs dans un espace de Banach $\mathbb{B}$.
$\Gamma(.)$: Fonction Gamma.
$\mathrm{B}(.,.)$: Fonction Bêta.
I^{α}_{a} : Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α > 0, au point a.
${}^{RL}\mathrm{D}^{\alpha}_{a}$: Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α > 0, au point a.
${}^{c}\mathrm{D}^{\alpha}_{a}$: Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α > 0, au point a.

Introduction

La dérivation d'ordre fractionnaire remonte à diverses correspondances entre Gottfried Wilhelm Leibniz, Guillaume de L'Hôspital et Johann Bernoulli à la fin du 17ème siècle, voir [19].

Plusieurs définitions de la dérivation fractionnaire ont fait leurs apparitions, dont on peut citer Joseph Lioville (1832-1837), A.K. Grünwald (1867-1872), Aleksey Vasilyevich Letnikov (1868-1872), Hermann Weyl (1917), et M.Caputo (1967), voir [2].

En 1974, B. Ross a organisé la première conférence sur le calcul fractionnaire et ses applications à l'Université de New Haven. De plus, Keith B. Oldham et Jerome Spanier ont publié le premier livre consacré au calcul fractionnaire en 1974, voir [26].

La monographie "encyclopédie" de Anatoly A. Kilbas et Oleg Marichev du calcul fractionnaire a été publiée en 1993, voir [24].

Le sujet du calcul fractionnaire a gagné une importance par ses applications dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie, voir [10, 22, 41].

D'autre part, en 1940, la question de la stabilité des équations fonctionnelles a été soulevée par Stanisław Ulam dans un discours prononcé à l'Université du Wisconsin, [42]. En1941, Hyers a donné une réponse partielle à la question d'Ulam, [9].

En 1978, Tomson Rassias a établi la stabilité au sens d'Ulam-Hyers des opérateurs linéaires et non linéaires, voir [23].

Récemment, plusieurs papiers [8, 12, 13, 14, 15, 28, 30, 31] ont été publiés en généralisant les résultats de Ulam-Hyers dans plusieurs directions. Très récemment, A. Taïeb a obtenu quelques résultats d'existence et de stabilité pour plusieurs classes des équations diférentielles fractionnaires au sens de Caputo, voir [34, 35, 36].

L'objectif de ce manuscrit est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution pour un système des équations différentielles fractionnaires, ainsi que la stabilité au sens d'Ulam-Hyers généralisée du système considéré.

Ce mémoire comprend trois chapitres :

Chapitre1, intitulé "Notions Fondamentales" est consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire.

Chapitre2, intitulé "Problème aux Limite Pour des EDFs" comprend une étude sur l'existence et l'unicité de la solution pour un système des équations différentielles fractionnaire de la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0}^{\alpha_n} u(t) = f\left(t, u(t), v(t), {}^{C}D_{0}^{\beta_1} v(t), \dots, {}^{C}D_{0}^{\beta_{n-1}} v(t)\right), \\ {}^{C}D_{0}^{\beta_n} v(t) = g\left(t, u(t), v(t), {}^{C}D_{0}^{\alpha_1} u(t), \dots, {}^{C}D_{0}^{\alpha_{n-1}} u(t)\right), \\ 0 < t \leq 1, k-1 < \alpha_k, \quad \beta_k < k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ u^{(j)}(0) = a_j, \quad v^{(j)}(0) = b_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-2, \\ u^{(n-1)}(0) = {}^{C}D_{0}^{\eta} u(1), \quad v^{(n-1)}(0) = {}^{C}D_{0}^{\kappa} v(1), \quad n-2 < \eta, \kappa < n-1, \end{cases} \tag{1}$$

oú $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ $f, g : (0, 1] \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, singulières à $t = 0$, et $\lim_{t \to 0^+} f(t) = \infty$, $\lim_{t \to 0^+} g(t) = \infty$. ${}^{C}D_{0}^{\alpha_k}$, ${}^{C}D_{0}^{\beta_k}$, ${}^{C}D_{0}^{\eta}$, ${}^{C}D_{0}^{\kappa}$ sont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo.

Chapitre3, intitulé "Stabilité au sens d'Ulam-Hyers Généralisée Pour des EDFs" est consacré à l'étude de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers généralisée pour le système considéré au chapitre 2.

À la fin de ce mémoire, on donne une conclusion du travail effectué et on termine par une riche bibliographie.

Chapitre 1

Notions Fondamentales

Dans ce chapitre, on présente certaines définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire qui sont utilisées dans les autre chapitres. On présente aussi quelques théorèmes des points fixes qui représentent un outil indispensable dans ce mémoire.

1 Fonctions Spéciales

Dans cette section, on présente les fonctions Gamma et Bêta d'Euler qui jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire, (voir [21, 24, 26]).

1.1 Fonction Gamma d'Euler

La fonction Gamma d'Euler $\Gamma(.)$ est l'un des outils de base du calcul fractionnaire qui a été introduite par le mathématicien suisse Leonhar d'Euler (1707-1783). La fonction Gamma d'Euler $\Gamma(.)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0. \tag{1.1}$$

Exemple 1.1

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{-1}{2}} dt = \sqrt{\pi}, \tag{1.2}$$

par le changement de variable $t=u^2$.

Propriétés

La fonction Gamma d'Euler possède les propriétés suivantes :

1. $\Gamma(1) = 1$,
2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0$,
3. La fonction Gamma d'Euler est une fonction convexe.

1.2 Fonction Bêta d'Euler

La fonction Bêta est définie par :

$$\mathrm{B}\left(x,y\right) = \int_0^1 (1-t)^{x-1}\, t^{y-1} dt, \quad x,y \in \mathbb{R}_+^*. \tag{1.3}$$

Propriétés

1. La fonction Bêta est raccordée avec la fonction Gamma par la relation suivante :
$$\mathrm{B}\left(x,y\right) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$
2. La fonction Bêta est symétrique i.e :
$$\mathrm{B}\left(x,y\right) = \mathrm{B}\left(y,x\right).$$
3. On peut prendre aussi la forme d'intégrale
$$\mathrm{B}\left(x,y\right) = 2\int_0^1 (\sin\theta)^{2x-1} (\cos\theta)^{2y-1} d\theta,$$

par le changement de variable $t = \sin^2\theta$.

2 Intégration d'Ordre Fractionnaire

Dans cette section, on va définir l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Intégrale Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.1 *[21, 24, 26] Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$, d'une fonction f continue sur $[a,b)$ est définie par :*

$$\mathrm{I}_a^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, & \alpha > 0, \\ f(t), & \alpha = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

où $t \geq 0$.

Proposition 1.1 *Soient $\alpha,\beta > 0$. Pour toute fonction $f \in \mathrm{C}([a,b))$, on a :*

$$\mathrm{I}_a^\alpha \mathrm{I}_a^\beta f(t) = \mathrm{I}_a^{\alpha+\beta} f(t) = \mathrm{I}_a^\beta \mathrm{I}_a^\alpha f(t). \tag{1.5}$$

Preuve. Soit $f \in \mathrm{C}([a,b))$, on a :

$$\mathrm{I}_a^\alpha \mathrm{I}_a^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\, d\tau\, ds. \tag{1.6}$$

D'après le théorème de Fubini on a :

$$\mathrm{I}_a^{\alpha}\mathrm{I}_a^{\beta}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^t f(\tau)\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1}\,ds\,d\tau. \tag{1.7}$$

Pour évaluer cette intégrale on pose :

$$x = \frac{s-\tau}{t-\tau}. \tag{1.8}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_a^{\alpha}\mathrm{I}_a^{\beta}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}x^{\beta-1}\,dx\,d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\,\mathrm{B}(\alpha,\beta)\,d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\,\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\,d\tau = \mathrm{I}_a^{\alpha+\beta}f(t).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

D'où le résultat.

On peut montrer la deuxième égalité en utilisant le fait que : $\mathrm{I}_a^{\alpha}\mathrm{I}_a^{\beta}f(t) = \mathrm{I}_a^{\alpha+\beta}f(t)$.

Lemme 1.1 *[38] Soient $f \in \mathrm{C}([a,b])$ et $\alpha > 0$. Alors,*

$$\lim_{t \overset{>}{\to} a}\mathrm{I}_a^{\alpha}f(t) = 0. \tag{1.10}$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{I}_a^{\alpha}f(t)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f(s)\right|ds \\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\,ds \\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^{\alpha}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

■

On remarque que le second membre de la formule (1.11) tend vers 0 lorsque t tend vers a. Alors $\lim_{t \overset{>}{\to} a}\mathrm{I}_a^{\alpha}f(t) = 0$.

Exemple 1.2 *Soit la fonction $f(t) = (ct)^{\beta}$; $\beta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.*

Alors, l'intégrale fractionnaire de Riemann Liouville s'écrit :

$$\mathrm{I}_0^{\alpha}(ct)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(c\tau)^{\beta}d\tau. \tag{1.12}$$

On pose le changement de variable $\tau = tx$, *on aura :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_0^{\alpha}(ct)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-tx)^{\alpha-1}(ctx)^{\beta}\,t\,dx\\
&= \frac{c^{\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha-1}t^{\beta+1}x^{\beta}dx\\
&= \frac{c^{\beta}t^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}x^{\beta}dx\\
&= \frac{c^{\beta}t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{B}\left(\alpha,\beta+1\right).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

D´après la propriété 1 de la fonction bêta, on a :

$$\mathrm{I}_0^{\alpha}(ct)^{\beta} = \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}c^{\beta}t^{\alpha+\beta}. \tag{1.14}$$

3 Divers Approches de la Dérivation Fractionnaire

Dans cette section, on va présenter deux approches de la dérivation fractionnaire : de Riemann-Liouville et celle de Caputo.

