Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Master Académique

pour obtenir le diplôme de Master délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté et soutenu publiquement par

Mlle BELKACEMI Djamila

le 26 Juin 2019

Contrôle et Région de Stabilité des Systèmes Singuliers Positifs Perturbés en Temps Continu

Encadeur : **BOUAGADA Djillali** **Professeur (Université de Mostaganem, Algérie)**

Jury

Mr.GHEZZAR Mohammed Amine. ,	M.C.B	Président (Université de Mostaganem, Algérie)
Mme.KAISSERLI Zineb. ,	M.C.B	Examinatrice (Université de Mostaganem, Algérie)

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique (FSEI)
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie

MASTER

Remerciements

Tout d'abord, je remercie le Dieu,mon créateur de m'avoir donner la force, la volonté et le courage afin d'accomplir ce modeste travail.

Mes remerciements vont à mon encadreur Monsieur BOUAGADA Djillali, pour toute sa gentillesse, pour ses précieux conseils et pour sa patience avec moi.

Je remercie également les professeurs Monsieur GHEZZAR Mohammed Amine d'avoir accepter de présider le jury ainsi que KAISSERLI Zineb de m'avoir aussi fait l'honneur d'examiner ce modeste travail.

Un grand merci à tout ceux qui m'ont aidé dans mon travail très spécialement Madame LAHMAR Naima, Mademoiselle HAMMOU MAAMAR et ma camarade Mademoiselle BERILHA Amel.

Mes remerciements vont de même au corps professoral et administratif de la faculté Mathématique et Informatique, pour la richesse et la qualité de leur enseignement et qui déploient de grands efforts pour assure à leurs étudiants une formation actualisée.

Finalement, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma famille qui m'ont toujours soutenues.

Table des matières

Introduction

L'analyse de la stabilité est une étape nécessaire pour l'étude du fonctionnement des systèmes qu'ils soient physiques, économiques, électroniques, etc. . . ; et qui a fait l'objet de nombreuses recherches depuis la fin du XIXème siècle et c'est pour cette raison que le développement des méthodes mathématiques reste toujours nécessaire pour la résolution des problèmes compliqués posés par les différents domaines de la science.

La définition standard de la stabilité de systèmes linéaires exige la convergence de la solution vers zéro pour une condition initiale arbitraire ; la seconde équivalente définition est caractérisée par les conditions nécessaires et suffisantes en termes de racines de polynôme caractéristique. Une autre variante pour tester la stabilité asymptotique est donnée par ***A . Lyapunov***. D'autres certificats garantissant la stabilité asymptotique ont été dérivés par [4] et [5], en utilisant l'outil LMI qui veut dire en anglais : Linear Matrix Inequalities et en français IML : Inégalité Matricielle Linéaire.

Nous considérons dans ce projet deux classes de systèmes, la première dite classe de systèmes singuliers linéaires et la seconde classe est celle des systèmes perturbés. Ils sont d'un grand intérêt pour modéliser de nombreux procédés pratiques comme leurs homologues les systèmes standards linéaires. Notons que ces derniers se rencontrent dans l'étude des systèmes interconnectés, les réseaux électriques, la robotique, plus généralement les structures mécaniques et l'automatisation des procédés industriels. A l'instar des modèles standards, l'étude de la stabilité des systèmes singuliers est importante pour comprendre le comportement transitoire du système, en particulier la stabilité asymptotique. Contrairement au cas non singulier, la localisation des valeurs propres finies du faisceau singulier est insuffisante pour caractériser la stabilité (lorsque det(E) est non nul), d'autres propriétés doivent être vérifiées. Nous nous intéressons en parallèle à la solvabilité (qui veut dire l'existence d'une solution unique du modèle d'état perturbé ou non) et à la stabilité par l'approche LMI à la ***Lyapunov***. L'utilisation de ces nouveaux outils paraît donc intéressante dans des domaines où des performances sévères sont requises, dans le milieu industriel notamment. Nous attaquerons la recherche de solutions comme étudiée dans [4] et [5] ; L'outil produit de Kronecker est donc utilisé pour tester par la méthode de ***Lyapunov*** la stabilité des deux classes citées.

L'objectif de ce mémoire est cependant d'étudier la stabilité de systèmes singuliers à matrices non négatives perturbées. Ces derniers sont d'une grande importance en pratique puisque la propriété de positivité apparaît dans de nombreuses applications numériques ou dans la nature (en physique, ou chimique,...).

Le mémoire que nous présentons est rédigé comme suit : Le premier chapitre est consacré à la présentation de quelques rappels de notions de bases sur la théorie de matrices telles que ces notions ont de grandes utilités par la suite.

Dans le second chapitre nous donnons aussi quelques définitions des systèmes positifs.
Dans le troisième chapitre, nous testerons la stabilité de systèmes singuliers en temps continu, en se basant sur la théorie de ***Lyapunov***.
Dans le dernier et quatrième chapitre nous considérons le problème qui nous intéresse c'est à dire le problème de la perturbation de ces systèmes.

À la fin nous terminerons notre travail par une conclusion qui couvre tous ce que nous avons réalisé dans ce mémoire.

Chapitre 1

Notions de base sur la théorie des matrices

Dans cette première partie introductive, nous présentons la théorie générale de matrices particulières telles les matrices non-négatives,Les matrices de *Metzler* ou encore les matrices monomiales. Nous nous basons pour ce faire sur [1],[2],[6] et [7].

1 Matrices non-négatives,positives et de Metzler

Soient $A = \left(a_{ij}\right)_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ des matrices à coefficients réels. Par la suite notons I_n, la matrice identité d'ordre n ou plus brièvement I, $A^\top$ la transposée d'une matrice A, $\underline{n}$ l'ensemble des n premiers entiers naturels, $1,2,\ldots\ldots,n$.

Définition 1.1 (Matrice non-négative) *Soit la matrice* $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$*, elle est appelée* ***non-négative*** *si* $\forall i \in \underline{n}, \quad \forall j \in \underline{m}: \quad a_{ij} \geq 0$*, autrement dit toutes ses entrées sont non-négatives. Nous noterons une telle matrice par :* $A \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$

Exemple 1.1 *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice non-négative.

Définition 1.2
- A *est une matrice* ***positive*** *si* A *est non-négative et* $\exists k \in \underline{n}, \exists l \in \underline{m}: \quad a_{kl} \geq 0$*, c'est à dire : toutes ses entrées sont non-négatives avec au moins une entrée (strictement)positive. Nous noterons une telle matrice par :* $A > 0$

- A *est une matrice* ***strictement positive*** *si* $\forall i \in \underline{n}, \forall j \in \underline{m}: a_{ij} > 0$*, i.e toutes ses entrées sont strictement positives. Nous noterons une telle matrice par :* $A >> 0$.
  Ces définitions et notations seront également valables pour des vecteurs de dimension n, $n \geq 2$*. Cependant, pour les scalaires, la propriété strictement positive* $a >> 0$ *coïncide avec* $a > 0$.
- A *est une matrice de Metzler si :* $\forall i \in \underline{n}, \forall j \in \underline{m}, i \neq j : a_{ij} \geq 0$*. i.e toutes ses entrées hors diagonale sont non-négatives.*

Exemple 1.2

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

est une matrice de Metzler.

Proposition 1.1 *:* A *est une matrice de Metzler si et seulement si* $\forall t \geq 0, e^{\mathrm{A}t} \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$*,ou de manière équivalente* $\forall t \geq 0$*, l'orthant positif* $\mathbb{R}_+^n$ *est* $e^{\mathrm{A}t}$*-invariant, c'est à dire :*

$$\forall t \geq 0, \forall x \forall x \in \mathbb{R}_+^n, e^{\mathrm{A}t} x \in \mathbb{R}_+^n$$

.

