Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité : "Modélisation Controle et Optimisation"

Présenté par :

Fatima Berrahmoun

Étude Analytique des Systèmes Non Linéaires d'Ordre Fractionnaire

Soutenu publiquement Juin 2019 devant le jury composé de :

Président :	Hafida BENDAHMANE	M.C.B	U. MOSTAGANEM
Examinatrice :	Saliha DERRAR	M.C.B	U. MOSTAGANEM
Encadrante :	Amele TAÏEB	M.C.B	U. MOSTAGANEM

Année Universitaire : 2018-2019

MASTER

Dédicaces

À la Mémoire de Mon Père.

À Ma très chère Maman.

À Tous les Membres de ma Famille.

À Mes Amies.

Remerciements

Je remercie ALLAH, le Tout Puissant, qui m'a donné la force, la volonté et surtout le courage pour accomplir ce modeste mémoire.

Je tiens à remercier, mon encadrante Madame Amele TAÏEB, Maître de Conférences à l'Université de Mostaganem, pour son attention, son encouragement et ses précieux conseils qui ont été nécessaires pour la bonne réussite de ce travail.

Je tiens à remercier également Madame Hafida BENDAHMANE, Maître de Conférences à l'Université de Mostaganem, pour l'intérêt qu'elle a accordé à ce travail en acceptant de présider le jury.

Je tiens à remercier sincèrement, Madame Saliha DERRAR, Maître de Conférences à l'Université de Mostaganem, qui me fait l'honneur de bien vouloir éxaminer mon travail.

Je suis très sensible en ce moment là, à exprimer mes sincères et grands remerciements à tous les membres de ma famille et à touts mes amis pour leur soutien et leurs encouragements.

Table des matières

Index des notations

$\mathbb{N}^*$: Ensemble des entiers naturels non nuls.
$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^*$: Ensemble des nombres réels non nuls.
$\|.\|_\infty$: Norme infinie, $\|x\|_\infty = \mathrm{M}ax\,(|x(t)|\,, t \in [a,b])$.
$C([0,1])$: Espace des fonctions continues sur [0,1].
$C([0,1],\mathbb{R})$: Espace des fonctions continues sur [0,1] à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$C([0,1],\mathbb{B})$: Espace des fonctions continues sur [0,1] à valeurs dans un espace de Banach $\mathbb{B}$.
$\Gamma(.)$: La fonction Gamma.
$B(.,.)$: La fonction Bêta.
I_a^α : Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ au point a.
${}^{RL}D_a^\alpha$: Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ au point a.
${}^{C}D_a^\alpha$: Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ au point a.

Introduction

Les origines de la théorie du calcul fractionnaire, remontent à la fin du $17^{ème}$siècle où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral, voir [12]. De nombreux mathématiciens ont fourni des contributions au développement du calcul fractionnaire, dont on peut citer : P.S. Laplace (1812), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1837), B. Riemann (1847), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), Hadamard (1892), H. Weyl (1917), M. Riesz (1949) et M.Caputo (1967), voir [1].

Cette théorie peut être considérée aussi nouvelle où B. Ross a organisé la première conférence sur le calcul fractionnaire et ses applications en 1974 à l'université de New Haven. Aussi, la première monographie consacrée au calcul fractionnaire a été publiée en 1974 après une collaboration commencée en 1968 entre K.B. Oldham et J.Spanier [17].

La théorie des équations différentielles fractionnaires a de nombreuses applications dans l'ingénierie, la physique, la chimie, la biologie,...etc., (voir, [8, 14, 32]). Par conséquent, on doit être capable de résoudre les équations différentielles, qui peuvent être fortement non linéaires.

L'objectif principal de ce mémoire est de traiter la question d'existence et d'unicité de la solution pour un système fractionnaire, ainsi que l'existence d'une solution au moins du système considéré.

Ce travail est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre intitulé "Préliminaire" est consacré aux outils mathématiques de base du calcul fractionnaire et de la théorie du point fixe.

Le deuxième chapitre intitulé "Système Différentiel d'Ordre Fractionnaire" comprend une étude sur l'existence et l'unicité de la solution d'un système non linéaire des équations différentielles fractionnaires.

Le dernier chapitre intitulé "Application du Théorème de Schaefer à un Système des EDFs" est dédié à l'étude de l'existence d'une solution au moins du système différentiel fractionnaire considéré au chapitre 2.

On terminera par une conclusion qui regroupe tout ce qui a été fait.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, on introduit les concepts et les notions nécessaires de la théorie des équations différentielles fractionnaires. On conclut le chapitre par une section réservée aux différents Théorèmes des points fixes.

1 Fonctions Spéciales

Dans cette section on présente des outils mathématiques de base du calcul fractionnaire (voir, [13, 15, 17, 24])

1.1 Fonction Gamma d'Euler

L'une des fonctions spéciales est la fonction Gamma d'Euler qui apparaît dans divers domaines, comme les séries asymptotiques, la théorie des nombres et l'intégration fractionnaire.

Elle est donnée par la définition suivante :

Définition 1.1

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \; x > 0. \tag{1.1}$$

Propriétés

1. La propriété importante de la fonction Gamma d'Euler Γ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

2. $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$ et $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

3. La fonction Gamma d'Euler généralise la fonction factorielle car :

$$\Gamma(n+1) = n!, \; \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.2}$$

1.2 Fonction Bêta d'Euler

Définition 1.2 *l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Bêta d'Euler qui est définie par l'intégrale suivante :*

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1}\, t^{y-1}\, dt, \quad x,y \in \mathbb{R}_+^*. \tag{1.3}$$

La relation entre les fonctions Gamma et Beta est donnée par l'expression :

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \mathrm{B}(y,x). \tag{1.4}$$

2 Intégrale Fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.3 *[13, 15, 17] L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha > 0$, *pour une fonction* f *continue sur* $[a,b)$ *est donnée par :*

$$\mathrm{I}_a^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, & \alpha > 0, \\ f(t), & \alpha = 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

où $t \geq 0$.

Proposition 1.1 *Soit* $f \in \mathrm{C}([a,b))$. *Pour* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$, *on a :*

$(a) : \mathrm{I}_a^{\alpha}\mathrm{I}_a^{\beta} f = \mathrm{I}_a^{\alpha+\beta} f.$

$(b) : \mathrm{I}_a^{\alpha}\mathrm{I}_a^{\beta} f(t) = \mathrm{I}_a^{\beta}\mathrm{I}_a^{\alpha} f(t).$

Preuve. Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $f \in \mathrm{C}([a,b))$.

Pour (a), la preuve découle directement de la définition.

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_a^{\alpha}\left(\mathrm{I}_a^{\beta}f\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\mathrm{I}_a^{\beta}f\right)(s)\,ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^t\int_0^s (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1}f(\tau)\,d\tau ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^t f(\tau)\left(\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1}ds\right)d\tau. \end{aligned} \tag{1.6}$$

On utilise le changement de variable

$$x = \frac{s-\tau}{t-\tau}, \tag{1.7}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1}ds &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}x^{\beta-1}dx \\ &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\,\mathrm{B}\left(\alpha,\beta\right) \\ &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

En remplaçant (1.8) dans (1.6), on aura :

$$\mathrm{I}_a^{\alpha}\left(\mathrm{I}_a^{\beta}f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}f(\tau)\,d\tau = \mathrm{I}_a^{\alpha+\beta}f(t). \tag{1.9}$$

D'où le résultat. ■
Maintenant pour démontrer (b), en utilisant la propriété précédente (a).
Alors,

$$\mathrm{I}_a^{\alpha}\mathrm{I}_a^{\beta}f(t) = \mathrm{I}_a^{\alpha+\beta}f(t) = \mathrm{I}_a^{\beta+\alpha}f(t) = \mathrm{I}_a^{\beta}\mathrm{I}_a^{\alpha}f(t). \tag{1.10}$$

3 Dérivation Fractionnaire

Dans la littérature, il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire, on va citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

3.1 Approche de Riemann-Liouville

Définition 1.4 *[13, 15, 17] pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, la dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $f \in C([a,+\infty),\mathbb{R})$, est donnée par :*

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(t) = \begin{cases} D^m I_a^{m-\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau\right), & m-1<\alpha<m, \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m. \end{cases} \tag{1.11}$$

À titre d'exemple : On considère la fonction suivante :

$$ f \ : \ t \longmapsto (t-a)^{\beta}, \ t > a. \tag{1.12}$$

Alors,

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\alpha} (t-a)^{\beta} &= D^m I_a^{m-\alpha} (t-a)^{\beta} \\ &= D^m \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} (t-a)^{\beta+m-\alpha}\right). \end{aligned} \tag{1.13}$$

En utilisant l'expression de la dérivation classique

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m} (t-a)^{\delta} &= \delta(\delta-1)\ldots(\delta-m+1)(t-a)^{\delta-m} \\ &= \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta-m+1)} (t-a)^{\delta-m}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

on aura :

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha} (t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} \left(\frac{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+m-\alpha+1-m)} (t-a)^{\beta+m-\alpha-m}\right). \tag{1.15}$$

Ce qui permet d'avoir

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha} (t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.16}$$

On pose : $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.5$. Alors,

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{0.5}(t-a)^{0.5} &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1)} \\
&= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Composition avec L'intégrale Fractionnaire

L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire.