3.1 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.2 *[21, 24, 26] Soient* $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}-\{0\}$. *La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre* α *d'une fonction* $f \in \mathrm{C}([a,+\infty),\mathbb{R})$ *est définie par :*

$$^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a^{\alpha}f(t) = \begin{cases} \mathrm{D}^m\mathrm{I}_a^{m-\alpha}f(t) = \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int\limits_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}f(\tau)\,d\tau\right), & m-1<\alpha<m,\\[2ex] \frac{d^m}{dt^m}f(t), \quad \alpha = m. \end{cases} \tag{1.15}$$

Exemple 1.3 *On prend la fonction :*

$$f(t) = (t-a)^{\lambda}, \quad t>a. \tag{1.16}$$

Pour $0 \leq m-1<\alpha<m$ *et* $\lambda>-1$, *on pose le changement de variable :* $x = a+s(t-a)$, *on aura :*

$$^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a^{\alpha}(t-a)^{\lambda}=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dt^m}(t-a)^{m+\lambda-\alpha}\int_0^1(1-s)^{m-\alpha-1}s^{\lambda}ds. \tag{1.17}$$

En utilisant la relation de dérivation classique :

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dt^m}(t-a)^{\delta} &= \delta(\delta-1)\ldots(\delta-m+1)(t-a)^{\delta-m}\\ &= \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta-m+1)}(t-a)^{\delta-m}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

et la relation (1.3)*, on trouve :*

$$^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a(t-a)^{\lambda}=\frac{\Gamma(\lambda+m-\alpha+1)\mathrm{B}(m-\alpha,\lambda+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\lambda-\alpha+1)}(t-a)^{\lambda-\alpha}. \tag{1.19}$$

D'après la propriété 1 des propriétés de la fonction bêta, on a :

$$^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a^{\alpha}(t-a)^{\lambda}=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-\alpha)}(t-a)^{\lambda-\alpha}. \tag{1.20}$$

Pour $\alpha=\frac{1}{2}$, $\lambda=\frac{1}{2}$ *et* $a=0$*, on aura :*

$$^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_0^{\frac{1}{2}}(t)^{\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right). \tag{1.21}$$

Pour $\alpha>0$ *et* $\lambda=0$*, on trouve :*

$$^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a^{\alpha}(t-a)^{0} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}=\frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \tag{1.22}$$

Donc, la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est plus nulle.

Proposition 1.2 *Pour* $f\in \mathrm{C}([a,b])$, $m-1<\alpha<m$ *et* $m\in\mathbb{N}-\{0\}$*, on a :*

(a) : $^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a^{\alpha}$ *est un opérateur linéaire,*

(b) : $\left(^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a^{\alpha}\right)\left(\mathrm{I}_a^{\alpha}f\right)(t)=f(t)$,

(c) : *Si* $\left(^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a^{\alpha}f\right)(t)=0$, *alors* $f(t)=\sum_{j=0}^{m-1}c_j\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1-m)}(t-a)^{j+\alpha-m}$, $\left(c_j\right)_{j=0,\ldots,m-1}\in\mathbb{R}$.

Preuve. Soient $f\in \mathrm{C}([a,b])$ et $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}-\{0\}$.

(a) : On peut montrer la linéarité par une simple vérification.

(b) : En utilisant la définition 1.2, on a :

$$\begin{aligned}
\left({}^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha}\right)\left(\mathrm{I}_a^{\alpha} f\right)(t) &= \mathrm{D}^m\left(\mathrm{I}_a^{m-\alpha}\right)\left(\mathrm{I}_a^{\alpha} f\right)(t) \\
&= \mathrm{D}^m\left(\mathrm{I}_a^{m-\alpha+\alpha} f\right)(t) \\
&= \mathrm{D}^m\left(\mathrm{I}_a^{m} f\right)(t) \\
&= f(t), \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

car $\mathrm{D}^m \mathrm{I}_a^m f(t) = \mathrm{I}$. Ce qui établit le résultat.

(c) : Comme f appartient au noyau de $\left({}^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha}\right)$, alors par définition, on trouve :

$$\left({}^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha}\right) f(t) = \mathrm{D}^m\left(\mathrm{I}_a^{m-\alpha} f\right)(t) = 0. \qquad (1.24)$$

C'est-à-dire que la dérivée d'ordre m de $\left(\mathrm{I}_a^{m-\alpha} f\right)$ est nulle. Alors,

$$\left(\mathrm{I}_a^{m-\alpha} f\right)(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (t-a)^j, \ \left(c_j\right)_{j=0,\ldots,m-1} \in \mathbb{R}. \qquad (1.25)$$

On applique I_a^{α} aux deux membres de l'expression (1.25), on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{I}_a^{m-\alpha+\alpha} f\right)(t) &= \left(\mathrm{I}_a^{m} f\right)(t) \\
&= \mathrm{I}_a^{\alpha}\left(\sum_{j=0}^{m-1} c_j (t-a)^j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} c_j \left(\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)}\right)(t-a)^{j+\alpha}. \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

L'application de D^m à (1.26), donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^m\left(\mathrm{I}_a^{m} f\right)(t) = f(t) &= \sum_{j=0}^{m-1} c_j \left(\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)}\right)\mathrm{D}^m (t-a)^{j+\alpha} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} c_j \left(\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)}\right)\left(\frac{\Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+\alpha+1-m)}(t-a)^{j+\alpha-m}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1-m)}(t-a)^{j+\alpha-m}. \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

Alors,

$$f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1-m)}(t-a)^{j+\alpha-m}. \qquad (1.28)$$

3.2 Dérivée Fractionnaire de Caputo

Maintenant, on présente la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Définition 1.3 *[21, 24, 26] Soient $m-1<\alpha\leq m$, $m\in\mathbb{N}-\{0\}$, la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha>0$ d'une fonction $f\in C^m([a,+\infty))$ est donnée par :*

$$
{}^{C}D_a^{\alpha}f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1}\frac{d^m}{ds^m}f(s)\,ds = I_a^{m-\alpha}D^m f(t), & m-1<\alpha<m, \\ \frac{d^m}{dt^m}f(t), & \alpha=m. \end{cases} \tag{1.29}
$$

Lemme 1.2 *Soient $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}-\{0\}$ et $f\in C^m([a,+\infty))$. Alors,*

(a) : $\lim\limits_{\substack{\alpha\to m\\ <}} {}^{C}D_0^{\alpha}f(t) = f^{(m)}(t)$.

(b) : $\lim\limits_{\substack{\alpha\to m-1\\ >}} {}^{C}D_0^{\alpha}f(t) = f^{(m-1)}(t) - f^{(m-1)}(0)$.

Preuve. (a) : On peut montrer (a) par une simple vérification en utilisant le fait que ${}^{C}D_0^{\alpha}f(t) = I_0^{m-\alpha}f^{m}(t)$.

(b) : En utilisant l'intégrale par partie, on obtient :

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D_0^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t f^{(m)}(x)(t-x)^{m-\alpha-1}\,dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)}\left(f^{(m)}(0)\,t^{m-\alpha} + \int_0^t f^{(m+1)}(x)(t-x)^{m-\alpha}\,dx\right).
\end{aligned} \tag{1.30}
$$

En faisant tendre $\alpha\to m-1$, on trouve que :

$$
\lim_{\substack{\alpha\to m-1\\ >}} {}^{C}D_0^{\alpha}f(t) = f^{(m)}(0)\,t + f^{(m)}(x)(t-x)\Big|_{x=0}^{t} - \int_0^t -f^{(m)}(x)\,dx = f^{(m-1)}(t) - f^{(m-1)}(0). \tag{1.31}
$$

■

3.3 La Relation entre la dérivée Fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Soient $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}-\{0\}$, $a\in\mathbb{R}$, et $f\in C^m([a,+\infty))$, la relation entre la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo est :

$$
\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)f(t) = \left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)f(t) + \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}f^{(j)}(a). \tag{1.32}
$$

La relation (1.32), peut aussi s'écrire :

$$
\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)f(t) = \left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)\left(f(t) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{j}}{j!}f^{(j)}(a)\right). \tag{1.33}
$$

De (1.32) et (1.33), on déduit que la dérivée fractionnaire d'ordre α de f de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée fractionnaire de Caputo si a est un point zéro d'ordre m de f. D'où,

$$\left(f^{(j)}(a)=0, \quad j=0,1,\dots,m-1\right) \implies \left(\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)f(t)=\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)f(t)\right). \tag{1.34}$$

Preuve. On a f est de classe C^m, alors,

$$f(t) = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^j}{j!}f^{(j)}(a)+I_a^m D^m f(t). \tag{1.35}$$

On applique $I_a^{m-\alpha}$ à la formule (1.35), on trouve :

$$I_a^{m-\alpha}f(t) = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{m-\alpha+j}}{\Gamma\left(m-\alpha+j+1\right)}f^{(j)}(a)+I_a^{2m-\alpha}D^m f(t). \tag{1.36}$$