Preuve. Nécessité : Supposons que A est une matrice de *Metzler*, On peut trouver un réel $\lambda > 0$ tel que $(\mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}_n) > 0$ et sachant que :

$$\mathrm{A} = \mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}_n - \lambda \mathrm{I}_n = -\lambda \mathrm{I}_n + \mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}_n$$

Il s'ensuit que :

$$e^{\mathrm{A}t} = e^{(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)t + (-\lambda \mathrm{I}_n)t} = e^{(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)t} e^{(-\lambda \mathrm{I}_n)t}$$

du fait que $e^{(\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I}_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ et $e^{(-\lambda \mathrm{I}_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$; on conclut que $e^{\mathrm{A}t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.
Suffisance :
Supposons que $\forall t \geq 0, e^{\mathrm{A}t} \geq 0$.
Ainsi, puisque

$$\mathrm{A} = \frac{d}{dt}\left(e^{\mathrm{A}t}\right)_{t=0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{\mathrm{A}t} - \mathrm{I}}{t}$$

prenons comme e_j le j^{ieme} vecteur de la base canonique, nous obtenons pour $i \neq j$:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\langle e^{\mathrm{A}t} e_j - e_j, e_i \rangle}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \left\{ \frac{\langle e^{\mathrm{A}t} e_j, e_i \rangle}{t} - \frac{\langle e_j, e_i \rangle}{t} \right\} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\langle e^{\mathrm{A}t} e_j - e_j, e_i \rangle}{t} \geq 0 \end{aligned}$$

puisque $\langle e_j, e_i \rangle = 0$, Dés lors, $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ et la matrice A est donc de*Metzler.* ■

Définition 1.3 *Soit* $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^{n\times m}$*, elle est dite* ***définie positive*** *si et seulement si pour tout* $x \in \mathbb{R}^{n\times m}, x \neq 0, \quad x^\top \mathrm{M} x > 0$.

Exemple 1.3 *La matrice suivante :*

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

est définie positive.
En effet,

Pour tout x un vecteur de $\mathbb{R}^3$ *tel que* $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$ *,on a :*

$$\begin{aligned} x^\top \mathrm{M} x &= \begin{pmatrix} x_1 & , x_2 & , x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &= 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 > 0 \end{aligned}$$

2 Matrices monomiales

Définition 1.4 *Soit* A *une matrice carrée à valeurs réelles d'ordre n* ($\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$) *:*
A *est une matrice* ***monomiale*** *(ou matrice de* ***permutation généralisée****) si les entrées de* A *sont toutes nulles sauf une, dans chaque ligne et chaque colonne, qui est strictement positive.*

Exemple 1.4 *La matrice*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice de permutation généralisée.

En particulier, une matrice de permutation est une matrice monomiale dans laquelle chaque entrée non nulle est égale à 1.

Théorème 1.1 *: [1] L'inverse d'une matrice positive* A *est une matrice positive si et seulement si* A *est une matrice monomiale.*

3 Réponse de systèmes linéaires singuliers en temps continu

Une représentation d'état permet de modéliser un système dynamique sous forme matricielle en utilisant les variables d'état.
On se place alors dans un espace d'état. Cette représentation qui peut être linéaire ou non-linéaire.
Dans notre travail, nous nous intéressons à la classe des systèmes L.T.I ; qui veut dire linéaire à temps invariants.

Cas standard

Le système linéaire est défini par :

$$\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t) \quad (1.1)$$

$$y(t) = \mathrm{C}x(t) + \mathrm{D}u(t) \quad (1.2)$$

pour $t \geq t_0$. avec $x(t_0 = 0)$ où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ le contrôle (la commande ou l'entrée) du système et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie (la mesure) du système.
$\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ sont des matrices appropriées telles que :

— A : matrice d'état.
— B : matrice de contrôle (d'entrée).
— C : matrice de sortie.
— $x(t)$: vecteur d'état.
— $y(t)$: vecteur de sortie.
— $u(t)$: vecteur d'entrée.
— L'équation (1.1) est dite équation d'état.
— L'équation (1.2) est dite équation de sortie.

•**Trajectoire d'état :** Nous recherchons à résoudre l'équation (1.1) qui s'écrit dans le cas général

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t)$$

Le cas des équations différentielles matricielles se traite de manière similaire au cas scalaire.
La solution de l'équation homogène associée est :

$$x(t) = e^{\mathrm{A}(t-t_0)}x(t_0)$$

où $t = t_0$ est l'instant initial.
La résolution avec second membre s'effectue comme le cas scalaire :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t) \\ e^{-\mathrm{A}t}\frac{dx}{dt} &= e^{-\mathrm{A}t}\mathrm{A}x(t) + e^{-\mathrm{A}t}\mathrm{B}u(t) \\ &= \mathrm{A}e^{-\mathrm{A}t}x(t) + e^{-\mathrm{A}t}\mathrm{B}u(t) \end{aligned}$$

D'où,

$$e^{-\mathrm{A}t}\frac{dx}{dt} - \mathrm{A}e^{-\mathrm{A}t}x(t) = e^{-\mathrm{A}t}\mathrm{B}u(t)$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-\mathrm{A}t}x\right) = e^{-\mathrm{A}t}\mathrm{B}u(t)$$

$$\Longrightarrow e^{-\mathrm{A}t}x(t) = e^{-\mathrm{A}t_0}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\mathrm{A}(\tau)}\mathrm{B}u(\tau)d\tau$$

Donc,

$$x(t) = e^{\mathrm{A}(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathrm{A}(t-\tau)}\mathrm{B}u(\tau)d\tau$$

Alors, la sortie du système devient :

$$y(t) = \mathrm{C}e^{\mathrm{A}(t-t_0)}x(t_0) + \mathrm{C}\int_{t_0}^{t} e^{\mathrm{A}(t-\tau)}\mathrm{B}u(\tau)d\tau + \mathrm{D}u(t)$$

•**Matrice de réponse impulsionnelle :** voir [2]

$$\mathrm{G}(t, t_0) = \mathrm{C}e^{\mathrm{A}(t-t_0)}\mathrm{B} + \mathrm{D}\delta(t-t_0) \tag{1.3}$$

Après avoir rappelé les trajectoires d'état et les réponses d'un système standard, la notion de réponse ipulsionnelle sera donc développé dans le cas du système singulier.

3.1 Cas singulier

Nous considérons le système linéaire continu suivant :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\dot{x}(t) &= \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t) && (1.4) \\ y(t) &= \mathrm{C}x(t) + \mathrm{D}u(t) && (1.5) \end{aligned}$$

Définition 1.5 *Le système* (1.4) *est dit* ***singulier*** *si* $det\mathrm{E} = 0$. *Dans le cas contraire, c'est à dire :* $det\mathrm{E} \neq 0$, *il est dit standard.*
Si $\mathrm{E} = \mathrm{I}_n$, *il est aussi appelé standard (**explicite**).*

Remarque 1.1 *Si* $det\mathrm{E} \neq 0$, *alors, en multipliant* (1.4) *par* E^{-1}, *on obtient le système suivant :*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathrm{E}^{-1}\mathrm{A}x(t) + \mathrm{E}^{-1}\mathrm{B}u(t) \\ y(t) &= \mathrm{C}x(t) + \mathrm{D}u(t) \end{aligned}$$

qui est explicite

Définition 1.6 *Le système* (1.4) *est dit régulier si et seulement si* $det(\mathrm{E}s - \mathrm{A}) \neq 0$ *pour un certain* $s \in \mathbb{C}$

Pour un système singulier, on supposera pour la suite que $det(\mathrm{E}s - \mathrm{A}) \neq 0$; pour un certain $s \in \mathbb{C}$.Dans ce cas, on peut écrire la matrice résolvante comme unique série de Laurent autour de l'∞ [2]

$$(s\mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1} = s^{-1} \sum_{i=-\mu}^{\infty} \Phi_i s^{-i} \qquad (1.6)$$