Proposition 1.2 *Soient* $f \in C([a,b))$ *et* $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}^*$.

On a,

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)\left(I_a^{\alpha} f\right)(t) = f(t).$$

Preuve. Soient $f \in C([a,b))$ et $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la propriété classique :

$$D^m\left(I_a^m f\right)(t) = f(t), \tag{1.18}$$

on obtient :

$$
\begin{aligned}
\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)\left(I_a^{\alpha} f\right)(t) &= D^m\left(I_a^{m-\alpha}\right)\left(I_a^{\alpha} f\right)(t) \\
&= D^m\left(I_a^{m-\alpha+\alpha} f\right)(t) \\
&= D^m\left(I_a^m f\right)(t) \\
&= f(t).
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

D'où le résultat annoncé. ■

3.2 Approche de Caputo

On va introduire une dérivée fractionnaire qui est la plus utilisée que celle de Riemann-Liouville.

Définition 1.5 *[13, 15, 17] Pour $m-1<\alpha\leq m$, $m\in\mathbb{N}^*$ et $f\in C^m([a,+\infty))$, la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α de f est définie par :*

$$
{}^{C}D_a^{\alpha}f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1}f^{(m)}(s)\,ds = I_a^{m-\alpha}D^m f(t), & m-1<\alpha<m, \\ \frac{d^m}{dt^m}f(t), & \alpha=m. \end{cases} \tag{1.20}
$$

3.3 Comparaison entre la Dérivée Fractionnaire au sens de Caputo et Celle de Riemann-Liouville

La dérivée d'une constante est nulle par Caputo mais n'est pas nulle par Riemann-Liouville.

À titre d'exemple : On prend la fonction $f: t\mapsto (t-a)^{\beta}$ avec $\beta=0$, et on calcule ${}^{C}D_a^{\frac{3}{2}}f(t)$.

Alors,

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D_a^{\frac{3}{2}}(t-a)^0 &= \left(I_a^{2-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}(1)\right) \\
&= \left(I_a^{\frac{1}{2}}\right)(0) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{1.21}
$$

Par contre par Riemann-Liouville, on a :

$$
{}^{RL}D_a^{\alpha}(t-a)^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \tag{1.22}
$$

- Le lien entre Riemann-Liouville et Caputo est donnée par la relation suivante :

$$
\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)f(t) = \left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)f(t) + \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}f^{(j)}(a), \tag{1.23}
$$

tel que $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}^*$, $a\in\mathbb{R}$ et $f\in C^m([a,+\infty))$.
Cette dernière relation peut aussi s'écrire :

$$\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)f(t) = \left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)\left(f(t)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^j}{j!}f^{(j)}(a)\right). \tag{1.24}$$

À partir de (1.23) et (1.24), si a est un point zéro de f d'ordre m, alors la dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Riemann-Liouville coïncide avec celle de Caputo.
i.e.

$$\left(f^{(j)}(a)=0,\, j=0,1,\ldots,m-1\right) \implies \left(\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)f(t)=\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)f(t)\right). \tag{1.25}$$

Preuve. soit $f\in C^m([a,+\infty))$. Alors,

$$f(t) = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^j}{j!}f^{(j)}(a)+I_a^m D^m f(t). \tag{1.26}$$

On applique $I_a^{m-\alpha}$ à l'équation(1.26), on aura :

$$I_a^{m-\alpha}f(t) = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{m-\alpha+j}}{\Gamma\left(m-\alpha+j+1\right)}f^{(j)}(a)+I_a^{2m-\alpha}D^m f(t). \tag{1.27}$$

Maintenant on applique D^m à l'équation(1.27) ,on obtient :

$$\begin{aligned}
D^m I_a^{m-\alpha}f(t) &= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma\left(m-\alpha+j+1\right)}D^m(t-a)^{m-\alpha+j}+D^m I_a^{2m-\alpha}D^m f(t)\\
&= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma\left(m-\alpha+j+1\right)}\left(\frac{\Gamma\left(m-\alpha+j+1\right)(t-a)^{m-\alpha+j-m}}{\Gamma\left(m-\alpha+j+1-m\right)}\right)+D^m I^m I_a^{m-\alpha}D^m f(t)\\
&= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma\left(j-\alpha+1\right)}f^{(j)}(a)+I_a^{m-\alpha}D^m f(t).
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Par définition, on a

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right) = D^m I_a^{m-\alpha},\ \left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)=I_a^{m-\alpha}D^m. \tag{1.29}$$

Donc,

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)f(t) = \left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)f(t) + \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma\left(j-\alpha+1\right)}f^{(j)}(a). \tag{1.30}$$

Proposition 1.3 *Soient* $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}^*$ *et* $f\in C^m([a,b])$. *Alors, on a :*

(1) : $\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)$ *est un opérateur linéaire.*

(2) : $\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)\left(I_a^{\alpha}f\right)(t)=f(t)$.

(3) : *Si* $\left({}^{C}D_a^{\alpha}f\right)(t)=0$, *alors* $f(t)=\sum_{j=0}^{m-1}c_j(t-a)^j$, $\left(c_j\right)_{j=0,\ldots,m-1}\in\mathbb{R}$.

(4) : $I_a^{\alpha}\left({}^{C}D_a^{\alpha}f\right)(t)=f(t)+\sum_{j=0}^{m-1}c_j(t-a)^j$, $\left(c_j\right)_{j=0,\ldots,m-1}\in\mathbb{R}$.

Preuve. Soient $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}^*$ *et* $f\in C^m([a,b])$. L'item (1) s'obtient par calcul direct.

(2) : La relation (1.24) permet d'obtenir le résultat suivant :

$$\begin{aligned}\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)\left(I_a^{\alpha}f\right)(t) &= \left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)\left(I_a^{\alpha}f(t)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^j}{j!}\left(\left(\frac{d^j}{dt^j}\left(I_a^{\alpha}f\right)\right)(a)\right)\right)\\ &= f(t)-\left(\frac{\Gamma\left(j+1\right)}{\Gamma\left(j+1-\alpha\right)}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{j-\alpha}}{j!}\right)\left(\left(\frac{d^j}{dt^j}\left(I_a^{\alpha}f\right)\right)(a)\right)\\ &= f(t)-\left(\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma\left(j+1-\alpha\right)}\right)\left(\left(\frac{d^j}{dt^j}\left(I_a^{\alpha}f\right)\right)(a)\right).\end{aligned} \tag{1.31}$$

Et comme $j\le m-1<\alpha$, pour $j=0,\ldots,m-1$, alors, les dérivées $\left(\frac{d^j}{dt^j}\left(I_a^{\alpha}f\right)\right)(a)=0$. Ce qui donne :

$$\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)\left(I_a^{\alpha}f\right)(t) = f(t). \tag{1.32}$$

(3) : Soit $\left({}^{C}D_a^{\alpha}f\right)(t)=0$. Alors, on a :

$$I_a^{m-\alpha}f^{(m)}(t) = 0. \tag{1.33}$$

On applique $\left({}^{C}D_a^{m-\alpha}\right)$ à cette formule, on aura :

$$\left({}^{C}D_a^{m-\alpha}\right)I_a^{m-\alpha}f^{(m)}(t) = 0. \tag{1.34}$$

En utilisant l'item (2), on obtient :

$$\left({}^{C}D_a^{m-\alpha}\right)\left(I_a^{m-\alpha}\right)f^{(m)}(t) \quad = \quad f^{(m)}(t)=0. \tag{1.35}$$

Alors, f peut s'écrire sous la forme :

$$f(t) \quad = \quad \sum_{j=0}^{m-1} c_j\,(t-a)^j\,, \tag{1.36}$$

où $\quad c_j \in \mathbb{R},\ j=0,1,\ldots,m-1.$

4 Autour des Théorèmes des Points Fixes

Les Théorèmes du point fixe accordent des conditions suffisantes pour assurer l'existence d'un point fixe pour une fonction donnée.