Ensuite, on applique D^m à l'expression (1.36), on obtient :

$$\begin{aligned}
D^m I_a^{m-\alpha}f(t) &= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma\left(m-\alpha+j+1\right)}D^m(t-a)^{m-\alpha+j}+D^m I_a^{2m-\alpha}D^m f(t)\\
&= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma\left(m-\alpha+j+1\right)}\left(\frac{\Gamma\left(m-\alpha+j+1\right)(t-a)^{m-\alpha+j-m}}{\Gamma\left(m-\alpha+j+1-m\right)}\right)+D^m I^m I_a^{m-\alpha}D^m f(t)\\
&= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma\left(j-\alpha+1\right)}f^{(j)}(a)+I_a^{m-\alpha}D^m f(t).
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Et comme

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)=D^m I_a^{m-\alpha}, \quad \left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)=I_a^{m-\alpha}D^m,$$

on trouve :

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)f(t) = \left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)f(t)+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma\left(j-\alpha+1\right)}f^{(j)}(a). \tag{1.38}$$

Proposition 1.3 *Soient* $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}-\{0\}$, *et* $f\in C^m([a,b))$. *Alors,*

(a) : $\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)$ *est un opérateur linéaire,*

(b) : $\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)\left(I_a^{\alpha}f\right)(t)=f(t)$,

(c) : *Si* $\left({}^{C}D_a^{\alpha}f\right)(t)=0$, *alors* $f(t)=\sum_{j=0}^{m-1}c_j(t-a)^j$, $\left(c_j\right)_{j=0,\dots,m-1}\in\mathbb{R}$,

(d) : $I_a^{\alpha}\left({}^{C}D_a^{\alpha}f\right)(t)=f(t)+\sum_{j=0}^{m-1}c_j(t-a)^j$, $\left(c_j\right)_{j=0,\dots,m-1}\in\mathbb{R}$.

Preuve. *Soient* $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}-\{0\}$, *et* $f\in C^m([a,b))$.

(a) : *La démonstration de (a) est simple.*

(b) : *De la relation* (1.33), *on a :*

$$\begin{aligned}
\left({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{\alpha}\right)\left(\mathrm{I}_a^{\alpha} f\right)(t) &= \left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_a^{\alpha}\right)\left(\mathrm{I}_a^{\alpha} f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(t-a)^j}{j!}\left(\left(\frac{d^j}{dt^j}\left(\mathrm{I}_a^{\alpha} f\right)\right)(a)\right)\right) \\
&= f(t) - \left(\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{j-\alpha}}{j!}\right)\left(\left(\frac{d^j}{dt^j}\left(\mathrm{I}_a^{\alpha} f\right)\right)(a)\right) \\
&= f(t) - \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j+1-\alpha)}\right)\left(\left(\frac{d^j}{dt^j}\left(\mathrm{I}_a^{\alpha} f\right)\right)(a)\right). \qquad (1.39)
\end{aligned}$$

Et comme $j \leq m-1 < \alpha$, *pour* $j = 0, \ldots, m-1$, *alors, les dérivées* $\left(\frac{d^j}{dt^j}\left(\mathrm{I}_a^{\alpha} f\right)\right)(a) = 0$. *Ce que permet de donner :*

$$\left({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{\alpha}\right)\left(\mathrm{I}_a^{\alpha} f\right)(t) = f(t). \qquad (1.40)$$

(c) : *Soit* $\left({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{\alpha} f\right)(t) = 0$. *Alors,*

$$\mathrm{I}_a^{m-\alpha} f^{(m)}(t) = 0. \qquad (1.41)$$

L'application de $\left({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{m-\alpha}\right)$ *à* (1.41), *donne :*

$$\left({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{m-\alpha}\right)\mathrm{I}_a^{m-\alpha} f^{(m)}(t) = 0. \qquad (1.42)$$

D'après la propriété (1.40), *on trouve :*

$$\left({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^{m-\alpha}\right)\left(\mathrm{I}_a^{m-\alpha}\right) f^{(m)}(t) = f^{(m)}(t) = 0. \qquad (1.43)$$

Donc, f *peut s'écrire sous la forme :*

$$f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (t-a)^j, \qquad (1.44)$$

où $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$.

4 Points Fixes

Ici, on présente les théorèmes des points fixes, [17, 25, 38].

4.1 Quelques Définitions

Définition 1.4 *Soient* S *un espace vectoriel normé, de norme* $\|.\|_S$ *et* $(u_n)_n$, $n \in \mathbb{N}$, *une suite de* S. *On dit que* $(u_n)_n$ *est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geq 0, \quad \forall n \geq N, \quad \forall p \geq N, \ \left\| u_{n+p} - u_n \right\|_S \leq \varepsilon. \tag{1.45}$$

Définition 1.5 *On dit que l'espace vectoriel normé* S *est complet pour la norme* $\|.\|_S$ *si toute suite de Cauchy (pour cette norme) est convergente (pour cette norme). Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.*

Définition 1.6 *Soient* B *un espace de Banach muni de la norme* $\|.\|_B$ *et* T *une application de* B *dans* B. *On appelle point fixe de* T *tout point* u *tel que :*

$$Tu = u. \tag{1.46}$$

Définition 1.7 *Soit* S *un espace vectoriel normé, de norme* $\|.\|_S$. *Une application* f *de* S *dans* S *est dite Lipschitzienne de constante* $L \geq 0$ *si elle vérifie :*

$$\forall u, v \in S, \quad \left\| f(u) - f(v) \right\|_S \leq L \| u - v \|_S. \tag{1.47}$$

Définition 1.8 *L'application Lipschitzienne* f *est dite une contraction si* $L \in (0,1)$.

4.2 Principe de Contraction de Banach

Théorème 1.1 *[17, 25] Soit* (E, d) *un espace métrique complet et soit* $f : E \to E$ *une contraction. Alors,* f *admet un point fixe unique.*

4.3 Théorème de Schauder

Théorème 1.2 *[17, 25, 38] Soient* B *un espace de Banach,* U *un fermé, borné, convexe et non vide de* B *et* $T : U \to U$ *une application telle que l'ensemble* $\{Tu : u \in U\}$ *est relativement compact dans* B. *Alors,* T *possède au moins un point fixe dans* U.

Chapitre 2

Problèmes aux Limites Pour des EDFs

1 Introduction

L'étude des équations différentielles fractionnaires a gagné une importance dû principalement aux nombreuses applications dans divers domaines. Des papiers considérables ont été publiés dans ce domaine, pour plus de détails, voir [3, 4, 5, 6, 7, 20, 27, 29, 39].

Dans ce chapitre, on va traiter l'existence et l'unicité de la solution d'un système d' équations différentielles fractionnaires [37], de la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0}^{\alpha_n} u(t) = f\left(t, u(t), v(t), {}^{C}D_{0}^{\beta_1} v(t), \dots, {}^{C}D_{0}^{\beta_{n-1}} v(t)\right), \\ {}^{C}D_{0}^{\beta_n} v(t) = g\left(t, u(t), v(t), {}^{C}D_{0}^{\alpha_1} u(t), \dots, {}^{C}D_{0}^{\alpha_{n-1}} u(t)\right), \\ 0 < t \leq 1, k-1 < \alpha_k, \quad \beta_k < k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ u^{(j)}(0) = a_j, \quad v^{(j)}(0) = b_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-2, \\ u^{(n-1)}(0) = {}^{C}D_{0}^{\eta} u(1), \quad v^{(n-1)}(0) = {}^{C}D_{0}^{\kappa} v(1), \quad n-2 < \eta, \kappa < n-1, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $f, g : (0, 1] \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *sont des fonctions continues, singulières à* $t = 0$, $\lim_{t \to 0^+} f(t) = \infty$, *et* $\lim_{t \to 0^+} g(t) = \infty$. ${}^{C}D_{0}^{\alpha_k}$, ${}^{C}D_{0}^{\beta_k}$, ${}^{C}D_{0}^{\eta}$, ${}^{C}D_{0}^{\kappa}$ *sont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo.*

2 Lemmes Auxiliaires

Lemme 2.1 *[16, 18] Soient* $\alpha, \beta > 0$, $n-1 < \alpha < n$. *Alors,* ${}^{C}D_{0}^{\alpha} t^{\beta-1} = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha-1}$, $\quad \beta > n$, *et* ${}^{C}D_{0}^{\alpha} t^{j} = 0$, $\; j = 0, 1, \dots, n-1$.

Lemme 2.2 *[16, 18] Soient* $q > p > 0$ *et* $f \in L^1([a, b])$. *Alors,*

$${}^{C}D_{0}^{p} J^{q} f(t) = J^{q-p} f(t).$$

Lemme 2.3 *[16, 18] Soient* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $n-1 < \alpha < n$, *la solution générale de l'équation différentielle fractionnaire* ${}^{C}D_{0}^{\alpha} u(t) = 0$, *est*

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j t^j,$$

où $(c_j)_{j=0,1,\ldots,n-1} \in \mathbb{R}$.

Lemme 2.4 *[16, 18] Soient* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $n-1 < \alpha < n$. *Alors,*

$$I^{\alpha\,C}D_{0}^{\alpha} u(t) = u(t) + \sum_{j=0}^{n-1} c_j t^j,$$

où $(c_j)_{j=0,1,\ldots,n-1} \in \mathbb{R}$.

3 Solution Intégrale

On donne maintenant la solution intégrale du système différentiel (2.1).