Où, μ est appelé **indice de nilpotence** du faisceau $(det(\mathrm{E}s - \mathrm{A}))$ [2] est écrit par;

$$\mu = rg\mathrm{E} - deg[det(\mathrm{E}s - \mathrm{A})] + 1 \qquad (1.7)$$

Φ_i est appelée **la matrice fondamentale** de (1.4), il s'ensuit directement de la relation (1.6) que la matrice fondamentale Φ_i satisfait les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Phi_i - \mathrm{A}\phi_{i-1} &= \delta_{0i}\mathrm{I} \\ \Phi_i\mathrm{E} - \Phi_{i-1}\mathrm{A} &= \delta_{0i}\mathrm{I} \end{aligned}$$

/

Où,δ_{0i} est le **delta de *Kronecker*** voir [2] Nous avons quelques propriétés de la matrice fondamentale :

1. $\Phi_i = 0$, pour $i < -\mu$
2. $$\Phi_0\mathrm{A}\Phi_i = \begin{cases} \Phi_{i+1} & , \quad pour\, i \geq 0 \\ 0 & , \quad i < 0 \end{cases}$$
3. $$-\Phi_{-1}\mathrm{E}\Phi_i = \begin{cases} 0 & , \quad pour\, i \geq 0 \\ \Phi_{-i-1} & , \quad i < 0 \end{cases}$$

4. $\Phi_i = (\Phi_0 A^i)\Phi_0$ pour $i \geq 0$
5. $$\Phi_0 E \Phi_i = \begin{cases} \Phi_i & , \quad pour\, i \geq 0 \\ 0 & , \quad i < 0 \end{cases}$$
6. $$-\Phi_{-1} A \Phi_i = \begin{cases} 0 & , \quad pour\, i \geq 0 \\ \Phi_i & , \quad i < 0 \end{cases}$$
7. $$\Phi_0 A \Phi_i = \begin{cases} \Phi_{i+1} & , \quad pour\, i \geq 0 \\ 0 & , \quad i < 0 \end{cases}$$
8. $$-\Phi_{i-1} E \Phi_i = \begin{cases} 0 & , \quad pour\, i \geq 0 \\ \Phi_{i-1} & , \quad i < 0 \end{cases}$$

Remarque 1.2 *:*

1. *Si* $E = I_n$ *alors,*
$$\begin{cases} \Phi_i = 0 & , \quad pour\, i < 0 \\ \Phi_i = A^i & , \quad i \geq 0 \end{cases}$$
2. *Si* E *est inversible :*

$$(sE - A)^{-1} = \left(I - (s^{-1}E^{-1}A)\right)^{-1} E^{-1}s^{-1} = \left[\sum_{i=0}^{\infty} (E^{-1}A)^i s^{-i}\right] E^{-1}s^{-1}$$

On en déduit alors, $\Phi_i = 0$, *pour* $i < 0$
$\Phi_0 = E^{-1}$
$\Phi_1 = (E^{-1}A)E^{-1}$
$\Phi_2 = E^{-1}A\Phi_1 = (E^{-1}A)^2E^{-1}$
.
.
.
$\Phi_i = (E^{-1}A)\Phi_{i-1} = (E^{-1}A)^iE^{-1}$, *pour* $i \geq 0$

Exemple 1.5 *considérons les matrices* E *et* A *suivantes :*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$(Es - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -s \end{pmatrix}$$

Ici l'indice de ***nilpotence*** *est* $\mu = 2$ *; les matrices fondamentales sont :*

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La solution $x(t)$ du système (1.4) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ est donnée par :

$$x(t) = e^{\Phi_0 A(t-t_0)} E x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\Phi_0 A(t-\tau)} \Phi_0 B u(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} \Phi_{0j} [B^{j-1} + E x_0 \delta^{j-1}] + 1 \tag{1.8}$$

Et

$$y(t) = e^{\Phi_0 A(t-t_0)} E x_0 + \int_{t_0}^{t} C e^{\Phi_0 A(t-\tau)} \Phi_0 B u(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} C \Phi_{0j} [B^{j-1} + E x_0 \delta^{j-1}] + D u(\tau) \tag{1.9}$$

En substituant $x_0 = 0$ et $u(t) = \delta(t)$ dans (1.9), on obtient la réponse impulsionnelle $G(t)$ du système (1.4)

Exemple 1.6 *Si on considère le système*

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Avec,

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 2$$

Alors,

$$\det(Es - A) = -s$$

Donc le système est régulier et l'indice de ***nilpotence*** $\mu = 2$, *par conséquent les matrices fondamentales sont telles que :*

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par suite,

$$\Phi_0 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{\Phi_0 A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\Phi_i = \Phi_0 A \Phi_{i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad pour\, i \geq 0$$

La solution du système est donnée par,

$$x(t) = e^{\Phi_0 A t} \Phi_0 E x_0 + \Phi_{-1} B u(t) + \Phi_{-1} E x_0 \Phi_{-2} B u^{(1)}(t) + \Phi_{-1} E x_0 \delta^1(t)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} -u(t) - x_{2,0}\delta(t) - u^1(t) \\ -u(t) \\ x_{3,0} \end{pmatrix}$$

$$g(t) = \begin{cases} C e^{\Phi_0 A t} \Phi_0 B, \, t > 0 \\ C e^{\Phi_0 A t} \Phi_0 B + \sum_{j=1}^{\mu} C \Phi_j (B \delta^{j-1}(t) + D\delta(t)), \, t = 0 \end{cases}$$

Chapitre 2

Systèmes positifs

Dans ce qui suit nous allons nous intéresser à la notion de positivité concernant un système L.T.I à temps continu définit par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x}(t) & = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = Cx(t) \\ x(0) & = x_0 \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Définition 2.1 *Un système est dit positif si à toute entrée positive et condition initiale positive, correspond un état positif et une sortie positive.*
Alors, le système (2.1) *est par définition positif si et seulement si,*

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+ \forall u \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow x(t) \in \mathbb{R}_+ et y(t) \in \mathbb{R}_+$$

1 Condition de positivité

Cas continu :
Soit le système continu suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x}(t) & = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = Cx(t) \\ x(0) & = x_0 \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Théorème 2.1 *Un système linéaire à temps continu* (A, B, C) *est positif si et seulement si la matrice* A *est une matrice de Metzler et* $B \geq 0, C \geq 0$

Preuve. :
Suffisance :
La solution de l'équation (1.1) est donnée par :

$$x(t) = e^{At}x(o) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

D'après la proposition (1.1) A est une matrice de *Metzler* si et seulement si $e^{At} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.
Donc, Si A est de *Metzler*, $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, x_0 \in \mathbb{R}_+^{n}, u(t) \in \mathbb{R}_+^{m}, t \geq 0$ alors, la solution de (1.1) $x(t) \in \mathbb{R}_+^{n}$ et puisque $C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}, \quad D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$, alors, la sortie du système $y(t) \in \mathbb{R}_+^{p}$ (solution de l'équation (1.2))

Néccessité :
Soit $u(t) = 0, \forall t \geq 0$ et $x_0 = e_i$ (la i^{ieme} colonne de I_n), la trajectoire ne quitte pas le quart $\mathbb{R}_+^n$ que si $\dot{x}(0) = Ae_i \geq 0$ ce qui implique $a_{ji} \geq 0, \forall i \neq j$. La matrice A doit être de *Metzler*, pour les mêmes raisons, pour $x_0 = 0$ nous avons $\dot{x}(0) = Bu(0) \geq 0$ ce qui implique $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$ et $u(0) \in \mathbb{R}_+^m$ peut être arbitraire.
De la même manière, en supposant que $x(0) = 0$ nous obtenons $y(0) = Du(0), D \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$ et $u(0) \in \mathbb{R}_+^m$ peut être arbitraire. ■
Cas discret : Soit le système discret suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} & = Ax_k + Bu_k \\ y_k = & Cx_k \\ x(0) = & x_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Positivité du système (2.3) $\Leftrightarrow \forall x_0 \geq 0, quad \forall u_i \geq 0$, alors, $\forall i \geq 0, \quad x_i \geq 0 \quad et y_i \geq 0$

Théorème 2.2 *Un système linéaire à temps discret* (A, B, C) *est positif si et seulement si* $A \geq 0, B \geq 0, et C \geq 0$

2 Positivité des systèmes linéaires

Considérons à présent les définitions et quelques résultats de positivité en temps continu :

2.1 Positivité externe

Tout d'abord, donnons la première définition de positivité des systèmes linéaires, qui est la positivité externe :

Définition 2.2 *:Un système linéaire* (A, B, C) *est dit* ***externement positif*** *si la sortie correspondante à l'état initial nul est non-négative pour chaque entrée non-négative i.e. pour* $x_0 = 0$ *et pour tout contrôle* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m, ; \quad t \geq 0$, *on a :* $y(t) \in \mathbb{R}_+^p; pour\, t \geq 0$.