4.1 Notations et Définitions

Le principe de contraction de Banach [10, 16] est le résultat le plus élémentaire qui assure l'unicité d'un point fixe. Ce Théorème est essentiellement basé sur les définitions suivantes :

Définition 1.6 *Soient* S *un espace vectoriel normé, de norme* $\|.\|_S$ *et* $(u_n)_n$, $\quad n\in\mathbb{N}$, *une suite de* S. *On dit que* $(u_n)_n$ *est une suite de Cauchy si*

$$\forall\varepsilon \quad > \quad 0,\ \exists N\geq 0, \forall n\geq N,\ \forall p\geq N,\ \left\|u_{n+p}-u_n\right\|_S \ \leq\varepsilon. \tag{1.37}$$

Définition 1.7 *On dit que l'espace vectoriel normé* S *est complet pour la norme* $\|.\|_S$ *si toute suite de Cauchy (pour cette norme) est convergente (pour cette norme). Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.*

Définition 1.8 *Soient* B *un espace de Banach muni de la norme* $\|.\|_B$ *et* T *une application de* B *dans* B. *On appelle point fixe de* T *tout point* u *tel que :*

$$Tu \quad = \quad u. \tag{1.38}$$

Définition 1.9 *Soit* S *un espace vectoriel normé, de norme* $\|.\|_S$. *Une application* f *de* S *dans* S *est dite Lipschitzienne de constante* $L \geq 0$ *si elle vérifie :*

$$\forall u, v \in S, \quad \left\| f(u) - f(v) \right\|_S \leq L \|u - v\|_S. \tag{1.39}$$

Définition 1.10 *L'application Lipschitzienne* f *est dite une contraction si* $L \in (0,1)$.

4.2 Principe de Contraction de Banach

Théorème 1.1 *[10, 16] Soit* (E, d) *un espace métrique complet et soit* $f : E \to E$ *une contraction. Alors,* f *admet un point fixe unique.*

Définition 1.11 *Soient* B_1 *et* B_2 *deux espaces de Banach. L'opérateur continu* $T : B_1 \to B_2$ *est complètement continu s'il transforme tout borné de* B_1 *en une partie relativement compacte dans* B_2.

4.3 Théorème du Point Fixe de Schaefer

Notre deuxième résultat du point fixe est le Théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 1.2 *[10, 16] Soient* B *un espace de Banach et* $T : B \to B$ *un opérateur complètement continu. Si l'ensemble :*

$$\Omega \; : = \left\{ u \in B : u = \mu T u, \; \mu \in]0,1[\right\}, \tag{1.40}$$

est borné, alors T *possède au moins un point fixe.*

4.4 Théorème de Arzela-Ascoli

Théorème 1.3 *[2] Soit* $F \subseteq C([a,b])$, *supposons que l'ensemble* F *est équipé de norme* $\|.\|_\infty$. *Alors,* F *est relativement compact dans* $C([a,b])$ *si* F *est equicontinu (c'est-à-dire pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $f \in F$ *et pour tous* $x_1, x_2 \in [a,b]$ *avec* $|x_1 - x_2| < \delta$ *on a :* $\left| f(x_1) - f(x_2) \right| < \epsilon$ *) est uniformément borné (c'est-à-dire il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $\left\| f \right\|_\infty \leq C$, *pour tout* $f \in F$*).*

Chapitre 2

Système Différentiel d'Ordre Fractionnaire

1 Introduction

Une attention considérable a été focalisée sur l'étude des équations différentielles fractionnaires, des papiers considérables ont été réalisés dans ce domaine de recherche, le lecteur intéressé peut se référer aux papiers de références : [3, 4, 5, 7, 18, 19, 20, 21].

Dans ce chapitre, on présente un résultat d'existence et d'unicité de la solution pour un système des équations différentielles non linéaires [6], de la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^{C}D_0^{\alpha}x(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i\left(t, x(t), y(t), {}^{C}D_0^{\delta}x(t), {}^{C}D_0^{\sigma}y(t)\right), \quad 0 < t < 1, \\ {}^{C}D_0^{\beta}y(t) = \sum_{i=1}^{m} g_i\left(t, x(t), y(t), {}^{C}D_0^{\delta}x(t), {}^{C}D_0^{\sigma}y(t)\right), \quad 0 < t < 1, \\ x(0) = x_0^*, \quad y(0) = y_0^*, \\ x'(0) = y'(0) = 0, \\ a\,{}^{C}D_0^{\gamma}x(0) + b\,{}^{C}D_0^{\gamma}x(1) = c\,{}^{C}D_0^{\rho}y(0) + d\,{}^{C}D_0^{\rho}y(1) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Pour ce problème, on prend $\alpha,\beta \in (2,3)$, $\gamma,\rho \in (0,1)$, $\delta,\sigma \in (1,2)$ *et* $J = [0,1]$. Les dérivées ${}^{C}D_0^{\alpha}$, ${}^{C}D_0^{\delta}$, ${}^{C}D_0^{\beta}$, ${}^{C}D_0^{\sigma}$ sont prises au sens de Caputo, a, b, c et $d \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i = 1, \dots, m$, les fonctions f_i et $g_i : [0,1] \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ seront précisées plus tard.

1.1 Lemmes Auxiliaires

Lemme 2.1 *[9, 11] Pour* $\alpha > 0$, *la solution intégrale de l'équation différentielle fractionnaire* ${}^{C}D_0^{\alpha}x(t) = 0$, *est donnée par :*

$$x(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j t^j,$$

où $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., n-1$, $n = [\alpha] + 1$, *avec* $[\alpha]$ *désigne la partie entière de* α.

Lemme 2.2 *[9, 11] Soit* $\alpha > 0$. *Alors,*

$$\mathrm{I}_0^\alpha \left({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^\alpha\right) x(t) = x(t) + \sum_{j=0}^{n-1} c_j t^j,$$

où $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., n-1$, $n = [\alpha] + 1$, *avec* $[\alpha]$ *désigne la partie entière de* α.

Lemme 2.3 *[9, 11] Soient* $q > p > 0$ *et* $f \in \mathrm{L}^1([a, b])$. *Alors,* ${}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_a^p \mathrm{I}_a^q f(t) = \mathrm{I}_a^{q-p} f(t)$, $t \in [a, b]$.

1.2 Solution Intégrale

On prouve le Lemme auxiliaire suivant qui est important pour donner la solution intégrale de (2.1) :

Lemme 2.4 *[6] On suppose que* $(\mathrm{G}_i)_{i=1,...,m} \in \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$ *et on considère le problème :*

$$ {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^\alpha x(t) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{G}_i(t), \quad t \in \mathrm{J}, \quad 2 < \alpha < 3, \tag{2.2}$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = x_0^*, \\ x'(0) = 0, \\ a\, {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^\gamma x(0) + b\, {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^\gamma x(1) = 0, \quad \gamma \in (0,1), \quad a, b \in \mathbb{R}^*. \end{cases} \tag{2.3}$$

Alors, la solution de (2.2) & (2.3) *est donnée par :*

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{G}_i(s)\, ds + x_0^* \\ &\quad - \frac{\Gamma(3-\gamma)\, t^2}{2} \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha-\gamma)} \mathrm{G}_i(s)\, ds. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Preuve. On considère le problème (2.2) . En appliquant le Lemme 2.2, on obtient l'équation intégrale suivante :

$$x(t) \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} \int_{0}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{G}_i(s)\,ds - c_0 - c_1 t - c_2 t^2, \tag{2.5}$$

où $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$.

D'après les conditions initiales, on trouve

$$c_0 = -x_0^*, \quad c_1 = 0.$$

$$c_2 = \frac{\Gamma(3-\gamma)}{2} \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha-\gamma)} \mathrm{G}i(s)ds.$$

Finalement, en substituant c_0, c_1 et c_2 dans (2.5), on obtient (2.4). ■

Maintenant, on présente l'espace de Banach suivant :

$\mathrm{X} := \{x : x \in \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R}), \mathrm{D}^2 x \in \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})\}$, muni de la norme :

$$\|x\|_{\mathrm{X}} \quad = \quad \max\left(\|x\|, \left\|{}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^2 x\right\|\right),$$

où

$$\|x\|_\infty = \max_{t\in \mathrm{J}} |x(t)|, \quad \left\|{}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^2 x\right\|_\infty = \max_{t \in \mathrm{J}} \left|{}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^2 x(t)\right|.$$

En effet $(\mathrm{X}, \|.\|_{\mathrm{X}})$ est un espace de Banach et l'espace produit $(\mathrm{X}\times\mathrm{X}, \|.\|_{\mathrm{X}\times\mathrm{X}})$ est également un espace de Banach avec la norme : $\left\|(x, y)\right\|_{\mathrm{X}\times\mathrm{X}} = \max\left(\|x\|_{\mathrm{X}}, \left\|y\right\|_{\mathrm{X}}\right)$.

