MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Souad BENAMAR

Problèmes de stabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret

soutenu publiquement le 26 *Juin 2019 devant le jury composé de :*

Présidente :	Sabrina TAF	MCB	UMAB
Examinateur :	Mohammed Amine GHEZZAR	MCB	UMAB
Encadreuse :	Zineb KAISSERLI	MCB	UMAB

Année Universitaire : 2018 / 2019

M
A
S
T
E
R

Remerciements

Avant tout, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donner la volonté et le courage pour atteindre mon but.

Je voudrais porter ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères, à mon encadreuse Mademoiselle Zineb KAISSERLI, pour ses efforts constants, sa disponibilité, sa grande générosité humaine et scientifique.

J'adresse ma reconnaissance et mes remerciements à Monsieur Mohammed Amine GhEZZAR et à Madame Sabrina TAF pour m'avoir fait l'honneur de faire partie de mon Jury de soutenance et pour l'intérêt qu'ils ont apporté à mon mémoire de fin d'étude.

Je remercie chaleureusement Monsieur le Professeur Djillali BOUAGADA pour ses indications, sa disponibilité et de son soutien scientifique.

Mes remerciement vont également à tous les enseignants que j'ai rencontré ou côtoyé durant mon cursus universitaire sans oublier tout le personnel administratif.

J'adresse un grand merci à tous mes collègues et mes amies en particulier Nadia, Nour El Houda, Kaouter, Houria pour les diverses discussions techniques que nous avons eu et qui ont beaucoup apporté à ce travail.

En dernier, mes plus vifs et fort remerciements et reconnaissances vont aux membres de ma famille tout particulièrement à mes parents pour leur présence constante, leur amours solide, pour la confiance qu'ils m'ont accordée, pour leur soutien et encouragement sans faille dans les bons moments comme dans les moins bons.

Souad

Table des matières

Index des notations

$\in$	Appartient à.
$\forall$	Quelque soit.
$\exists$	Il existe.
$\langle , \rangle$	Produit scalaire.
$\mathbb{R}$	Corps des nombres réelles.
$\mathbb{C}$	Corps des nombres complexe.
$\mathbb{R}_+$	Corps des nombres réelles positives.
$\mathbb{R}^n$	Espace des vecteurs réelles de dimension n.
$\mathbb{C}^n$	Espace des vecteurs complexe de dimension n.
$\mathbb{R}^{m\times n}$	Espace des matrices réelles de dimension $m \times n$.
$\mathbb{C}^{m\times n}$	Espace des matrices complexes de dimension $m \times n$.
$\mathscr{C}^n$:	Espace des fonctions continues n fois différentiables.
$\|x\|$	Valeur absolue d'un nombres réel ou module d'un nombre complexe x.
$\|\|x\|\|$	Norme de x.
A^T	Transposée de matrice A.
A^*	Transposée conjuguée de la matrice A.
A^{-1}	Matrice inverse de A.
$A > 0$ (resp. $A < 0$)	Matrice définie positive (resp. matrice définie négative).
$\mathbb{I}_n$	Matrice identité d'ordre n.
$\sigma(A)$	Ensembles des valeurs propres de A.
$\det(A)$	Déterminant de la matrice A.
$\mathrm{rg}(A)$	Rang de la matrice A.
$\deg(P)$	Degré du polynôme P.
$\sum_{i=n}^{m}$	Somme de i allant de n à m.
λ_i	Valeurs propres.
$\mathrm{R}e(s)$	Partie réelle du nombre complexe s.
Γ	Fonction Gamma d'Euler.
δ	Fonction de Dirac.
$\star$	Produit de convolution.
$\mathscr{L}$	Transformée de Laplace.
Z	Transformée en Z.
$\mathscr{S}$	Transformée de Sumudu continue.
$\mathscr{S}_d$	Transformée de Sumudu discrète.
μ	Indice de nilpotence.
ϕ_i	Matrices fondamentales.

Introduction

La théorie des systèmes dynamiques [3, 29], ou les systèmes sont construits à partir d'un ensemble d'objets ou de phénomènes liés entre eux et isolés artificiellement du monde extérieur, est une branche classique des mathématiques. Le but de cette théorie est de modéliser des processus qui évoluent au long terme dans le temps afin d'étudier leur comportement pour obtenir, en dernier, les résultats désirés.