Théorème 2.3 *Un système linéaire* (A, B, C) *est dit* ***externement positif*** *si et seulement si la réponse impulsionnelle est non-négative i.e* $G(t) \in \mathbb{R}_+^{p\times m}, \quad t \geq 0$.

Nous considérons maintenant la cas de la positivité externe pour des systèmes linéaires singuliers en temps continu,

Définition 2.3 *Le système singulier* (1.4) *est dit* ***externement positif*** *si pour* $x_0 = 0$ *et tout contrôle non-négatif* $u(t) \geq 0$ *avec* $u^{(j)}(t) \geq 0$ *pour* $j = 1, ., ., ., \mu - 1$ *; pour* $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ *la sortie est aussi non-négative i.e.* $y(t) \geq 0$ *pour* $t \geq 0$.

Théorème 2.4 *: Le système* (1.4) *avec* $D = 0$ *est dit dit* ***externement positif*** *si la réponse impulsionnelle* $g(t)$ *est non-négative i.e.* $g(t) \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$, *pour* $t > 0$

2.2 Positivité interne

À présent, nous pouvons donner la seconde définition de positivité, qui peut être appelée positivité interne.

Définition 2.4 *: Un système linéaire* (A, B, C) *est dit **internement positif** si pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ *et tout contrôle* $u(t) \in \mathbb{R}^m_+$*,* $t \geq 0$*, on a :*

$$x(t) \in \mathbb{R}^n_+$$

-Cette définition indique que toutes les trajectoires émanent de n'importe quel point dans l'orthant non-négatif $\mathbb{R}^n_+$ *(frontière incluse) de l'espace d'état* $\mathbb{R}$*, obtenues en appliquant une entrée non-négative au système, demeurent dans l'orthant non-négatif et mènent à une sortie non-négative.*

Remarque 2.1 *: La positivité interne implique la positivité externe, mais l'inverse n'est pas vrai.*

Théorème 2.5 *Un système linéaire* (A, B, C) *est dit **internement positif** si et seulement si la matrice* A *est de Metzler,* $B \in \mathbb{R}^{n\times m}_+$*,* $C \in \mathbb{R}^{p\times n}_+$ *et* $D \in \mathbb{R}^{p\times m}_+$

Pour la preuve nous avons le même raisonnement que le théorème (2.1).

Maintenant, nous allons donner la définition de la positivité interne des systèmes singuliers en temps continu :

Définition 2.5 *Le système singulier* (1.4) *est dit **internement positif** si pour tout état initial admissible* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *et tout contrôle non-négative* $u(t) \geq 0$*avec* $u_{(j)} \geq 0$*,* $j = 0, ., ., ., \mu - 1$*, l'état* $x(t) \in \mathbb{R}^n$ *et la sortie* $y(t) \in \mathbb{R}^p$*,* $t \geq 0$

Remarque 2.2 *Le système singulier internement positif est toujours externment positif.*

Définition 2.6 *Le système singulier* (1.4) *est dit **faiblement positif** si et seulement si* A *est une matrice de Metzler,* $E \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$*,* $B \in \mathbb{R}^{n\times m}_+$*,* $C \in \mathbb{R}^{p\times n}_+$ *et* $D \in \mathbb{R}^{p\times m}_+$.

2.3 Quelques applications

Les applications sont nombreuses, nous citons quelques exemples :

- *Circuit RLC.*
- *Des systèmes à variables physiques positives par nature (niveaux, débits,...).*
- *Sciences de la communication et de l'information.*
- *Applications en médecine, cinétique chimique,...*
- *Modèles de dynamiques de population.*
- *...etc.*

Exemple 2.1 *É tant donné le circuit illustré par la figure (2.1) avec les résistances connues* R_1, R_2, R_3*, les inductances* L_1, L_2 *et les tensions de source* $e_1 = e_1(t), e_2 = e_2(t)$*, les courants* $i_1 = i_1(t), i_2 = i_2(t)$ *dans les inductances sont choisies comme variables d'état et* $y = y(t) = \begin{pmatrix} R_1 i_1 \\ R_2 i_2 \end{pmatrix}$ *est choisie comme sortie.*

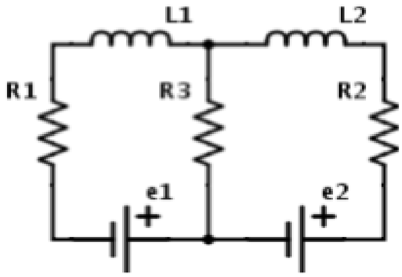

FIGURE 2.1 – *Circuit RLC*

En utilisant la loi de Kirchhoff, nous pouvons écrire les équations dans le format d'espace d'état suivant :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \quad y = C\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Où,

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{R_1 + R_3}{L_1} & \dfrac{R_3}{L_1} \\ \dfrac{R_3}{L_2} & -\dfrac{R_2 + R_3}{L_2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{l_2} \end{pmatrix} et \quad C = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

De l'équation (2.4), il en résulte que A *est une matrice de Metzler, et* B *et* C *ont des entrées non-négatives. Le circuit est un bon exemple de système positif en temps continu.*

Exemple 2.2 *: Considérons le circuit électrique représentée par la figure (2.2) avec les paramètres données* R_1, R_2, R_3, C_1, C_2 *et une source de tension* $e = e(t)$

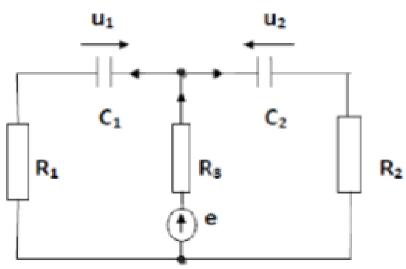

FIGURE 2.2 – *RC*

Choisir les tensions $u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t)$ *comme variables d'état et la sortie* $y = y(t)$*, on peut écrire les équations*

$$\begin{aligned} R_1 C_1 \dot{u}_1 + u_1 + R_3(C_1 \dot{u}_1 + C_2 \dot{u}_2) &= e \\ R_3(C_1 \dot{u}_1 + C_2 \dot{u}_2) + u_2 + R_2 C_2 \dot{u}_2 &= e \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$y = u_1 + u_2 \tag{2.6}$$

À partir des ces équations 2.5 et 2.6 que nous avons :

$$\begin{pmatrix} (R_1+R_3)C_1 & R_2C_2 \\ R_2C_1 & (R_2+R_3)C_[2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u_1} \\ \dot{u_2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e \tag{2.7}$$

et

ù

$\begin{pmatrix} \dot{u_1} \\ \dot{u_2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} B\, e$ (2.8)

$$y = C \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Où,

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{R_2+R_3}{C_1[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]} & \dfrac{R_3}{C_1[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]} \\ \dfrac{R_3}{C_2[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]} & -\dfrac{R_1+R_3}{C_2[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

$$B = \begin{pmatrix} -\dfrac{R_2}{C_1[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]} \\ \dfrac{R_1}{C_2[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

De 3.2, il s'ensuit que A *est une matrice de Metzler et* $B \in \mathbb{R}_+^{2\times1}$, $C \in \mathbb{R}_+^{1\times2}$*, Par conséquent le circuit RLC est un bon exemple de système positive en temps continu. Et pour tous les* $u_1(0) \geq 0$, $u_2(0) \geq 0$ *et* $e(t) \geq 0$ *pour* $t \in T$ *nous avons* $u_1(t) \geq 0$, $u_2(t) \geq 0$ *et* $y(t) \geq 0$

Chapitre 3

Stabilité des systèmes linéaires positifs

Dans ce chapitre, nous étudions la stabilité des systèmes linéaires positifs en temps continu.pour cela, nous nous basons sur [1], [2],[3], [6] et [7].