1.3 Quelque Hypothèse :

Dans le but d'établir des résultats d'existence pour le système (2.1), on impose les hypothèses suivantes : [6]

(H_1) : Pour tout $i = 1, 2, ..., m$, les fonctions f_i et $g_i : [0,1] \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ sont continues.

(H_2) : Il existe des constantes non négatives μ_j^i, υ_j^i, $j = 1, 2, 3, 4$, $i = 1, ..., m$, telles que pour tout $t \in \mathrm{J}$ et toutes $(x_1, x_2, x_3, x_4), \left(y_1, y_2, y_3, y_4\right) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\left|f_i(t,x_1,x_2,x_3,x_4)-f_i\left(t,y_1,y_2,y_3,y_4\right)\right| \leq \sum_{j=1}^{4}\mu_j^i\left|x_j-y_j\right|,$$

et

$$\left|g_i(t,x_1,x_2,x_3,x_4)-g_i\left(t,y_1,y_2,y_3,y_4\right)\right| \leq \sum_{j=1}^{4}\upsilon_j^i\left|x_j-y_j\right|.$$

(H_3) : Il existe des fonctions continues non négatives $(M_i)_{i=1,\dots,m}$ et $(L_i)_{i=1,\dots,m}$, telles que :

$$\begin{aligned}\left|f_i(t,x_1,x_2,x_3,x_4)\right| &\leq M_i, \quad i=1,2,\dots,m,\\ \left|g_i(t,x_1,x_2,x_3,x_4)\right| &\leq L_i, \quad i=1,2,\dots,m.\end{aligned}$$

On introduit aussi les quantités suivantes : [6]

$$A_1 := \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\Gamma(3-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma+1)},$$

$$A_2 := \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\Gamma(3-\rho)}{2\Gamma(\beta-\rho+1)},$$

$$A_3 := \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}+\frac{\Gamma(3-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)},$$

$$A_4 := \frac{1}{\Gamma(\beta-1)}+\frac{\Gamma(3-\rho)}{\Gamma(\beta-\rho+1)},$$

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &:= \sum_{i=1}^{m}\left(\mu_1^i+\mu_2^i+\frac{\mu_3^i}{\Gamma(3-\delta)}+\frac{\mu_4^i}{\Gamma(3-\sigma)}\right),\\ \Sigma_2 &:= \sum_{i=1}^{m}\left(\upsilon_1^i+\upsilon_2^i+\frac{\upsilon_3^i}{\Gamma(3-\delta)}+\frac{\upsilon_4^i}{\Gamma(3-\sigma)}\right).\end{aligned}$$

2 Existence et Unicité

Notre premier résultat principal est basé sur le principe de la contraction de Banach.

Théorème 2.1 *[6] On suppose que l'hypothèse* (H_2) *est vérifiée. Si l'inégalité*

$$\max\left(\mathrm{A}_1\Sigma_1, \mathrm{A}_2\Sigma_2, \mathrm{A}_3\Sigma_1, \mathrm{A}_4\Sigma_2\right) < 1 \tag{2.6}$$

est valide, alors le problème (2.1) *a une solution unique* sur J.

Preuve. On définit l'opérateur $\mathrm{T} : \mathrm{X}\times\mathrm{X} \to \mathrm{X}\times\mathrm{X}$ par :

$$\mathrm{T}\left(x,y\right)(t) := \left(\mathrm{T}_1\left(x,y\right)(t), \mathrm{T}_2\left(x,y\right)(t)\right),\ t \in \mathrm{J},$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_1\left(x,y\right)(t) &= \sum_{i=1}^{m}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_i\left(s, x(s), y(s), {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\delta}x(s), {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\sigma}y(s)\right)ds \\
&+ x_0^* - t^2\frac{\Gamma\left(3-\gamma\right)}{2} \\
&\times \sum_{i=1}^{m}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma\left(\alpha-\gamma\right)} f_i\left(s, x(s), y(s), {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\delta}x(s), {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\sigma}y(s)\right)ds,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_2\left(x,y\right)(t) &= \sum_{i=1}^{m}\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} g_i\left(s, x(s), y(s), {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\delta}x(s), {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\sigma}y(s)\right)ds \\
&+ y_0^* - \frac{\Gamma\left(3-\rho\right)t^2}{2} \\
&\times \sum_{i=1}^{m}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\rho-1}}{\Gamma\left(\beta-\rho\right)} g_i\left(s, x(s), y(s), {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\delta}x(s), {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_0^{\sigma}y(s)\right)ds.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

On va maintenant montrer que T possède un point fixe unique. Pour cela, on va prouver que T est un opérateur contractif :

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times X$. Alors, pour tout $t \in J$, on a :

$$\left|T_1(x_1, y_1)(t) - T_1(x_2, y_2)(t)\right|$$

$$\leq \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \times \max_{s\in J} \sum_{i=1}^{m} \left| \begin{array}{l} f_i\left(s, x_1(s), y_1(s), {}^C D_0^\delta x_1(s), {}^C D_0^\sigma y_1(s)\right) \\ -f_i\left(s, x_2(s), y_2(s), {}^C D_0^\delta x_2(s), {}^C D_0^\sigma y_2(s)\right) \end{array} \right|$$

$$+\frac{\Gamma(3-\gamma)\, t^2}{2\Gamma(\alpha-\gamma+1)}$$

$$\times \max_{s\in J} \sum_{i=1}^{m} \left| \begin{array}{l} f_i\left(s, x_1(s), y_1(s), {}^C D_0^\delta x_1(s), {}^C D_0^\sigma y_1(s)\right) \\ -f_i\left(s, x_2(s), y_2(s), {}^C D_0^\delta x_2(s), {}^C D_0^\sigma y_2(s)\right) \end{array} \right|.$$

En utilisant (H_2), on obtient :

$$\left|T_1(x_1, y_1)(t) - T_1(x_2, y_2)(t)\right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(3-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\right) \left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} \left(\mu_1^i + \frac{\mu_3^i}{\Gamma(3-\delta)}\right) \max\left(\|x_1 - x_2\|, \left\|D_0^2(x_1 - x_2)\right\|\right) \\ + \sum_{i=1}^{m} \left(\mu_2^i + \frac{\mu_4^i}{\Gamma(3-\sigma)}\right) \max\left(\|y_1 - y_2\|, \left\|D_0^2(y_1 - y_2)\right\|\right) \end{array} \right].$$

Par conséquent,

$$\left\|T_1(x_1, y_1) - T_1(x_2, y_2)\right\|_\infty$$

$$\leq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(3-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\right)$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\mu_1^i + \frac{\mu_3^i}{\Gamma(3-\delta)}\right) \|x_1 - x_2\|_X + \sum_{i=1}^{m} \left(\mu_2^i + \frac{\mu_4^i}{\Gamma(3-\sigma)}\right) \|y_1 - y_2\|_X \right),$$

$$\leq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(3-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\right) \times \sum_{i=1}^{m} \left(\mu_1^i + \frac{\mu_3^i}{\Gamma(3-\delta)} + \mu_2^i + \frac{\mu_4^i}{\Gamma(3-\sigma)}\right)$$

$$\times \max\left(\|x_1 - x_2\|_X, \|y_1 - y_2\|_X\right).$$

D'où,

$$\left\|T_1\left(x_1,y_1\right)-T_1\left(x_2,y_2\right)\right\|_\infty \leq A_1\Sigma_1\left\|(x_1-x_2),(y_1-y_2)\right\|_{X\times X}. \tag{2.9}$$

D'une manière similaire, on peut montrer que :

$$\left\|T_2\left(x_1,y_1\right)-T_2\left(x_2,y_2\right)\right\|_\infty \leq A_2\Sigma_2\left\|(x_1-x_2),(y_1-y_2)\right\|_{X\times X}. \tag{2.10}$$