Lemme 2.5 *[37] On suppose que* $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $n-1 < \alpha_n, \beta_n < n$, *et* $(U, V) \in C([0,1], \mathbb{R})$. *Alors, la solution unique du système*

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0}^{\alpha_n} u(t) = U(t), \quad {}^{C}D_{0}^{\beta_n} v(t) = V(t), \quad 0 < t < 1, \\ u^{(j)}(0) = a_j, \quad v^{(j)}(0) = b_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-2, \\ u^{(n-1)}(0) = {}^{C}D_{0}^{\eta} u(1), \quad v^{(n-1)}(0) = {}^{C}D_{0}^{\kappa} v(1), \quad n-2 < \eta, \kappa < n-1, \end{cases} \tag{2.2}$$

est donnée par : $(u, v)(t)$;

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n - 1}}{\Gamma(\alpha_n)} U(s)\, ds + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{a_j}{j!} t^j \\ &\quad + \frac{\Gamma(n-\eta)\, t^{n-1}}{(n-1)!\left(\Gamma(n-\eta) - 1\right)\Gamma(\alpha_n - \eta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_n - \eta - 1} U(s)\, ds, \end{aligned} \tag{2.3}$$

et

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta_n - 1}}{\Gamma(\beta_n)} V(s)\, ds + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{b_j}{j!} t^j \\ &\quad + \frac{\Gamma(n-\kappa)\, t^{n-1}}{(n-1)!\left(\Gamma(n-\kappa) - 1\right)\Gamma(\beta_n - \kappa)} \int_0^1 (1-s)^{\beta_n - \kappa - 1} V(s)\, ds. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Preuve. *D'après les lemmes (2.3) et (2.4), on peut écrire le système (2.2) sous la forme :*

$$\begin{cases} u(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n - 1}}{\Gamma(\alpha_n)} \mathrm{U}(s)\, ds - \sum\limits_{j=0}^{n-1} c_j^1 t^j, \\ \\ v(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\beta_n - 1}}{\Gamma(\beta_n)} \mathrm{V}(s)\, ds - \sum\limits_{j=0}^{n-1} c_j^2 t^j, \end{cases} \tag{2.5}$$

où,

$$\begin{pmatrix} c_0^1 & c_1^1 & \cdots & c_{n-1}^1 \\ c_0^2 & c_1^2 & \cdots & c_{n-1}^2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

Alors, on remarque que :

$$\begin{cases} u^{(j)}(0) = -j! c_j^1, \quad v^{(j)}(0) = -j! c_j^2, \quad j = 0, 1, \ldots, n-2, \\ \\ u^{(n-1)}(0) = -(n-1)! c_{n-1}^1, \quad v^{(n-1)}(0) = -(n-1)! c_{n-1}^2, \\ \\ {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\eta} u(1) = \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_n - \eta - 1}}{\Gamma(\alpha_n - \eta)} \mathrm{U}(s)\, ds - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\eta)} c_{n-1}^1, \\ \\ {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\kappa} v(1) = \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta_n - \kappa - 1}}{\Gamma(\beta_n - \kappa)} \mathrm{V}(s)\, ds - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\kappa)} c_{n-1}^2. \end{cases} \tag{2.6}$$

En utilisant les conditions :

$$\begin{aligned} u^{(j)}(0) &= a_j,\ v^{(j)}(0) = b_j,\ j = 0, 1, \ldots, n-2, \\ u^{(n-1)}(0) &= {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\eta} u(1),\ v^{(n-1)}(0) = {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\kappa} v(1), \end{aligned}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} c_j^1 &= \begin{cases} -\frac{a_j}{j!},\ j = 0, 1, \ldots, n-2, \\ \\ \frac{\Gamma(n-\eta)}{(n-1)!\left(1 - \Gamma(n-\eta)\right)} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_n - \eta - 1}}{\Gamma(\alpha_n - \eta)} \mathrm{U}(s)\, ds, \quad j = n-1, \end{cases} \\ c_j^2 &= \begin{cases} -\frac{b_j}{j!},\ j = 0, 1, \ldots, n-2, \\ \\ \frac{\Gamma(n-\kappa)}{(n-1)!\left(1 - \Gamma(n-\kappa)\right)} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta_n - \kappa - 1}}{\Gamma(\beta_n - \kappa)} \mathrm{V}(s)\, ds, \quad j = n-1. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.7}$$

En remplaçant (2.7) dans (2.5), on trouve (2.3) et (2.4). D'où, le Lemme (2.5) est ainsi prouvé. ■

Maintenant, on introduit l'espace de Banach suivant :

$$\mathrm{B} := \left\{(u,v) : u, v \in \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R}), \quad {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\alpha_k} u,\ {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_k} v \in \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R}), \quad k = 1,2,\ldots,n-1\right\},$$

oú $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, *muni de la norme :*

$$\|(u,v)\|_{\mathrm{B}} = \max_{1\le k\le n-1}\left(\|u\|_\infty, \|v\|_\infty, \left\|{}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\alpha_k} u\right\|_\infty, \left\|{}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_k} v\right\|_\infty\right),$$

où

$$\|u\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|, \quad \|v\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |v(t)|, \quad \left\|{}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\alpha_k} u\right\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} \left|{}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\alpha_k} u(t)\right|,$$
$$et \quad \left\|{}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_k} v\right\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} \left|{}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_k} v\right|.$$

4 Existence et Unicité

On considère les hypothèses suivantes, [37] :

(H_1) : *Il existe des constantes non négatives* $\left(\omega_j^1\right)_{j=1,\ldots,n+1}$ *et* $\left(\omega_j^2\right)_{j=1,\ldots,n+1}$, $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, *telles que :*

$$\begin{aligned} t^\delta \left|f(t,x_1,\ldots,x_{n+1}) - f\left(t,y_1,\ldots,y_{n+1}\right)\right| &\le \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j^1 \left|x_j - y_j\right|, \\ t^\mu \left|g(t,x_1,\ldots,x_{n+1}) - g\left(t,y_1,\ldots,y_{n+1}\right)\right| &\le \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j^2 \left|x_j - y_j\right|, \end{aligned}$$

$\forall\ t \in [0,1]$, $\forall\,(x_1,\ldots,x_{n+1}), \left(y_1,\ldots,y_{n+1}\right) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(H_2) : $f, g : (0,1]\times\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *des fonctions continues,* $\lim_{t\to0^+} f(t,\ldots) = \infty$ *et* $\lim_{t\to0^+} g(t,\ldots) = \infty$, *et il existe des constantes* $0 < \delta, \mu < 1$, *telles que* $t^\delta f(t,\ldots)$ *et* $t^\mu g(t,\ldots)$

sont continues sur $[0,1]\times\mathbb{R}^{n+1}$.

Pour plus de simplicité, on introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \Upsilon_0 \ &: = \frac{\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(\alpha_n+1-\delta)} + \frac{\Gamma(n-\eta)\,\Gamma(1-\delta)}{(n-1)!\left|\Gamma(n-\eta)-1\right|\Gamma(\alpha_n-\eta+1-\delta)}, \\ \Upsilon_k \ &: = \frac{\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k+1-\delta)} + \frac{\Gamma(n-\eta)\,\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(n-\alpha_k)\left|\Gamma(n-\eta)-1\right|\Gamma(\alpha_n-\eta+1-\delta)}, \\ \Upsilon_0^* \ &: = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\beta_n+1-\mu)} + \frac{\Gamma(n-\kappa)\,\Gamma(1-\mu)}{(n-1)!\left|\Gamma(n-\kappa)-1\right|\Gamma(\beta_n-\kappa+1-\mu)}, \\ \Upsilon_k^* \ &: = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\beta_n-\beta_k+1-\mu)} + \frac{\Gamma(n-\kappa)\,\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(n-\beta_k)\left|\Gamma(n-\kappa)-1\right|\Gamma(\beta_n-\kappa+1-\mu)}. \end{aligned}$$

Maintenant, on présente un résultat d'existence et d'unicité qui est basé sur le principe de contraction de Banach, [37].

Théorème 2.1 *On suppose que l'hypothèse* (H_1) *et l´inégalité*

$$\Theta := \max_{1\le k\le n-1}\left(\sum_{j=1}^{n+1}\omega_j^1\Upsilon_0, \sum_{j=1}^{n+1}\omega_j^1\Upsilon_k, \sum_{j=1}^{n+1}\omega_j^2\Upsilon_0^*, \sum_{j=1}^{n+1}\omega_j^2\Upsilon_k^*\right) < 1, \tag{2.8}$$

sont satisfaites.

Alors, le système (2.1) *admet une solution unique* $(u(t), v(t)),\ \ t\in[0,1]$.