1 Stabilité Asymptotique

1.1 Cas standard

On considère le système linéaire internement positif en temps continu défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & Ax(t) \\ x(0) = & x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Où, $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *est une matrice de Metzler, telle que la solution de l'équation* (3.1) *est donnée par :*

$$x(t) = e^{At}x_0 \tag{3.2}$$

Définition 3.1 *Le système internement positif* (3.1) *est dit asymptotiquement stable si et seulement si la solution de l'équation* (3.2) *vérifie la condition*

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} x(t) = 0 \tag{3.3}$$

Théorème 3.1 *[1]Le système internement positif* (3.1) *est dit asymptotiquement stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice de Metzler* A *sont à parties réelles négatives.*

Lemme 3.1 *Soit* $p = \max_i \| s_i|$ *le rayon spectral de la matrice* $A = (a_{ij})$*,alors, le nombre réel* $\lambda > p$ *si et seulement si tous les mineurs principaux* M_i *de la matrice* $B = (I\lambda - A)$ *sont positifs.i.e.*

$$M_1 = \lambda - a_{11} > 0, M_2 = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots\ldots, M_n = det[I\lambda - A] > 0$$

Théorème 3.2 *Le système internement positif* (3.1) *est dit asymptotiquement stable si et seulement si les coefficients du polynôme caractéristique tel que*

$$p_A(s) = det[sI - A] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0$$

sont positifs.i.e $a_i > 0, \forall i = 0, \ldots., n-1$

Preuve. *voir [1]* ■

Théorème 3.3 *Le système internement positif* (3.1) *est dit asymptotiquement stable si toutes les entrées diagonales de la matrice* A *sont négatives.*

Théorème 3.4 *Le système internement positif* (3.1) *est dit asymptotiquement stable si toutes les entrées diagonales de la matrice triangulaire supérieur (inférieure) sont négatives.*

Preuve. *Les valeurs propres de la matrice triangulaire supérieur(inférieure) sont égales à ses entrées diagonales et d'après le théorème le système internement positif* (3.1) *est dit asymptotiquement stable si toutes les entrées diagonales sont négatives.* ■

Lemme 3.2 *Soit le système* (3.1) *un système positif en temps continu (système Metzlerien), alors, il est* ***asymptotiquement stable*** *si et seulement si une des conditions équivalentes est vérifiée :*

i) *toutes les valeurs propres de* A *sont à parties réelles négatives i.e* $\lambda \in \sigma(\mathrm{A})$ *; telle que* $\mathrm{R}e(\lambda) < 0$.

ii) *Tous les coefficients de l'équation caractéristique :*

$$det[\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda_{n-1} + . + . + . + a_1\lambda + a_0$$

sont positifs i.e $a_i > 0, = 0, ., ., n$

iii) *Les mineurs principaux de la matrice* $-\mathrm{A}$ *sont positifs.*

$$\Delta_1 = -a_{11} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots\ldots, \Delta_n = det[-\mathrm{A}] > 0$$

iv) *Les matrices* A *et* $-\mathrm{A}^{-1}$ *sont non singulières.*

v) *Il existe une matrice symétrique définie positive (éventuellement diagonale)* P *telle que* $\mathrm{A}^\top \mathrm{P} + \mathrm{PA} < 0$

vi) *Il existe un vecteur positif* $\mathrm{V} \in \mathbb{R}^n_+$ *tel que* $\mathrm{AV} < 0$.

Exemple 3.1 *Considérons le système positif* (3.1) *avec la matrice*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Vérifions la stabilité asymptotique de ce système.
En calculant les mineurs principaux de la matrice (3.4)*, nous obtenons :*

$$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = det[-\mathrm{A}] = 1 > 0$$

la troisième condition du lemme (3.2) *est satisfaite, le système* (3.1) *avec la matrice* (3.4) *est asymptotiquement stable.*

1.2 Cas singuliers

Théorème 3.5 *Le système linéaire singulier* (4.9) *en temps continu est dit stable si et seulement si* $\lambda_i \in \sigma(\mathrm{E}, \mathrm{A})$ $i = 1, ., ., n$ *avec* λ_i *sont à parties réelles négatives.*

2 Stabilité asymptotique au sens de Lyapunov :

2.1 Cas standard

Dans l'analyse de la stabilité des systèmes Metzleriens, il est intéressant de trouver les conditions; dans lesquelles la solution de l'équation de Lyapunov

$$\mathrm{A}^{\top}\mathrm{P}+\mathrm{PA}=-\mathrm{Q} \tag{3.5}$$

est une matrice définie négative; en plus de sa définition positive i.e $\mathrm{P}>0$.

Définition 3.2 (Fonctions de Lyapunov) *Les fonctions de Lyapunov sont un outil pour étudier la stabilité d'un équilibre.*
Considérons le système :

$$\dot{x}=f(x) \tag{3.6}$$

Tel que $f(0)=0$, *admettant* $x_e=0$ *comme point équilibre.Soit* $v:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ *une fonction définie dans un voisinage* Ω *de l'origine et admettant des dérivées partielles continues.On note :*

$$\dot{v}(x)=\frac{dv}{dx}(x),f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{dv}{dx_i}(x)f_i(x)$$

Définition 3.3 *:On dit que* v *est une fonction de Lyapunov pour le système* (3.6) *en* $x_e=0$ *dans* Ω, *si pour tout* $x\in\Omega$ *on a :*

i) $v(x)>0$ *sauf en* $x=0$ *où,* $v(0)=0$

ii) $\dot{v}(x)\leq 0$.

Le lemme suivant est utile pour notre résultat principal :

Lemme 3.3 *Si la matrice* A *est de Metzler et stable, alors, pour toute matrice symétrique positive et définie positive* Q *il existe une matrice symétrique positive et définie positive* P *comme solution de l'équation de Lyapunov* (3.5)

Preuve. *L'équation matricielle de Lyapunov peut être écrite comme une équation matricielle linéaire*

$$\mathrm{M}p=-q \tag{3.7}$$

Où,p et q sont des vecteurs dont les éléments sont construits à partir des composants (p_{ij}) *et* (q_{ij}) *de p et q respectivement, et*

$$\mathrm{M}=(\mathrm{A}^{\top}\otimes\mathrm{I})+(\mathrm{I}\otimes\mathrm{A}^{\top}) \tag{3.8}$$

est une matrice de dimension $n^2\times n^2$ *; avec* $\otimes$ *désignant le produit de Kronecker.*
En effet,

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^{\top}\mathrm{P}+\mathrm{PA}=-\mathrm{Q} &\Leftrightarrow [(\mathrm{I}\otimes\mathrm{A}^{\top})+(\mathrm{A}^{\top}\otimes\mathrm{I})]\,vec(\mathrm{P})=-vec(\mathrm{Q})\\ &\Leftrightarrow [(\mathrm{A}^{\top}\otimes\mathrm{I})+(\mathrm{I}\otimes\mathrm{A}^{\top})]\,p=-q\end{aligned}$$