D'autre part, on a :

$$\left|{}^C D_0^2(T_1\left(x_1,y_1\right)(t)-T_1\left(x_2,y_2\right)(t))\right|$$

$$\leq \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\times\max_{s\in J}\sum_{i=1}^m\left|\begin{array}{c} f_i\left(s,x_1(s),y_1(s),{}^C D_0^\delta x_1(s),{}^C D_0^\sigma y_1(s)\right) \\ -f_i\left(s,x_2(s),y_2(s),{}^C D_0^\delta x_2(s),{}^C D_0^\sigma y_2(s)\right)\end{array}\right|$$

$$+\frac{\Gamma\left(3-\gamma\right)}{\Gamma\left(\alpha-\gamma+1\right)}$$

$$\times\max_{s\in J}\sum_{i=1}^m\left|\begin{array}{c} f_i\left(s,x_1(s),y_1(s),{}^C D_0^\delta x_1(s),{}^C D_0^\sigma y_1(s)\right) \\ -f_i\left(s,x_2(s),y_2(s),{}^C D_0^\delta x_2(s),{}^C D_0^\sigma y_2(s)\right)\end{array}\right|.$$

En utilisant l'hypothèse (H_2), on obtient :

$$\left|{}^C D_0^2(T_1\left(x_1,y_1\right)(t)-T_1\left(x_2,y_2\right)(t))\right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}+\frac{\Gamma\left(3-\gamma\right)}{\Gamma\left(\alpha-\gamma+1\right)}\right)$$

$$\times\left[\begin{array}{c}\sum_{i=1}^m\left(\mu_1^i+\frac{\mu_3^i}{\Gamma(3-\delta)}\right)\max\left(\|x_1-x_2\|,\left\|D_0^2(x_1-x_2)\right\|\right) \\ +\sum_{i=1}^m\left(\mu_2^i+\frac{\mu_4^i}{\Gamma(3-\sigma)}\right)\max\left(\left\|y_1-y_2\right\|,\left\|D_0^2(y_1-y_2)\right\|\right)\end{array}\right].$$

Par conséquent,

$$\left\| {}^{C}D_{0}^{2}((T_1(x_1,y_1) - T_1(x_2,y_2))\right\|_{\infty}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{\Gamma(3-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\right) \\
&\quad \times \sum_{i=1}^{m}\left(\mu_1^i + \frac{\mu_3^i}{\Gamma(3-\delta)} + \mu_2^i + \frac{\mu_4^i}{\Gamma(3-\sigma)}\right) \\
&\quad \times \max\left(\|x_1 - x_2\|_X, \|y_1 - y_2\|_X\right).
\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\left\| {}^{C}D_{0}^{2}(T_1(x_1,y_1) - T_1(x_2,y_2))\right\|_{\infty} \leq A_3\Sigma_1 \left\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\right\|_{X\times X}. \tag{2.11}$$

Raisonnant de la même manière, on obtient :

$$\left\| {}^{C}D_{0}^{2}(T_2(x_1,y_1) - T_2(x_2,y_2))\right\|_{\infty} \leq A_4\Sigma_2 \left\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\right\|_{X\times X}. \tag{2.12}$$

En utilisant (2.9) et (2.11), on trouve :

$$\left\|T_1(x_1,y_1) - T_1(x_2,y_2)\right\|_X \leq \max(A_1\Sigma_1, A_3\Sigma_1) \left\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\right\|_{X\times X}. \tag{2.13}$$

Et par (2.10) et (2.12), on aura :

$$\left\|T_2(x_1,y_1) - T_2(x_2,y_2)\right\|_X \leq \max(A_2\Sigma_2, A_4\Sigma_2) \left\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\right\|_{X\times X}. \tag{2.14}$$

En utilisant (2.13) et (2.14), on trouve :

$$\left\|T(x_1,y_1) - T(x_2,y_2)\right\|_{X\times X}$$

$$\leq \max(A_1\Sigma_1, A_3\Sigma_1, A_2\Sigma_2, A_4\Sigma_2) \left\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\right\|_{X\times X}.$$

Il s'ensuit de la condition (2.6) que l'opérateur T est contractif. Donc T possède un point fixe unique qui est une solution unique du problème 2.1. ■

3 Application

On présente l'exemple suivant, pour illustrer le Théorème 2.1 .
On considère le problème fractionnaire de la forme suivante [6] :

Exemple 2.1

$$\begin{cases} {}^{C}D_0^{\frac{9}{4}} x(t) = \frac{1}{32\pi}\left(\frac{|\sin x(t)|}{1+|\sin x(t)|} + \frac{|\sin y(t)|}{1+|\sin y(t)|} + \frac{t}{1+\left|{}^{C}D^{\frac{3}{2}} x(t)\right|} + \frac{e}{e+\left|{}^{C}D^{\frac{7}{4}} y(t)\right|}\right) \\ +\frac{1}{10\pi\, e^{t}}\left(\frac{\cos x(t)+\cos y(t)}{4\pi^2} + \frac{t}{16(t^2+1)}\sin {}^{C}D_0^{\frac{3}{2}} x(t) + \frac{t}{9(\pi+1)}\sin {}^{C}D_0^{\frac{7}{4}} y(t)\right), \\ t\in[0,1], \\ {}^{C}D_0^{\frac{9}{4}} y(t) = \frac{e^{-t}}{24\pi^2+t}\left(\frac{|x(t)|}{e^{2t}(1+|x(t)|)} + \frac{|y(t)|}{1+|y(t)|} + \cos {}^{C}D_0^{\frac{3}{2}} x(t) + \cos {}^{C}D_0^{\frac{7}{4}} y(t)\right) \\ +\frac{1}{12\pi^2(t^2+1)}\left(e^{-t}(x(t)+y(t)) + \sin {}^{C}D_0^{\frac{3}{2}} x(t) + \sin {}^{C}D_0^{\frac{7}{4}} y(t)\right), \\ t\in[0,1], \\ x(0)=3\sqrt{2}, \quad {}^{C}D_0^{\frac{3}{4}} x(0) + {}^{C}D_0^{\frac{3}{4}} x(1) = 0, \quad x'(0)=0, \\ y(0)=\sqrt{3}, \quad {}^{C}D_0^{\frac{2}{3}} y(0) + {}^{C}D_0^{\frac{2}{3}} y(1) = 0, \quad y'(0)=0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Pour cet exemple, on a : $\alpha=\beta=\frac{9}{4}, \quad \delta=\frac{3}{2}, \quad \sigma=\frac{7}{4}, \quad \gamma=\frac{3}{4}, \quad \rho=\frac{2}{3}, \quad a=b=c=d=1$, $J=[0,1]$.

D'autre part,

$$f_1(t,x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{32\pi}\left(\frac{|\sin x_1|}{1+|\sin x_1|} + \frac{|\sin x_2|}{1+|\sin x_2|} + \frac{t}{1+|x_3|} + \frac{e}{e+|x_4|}\right), \tag{2.16}$$

$$f_2(t,x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{10\pi e^{t}}\left(\frac{\cos x_1+\cos x_2}{4\pi^2} + \frac{t}{16\left(t^2+1\right)}\sin x_3 + \frac{t}{9(\pi+1)}\sin x_4\right). \tag{2.17}$$

Donc, pour tout $t\in[0,1]$ *et toutes* $(x_1,x_2,x_3,x_4), \left(y_1,y_2,y_3,y_4\right)\in\mathbb{R}^4$, *on a :*

$$\left|f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) - f_1\left(y_1,y_2,y_3,y_4\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{32\pi}\left|x_1-y_1\right| + \frac{1}{32\pi}\left|x_2-y_2\right| + \frac{1}{32\pi}\left|x_3-y_3\right| + \frac{1}{32\pi e}\left|x_4-y_4\right|, \tag{2.18}$$

et

$$\left|f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)-f_2\left(y_1,y_2,y_3,y_4\right)\right|$$

$$\leq \quad \frac{1}{40\pi^3}\left|x_1-y_1\right|+\frac{1}{40\pi^3}\left|x_2-y_2\right|+\frac{1}{160\pi}\left|x_3-y_3\right|+\frac{1}{90(\pi^2+\pi)}\left|x_4-y_4\right|. \tag{2.19}$$

On peut prendre :

$$\mu_1^1=\mu_2^1=\mu_3^1=\frac{1}{32\pi}, \quad \mu_4^1=\frac{1}{32\pi e}, \tag{2.20}$$

$$\mu_1^2=\mu_2^2=\frac{1}{40\pi^3}, \quad \mu_3^2=\frac{1}{160\pi}, \quad \mu_4^2=\frac{1}{90(\pi^2+\pi)}. \tag{2.21}$$