Plus particulièrement, la modélisation des systèmes dynamiques, laquelle nécessite un ensemble de techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système étudié, vise à établir les relations qui lient les variables caractéristiques de ce processus entre elles et à représenter rigoureusement son comportement dans un domaine de fonctionnement donné.

En effet, un système dynamique est un espace des phases, dont les points correspondent aux états possibles du système considéré muni d'une loi d'évolution qui décrit la variation à court terme de l'état du système. Ainsi, un système dynamique est, donc, un modèle formé par le regroupement de trois objets différents : [7]

- **Espace d'état :** un ensemble des coordonnées nécessaires à la description complète d'un système.
- **Loi d'évolution :** une fonction qui donne l'état actuel connaissant un état antérieur.
- **Temps :** peut prendre des formes différentes.

A partir de ce dernier objet lequel est le temps, on peut distinguer deux classes de systèmes dynamique : à temps continu et/ou à temps discret [3, 29].

Un système dynamique à temps continu est représenté par une équation différentielle. On cite, par exemple, le système masse-ressort-amortisseur qui est décrit par les équations différentielles ordinaires suivantes [2]

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2, \\
\dot{x}_2(t) &= -\frac{f}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_1 + \frac{1}{M}u(t),
\end{aligned}
$$

où t représente le temps, M est la masse, k est le ressort de raideur, f est l'amortisseur et u est la force.

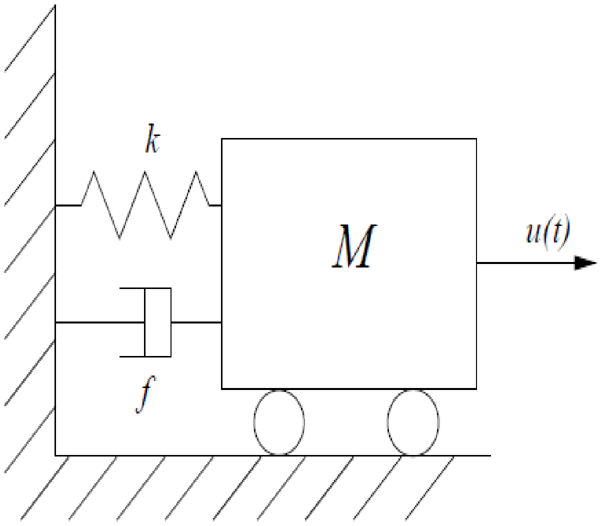

FIGURE 1 – Système dynamique à temps continu : système masse-ressort-amortisseur [2]

Cependant, un système dynamique à temps discret est représenté par une équation aux différences. Par exemple [12], supposons que nous avons une population de lapins qu'au début de notre expérience compte x_0 lapins. Nous savons qu'en une année la population augmente de 10%. Notons par x_n le nombre de lapins de la $n^{ième}$ année, l'évolution des lapins en une année x_1 est, donc, décrite par l'équation

$$x_1 = x_0 + 0.1\, x_0.$$

Au cours de la deuxième année la quantité de lapins augmente de la même façon

$$x_2 = x_1 + 0.1\, x_1.$$

En continuant de la même manière, pour une année quelconque nous trouvons

$$x_{n+1} \quad = \quad 1.1\, x_n.$$

Ainsi, nous pouvons remarquer que pour chaque période de temps

$$x_{n+1} = \mathrm{P}(x_n),$$

avec

$$\mathrm{P}(x) = 1.1\, x.$$

Autrement dit, la dynamique de la population peut être décrite, comme dans cet exemple, par l'itération d'une fonction $\mathrm{P}(x)$. En connaissant cette fonction, nous pouvons reconstituer l'état du système à chaque moment du temps.

Les systèmes dynamiques possèdent plusieurs propriétés fondamentales [8], parmi eux, la solvabilité et la stabilité se trouvent. La solvabilité consiste à retrouver la trajectoire du système dynamique à partir de l'entrée en utilisant des concepts mathématiques tandis que la stabilité est la capacité du système à revenir à sa position d'équilibre lorsqu'il en est ponctuellement écarté. Autrement dit, la solvabilité permet de retrouver l'état et la stabilité signifie que les trajectoires ne changent pas trop sous des petites perturbations.

Pour déterminer la solution des systèmes dynamiques, plusieurs transformation existent [6, 10, 13, 17, 31], alors que, la stabilité peut être tester en utilisant un test par les pôles, par les valeurs propres, par le critère de Lyapunov pour n'en citer que quelques uns [1, 4, 11, 14].