Preuve. *En commençant par définir l'opérateur* $\mathrm{T}:\mathrm{B}\to\mathrm{B}$ *par :*

$$\mathrm{T}(u,v)(t) := (\mathrm{T}_1(u,v)(t), \mathrm{T}_2(u,v)(t)),$$

avec

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}_1(u,v)(t)\\
:\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n-1}}{\Gamma(\alpha_n)} f\left(s, u(s), v(s), {}^{C}\mathrm{D}_0^{\beta_1}v(s), \ldots, {}^{C}\mathrm{D}_0^{\beta_{n-1}}v(s)\right)ds\\
&+\sum_{j=0}^{n-2}\frac{a_j}{j!}t^j + \frac{\Gamma(n-\eta)\,t^{n-1}}{(n-1)!\left(\Gamma(n-\eta)-1\right)\Gamma(\alpha_n-\eta)}\\
&\times\int_0^1 (1-s)^{\alpha_n-\eta-1} f\left(s, u(s), v(s), {}^{C}\mathrm{D}_0^{\beta_1}v(s), \ldots, {}^{C}\mathrm{D}_0^{\beta_{n-1}}v(s)\right)ds,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

et

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}_2(u,v)(t)\\
:\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta_n-1}}{\Gamma(\beta_n)} g\left(s, u(s), v(s), {}^{C}\mathrm{D}_0^{\alpha_1}u(s), \ldots, {}^{C}\mathrm{D}_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right)ds\\
&+\sum_{j=0}^{n-2}\frac{b_j}{j!}t^j + \frac{\Gamma(n-\kappa)\,t^{n-1}}{(n-1)!\left(\Gamma(n-\kappa)-1\right)\Gamma(\beta_n-\kappa)}\\
&\times\int_0^1 (1-s)^{\beta_n-\kappa-1} g\left(s, u(s), v(s), {}^{C}\mathrm{D}_0^{\alpha_1}u(s), \ldots, {}^{C}\mathrm{D}_0^{\alpha_{n-1}}u(s)\right)ds,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$\forall t\in[0,1],\ \ \forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\}.$

On va maintenant montrer que l'opérateur T *est contractif :*

Soient $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in\mathrm{B}$ *et* $t\in[0,1]$. *De l'hypothèse* (H_2), *on a :*

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathrm{T}_1(u_1,v_1) - \mathrm{T}_1(u_2,v_2) \right\|_\infty \\
\leq\ & \max_{t\in[0,1]} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n-1} s^{-\delta}}{\Gamma(\alpha_n)} s^{\delta} \left| \begin{array}{l} f\left(s, u_1(s), v_1(s), {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_1} v_1(s), \ldots, {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_{n-1}} v_1(s)\right) \\ -f\left(s, u_2(s), v_2(s), {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_1} v_2(s), \ldots, {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_{n-1}} v_2(s)\right) \end{array} \right| ds \\
+\ & \frac{\Gamma(n-\eta)}{(n-1)! \left|\Gamma(n-\eta)-1\right| \Gamma(\alpha_n-\eta)} \max_{t\in[0,1]} t^{n-1} \\
\times\ & \int_0^1 (1-s)^{\alpha_n-\eta-1} s^{-\delta} s^{\delta} \left| \begin{array}{l} f\left(s, u_1(s), v_1(s), {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_1} v_1(s), \ldots, {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_{n-1}} v_1(s)\right) \\ -f\left(s, u_2(s), v_2(s), {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_1} v_2(s), \ldots, {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_{n-1}} v_2(s)\right) \end{array} \right| ds \\
\leq\ & \left(\omega_1^1 \|u_1-u_2\|_\infty + \omega_2^1 \|v_1-v_2\|_\infty + \omega_3^1 \left\| {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_1}(v_1-v_2) \right\|_\infty + \ldots + \omega_{n+1}^1 \left\| {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_{n-1}}(v_1-v_2) \right\|_\infty \right) \\
\times\ & \max_{t\in[0,1]} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n-1} s^{-\delta}}{\Gamma(\alpha_n)} ds \\
+\ & \left(\omega_1^1 \|u_1-u_2\|_\infty + \omega_2^1 \|v_1-v_2\|_\infty + \omega_3^1 \left\| {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_1}(v_1-v_2) \right\|_\infty + \ldots + \omega_{n+1}^1 \left\| {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_{n-1}}(v_1-v_2) \right\|_\infty \right) \\
\times\ & \frac{\Gamma(n-\eta)}{(n-1)! \left|\Gamma(n-\eta)-1\right| \Gamma(\alpha_n-\eta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_n-\eta-1} s^{-\delta} ds \\
\leq\ & \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j^1 \max\left(\|u_1-u_2\|_\infty, \|v_1-v_2\|_\infty, \ldots, \left\| {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_{n-1}}(v_1-v_2) \right\|_\infty \right) \\
\times\ & \left(\frac{\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(\alpha_n+1-\delta)} \max_{t\in[0,1]} t^{\alpha_n-\delta} + \frac{\Gamma(n-\eta)\,\Gamma(1-\delta)}{(n-1)! \left|\Gamma(n-\eta)-1\right| \Gamma(\alpha_n-\eta+1-\delta)} \right). \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Alors,

$$\left\| \mathrm{T}_1(u_1,v_1) - \mathrm{T}_1(u_2,v_2) \right\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j^1 \Upsilon_0 \left\| (u_1-u_2, v_1-v_2) \right\|_{\mathrm{B}}. \qquad (2.12)$$

D'autre part, l'hypothèse (H_2), *donne :*

$$\left\| {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\alpha_k} \left(\mathrm{T}_1(u_1,v_1) - \mathrm{T}_1(u_2,v_2) \right) \right\|_\infty$$

$$\leq \max_{t\in[0,1]} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n-\alpha_k-1} s^{-\delta}}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)} s^{\delta} \left| \begin{array}{l} f\left(s,u_1(s),v_1(s),{}^{C}D_0^{\beta_1}v_1(s),\ldots,{}^{C}D_0^{\beta_{n-1}}v_1(s)\right) \\ -f\left(s,u_2(s),v_2(s),{}^{C}D_0^{\beta_1}v_2(s),\ldots,{}^{C}D_0^{\beta_{n-1}}v_2(s)\right) \end{array} \right| ds$$

$$+ \frac{\Gamma\left(n-\eta\right)}{(n-\alpha_k)\left|\Gamma\left(n-\eta\right)-1\right|\Gamma\left(\alpha_n-\eta\right)} \max_{t\in[0,1]} t^{n-1-\alpha_k}$$

$$\times \int_0^1 (1-s)^{\alpha_n-\eta-1} s^{-\delta} s^{\delta} \left| \begin{array}{l} f\left(s,u_1(s),v_1(s),{}^{C}D_0^{\beta_1}v_1(s),\ldots,{}^{C}D_0^{\beta_{n-1}}v_1(s)\right) \\ -f\left(s,u_1(s),v_2(s),{}^{C}D_0^{\beta_1}v_2(s),\ldots,{}^{C}D_0^{\beta_{n-1}}v_2(s)\right) \end{array} \right| ds$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j^1 \max\left(\|u_1-u_2\|_\infty, \|v_1-v_2\|_\infty,\ldots,\left\|{}^{C}D_0^{\beta_{n-1}}(v_1-v_2)\right\|_\infty\right)$$

$$\times\left(\frac{\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k+1-\delta)} \max_{t\in[0,1]} t^{\alpha_n-\alpha_k-\delta} + \frac{\Gamma\left(n-\eta\right)\Gamma(1-\delta)}{(n-\alpha_k)\left|\Gamma\left(n-\eta\right)-1\right|\Gamma\left(\alpha_n-\eta+1-\delta\right)}\right). \quad (2.13)$$

Alors,

$$\left\|{}^{C}D_0^{\alpha_k}\left(T_1(u_1,v_1)-T_1(u_2,v_2)\right)\right\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j^1 \Upsilon_k \|(u_1-u_2,v_1-v_2)\|_B, \quad (2.14)$$

où $k=1,2,\ldots,n-1.$

De manière analogue, on obtient :

$$\|T_2(u_1,v_1)-T_2(u_2,v_2)\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j^2 \Upsilon_0^* \|(u_1-u_2,v_1-v_2)\|_B, \quad (2.15)$$

$$\left\|{}^{C}D_0^{\beta_k}\left(T_2(u_1,v_1)-T_2(u_2,v_2)\right)\right\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j^2 \Upsilon_k^* \|(u_1-u_2,v_1-v_2)\|_B. \quad (2.16)$$

Des inégalités (2.12), (2.14), (2.15), *et* (2.16), *on conclut que :*

$$\|T(u_1,v_1)-T(u_2,v_2)\|_B \leq \Theta \|(u_1-u_2,v_1-v_2)\|_B.$$

L'opérateur T *est contractif. On en déduit que* T *a un point fixe unique qui est la solution unique du système* (2.1). ■

Remarque 2.1 *On peut étudier l'existence d'une solution au moins du système* (2.1), *en utilisant le théorème* 1.2 *(théorème de Schauder), pour plus de détails voir [37].*

Exemple 2.1 *[37] On Considère le système suivant :*

$$\begin{cases} {}^{C}D_0^{\frac{15}{4}} u(t) = \dfrac{\left| u(t)+v(t)+{}^{C}D_0^{\frac{1}{2}} v(t)+{}^{C}D_0^{\frac{4}{3}} v(t)+{}^{C}D_0^{\frac{7}{3}} v(t) \right|}{60\pi^2 t^{\frac{2}{9}} \left(1+\left| u(t)+v(t)+{}^{C}D_0^{\frac{1}{2}} v(t)+{}^{C}D_0^{\frac{4}{3}} v(t)+{}^{C}D_0^{\frac{7}{3}} v(t) \right| \right)}, \\ {}^{C}D_0^{\frac{11}{3}} v(t) = \dfrac{\sin u(t)-\cos v(t)+\sin {}^{C}D_0^{\frac{3}{4}} u(t)+\sin {}^{C}D_0^{\frac{3}{2}} u(t)+\sin {}^{C}D_0^{\frac{9}{4}} u(t)}{125\pi t^{\frac{1}{4}}}, \\ 0 < t \leq 1, \\ u(0)=\sqrt{2},\ u'(0)=1,\ u''(0)=2\sqrt{3},\ u'''(0)={}^{C}D_0^{\frac{11}{5}} u(1), \\ v(0)=\sqrt{3},\ v'(0)=1,\ v''(0)=5\sqrt{2},\ v'''(0)={}^{C}D_0^{\frac{14}{5}} v(1). \end{cases} \tag{2.17}$$

On a : $n=4$, $\alpha_4=\frac{15}{4}$, $\beta_1=\frac{1}{2}$, $\beta_2=\frac{4}{3}$, $\beta_3=\frac{7}{3}$, $a_0=\sqrt{2}$, $a_1=1$, $a_2=2\sqrt{3}$, $\eta=\frac{11}{5}$,

$\beta_4=\frac{11}{3}, \alpha_1=\frac{3}{4}$, $\alpha_2=\frac{3}{2}$, $\alpha_3=\frac{9}{4}$, $b_0=\sqrt{3}, b_1=1$, $b_2=5\sqrt{2}$, $\kappa=\frac{14}{5}$.