On a aussi :

$$g_1(t,x_1,x_2,x_3,x_4)$$

$$=\frac{e^{-t}}{24\pi^2+t}\left(\frac{|x_1|}{e^{2t}(1+|x_1|)}+\frac{|x_2|}{1+|x_2|}+\cos x_3+\cos x_4\right), \tag{2.22}$$

et

$$g_2(t,x_1,x_2,x_3,x_4)$$

$$=\frac{1}{12\pi^2(t^2+1)}\left(e^{-t}(x_1+x_2\right)+\sin x_3+\sin x_4). \tag{2.23}$$

Pour $\quad t\in[0,1] \quad$ *et* $\quad (x_1,x_2,x_3,x_4)\,, \quad \left(y_1,y_2,y_3,y_4\right)\in\mathbb{R}^4,$ *on peut écrire*

$$\left|g_1(x_1,x_2,x_3,x_4)-g_1\left(y_1,y_2,y_3,y_4\right)\right|$$

$$\leq \quad \frac{1}{24\pi^2}\left|x_1-y_1\right|+\frac{1}{24\pi^2}\left|x_2-y_2\right|+\frac{1}{24\pi^2}\left|x_3-y_3\right|+\frac{1}{24\pi^2}\left|x_4-y_4\right|, \tag{2.24}$$

$$\left|g_2(x_1,x_2,x_3,x_4)-g_2\left(y_1,y_2,y_3,y_4\right)\right|$$

$$\leq \quad \frac{1}{12\pi^2}\left|x_1-y_1\right|+\frac{1}{12\pi^2}\left|x_2-y_2\right|+\frac{1}{12\pi^2}\left|x_3-y_3\right|+\frac{1}{12\pi^2}\left|x_4-y_4\right|. \tag{2.25}$$

Alors, on peut avoir

$$\upsilon_1^1=\upsilon_2^1=\upsilon_3^1=\upsilon_4^1=\frac{1}{24\pi^2}, \tag{2.26}$$

$$\upsilon_1^2=\upsilon_2^2=\ \upsilon_3^2=\ \upsilon_4^2=\frac{1}{12\pi^2}. \tag{2.27}$$

Il est clair que

$$\max\left(A_1\Sigma_1, A_2\Sigma_2, A_3\Sigma_1, A_4\Sigma_2\right) < 1. \tag{2.28}$$

Donc, toutes les hypothèses du Théorème 2.1 sont vérifiées, donc le problème 2.15 admet une solution unique.

Chapitre 3

Application du Théorème de Schaefer à un Système des EDFs

1 Introduction

Récemment de nombreux papiers traitant l'existence d'une solution au moins, ont été publié, pour plus de détails voir,[22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31].

Dans ce chapitre, on présente l'existence d'une solution au moins du système [6] de la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^{C}D_0^{\alpha} x(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i\left(t, x(t), y(t), {}^{C}D_0^{\delta} x(t), {}^{C}D_0^{\sigma} y(t)\right), \quad 0 < t < 1, \\ {}^{C}D_0^{\beta} y(t) = \sum_{i=1}^{m} g_i\left(t, x(t), y(t), {}^{C}D_0^{\delta} x(t), {}^{C}D_0^{\sigma} y(t)\right), \quad 0 < t < 1, \\ x(0) = x_0^*, \quad y(0) = y_0^*, \\ x'(0) = y'(0) = 0, \\ a\, {}^{C}D_0^{\gamma} x(0) + b\, {}^{C}D_0^{\gamma} x(1) = c\, {}^{C}D_0^{\rho} y(0) + d\, {}^{C}D_0^{\rho} y(1) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

2 Existence d'une Solution au Moins

Ce résultat est basé sur le Théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 3.1 *[6] Si les hypothèses* (H_1) *et* (H_3) *sont satisfaites, alors le problème* (3.1) *admet au moins une solution sur* J.

Preuve. Afin d'établir l'existence d'une solution au moins, on va montrer que T admet un point fixe. Pour ce faire, on utilise le Théorème du point fixe de Schaefer.

D'après l'hypothèse (H_1), l'opérateur T est continu.

Maintenant, on montre que l'opérateur T est complètement continu :

(A) : On montre que l'opérateur T envoie tout ensemble borné de $X\times X$ en un ensemble borné dans $X\times X$. On prend $\lambda>0$, $(x,y)\in B_\lambda := \{(x,y)\in X\times X;\ \|(x,y)\|_{X\times X}\leq\lambda\}$.

Alors, pour toute $t\in J$, on a :

$$\begin{aligned}\left|T_1(x,y)(t)\right| \leq\ & \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\max_{s\in J}\sum_{i=1}^m\left|f_i\left(s,x(s),y(s),{}^C D_0^\delta x(s),{}^C D_0^\sigma y(s)\right)\right| + x_0^* \\ & + t^2\frac{\Gamma(3-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma+1)} \\ & \times\max_{s\in J}\sum_{i=1}^m\left|f_i\left(s,x(s),y(s),{}^C D_0^\delta x(s),{}^C D_0^\sigma y(s)\right)\right|. \end{aligned} \tag{3.2}$$

En tenant compte de (H_3), on peut écrire

$$\begin{aligned}\left|T_1(x,y)\right| \leq\ & \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\Gamma(3-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\right)\sum_{i=1}^m M_i \\ & +\left|x_0^*\right|. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Donc

$$\left\|T_1(x,y)\right\|_\infty \leq A_1\sum_{i=1}^m M_i+\left|x_0^*\right|. \tag{3.4}$$

D'une manière analogue, on a :

$$\left\|T_2(x,y)\right\|_\infty \leq A_2\sum_{i=1}^m L_i+\left|y_0^*\right|. \tag{3.5}$$

D'autre part, on a :

$$
\begin{aligned}
\left|{}^{C}D_{0}^{2}T_{1}(x,y)(t)\right| \quad \leq \quad & \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \\
& \times \max_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_{i}\left(s,x(s),y(s),{}^{C}D_{0}^{\delta}x(s),{}^{C}D_{0}^{\sigma}y(s)\right)\right| \\
& +\frac{\Gamma(3-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} \\
& \times \max_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_{i}\left(s,x(s),y(s),{}^{C}D_{0}^{\delta}x(s),{}^{C}D_{0}^{\sigma}y(s)\right)\right|. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\left|{}^{C}D_{0}^{2}T_{1}(x,y)(t)\right| \leq \left(\frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}+\frac{\Gamma(3-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\right)\sum_{i=1}^{m}M_{i}. \qquad (3.7)
$$

Cela implique que,

$$
\left\|{}^{C}D_{0}^{2}T_{1}(x,y)\right\|_{\infty} \quad \leq \quad A_{3}\sum_{i=1}^{m}M_{i}. \qquad (3.8)
$$

Avec les mêmes arguments que précédemment, on obtient :

$$
\left\|{}^{C}D_{0}^{2}T_{2}(x,y)\right\|_{\infty} \quad \leq \quad A_{4}\sum_{i=1}^{m}L_{i}. \qquad (3.9)
$$

Des inégalités (3.4) et (3.8) , on obtient :

$$
\left\|T_{1}(x,y)\right\|_{X} \quad \leq \qquad (3.10)
$$

$$
\max\left(A_{1}\sum_{i=1}^{m}M_{i}+\left|x_{0}^{*}\right|,\ A_{3}\sum_{i=1}^{m}M_{i}\right).
$$

En utilisant (3.5) et (3.9), on aura :

$$\left\|T_2\left(x,y\right)\right\|_X \leq \max\left(A_2\sum_{i=1}^{m}L_i+\left|Y_0^*\right|,\ A_4\sum_{i=1}^{m}L_i\right). \tag{3.11}$$

Des inégalités (3.10) et (3.11), on trouve :

$$\left\|T\left(x,y\right)\right\|_{X\times X} \leq \max\left(A_1\sum_{i=1}^{m}M_i+\left|x_0^*\right|,\ A_2\sum_{i=1}^{m}L_i+\left|Y_0^*\right|\ ,\ A_3\sum_{i=1}^{m}M_i, A_4\sum_{i=1}^{m}L_i\right). \tag{3.12}$$

Alors,

$$\left\|T\left(x,y\right)\right\|_{X\times X} < \infty. \tag{3.13}$$

(B) : On va établir l'équicontinuité de T :