L'objectif de ce mémoire est de, dans un premier temps, traité la solvabilité des systèmes dynamiques à temps continu et à temps discret via deux transformations, l'une très connue et utilisée et l'autre récemment découverte, ensuite, étudié la stabilité des différents type de systèmes dynamiques à temps discret. L'étude de la stabilité est faite en utilisant des techniques existent et d'autres que nous développerons.

Ce manuscrit est organisé comme suit

– Dans le premier chapitre un rappel de quelques notions préliminaires sur la théorie des matrices et les fonctions spéciales est présenté. Ensuite, la solvabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps continu est traitée via la transformée de Laplace et une transformation récemment découverte dite "transformation de Sumudu".
– Quant au second chapitre, on y présente la solvabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret. Dans un premier temps, quelques notions fondamentales sur les systèmes dynamiques linéaires à temps discret sont exposées. Ensuite, leurs solvabilité est établie par les deux transformations Z et Sumudu discrète.
– Le troisième et dernier chapitre est consacré à l'étude de la stabilité des différents types de systèmes dynamiques linéaires standards à temps discret en utilisant trois techniques différentes. La première méthode consiste à vérifier la localisation des pôles, ou d'une façon équivalente la localisation des valeurs propres dans une région du plan complexe. Le critère de Schur-Cohn qui peut être vu comme un critère algébrique est la deuxième méthode présentée et qui permet de tester la stabilité. En dernier, la méthode de Lyapunov, où il s'agit de construire une fonction telle que les différences de cette fonction dans un certain voisinage du point d'équilibre donnent une information sur la stabilité du système, est étayée.

Enfin, la dernière partie de ce manuscrit présente tout d'abord une conclusion générale suivie par quelques perspectives.

Ce manuscrit comprend également une bibliographie où les différents articles et ouvrages utilisés pour l'élaboration de ce travail sont présentés.

Chapitre 1

Systèmes dynamiques linéaires à temps continu

1 Introduction

Ce chapitre fait l'objet d'un petit rappel, dans un premier temps, sur quelques notions de la théorie des matrices et des fonctions spéciales. Les différents systèmes dynamiques linéaires à temps continu sont ensuite exposés. La solvabilité de ces derniers est traitée par deux transformations dans l'une reste méconnue.

2 Notions préliminaires

Dans cette section, nous allons présenter quelques notions préliminaires sur la théorie des matrices ainsi que la définition de quelques fonctions spéciales lesquels seront utiles par la suite. Un petit aperçu sur les systèmes dynamiques linéaires à temps continu clôture cette section.

2.1 Rappels sur la théorie des matrices

Définition 1.1 (Indépendance linéaire) [15] *Soient* $\mathrm{a}_i \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, *des lignes* (*ou des colonnes*) *de la matrice* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, *les vecteurs* a_i *sont linéairement indépendant si seulement s'il existe* $\alpha_i \in \mathbb{C}$ *tel que*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \quad \text{pour tout} \quad i = 1, \cdots, n.$$

Définition 1.2 (Rang d'une matrice) [13, 15] *Le nombre de lignes* (*ou de colonnes*) *linéairement indépendante de matrice* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *noté par* $\mathrm{rg}\,\mathrm{A}$ *est dit le rang de la matrice* A.

Définition 1.3 (Matrice transposée) [15] *Soit* A *une matrice à valeurs réelles de taille* $n \times m$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

On appelle matrice transposée de $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, *la matrice* $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *définie par*

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.1 [15] *Soient* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et* $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *deux matrices et soit* k *un scalaire. Alors,*

1) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} + \mathrm{B}^{\mathrm{T}}$.
2) $(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$.
3) $(k\mathrm{A})^{\mathrm{T}} = k\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.
4) $(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.

Définition 1.4 (Matrice transposée conjuguée) [13] *On appelle matrice transposée conjuguée d'une matrice* $\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, *la matrice* $\mathrm{A}^* \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *définie par*

$$\mathrm{A}^* = \overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}}.$$

Définition 1.5 (Matrice symétrique) [13] *Une matrice* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ (*respectivement* $\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{n\times m}$) *est symétrique si elle est égale à sa transposée* (*respectivement transposée conjuguée*), *c'est-à-dire*

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}, \quad (\text{respectivement } \mathrm{A} = \mathrm{A}^*). \tag{1.1}$$

Définition 1.6 (Matrice définie positive) [15] *On dit qu'une matrice* A *à valeurs réelles de taille* $n \times n$ *est définie positive si et seulement si*

$$\forall \mathrm{X} \in \left(\mathbb{R}^*\right)^n \quad : \quad \langle \mathrm{X}, \mathrm{AX}\rangle = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX} > 0.$$