$\forall t\in[0,1]$ *et* $(x_1,...,x_5), (y_1,...,y_5)\in\mathbb{R}^5$, *on a :*

$$\begin{aligned} t^{\frac{4}{9}} \left| f(t,x_1,...,x_5) - f(t,y_1,...,y_5) \right| &\leq \frac{t^{\frac{2}{9}}}{60\pi^2} \sum_{i=1}^{5} |x_i-y_i|, \\ t^{\frac{3}{4}} \left| g(t,x_1,...,x_5) - g(t,y_1,...,y_5) \right| &\leq \frac{t^{\frac{1}{2}}}{125\pi} \sum_{i=1}^{5} |x_i-y_i|, \end{aligned}$$

où $\delta=\frac{4}{9}$, $\mu=\frac{3}{4}$. *Alors, on peut prendre :*

$$\omega_j^1=\frac{1}{60\pi^2},\quad \omega_j^2=\frac{1}{125\pi},\quad j=1,...,5,\ \sum_{j=1}^{5}\omega_j^1=\frac{1}{12\pi^2},\quad \sum_{j=1}^{5}\omega_j^2=\frac{1}{25\pi}.$$

D'autre part, on obtient :

$$\begin{aligned} \Upsilon_0 &= 3.6314,\quad \Upsilon_1=8.5776,\quad \Upsilon_2=16.5292,\quad \Upsilon_3=24.0831, \\ \Upsilon_0^* &= 7.8493,\quad \Upsilon_1^*=14.1526,\quad \Upsilon_2^*=31.1912,\quad \Upsilon_3^*=51.7577. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{5}\omega_j^1\Upsilon_0 &= 0.0307,\quad \sum_{j=1}^{5}\omega_j^1\Upsilon_1=0.0724,\quad \sum_{j=1}^{5}\omega_j^1\Upsilon_2=0.1396,\quad \sum_{j=1}^{5}\omega_j^1\Upsilon_3=0.1902, \\ \sum_{j=1}^{5}\omega_j^1\Upsilon_0^* &= 0.0999,\quad \sum_{j=1}^{5}\omega_j^1\Upsilon_1^*=0.1802,\quad \sum_{j=1}^{5}\omega_j^1\Upsilon_2^*=0.3971,\quad \sum_{j=1}^{5}\omega_j^1\Upsilon_3^*=0.6590. \end{aligned}$$

On a $\Theta<1$. *Alors le système* (2.17) *admet une solution unique dans* $[0,1]$.

Chapitre 3

Stabilité au sens d'Ulam-Hyers Généralisée Pour des EDFs

1 Introduction

L'étude de la stabilité au sens Ulam-Hyers généralisée des équations différentielles fractionnaires a été développée pour devenir l'un des sujets importants dans le domaine d'analyse mathématique. Des papiers considérables ont été publiés dans ce domaine de recherche, par exemple, voir le papier de J. Wang [43], S. Abbas et al. [1], S. Harikrishnan et al. [11], A. Taïeb et Z. Dahmani [8, 28, 29, 30, 31, 32]. En revanche, A. Taïeb a établi quelques résultats d'existence et de stabilité pour certains systèmes fractionnaires, le lecteur peut se référer aux papiers suivants : [33, 34, 35, 36, 37, 39, 40].

2 Quelques Définitions

Définition 3.1 *[37] Système (2.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers s'il existe un nombre réel* $\lambda_{f,g} > 0$, *tel que pour tout* $(\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$, *et pour toute solution* $\left(x, y\right) \in \mathrm{B}$ *de*

$$\begin{cases} \left| {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\alpha_n} x(t) - f\left(t, x(t), y(t), {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_1} y(t), \ldots, {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_{n-1}} y(t)\right) \right| \leq \epsilon_1, \\ \left| {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\beta_n} y(t) - g\left(t, x(t), y(t), {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\alpha_1} x(t), \ldots, {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\alpha_{n-1}} x(t)\right) \right| \leq \epsilon_2, \\ 0 < t \leq 1, \quad k-1 < \alpha_k, \beta_k < k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{3.1}$$

où

$$\begin{cases} x^{(j)}(0) = a_j, \quad y^{(j)}(0) = b_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-2, \\ x^{(n-1)}(0) = {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\eta} x(1), \quad y^{(n-1)}(0) = {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\kappa} y(1), \quad n-2 < \eta, \kappa < n-1, \end{cases}$$

il existe une solution $(u, v) \in \mathrm{B}$ *de* (2.1) *avec*

$$\left\| \left(x - u, y - v\right) \right\|_{\mathrm{B}} \leq \lambda_{f,g} \epsilon, \quad \epsilon > 0.$$

Définition 3.2 *[37] Système (2.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers généralisée s'il existe* $\phi_{f,g} \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $\phi_{f,g}(0) = 0$, *telle que pour tout* $\epsilon > 0$, *et pour toute solution* $(x, y) \in B$ *de* (3.1), *il existe une solution* $(u, v) \in B$ *de* (2.1) *avec*

$$\|(x - u, y - v)\|_B \leq \phi_{f,g}(\epsilon), \quad \epsilon > 0.$$

3 Étude de la Stabilité

On considère le système (2.1) *pour étudier la stabilité au sens d'Ulam-Hyers généralisée. On présente le résultat suivant :*

Théorème 3.1 *[37] On suppose que l'hypothèse* (H_1), *et l'inégalité* 2.8 *sont satisfaites. Alors, système* (2.1) *est stable au sens d'Ulam-Hyers généralisée.*

Preuve. *Soit* $(x, y) \in B$ *la solution des inégalités* (3.1). *Alors, par intégration des inégalités* (3.1), *on obtient :*

$$\begin{aligned}
&\left| \begin{array}{l} x_k(t) - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n - 1}}{\Gamma(\alpha_n)} f\left(s, x(s), y(s), {}^C D_0^{\beta_1} y(s), \ldots, {}^C D_0^{\beta_{n-1}} y(s)\right) ds \\
- \sum_{j=0}^{n-2} \frac{a_j}{j!} t^j - \frac{\Gamma(n-\eta)\, t^{n-1}}{(n-1)!\left(\Gamma(n-\eta)-1\right)\Gamma(\alpha_n - \eta)} \\
\times \int_0^1 (1-s)^{\alpha_n - \eta - 1} f\left(s, x(s), y(s), {}^C D_0^{\beta_1} y(s), \ldots, {}^C D_0^{\beta_{n-1}} y(s)\right) ds \end{array} \right| \\
\leq\ & \frac{t^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n + 1)} \epsilon_1,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left| \begin{array}{l} y_k(t) - \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta_n - 1}}{\Gamma(\beta_n)} g\left(s, x(s), y(s), {}^C D_0^{\alpha_1} x(s), \ldots, {}^C D_0^{\alpha_{n-1}} x(s)\right) ds \\
- \sum_{j=0}^{n-2} \frac{b_j}{j!} t^j - \frac{\Gamma(n-\kappa)\, t^{n-1}}{(n-1)!\left(\Gamma(n-\kappa)-1\right)\Gamma(\beta_n - \kappa)} \\
\times \int_0^1 (1-s)^{\beta_n - \kappa - 1} g\left(s, x(s), y(s), {}^C D_0^{\alpha_1} x(s), \ldots, {}^C D_0^{\alpha_{n-1}} x(s)\right) ds \end{array} \right| \\
\leq\ & \frac{t^{\beta_n}}{\Gamma\left(\beta_n + 1\right)} \epsilon_2.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

En utilisant l'hypothèse (H_1) *et l'inégalité* (2.8), *il existe une solution* $(u, v) \in B$ *du système* (2.1) :

$$
\begin{aligned}
& u(t) \\
= \; & \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n-1}}{\Gamma(\alpha_n)} f\left(s, u(s), v(s), {}^{C}D_0^{\beta_1} v(s), \ldots, {}^{C}D_0^{\beta_{n-1}} v(s)\right) ds \\
+ \; & \sum_{j=0}^{n-2} \frac{a_j}{j!} t^j + \frac{\Gamma\left(n-\eta\right) t^{n-1}}{(n-1)!\left(\Gamma\left(n-\eta\right)-1\right)\Gamma\left(\alpha_n-\eta\right)} \\
\times \; & \int_0^1 (1-s)^{\alpha_n-\eta-1} f\left(s, u(s), v(s), {}^{C}D_0^{\beta_1} v(s), \ldots, {}^{C}D_0^{\beta_{n-1}} v(s)\right) ds,
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

et

$$
\begin{aligned}
& v(t) \\
= \; & \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta_n-1}}{\Gamma\left(\beta_n\right)} g\left(s, u(s), v(s), {}^{C}D_0^{\alpha_1} u(s), \ldots, {}^{C}D_0^{\alpha_{n-1}} u(s)\right) ds \\
+ \; & \sum_{j=0}^{n-2} \frac{b_j}{j!} t^j + \frac{\Gamma(n-\kappa) t^{n-1}}{(n-1)!(\Gamma(n-\kappa)-1)\Gamma\left(\beta_n-\kappa\right)} \\
\times \; & \int_0^1 (1-s)^{\beta_n-\kappa-1} g\left(s, u(s), v(s), {}^{C}D_0^{\alpha_1} u(s), \ldots, {}^{C}D_0^{\alpha_{n-1}} u(s)\right) ds.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