Soit $\left(x,y\right)\in B_\lambda$. Alors pour $0\leq t_1<t_2\leq 1$, on a :

$$\begin{aligned}&\left|T_1\left(x,y\right)(t_2)-T_1\left(x,y\right)(t_1)\right|\\ \leq\ & \frac{\left(t_2^\alpha-t_1^\alpha\right)+2\left(t_2-t_1\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{i=1}^{m}M_i+\frac{(t_2-t_1)^2\,\Gamma\left(3-\gamma\right)}{2\Gamma\left(\alpha-\gamma+1\right)}\sum_{i=1}^{m}M_i,\end{aligned} \tag{3.14}$$

cela implique que

$$\begin{aligned}&\left\|T_1\left(x,y\right)(t_2)-T_1\left(x,y\right)(t_1)\right\|_\infty\\ \leq\ & \left(\frac{\left(t_2^\alpha-t_1^\alpha\right)+2\left(t_2-t_1\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{(t_2-t_1)^2\,\Gamma\left(3-\gamma\right)}{2\Gamma\left(\alpha-\gamma+1\right)}\right)\sum_{i=1}^{m}M_i.\end{aligned} \tag{3.15}$$

De la même manière, on montre que :

$$\left\|T_2\left(x,y\right)(t_2)-T_2\left(x,y\right)(t_1)\right\|_\infty$$

$$\leq \left(\frac{\left(t_2^{\beta} - t_1^{\beta}\right) + 2\left(t_2 - t_1\right)^{\beta}}{\Gamma\left(\beta + 1\right)} + \frac{\left(t_2 - t_1\right)^2 \Gamma\left(3 - \rho\right)}{2\Gamma\left(\beta - \rho + 1\right)} \right) \sum_{i=1}^{m} L_i. \tag{3.16}$$

D'autre part, on a :

$$\left|{}^{C}D_0^2 T_1\left(x, y\right)\left(t_2\right) - {}^{C}D_0^2 T_1\left(x, y\right)\left(t_1\right)\right|$$

$$\leq \left(\frac{\left(t_2^{\alpha-2} - t_1^{\alpha-2}\right)}{\Gamma(\alpha - 1)} + 2\frac{\left(t_2 - t_1\right)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha - 1)} \right) \sum_{i=1}^{m} M_i. \tag{3.17}$$

Ainsi

$$\left\|{}^{C}D_0^2 T_1\left(x, y\right)\left(t_2\right) - {}^{C}D_0^2 T_1\left(x, y\right)\left(t_1\right)\right\|_{\infty}$$

$$\leq \left(\frac{\left(t_2^{\alpha-2} - t_1^{\alpha-2}\right)}{\Gamma(\alpha - 1)} + 2\frac{\left(t_2 - t_1\right)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha - 1)} \right) \sum_{i=1}^{m} M_i. \tag{3.18}$$

Finalement, d'une manière analogue on peut obtenir :

$$\left\|{}^{C}D_0^2 T_2\left(x, y\right)\left(t_2\right) - {}^{C}D_0^2 T_2\left(x, y\right)\left(t_1\right)\right\|_{\infty}$$

$$\leq \left(\frac{\left(t_2^{\beta-2} - t_1^{\beta-2}\right)}{\Gamma\left(\beta - 1\right)} + 2\frac{\left(t_2 - t_1\right)^{\beta-2}}{\Gamma\left(\beta - 1\right)} \right) \sum_{i=1}^{m} L_i. \tag{3.19}$$

D'après (3.15), (3.16), (3.18) et (3.19), on peut affirmer que $\left\|T\left(x, y\right)\left(t_2\right) - T\left(x, y\right)\left(t_1\right)\right\|_{X\times X}$ tend vers zéro quand t_2 tend vers t_1.

En combinant (A) et (B), et en vertu du Théorème de Arzela-Ascoli, on conclut que T est un opérateur complètement continu.

(C) : On prouve que pour un certain $0 < \varphi < 1$, l'ensemble

$$\omega := \left\{\left(x, y\right) \in X \times X,\ \left(x, y\right) = \varphi T\left(x, y\right)\right\}, \tag{3.20}$$

est borné.

En effet, soit $\left(x,y\right)\in\omega$, alors $\left(x,y\right)=\varphi \mathrm{T}\left(x,y\right)$, pour $0<\varphi<1$.

Donc, pour tout $t\in \mathrm{J}$, on a :

$$x\left(t\right)=\varphi \mathrm{T}_1\left(x,y\right)\left(t\right),\quad y\left(t\right)=\varphi \mathrm{T}_2\left(x,y\right)\left(t\right). \tag{3.21}$$

En utilisant l'hypothèse (H_3), (3.10) et (3.11), on obtient :

$$\frac{1}{\varphi}\left\|x\right\|_{\mathrm{X}} \leq \max\left(\mathrm{A}_1\sum_{i=1}^{m}\mathrm{M}_i+\left|x_0^*\right|,\ \mathrm{A}_3\sum_{i=1}^{m}\mathrm{M}_i\right),$$

et,

$$\frac{1}{\varphi}\left\|y\right\|_{\mathrm{X}} \leq \max\left(\mathrm{A}_2\sum_{i=1}^{m}\mathrm{L}_i+\left|\mathrm{Y}_0^*\right|,\ \mathrm{A}_4\sum_{i=1}^{m}\mathrm{L}_i\right).$$

Donc,

$$\left\|\left(x,y\right)\right\|_{\mathrm{X}\times\mathrm{X}} < \infty. \tag{3.22}$$

Ce qui prouve que ω est borné.

On conclut par le Théorème du point fixe de Schaefer que l'opérateur T admet au moins un point fixe qui est la solution du problème 3.1. Ce qui achève la démonstration.

3 Application

On présente un exemple pour illustrer le résultat principal.
On considère le système fractionnaire suivant [6] :

Exemple 3.1

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0}^{\frac{5}{2}}x(t)=\dfrac{t^{2}+1}{4\pi+e+\sin\left(x(t)+{}^{C}D_{0}^{\frac{4}{3}}x(t)\right)\cos\left(y(t)+{}^{C}D_{0}^{\frac{9}{7}}y(t)\right)}+\dfrac{e^{t}\cos(x(t)y(t))}{8\pi+\cos\left({}^{C}D_{0}^{\frac{4}{3}}x(t)+{}^{C}D_{0}^{\frac{9}{7}}y(t)\right)}, \\ t\in[0,1], \\ {}^{C}D_{0}^{\frac{7}{3}}y(t)=\dfrac{\cos(x(t)+y(t))+\sin{}^{C}D^{\frac{4}{3}}x(t)\sin{}^{C}D^{\frac{9}{7}}y(t)}{e^{t}(t^{2}+16)}+2\pi t\left(\dfrac{\cos\left(x(t)+{}^{C}D_{0}^{\frac{4}{3}}x(t)\right)}{3+\cos\left(x(t)+{}^{C}D_{0}^{\frac{4}{3}}x(t)\right)}+\dfrac{\sin\left(y(t){}^{C}D_{0}^{\frac{9}{7}}y(t)\right)}{2e^{t}+\sin\left(y(t){}^{C}D_{0}^{\frac{9}{7}}y(t)\right)}\right), \\ t\in(0,1), \\ x(0)=\sqrt{5}, \quad y(0)=\sqrt{2}, \\ {}^{C}D_{0}^{\frac{1}{2}}x(0)-{}^{C}D_{0}^{\frac{1}{2}}x(1)=0, \quad {}^{C}D_{0}^{\frac{1}{4}}y(0)-{}^{C}D_{0}^{\frac{1}{4}}y(1)=0, \\ x^{'}(0)=y'(0)=0\,. \end{cases} \tag{3.23}$$

Ici on a : $\alpha=\frac{5}{2}$, $\beta=\frac{7}{3}$, $\delta=\frac{4}{3}$, $\sigma=\frac{9}{7}$, $\gamma=\frac{1}{2}$, $\rho=\frac{1}{4}$, $a=c=-b=-d=1$,

J=$[0,1]$, *et pour tout* $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$,

$$f_1(t,x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{t^2+1}{4\pi+e+\sin(x_1+x_3)\cos(x_2+x_4)}, \tag{3.24}$$

$$f_2(t,x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{e^t\cos(x_1x_2)}{8\pi+\cos(x_3+x_4)}, \tag{3.25}$$

$$g_1(t,x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{\cos(x_1+x_2)+\sin x_3\sin x_4}{e^t\left(t^2+16\right)}, \tag{3.26}$$

$$g_2(t,x_1,x_2,x_3,x_4)=2\pi t\left(\frac{\cos(x_1+x_3)}{3+\cos(x_1+x_3)}+\frac{\sin(x_2x_4)}{2e^t+\sin(x_2x_4)}\right). \tag{3.27}$$

Donc, les hypothèses (H_1) et (H_3) sont satisfaites, d'où le système 3.23 admet au moins une solution sur J.