La matrice M *est stable et par construction elle est aussi Metzlerienne,depuis, pour toute matrice Metzlerienne* $-\mathrm{M}^{-1}>0$, *nous concluons que pour toute* $q>0$ *nous avons* $\mathrm{P}>0$. *La netteté positive de* P *découle directement du résultat de la stabilité de l'équation matricielle de Lyapunov.* ■

Remarque 3.1 *Pour construire une fonction de Lyapunov pour le système (3.1) il procéder la manière suivante :*

- *Choisir une fonction définie positive* Q *(par exemple* $Q = I_n$*).*
- *Résoudre l'équation de Lyapunov (3.5) ,Si on choisie* Q *symétrique, alors,* P *sera également symétrique.*
- *Vérifier que* P *est définie positive.*

Exemple 3.2 *Soient :*

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix},Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \text{ et } P=\begin{pmatrix}P_1 & P_2\\ P_3 & P_4\end{pmatrix}$$

On résoudre le système suivant :

$$\begin{pmatrix}-4P_1+3P_2+3P_3 & -3P_2+3P_4\\ -33P_3+3P_4 & -23P_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

D'où, la solution est :

$$P=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Lemme 3.4 *Le système internement positif (3.1) est dit asymptotiquement stable si les valeurs propres* $(\overline{\lambda}_i + \lambda_i)$ *sont à parties réelles négatives.Où,* λ *et* $\overline{\lambda}$ *sont des valeurs propres de* A *et* $A^\top$ *respectivement.*

Preuve. *D'après l'équation de Lyapunov (3.5),on a :*

$$\begin{aligned}
x^\top(A^\top P + PA)x &= x^\top(Ax)^\top Px + x^\top PAx = -Q\\
&= x^\top\overline{\lambda}Px + x^\top\lambda Px = -Q\\
&= x^\top(\overline{\lambda}+\lambda)Px = -Q\\
&= x^\top(2Re\lambda)Px = -Q
\end{aligned}$$

Donc, il faut que $(\overline{\lambda}+\lambda) = 2Re\lambda$ *soit négative.* ■

2.2 Cas singulier

On considère le système linéaire singulier internement positif en temps continu défini par :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = & Ax(t)\\ x(0) = & x_0\end{cases} \tag{3.9}$$

Où, $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *est une matrice de Metzler,telle que la solution de l'équation (3.13) est donnée par :*

$$x(t) = e^{\Phi_0 At}Ex_0 \tag{3.10}$$

Théorème 3.6 *Le système singulier internement positif (3.9) est dit* ***Asymptotiquement stable*** *si et seulement si* $\lambda_i \in \sigma(E,A)$ *où,* λ_i *sont des valeurs propres .*

Théorème 3.7 *Le système singulier internement positif* (3.10) *est dit* ***asymptotiquement stable*** *si et seulement si pour toute matrice symétrique définie positive* Q *il existe une matrice symétrique définie positive* P *telle que*

$$A^\top PE + E^\top PA = -Q \tag{3.11}$$

Preuve.
Il suffit d'observer que $v(x) = x^\top E^\top P^\top Ex$ *est une fonction condidate de Lyapunov pour* (3.10) *:*
En effet,

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= \dot{x}^\top E^\top P^\top Ex + x^\top E^\top P^\top E\dot{x} \\ &= x^\top A^\top P^\top Ex + x^\top E^\top P^\top Ax \\ &= x^\top (A^\top P^\top E + E^\top P^\top A)x \end{aligned}$$

et puisque $P^\top = P$*, alors, pour avoir ;* $\dot{v}(x) < 0$*, il suffit que :*

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= x^\top (A^\top PE + E^\top PA)x \\ &= -x^\top Qx \end{aligned}$$

■

Lemme 3.5 *Si la matrice* A *est de Metzler et stable, alors, pour toute matrice symétrique positive et définie positive* Q *il existe une matrice symétrique positive et définie positive* P *comme solution de l'équation de Lyapunov* (3.11)

Preuve. *L'équation matricielle de Lyapunov peut s'écrire comme une équation matricielle linéaire*

$$M_E p = -q \tag{3.12}$$

Où,p et q sont des vecteurs dont les éléments sont construits à partir des composants (p_{ij}) *et* (q_{ij}) *de p et q respectivement, et*

$$M_E = (A^\top \otimes I)(I \otimes E^\top) + (I \otimes A^\top)(I \otimes E^\top) \tag{3.13}$$

est une matrice de dimension $n^2 \times n^2$ *; avec hypothèse* $PE = EP$
En effet,

$$\begin{aligned} A^\top PE + E^\top PA = -Q \quad &\Leftrightarrow \quad [(I \otimes A^\top)vec(PE) + (A^\top \otimes I)]vec(E^\top P) = -vec(Q) \\ &\Leftrightarrow \quad [(I \otimes A^\top)vec(EP) + (A^\top \otimes I)]vec(E^\top P) = -vec(Q) \\ &\Leftrightarrow \quad [(A^\top \otimes I)(I \otimes E^\top) + (I \otimes A^\top)(I \otimes E)]p = -q \end{aligned}$$

La matrice M_E *est stable et par construction elle aussi Metzlerienne, depuis, pour toute matrice Metzlerienne* $-M_E^{-1} > 0$*, nous concluons que pour toute* $q > 0$ *nous avons* $P > 0$*. La netteté positive de* P *découle directement du résultat de la stabilité de l'équation matricielle de Lyapunov.* ■

Lemme 3.6 *Le système internement positif* (3.10) *est dit asymptotiquement stable si la valeur propre* $(\bar{\lambda} + \lambda) = 2\mathrm{Re}\lambda$ *est une partie réelle négative. Où,* λ *et* $\bar{\lambda}$ *sont des valeurs propres négatives dans* $\sigma(E, A)$ *et aussi il faut que* E *soit une matrice positive .*

Preuve.

D'après l'équation de Lyapunov (3.11)*,on a :*

$$\begin{aligned} x^\top(A^\top PE + E^\top PA)x &= x^\top A^\top PEx + x^\top E^\top PAx = -Q \\ &= x^\top E^\top \overline{\lambda} PEx + x^\top E^\top \lambda PEx = -Q \\ &= x^\top E^\top (\overline{\lambda} + \lambda) PEx = -Q \\ &= x^\top E^\top (2Re\lambda) PEx = -Q \end{aligned}$$

Donc, il faut que $(\overline{\lambda} + \lambda) = 2Re\lambda$ *soit négative et* E *une matrice Positive* . ■

Chapitre 4

Systèmes positifs perturbés

Dans ce chapitre nous suivons le même principe que les chapitres 2 et 3 mais dans un cas particulier, c'est à dire dans le cas des systèmes perturbés.