En utilisant l'inégalité (3.2), *on trouve :*

$$
\begin{aligned}
& \max_{t\in[0,1]} |x(t)-u(t)| \\
\leq \; & \frac{\epsilon_1}{\Gamma(\alpha_n+1)} \\
+ \; & \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n-1} s^{-\delta}}{\Gamma(\alpha_n)} s^{\delta} \left| \begin{array}{c} f\left(s, x(s), y(s), {}^{C}D_0^{\beta_1} y(s), \ldots, {}^{C}D_0^{\beta_{n-1}} y(s)\right) \\ -f\left(s, u(s), v(s), {}^{C}D_0^{\beta_1} v(s), \ldots, {}^{C}D_0^{\beta_{n-1}} v(s)\right) \end{array} \right| ds \\
+ \; & \frac{\Gamma\left(n-\eta\right) t^{n-1}}{(n-1)!\left|\Gamma\left(n-\eta\right)-1\right|\Gamma\left(\alpha_n-\eta\right)} \\
\times \; & \int_0^1 (1-s)^{\alpha_n-\eta-1} s^{-\delta} s^{\delta} \left| \begin{array}{c} f\left(s, x(s), y(s), {}^{C}D_0^{\beta_1} y(s), \ldots, {}^{C}D_0^{\beta_{n-1}} y(s)\right) ds \\ -f\left(s, u(s), v(s), {}^{C}D_0^{\beta_1} v(s), \ldots, {}^{C}D_0^{\beta_{n-1}} v(s)\right) \end{array} \right| ds,
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

par conséquent,

$$
\|x-u\|_\infty \leq \frac{\epsilon_1}{\Gamma(\alpha_n+1)} + \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j^1 \Upsilon_0 \left\|\left(x-u, y-v\right)\right\|_{B}. \tag{3.7}
$$

De la même manière, on peut montrer que :

$$\left\|y-v\right\|_{\infty} \leq \frac{\epsilon_2}{\Gamma\left(\beta_n+1\right)} + \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j^2 \Upsilon_0^* \left\|\left(x-u, y-v\right)\right\|_{B}. \tag{3.8}$$

En dérivant l'inégalité (3.2), *on obtient :*

$$\begin{vmatrix} {}^{C}D_0^{\alpha_k} x_k(t) - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n-\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)} f\left(s, x(s), y(s), {}^{C}D_0^{\beta_1} y(s), \ldots, {}^{C}D_0^{\beta_{n-1}} y(s)\right) ds \\ -\sum_{j=k}^{n-2} \frac{a_j}{\Gamma(j+1-\alpha_k)} t^{j-\alpha_k} - \frac{\Gamma(n-\eta)\, t^{n-1-\alpha_k}}{\Gamma(n-\alpha_k)\left(\Gamma(n-\eta)-1\right)\Gamma(\alpha_n-\eta)} \\ \times \int_0^1 (1-s)^{\alpha_n-\eta-1} f\left(s, x(s), y(s), {}^{C}D_0^{\beta_1} y(s), \ldots, {}^{C}D_0^{\beta_{n-1}} y(s)\right) ds \end{vmatrix}$$
$$\leq \frac{t^{\alpha_n-\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k+1)}\epsilon_1, \tag{3.9}$$

pour $k = 1, 2, \ldots, n-2$, *et*

$$\begin{vmatrix} {}^{C}D_0^{\alpha_{n-1}} x_k(t) - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_n-\alpha_{n-1}-1}}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_{n-1})} f\left(s, x(s), y(s), {}^{C}D_0^{\beta_1} y(s), \ldots, {}^{C}D_0^{\beta_{n-1}} y(s)\right) ds \\ -\frac{\Gamma(n-\eta)\, t^{n-1-\alpha_{n-1}}}{\Gamma(n-\alpha_{n-1})\left(\Gamma(n-\eta)-1\right)\Gamma(\alpha_n-\eta)} \\ \times \int_0^1 (1-s)^{\alpha_n-\eta-1} f\left(s, x(s), y(s), {}^{C}D_0^{\beta_1} y(s), \ldots, {}^{C}D_0^{\beta_{n-1}} y(s)\right) ds \end{vmatrix}$$
$$\leq \frac{t^{\alpha_n-\alpha_{n-1}}}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_{n-1}+1)}\epsilon_1, \tag{3.10}$$

aussi, en dérivant l'inégalité (3.3), *on trouve :*

$$\begin{vmatrix} {}^{C}D_0^{\beta_k} y_k(t) - \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta_n-\beta_k-1}}{\Gamma(\beta_n-\beta_k)} g\left(s, x(s), y(s), {}^{C}D_0^{\alpha_1} x(s), \ldots, {}^{C}D_0^{\alpha_{n-1}} x(s)\right) ds \\ -\sum_{j=k}^{n-2} \frac{b_j}{\Gamma(j+1-\beta_k)} t^{j-\beta_k} - \frac{\Gamma(n-\kappa)\, t^{n-1-\beta_k}}{\Gamma(n-\beta_k)\left(\Gamma(n-\kappa)-1\right)\Gamma(\beta_n-\kappa)} \\ \times \int_0^1 (1-s)^{\beta_n-\kappa-1} g\left(s, x(s), y(s), {}^{C}D_0^{\alpha_1} x(s), \ldots, {}^{C}D_0^{\alpha_{n-1}} x(s)\right) ds \end{vmatrix}$$
$$\leq \frac{t^{\beta_n-\beta_k}}{\Gamma\left(\beta_n-\beta_k+1\right)}\epsilon_2, \tag{3.11}$$

pour $k = 1, 2, \ldots, n-2$,

$$
\begin{aligned}
&\left| \begin{array}{l}
{}^{C}D_0^{\beta_{n-1}} y_k(t) - \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta_n-\beta_{n-1}-1}}{\Gamma(\beta_n-\beta_{n-1})} g\left(s, x(s), y(s), {}^{C}D_0^{\alpha_1} x(s), \ldots, {}^{C}D_0^{\alpha_{n-1}} x(s)\right) ds \\
- \frac{\Gamma(n-\kappa)\, t^{n-1-\beta_{n-1}}}{\Gamma(n-\beta_{n-1})\left(\Gamma(n-\kappa)-1\right)\Gamma(\beta_n-\kappa)} \\
\times \int_0^1 (1-s)^{\beta_n-\kappa-1} g\left(s, x(s), y(s), {}^{C}D_0^{\alpha_1} x(s), \ldots, {}^{C}D_0^{\alpha_{n-1}} x(s)\right) ds
\end{array} \right| \\
\leq\ & \frac{t^{\beta_n-\beta_{n-1}}}{\Gamma\left(\beta_n-\beta_{n-1}+1\right)} \epsilon_2. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

De même, on peut montrer que :

$$
\left\| {}^{C}D_0^{\alpha_k} (x-u) \right\|_\infty \leq \frac{\epsilon_1}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k+1)} + \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j^1 \Upsilon_k \left\| (x-u, y-v) \right\|_B, \qquad (3.13)
$$

$$
\left\| {}^{C}D_0^{\beta_k} (y-v) \right\|_\infty \leq \frac{\epsilon_2}{\Gamma\left(\beta_n-\beta_k+1\right)} + \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j^2 \Upsilon_k^* \left\| (x-u, y-v) \right\|_B. \qquad (3.14)
$$

En utilisant (3.7), (3.8), (3.13) et (3.14), on trouve :

$$
\begin{aligned}
\left\| (x-u, y-v) \right\|_B &\leq \max_{1\leq k\leq n} \left(\frac{\epsilon_1}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k+1)}, \frac{\epsilon_2}{\Gamma\left(\beta_n-\beta_k+1\right)} \right) + \Theta \left\| (x-u, y-v) \right\|_B \\
&\leq \epsilon\psi + \Theta \left\| (x-u, y-v) \right\|_B, \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

où

$$
\epsilon = \max_{1\leq k\leq 2} \epsilon_k, \quad \psi = \max_{1\leq k\leq n} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k+1)}, \frac{1}{\Gamma\left(\beta_n-\beta_k+1\right)} \right). \qquad (3.16)
$$

Alors,

$$
\left\| (x-u, y-v) \right\|_B \leq \frac{\epsilon\psi}{(1-\Theta)} := \lambda_{f,g}\epsilon, \quad \lambda_{f,g} = \frac{\psi}{(1-\Theta)}. \qquad (3.17)
$$

On en déduit que $\lambda_{f,g} > 0$. *Par conséquent système* (2.1) *est stable au sens d'Ulam-Hyers. Prenant* $\phi_{f,g}(\epsilon) = \lambda_{f,g}\epsilon$, *système* (2.1) *est stable au sens d'Ulam-Hyers généralisée.*

■

Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté un résultat d'existence et d'unicité de solution du problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo. Ce résultat a été obtenu par l'application du théorème de point fixe de Banach. Une application a été présentée pour illustrer le résultat obtenu.

De plus, on a traité la stabilité au sens d'Ulam-Hyers généralisée du système différentiel fractionnaire considéré.