Conclusion et Perspective

Dans ce travail, on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites concernant les équations différentielles fractionnaires avec des conditions initiales. Les résultats obtenus sont basés sur des théorèmes qui ont leurs poids dans l'analyse fonctionnelle, en particulier on a utilisé le théorème du point fixe de Banach et de Scheafer. Dans le future, on peut considérer des problèmes aux limites pour les équations différentielles fractionnaires avec la dérivée d'Hdamart.

Bibliographie

[1] M. Caputo , *Linear Model Of Dissipation Whose Q is Almost Frequency Independent*, Part II. Geophysical Journal Of Royal Astronomical Society., **13** (1967) 529-39. 1

[2] C. Corduneanu , *Principles Of Differential And Integral Equations*, Chelsea Publ. Comp., 2nd Edition, (1977). 11

[3] Z. Dahmani and A. Taïeb, *New Existence and Uniqueness Results for High Dimensional Fractional Differential Systems*, Facta Nis Ser. Math. Inform, **30 3** (2015) 281-293. 12

[4] Z. Dahmani and A. Taïeb, *Solvability for High Dimensional Fractional Differential Systems with High Arbitrary Orders*, Journal of Advanced Scientific Research in Dynamical and Control Systems, **7 4** (2015) 51-64. 12

[5] Z. Dahmani and A. Taïeb, *A Coupled System of Fractional Differential Equations Involing Two Fractional Orders*, ROMAI Journal, **11 2** (2015) 141-177. 12

[6] Z. Dahmani and A. Taïeb, *Solvability of A Coupled System of Fractional Differential Equations with Periodic and Antiperiodic Boundary Conditions*, PALM Letters, **5** (2015) 29-36. 12, 13, 14, 15, 16, 20, 23, 28

[7] Z. Dahmani, A. Taïeb and N. Bedjaoui, *Solvability and Stability for Nonlinear Fractional Integro-Differential Systems of High Fractional Orders*, Facta Nis Ser. Math. Inform, **31 3** (2016) 629-644. 12

[8] R. Hilfer , *Applications Of Fractional Calculus In Physics*, World Scientic, River Edge., New Jersey, (2000). 1

[9] Kilbas A. A., Marzan S. A., *Nonlinear differential equation with the Caputo fraction derivative in the space of continuously differentiable functions.*Differ. Equ., **41 1** (2005) 84-89. 12, 13

[10] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo , *Theory And Applications Of Fractional Differential Equations*, Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands, (2006). 10, 11

[11] Lakshmikantham V., Vatsala A.S., *Basic theory of fractional differential equations.* Nonlinear Anal., **69 8** (2008) 2677-2682. 12, 13

[12] G.W. Leibnitz , *Leibnitzens Mathematische Schriften*, Hildesheim, Germany : Georg Olm, **2** (1962) 301-302. 1

[13] K.S. Miller, B. Ross , *An Introduction To The Fractional Calculus And Fractional Differential Equations*, Wiley, New York, (1993). 2, 3, 5, 7

[14] L. Podlubny , *Fractional Differential Equations*, Academic Press., San Diego, (1999). 1

[15] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev , *Fractional Integrals And Deriva- tives : Theory And Applications*, Gordon And Breach Science Publishers., Switzerland, (1993). 2, 3, 5, 7

[16] D.R. Smart , *Fixed point Theorems*, Cambridge University Press., (1980). 10, 11

[17] J. Spanier, K.B. Oldham, *The Fractional Calculus*, Academic Press., New York, (1974). 1, 2, 3, 5, 7

[18] A. Taïeb and Z. Dahmani, *A Coupled System of Nonlinear Differential Equations Involving m Nonlinear Terms*, Georjian Math. Journal, **23 3** (2016) 447-458. 12

[19] A. Taïeb and Z. Dahmani, *The High Order Lane-Emden Fractional Differential System : Existence, Uniqueness and Ulam Stabilities*, Kragujevac Journal Math, **40 2** (2016) 238-259. 12

[20] A. Taïeb and Z. Dahmani, *A New Problem of Singular Fractional Differential Equations*, Journal of Dynamical Systems and Geometric Theory, **14 2** (2016) 161-183. 12

[21] A. Taïeb and Z. Dahmani, *On Singular Fractional Differential Systems and Ulam-hyers Stabilities*, International Journal of Modern Mathematical Sciences, **14 3** (2016) 262-282. 12

[22] A. Taïeb and Z. Dahmani, *Fractional System of Nonlinear Integro-Differential Equations*, Journal of Fractional Calculus and Applications, **10 1** (2019) 55-67. 23

[23] A. Taïeb and Z. Dahmani, *Triangular System of Higher Order Singular Fractional Differential Equations*, Kragujevac Journal of Math, **45 1** (2021) 81–101. 23

[24] A. Taïeb, *Étude Analytique des Équations Différentielles Fractionnaires et Applications*, thèse de doctorat LMD, 2016. 2

[25] A. Taïeb, *Several Results for High Dimensional Singular Fractional Systems Involving n^2-Caputo Derivatives*, Malaya Journal of Matematik, **6 3** (2018) 569-581. 23

[26] A. Taïeb, *Several Results for High Dimensional Singular Fractional System Involving n^2 Caputo Derivatives*. TAMTAM 2019, 23 - 27 February, 2019, Tlemcen, Algeria. 23

[27] A. Taïeb, *Generalized Ulam-Hyers Stability of a Fractional System of Nonlinear Integro-Differential Equations*, Int. J. Open Problems Compt. Math, **12 1** March (2019). 23

[28] A. Taïeb, *Generalized Ulam-Hyers Stability of Fractional Integro-Differential Equations Via Caputo Approach*. ICAAMM 2019, 10-13 March, 2019, Istanbul, Turkey. 23

[29] A. Taïeb, *Stability of Singular Fractional Systems of Nonlinear Integro-Differntial Equations*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **40 2** (2019) 219-299. 23

[30] A. Taïeb, *Existence of Solutions and Ulam Stability For A Class of Singular Nonlinear Fractional Integro-Differential Equations*, Commun. Optim. Theory **2019** (2019), Article ID 4. 23

[31] A. Taïeb, *Ulam Stability for A Singular Fractional* 2D *Nonlinear System*, Konuralp Journal of Mathematics, in press. 23

[32] V.E. Tarasov , *Fractional Dynamics*, Applications Of Fractional Calculus To Dynamics of particles, Fields And Media, Springer, Heidelberg, (2010). 1

Résumé

Au cours de ces dernières années, une attention particulière a été focalisée à la théorie des équations différentielles fractionnaires. Par conséquent, on doit être capable de résoudre les équations différentielles, qui peuvent être fortement non linéaires.

L'objectif principal de ce mémoire est de traiter la question d'existence et d'unicité de la solution pour un système fractionnaire, ainsi que l'existence d'une solution au moins du système considéré.

Tout d'abord, on a présenté des outils mathématiques de base du calcul fractionnaire et de la théorie du point fixe.

Comme une application du principe de contraction de Banach, on a présenté une étude sur l'existence et l'unicité de la solution d'un système non linéaire des équations différentielles fractionnaires. Une application a été présentée pour illustrer ce résultat.

De plus, on a présenté une étude sur l'existence d'une solution au moins du système différentiel fractionnaire considéré. Pour illustrer le résultat obtenu, on a présenté une application.

Mots-Clés : Dérivé au sens de Caputo, équations différentielles fractionnaires, intégrale fractionnaire, existence et unicité, point fixe.

MSC (2010) : 26A33, 34K05

Analytical Study of Nonlinear Fractional Differential System

Abstract : In recent years, special attention has been focused on the theory of fractional differential equations. Therefore, one should be able to solve the differential equations, which can be strongly nonlinear.

The main purpose of this paper is to deal with the question of existence and uniqueness of the solution for a fractional system, as well as the existence of at least one solution of the considered system.

First, we presented basic mathematical tools for fractional calculus and fixed point theory.

As an application of Banach's contraction principle, we presented a study for the existence and uniqueness of the solution of a nonlinear system of fractional differential equations. In addition, we studied the existence of at least one solution of the considered system. We also presented some applications, to illustrate the main results.

Key Words : Caputo derivative, fixed point, fractional differential equation, existence and uniqueness.