1 Cas standard

1.1 Trajectoire d'état

Considérons le système linéaire perturbé suivant :

$$\left\{\begin{array}{rc} \dot{x}(t) = & \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t) \\ y(t) = & \mathrm{C}x(t) \\ u(t) = & \Delta y(t) \\ x(0) = & x_0 \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Où, $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ *et* $\mathrm{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
Le système (4.1) *est équivalent à :*

$$\left\{\begin{array}{rc} \dot{x}(t) = & (\mathrm{A} + \mathrm{B}\Delta\mathrm{C})x(t) \\ x(0) = & x_0 \end{array}\right. \tag{4.2}$$

• ***La solution :*** *La solution de* (4.2) *est donnée par :*

$$x(t) = e^{(\mathrm{A}+\mathrm{B}\Delta\mathrm{C})t}x_0 \tag{4.3}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$

1.2 Condition de positivité

Définition 4.1 *Le système linéaire perturbé* (4.2) *en temps continu est dit positif si à toute entrée positive et condition initiale positive, correspond un état positif i.e*

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n_+, \forall u \in \mathbb{R}^m_+$$

on a, $x(t) \in \mathbb{R}^n_+$

Théorème 4.1 *Le système linéaire perturbé* (4.2) *en temps continu est dit positif si et seulement si la matrice* $(\mathrm{A} + \mathrm{B}\Delta\mathrm{C})$ *est de Metzler.*

1.3 Stabilité

Soit le système perturbé positif suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & (A+\Delta)x(t) \\ x(0) = & x_0 \end{cases} \tag{4.4}$$

telle que sa solution est donnée par :

$$x(t) = e^{(A+\Delta)t}x_0 \tag{4.5}$$

Définition 4.2 *Le système linéaire perturbé positif* (4.4) *en temps continu est dit Asymptotiquement stable si et seulement si la solution de l'équation* (4.5) *vérifie :*

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} x(t) = 0$$

Théorème 4.2 *Le système linéaire perturbé positif* (4.4) *en temps continu est dit asymptotiquement stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice* $(A+\Delta)$ *sont des parties réelles négatives i.e* $\lambda_i \in \sigma(A+\Delta)$, $i = 1,.,.,n$

Corollaire 4.1 *Le système linéaire perturbé positif* (4.4) *en temps continu est dit Asymptotiquement stable si l'une des conditions équivalentes est vérifie :*

i) *Les coefficients de l'équation* $det[\lambda I - (A+\Delta)]$ *sont positifs.*

ii) *Les mineurs principaux de la matrice* $-(A+\Delta)$ *sont positifs.*

iii) *Les entrées diagonales de la matrice* $(A+\Delta)$ *sont négatives.*

iv) *Il existe un vecteur positif* $V \in \mathbb{R}^n_+$ *tel que* $(A+\Delta)V < 0$.

Théorème 4.3 *: Le système linéaire perturbé positif* (4.4) *en temps continu est dit asymptotiquement stable si et seulement si pour toute matrice symétrique définie positive* Q *il existe une matrice symétrique définie positive* $H = (P+\Delta)$ *telle que :*

$$(A+\Delta)^\top H + H(A+\Delta) = -Q \tag{4.6}$$

Preuve. *Nous faisons la même démonstration que le théorème* (3.7) *avec* $v(x) = x^\top(P+\Delta)x$
■

Lemme 4.1 *Le système internement positif* (4.4) *est dit asymptotiquement stable si les valeurs propres* $(\overline{s}_i + s_i)$ *sont des parties réelles négatives.Où, s et* $\overline{s}$ *sont des valeurs propres de* $(A+\Delta)$ *et* $(A+\Delta)^\top$ *respectivement.*

Preuve. *D'après l'équation de Lyapunov* (4.6)*,on a :*

$$\begin{aligned} x^\top[(A+\Delta)^\top H + H(A+\Delta)]x &= x^\top((A+\Delta)^\top Hx + x^\top H(A+\Delta)x = -Q \\ &= x^\top \overline{s}H + x^\top sHx = -Q \\ &= x^\top(\overline{s}+s)Hx = -Q \\ &= x^\top(2Res)Hx = -Q \end{aligned}$$

Donc, il faut que $(\overline{s}+s) = 2Res$ *soit négative.* ■

2 Cas singulier

2.1 Trajectoire d'état :

Soit le système linéaire singulier perturbé en temps continu suivant :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = & (A + B\Delta C)x(t) \\ x(0) = & x_0 \end{cases} \tag{4.7}$$

Où,$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ *et* $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$
• ***La solution :*** *La solution de* (4.7) *est donnée par :*

$$x(t) = e^{\Phi_0(A+B\Delta C)t} E x_0 \tag{4.8}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$

2.2 Condition de positivité

Définition 4.3 *Le système linéaire perturbé* (4.7) *en temps continu est dit positif si à toute entrée positive , condition initiale positive et une matrice* E *non-négative, correspond un état positif i.e*

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n_+, \forall u \in \mathbb{R}^m_+ et \forall E \in \mathbb{R}^{n\times,}_+ \quad ^{ona x(t)\in\mathbb{R}^n_+}$$

Théorème 4.4 *Le système linéaire singulier perturbé* (4.7) *en temps continu est dit positif si et seulement si* $E \in \mathbb{R}^n_+$ *et la matrice* $(A + B\Delta C)$ *est de Metzler.*

2.3 Stabilité

Nous adapterons les tests sur la stabilité citée plus haut pour le cas perturbé.
Soit le système linéaire singulier perturbé en temps continu suivant :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = & (A + \Delta)x(t) \\ x(0) = & x_0 \end{cases} \tag{4.9}$$

telle que sa solution est donnée par :

$$x(t) = e^{\Phi_0(A+\Delta)t} E x_0 \tag{4.10}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$

Théorème 4.5 *Le système linéaire singulier perturbé* (4.9) *en temps continu est dit stable si et seulement si* $\lambda_i \in \sigma[E, (A + \Delta)]$ *et elles sont à parties réelles négatives.*

Théorème 4.6 *Le système linéaire perturbé positif* (4.9) *en temps continu est dit asymptotiquement stable si et seulement si pour toute matrice symétrique définie positive* Q *il existe une matrice symétrique définie positive* $H = (P + \Delta)$ *telle que :*

$$(A + \Delta)^\top HE + E^\top H(A + \Delta) = -Q \tag{4.11}$$

avec l'hypothèse $HE = EH$

Preuve. *L'équation matricielle de Lyapunov peut être écrire comme une équation matricielle linéaire*

$$M_{(E,\Delta)}p = -q \tag{4.12}$$

Où,p et q sont des vecteurs dont les éléments sont construits à partir des composants $(p)_{ij}$ *et* (q_{ij}) *de p et q respectivement, et*

$$M_{(E,\Delta)} = ((A+\Delta)^\top \otimes I)(I\otimes E^\top) + (I\otimes (A+\Delta)^\top)(I\otimes E^\top) \tag{4.13}$$

avec $v(x) == x^\top E^\top H^\top E x$
En effet,

$$\begin{aligned}(A+\Delta)^\top HE + E^\top H(A+\Delta) = -Q \quad &\Leftrightarrow \quad (I\otimes (A+\Delta)^\top)vec(HE) + ((A+\Delta)^\top \otimes I)]vec(E^\top H) = -vec(Q)\\ &\Leftrightarrow \quad (I\otimes (A+\Delta)^\top)vec(EH) + ((A+\Delta)^\top \otimes I)]vec(E^\top H) = -vec(Q)\\ &\Leftrightarrow \quad ((A+\Delta)^\top \otimes I)(I\otimes E^\top) + (I\otimes (A+\Delta)^\top)(I\otimes E)]p = -q\end{aligned}$$

Où, $p = vec(P+\Delta)$ *et* $q = vec(Q)$

La matrice $M_{(E,\Delta)}$ *est stable et par construction elle aussi Metzlerienne, depuis, pour toute matrice Metzlerienne* $-M^{-1}_{(E,\Delta)} > 0$*, nous concluons que pour toute* $q > 0$ *nous avons* $H > 0$*. La netteté positive de* H *découle directement du résultat de la stabilité de l'équation matricielle de Lyapunov.* ■

Lemme 4.2 *Le système linéaire singulier perturbé (4.9) est dit asymptotiquement stable si la valeur propre* $(\overline{\lambda}+\lambda) = 2Re\lambda$ *est une partie réelle négative.Où,* λ *et* $\overline{\lambda}$ *sont des valeurs propres négatives dans* $\sigma(E,(A+\Delta))$*et aussi il faut que* E *doit une matrice positive .*

Preuve. *D'après l'équation de Lyapunov (4.11),on a :*

$$\begin{aligned}x^\top((A+\Delta)^\top HE + E^\top H(A+\Delta))x &= x^\top(A+\Delta)^\top HEx + x^\top E^\top H(A+\Delta)x = -Q\\ &= x^\top E^\top \overline{\lambda} HEx + x^\top E^\top \lambda HEx = -Q\\ &= x^\top E^\top(\overline{\lambda}+\lambda)HEx = -Q\\ &= x^\top E^\top(2Re\lambda)HEx = -Q\end{aligned}$$