Bibliographie

[1] *S. Abbas, M. Benchohra, J.R. Graef and J. Henderson, Implicit fractional differential and integral equations : existence and stability, Walter de Gruyter GmbH Co KG,* ***26*** *(2018).* 21

[2] *M. Caputo : Linear Model Of Dissipation Whose Q is Almost Frequency Independent, Part II. Geophysical Journal Of Royal Astronomical Society,* ***13*** *(1967) 529-39.* 1

[3] *C. Corduneanu : Principles Of Differential And Integral Equations, Chelsea Publ. Comp, 2nd Edition, (1977).* 13

[4] *Z. Dahmani and A. Taïeb, New Existence and Uniqueness Results for High Dimensional Fractional Differential Systems, Facta Nis Ser. Math. Inform,* ***30 3*** *(2015) 281-293.* 13

[5] *Z. Dahmani and A. Taïeb, Solvability for High Dimensional Fractional Differential Systems with High Arbitrary Orders, Journal of Advanced Scientific Research in Dynamical and Control Systems,* ***7 4*** *(2015) 51-64.* 13

[6] *Z. Dahmani and A. Taïeb, A Coupled System of Fractional Differential Equations Involing Two Fractional Orders, ROMAI Journal,* ***11 2*** *(2015) 141-177.* 13

[7] *Z. Dahmani and A. Taïeb, Solvability of A Coupled System of Fractional Differential Equations with Periodic and Antiperiodic Boundary Conditions, PALM Letters,* ***5*** *(2015) 29-36.* 13

[8] *Z. Dahmani, A. Taïeb and N. Bedjaoui, Solvability and Stability for Nonlinear Fractional Integro-Differential Systems of High Fractional Orders, Facta Nis Ser. Math. Inform,* ***31 3*** *(2016) 629-644.* 1, 21

[9] *D.H. Hyers : On The Stability Of The Linear Functional Equation, Proc. Nat. Acad, Sci,* ***27*** *(1941) 222-224.* 1

[10] *R. Hilfer : Applications Of Fractional Calculus In Physics, World Scientic, River Edge, New Jersey, (2000).* 1

[11] *S. Harikrishnan, R.W. Ibrahim and K. Kanagarajan, On the generalized Ulam-Hyers-Rassias stability for coupled fractional differential equations,* ***2018*** *(2018) 1-13.* 21

[12] *R.W. Ibrahim : Stability Of A Fractional Di¤erential Equation, International Journal Of Mathematical, Computational, Physical And Quantum Engineering,* ***7 3*** *(2013) 300-305.* 1

[13] *R.W. Ibrahim : Ulam Stability Of Boundary Value Problem, Kragujevac Journal Of Mathematics,* ***37 2*** *(2013) 287-297.* 1

[14] *S.M. Jung : Hyers-Ulam-Rassias Stability Of Functional Equations, In Mathematical Analysis., Hadronic Press, Palm Harbor, (2001).* 1

[15] *S.M. Jung : Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations, In Nonlinear Analysis, Springer, New York, (2011).* 1

[16] *Kilbas A. A., Marzan S. A., Nonlinear differential equation with the Caputo fraction derivative in the space of continuously differentiable functions.Differ. Equ,* ***41 1*** *(2005) 84-89.* 13, 14

[17] *A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo : Theory And Applications Of Fractional Differential Equations, Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands, (2006).* 11, 12

[18] *Lakshmikantham V., Vatsala A.S., Basic theory of fractional differential equations. Nonlinear Anal,* ***69 8*** *(2008) 2677-2682.* 13, 14

[19] *G.W. Leibnitz : Leibnitzens Mathematische Schriften, Hildesheim, Germany : Georg Olm,* ***2*** *(1962) 301-302.* 1

[20] *R. Li, Existence of solutions for nonlinear singular fractional differential equations with fractional derivative condition, Advances In DifferenceEquations, (2014).* 13

[21] *K.S. Miller, B. Ross : An Introduction To The Fractional Calculus And Fractional Differential Equations, Wiley, New York, (1993).* 3, 4, 6, 9

[22] *L. Podlubny : Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, (1999).* 1

[23] *Th.M. Rassias : On The Stability Of Linear Mappings In Banach Spaces, Proc. Amer. Math. Soc.,* ***72*** *(1978) 297-300.* 1

[24] *S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev : Fractional Integrals And Deriva- tives : Theory And Applications, Gordon And Breach Science Publishers, Switzerland, (1993).* 1, 3, 4, 6, 9

[25] *D.R. Smart : Fixed point Theorems, Cambridge University Press., (1980).* 11, 12

[26] *J. Spanier, K.B. Oldham : The Fractional Calculus, Academic Press., New York, (1974).* 1, 3, 4, 6, 9

[27] *A. Taïeb and Z. Dahmani, A Coupled System of Nonlinear Differential Equations Involving m Nonlinear Terms, Georjian Math. Journal,* ***23 3*** *(2016) 447-458.* 13

[28] *A. Taïeb and Z. Dahmani, The High Order Lane-Emden Fractional Differential System : Existence, Uniqueness and Ulam Stabilities, Kragujevac Journal Math,* ***40 2*** *(2016) 238-259.* 1, 21

[29] *A. Taïeb and Z. Dahmani, A New Problem of Singular Fractional Differential Equations, Journal of Dynamical Systems and Geometric Theory,* ***14 2*** *(2016) 161-183.* 13, 21

[30] *A. Taïeb and Z. Dahmani, On Singular Fractional Differential Systems and Ulamhyers Stabilities, International Journal of Modern Mathematical Sciences,* ***14 3*** *(2016) 262-282.* 1, 21

[31] *A. Taïeb and Z. Dahmani, Fractional System of Nonlinear Integro-Differential Equations, Journal of Fractional Calculus and Applications,* ***10 1*** *(2019) 55-67.* 1, 21

[32] *A. Taïeb and Z. Dahmani, Triangular System of Higher Order Singular Fractional Differential Equations, Kragujevac Journal of Math,* ***45 1*** *(2021) 81–101.* 21

[33] *A. Taïeb, Several Results for High Dimensional Singular Fractional Systems Involving* n^2*-Caputo Derivatives, Malaya Journal of Matematik.* ***6 3*** *(2018) 569-581.* 21

[34] *A. Taïeb, Stability of Singular Fractional Systems of Nonlinear Integro-Differntial Equations, Lobachevskii Journal of Mathematics.* ***40 2*** *(2019) 219-299.* 1, 21

[35] *A. Taïeb, Generalized Ulam-Hyers Stability of a Fractional System of Nonlinear Integro-Differential Equations, Int. J. Open Problems Compt. Math.* ***12 1*** *March (2019).* 1, 21

[36] *A. Taïeb, Existence of Solutions and Ulam Stability For A Class of Singular Nonlinear Fractional Integro-Differential Equations, Commun. Optim. Theory* ***2019*** *(2019), Article ID 4.* 1, 21

[37] *A. Taïeb, Ulam Stability for A Singular Fractional* 2D *Nonlinear System, Konuralp Journal of Mathematics, in press.* 13, 14, 16, 17, 19, 20, 21, 22

[38] *A. Taïeb, Étude Analytique des Équations Différentielles Fractionnaires et Applications, thèse de doctorat LMD, 2016.* 5, 11, 12

[39] *A. Taïeb, Several Results for High Dimensional Singular Fractional System Involving* n^2 *Caputo Derivatives. TAMTAM 2019, 23 - 27 February, 2019, Tlemcen, Algeria.* 13, 21

[40] *A. Taïeb, Generalized Ulam-Hyers Stability of Fractional Integro-Differential Equations Via Caputo Approach. ICAAMM 2019, 10-13 March, 2019, Istanbul, Turkey.* 21

[41] *V.E. Tarasov : Fractional Dynamics, Applications Of Fractional Calculus To Dynamics of particles, Fields And Media, Springer, Heidelberg, (2010).* 1

[42] *S.M. Ulam : A Collection Of Mathematical Problems, Interscience Publishers., New York, (1968).* 1

[43] *J. Wang, L. Lv and Y. Zhou, Ulam stability and data dependence for fractional differential equations with Caputo derivative, Electronic J Quali TH Diff Equat,* ***63*** *(2011) 1-10.* 21

Résumé

La stabilité d'Ulam-Hyers est l'un des problémes importants de la théorie des équations différentielles et de leurs applications. Dans ce memoire, on considère un systéme non linéaire 2D fractionnaire singulier.

Tout d'abord, on a présenté quelques propriétés bien connues du calcul fractionnaire et de la théorie du point fixe.

En utilisant le principe de contraction de Banach, on a présenté une étude sur l'existence et l'unicité de la solution d'un système non linéaire des équations différentielles fractionnaires. Une application a été présentée pour illustrer ce résultat.

De plus, on a défini et étudié la stabilité au sens d'Ulam-Hyers et la stabilité au sens de d'Ulam-Hyers généralisée de solutions de tels systèmes.

Mots-Clés : *Dérivé au sens de Caputo, équations différentielles fractionnaires, intégrale fractionnaire, existence et unicité, point fixe.*

MSC (2010) : *30C45, 39B72, 39B82.*

Stability of Fractional Differential Equations

Abstract : *Ulam-Hyers stability is one of the important issues in the thory of differential equations and their applications. In this paper, we consider a singular fractional 2D nonlinear system.*

First, we list some well known properties of the fractional calculus theory and fixed point theory.

Using contraction mapping principle, we investigate the existence and uniqueness of solutions of a nonlinear system of fractional differential equations. An application is presented to illustrate our main result.

Moreover, we define and study the Ulam-Hyers stability and the generalized Ulam-Hyers stability of solutions for such systems.

Key Words. *Caputo derivative, fixed point, singular fractional differential equation, existence and uniqueness, generalized Ulam-Hyers stability.*