Donc,il faut que $(\overline{\lambda}+\lambda) = 2Re\lambda$ *soit négative et* E *une matrice Positive .* ■

2.4 Marge de stabilité pour les systèmes à temps continu

Nous examinerons les systèmes dynamiques linéaires invariants dans le temps :

$$\begin{cases}\lambda Ex(t) = & Ax(t)+Bu(t)\\ y(t) = & Cx(t)+Du(t)\\ u(t) = & \Delta y(t)\end{cases} \tag{4.14}$$

Où, $E\in\mathbb{R}^{n\times n}$,$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$,$C\in\mathbb{R}^{p\times n}$ *et* $D\in\mathbb{R}^{p\times m}$ *sont des matrices données,* $x(t)$ *est le vecteur de n variables d'état,* $u(t)$ *un vecteur de m entrées et* $y(t)$ *un vecteur de p sorties.*
Après l'élimination de $y(t)$*, le système (4.14) devient :*

$$\lambda Ex(t) = A(\Delta)x(t), \quad A(\Delta) := [A + B(I_m - \Delta D)^{-1}\Delta C] \tag{4.15}$$

Cela découle de $(I_m - \Delta D)^{-1}\Delta = \Delta(I_p - D\Delta)^{-1}$ *qui se vérifie facilement par la relation*

$$\Delta(I_p - D\Delta) = (I_m - \Delta D)\Delta$$

.

Nous cherchons ensuite à connaitre les conditions garantissant que le système $(E, A(\Delta))$ *est également strictement stable.*
Nous définissons donc le rayon de stabilité correspondant du système perturbé $(E, A(\Delta))$ *tel que la plus petite perturbation* Δ *déstabilisant le système :*

$$r_c(E,A,B,C,D) \quad := \inf_{\Delta}\{||\Delta||_2 : (\lambda E - A(\Delta)) \quad a \ des \ valeurs \ propres \ instables\} \tag{4.16}$$

Où nous utilisons la norme-2, $||\Delta||_2 = Sup_{x\neq 0}\dfrac{||\Delta x||_2}{||x||_2}$ *pour mesurer la perturbation complexe* $\Delta \in \mathbb{C}^{n\times p}$.
Comme les valeurs propres sont des fonctions continues d'éléments de $(\lambda E - A(\Delta))$, *la stabilité ne sera perdue que lorsque l'une des valeurs propres franchira la limite* $\partial\Gamma$ *de la région de la stabilité* Γ.
Une formulation équivalente de ce rayon de stabilité est donc donnée par :

$$r_c(E,A,B,C,D) = \inf_{\Delta}\{||\Delta||_2 : \det(\lambda E - A(\Delta)) = 0\} \tag{4.17}$$

Tester si $det(\lambda E - A(\Delta)) = 0$ *est équivalent à tester si*

$$\det\begin{pmatrix} \lambda E - A & B \\ \Delta C & I_m - \Delta D \end{pmatrix} = 0 \tag{4.18}$$

Puisque $(\lambda E - A(\Delta))$ *est le complément de Schur de 4.18 par rapport à* $(\lambda E - A)$, *qui est supposé non singulier dans la région considérée* Γ *et sa limite (frontière)* $\partial\Gamma$. *Notez que la condition 4.18 peut également être écrite en tant que*

$$\det\left[\begin{pmatrix} \lambda E - A & B \\ 0 & I_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I_m \end{pmatrix}\Delta\begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix}\right] = 0 \tag{4.19}$$

Et comme $(\lambda E - A)$ *est inversible, cela équivaut à tester*

$$\det\left[I_{m+n} + \begin{pmatrix} -(\lambda E - A)^{-1}B \\ I_m \end{pmatrix}\Delta\begin{pmatrix} C & -D \end{pmatrix}\right] = 0 \tag{4.20}$$

Puisque $\det[I + ST] = 0$ *implique* $\det[I + TS] = 0$ *pour deux matrices conformables* S *et* T, *cela donne finalement :*

$$\det[I_m - \Delta G(\lambda)] = 0, \quad G(\lambda) := C(\lambda E - A)^{-1}B + \Delta \tag{4.21}$$

Nous pouvons donc formuler le rayon de stabilité comme suit :

$$r_c(E,A,B,C,D) := \inf_{\lambda\in\partial\Gamma}\{inf_{\Delta}||\Delta||_2 : \det[I_m - \Delta G(\lambda)] = 0\} \tag{4.22}$$

Et on sait qu'il est égale la norme dite H_∞ *du système* $G(.)$ *:*

$$r_c(E,A,B,C,D) = \left[Sup_{\lambda\in\partial\Gamma}||G(\lambda)||_2\right] = [||G(\lambda)||_\infty]^{-1} \tag{4.23}$$

pour les systèmes à temps continu $\partial\Gamma = jw$, $w \in \mathbb{R}$, *et (4.23) simplifie d'avantage à*

$$r_c(E,A,B,C,D) = \left[Sup_{w\in\mathbb{R}}||G(jw)||_2\right]^{-1} \tag{4.24}$$

Chapitre 5

Conclusion

Dans la première partie de notre travail, nous avons étudié une nouvelle classe de systèmes introduite dans [9]. La principale propriété de ces systèmes et que si l'état initiale est non négatif (resp. positif) la trajectoire d'état se situe entièrement dans l'orthant non négatif (resp. positif). L'objectif des chapitres 1 et 2 est de rappeler quelques propriétés de la théorie des matrices, et des systèmes positifs. Dans le troisième chapitre, nous étalons quelques grandes notions de stabilité. Dans le chapitre 4, nous étudions la positivité des systèmes singuliers et ou non perturbés et nous analysons l'impact de la marge de stabilité pour cette classe de systèmes. Dans la deuxième partie de notre travail, nous avons étudié l'analyse de la stabilité d'une nouvelle classe de systèmes perturbés positifs et singuliers. et nous avons établi des conditions de stabilité en terme de LMI's à la lyapunov. Pour ce faire nous nous sommes basés sur de nombreux travaux.

Les perspectives dans ce mémoire demeurent nombreuses et en raison du temps qu'on a pas pu tout réalisé.

Bibliographie

[1] ***Amirreza O.** : Positive control whith maximum stability radius for continious -time dynamic systems Electrical and computer Engineerin, Boston, Massatrussets , 2015.* 5, 7, 18, 19

[2] ***Bouagada D.** : Systèmes Différenties Singuliers Positifs et LMIs , 2007* 5, 8, 9, 18

[3] ***Bouagada D.** : Cours de Théorie de Contrôle M1 , 2007.* 18

[4] ***Bouagada D and Van Dooren P** :"On the Stability of 2D State-Space Models" Numerical Lineair Algebra With Application, vol(2), pp 198-207, 2013.* 3

[5] ***Bouagada D and Van Dooren P** : "On the Stability of 2D State-Space Modelss" International Symposium On Mathematical, Theory Of Networks ,2010 MTNS* 3

[6] ***Farina L, Rinaldi S.** : Positive Linear System ,theory and Applications J.Wiley, New york , 2000.* 5, 18

[7] ***J.Anaskais P, N.Michel A** : A linear System primerBirkhauser LC Control* 5, 18 *, 2007.*

[8] ***Kaczorek Tadeusz.** : New Stability Tests of Positive 1D and 2D Linear Systems , 2011.*

[9] ***Kaczorek Tadeusz.** : Positive And Stable Time-Varying Continious time Lineair sustems And Electical Circuits Poznan University Of technology , , 2015.* 29

[10] ***LOBRY C,SARI T.** : Introduction à la théorie du contrôle*