2.2 Rappels de quelques définitions des fonctions spéciales

Définition 1.7 (Fonction Gamma) [28] *Pour tout nombre complexe* z *tel que* $\mathrm{Re}(z) > 0$, *on définit la fonction suivante, appelée fonction gamma et notée* Γ,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt, \quad z > 0. \tag{1.2}$$

La fonction Gamma est représentée par une intégrale impropre. Elle converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

Proposition 1.2 [28] *La fonction Gamma d'Euler vérifie les propriétés suivantes*

- $\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z > 0$.

Exemple 1.1 *Soit* $z = 1$. *Ainsi,*

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} dt, \\ &= -\lim_{t\to\infty} e^{-t} + 1. \end{aligned}$$

D'où

$$\Gamma(1) = 1.$$

Définition 1.8 (Fonction d'ordre exponentiel) [23] *On dit que la fonction f est d'ordre exponentiel, s'il existe* $M > 0$ *et* $a \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$|f(t)| \leq Me^{at}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.3}$$

Définition 1.9 (Impulsion de Dirac) [28] *On appelle impulsion de Dirac la fonction* δ *définie par*

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \neq 0, \\ +\infty & \text{si} \quad t = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Dans un cas discret, la fonction de Dirac est donnée par la formule suivante

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{si} \quad i = j. \end{cases} \tag{1.5}$$

2.3 Systèmes dynamiques linéaires à temps continu

On considère le système dynamique linéaire à temps continu

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.6}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{1.7}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. $A, E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Définition 1.10 [8]
- *Le système* (1.6) *est dit standard si* $\det E \neq 0$.
- *Le système* (1.6) *est dit singulier si* $\det E = 0$.
- *Si* $E = I$. *Alors, le système* (1.6) *est appelé standard ou explicite.*

Définition 1.11 [8] *Le faisceau* (E, A) *du système* (1.6) *est dit régulier* (*respectivement singulier*) *si et seulement si*

$$\det(sE - A) \neq 0 \quad (\textit{respectivement } \det(sE - A) = 0),$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

3 Transformation de Laplace

La définition de la transformée de Laplace à la fois directe et inverse ainsi que leurs propriétés sont présentées dans cette section.

Définition 1.12 (Transformée de Laplace) [16] *Soit f une fonction de la variable réelle t. La transformée de Laplace la fonction f lorsqu'elle existe est la fonction* F *de la variable complexe s donnée par*

$$\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt. \tag{1.8}$$

Théorème 1.1 (Théorème d'existence) [8, 10, 16] *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *une fonction continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$ *d'ordre exponentiel. Alors, f admet la transformée de Laplace*

$$\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt. \tag{1.9}$$

Exemple 1.2 *Considérons la fonction*

$$f(t) = t.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\}(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt,\\ &= \int_0^\infty te^{-st}dt,\\ &= \frac{1}{s^2}, \quad \text{pour} \quad \mathrm{R}e(s) > 0.\end{aligned}$$

Proposition 1.3 [10, 16] *Pour toutes fonctions f et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ admettent des transformées de Laplace avec $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}_+)$. Nous avons les propriétés suivantes*

a) **Linéarité :**

$$\mathscr{L}\{f(t)+g(t)\}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s) + \mathscr{L}\{g(t)\}(s), \tag{1.10}$$

et

$$\mathscr{L}\{kf(t)\}(s) = k\mathscr{L}\{f(t)\}(s), \quad k \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

b) **Dérivée :**

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathscr{L}\{f(t)\}(s) - f(0). \tag{1.12}$$

c) **Dérivée d'ordre n :**

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n\mathscr{L}\{f(t)\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(t)\Big|_{t=0}. \tag{1.13}$$

d) **Convolution :** *Si les fonctions f et g s'annulant sur le demi plan négatif (dites causales), alors*

$$\mathscr{L}\{(f\star g)(t)\}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)\,\mathscr{L}\{f(t)\}(s), \tag{1.14}$$

où

$$(f\star g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx. \tag{1.15}$$

Proposition 1.4 [10] *Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit δ la fonction de Dirac. Alors,*

1. $\mathscr{L}\left\{\dfrac{t^i}{\Gamma(i+1)}\right\}(s) = s^{-(i+1)}.$
2. $\mathscr{L}\{\delta(t)\}(s) = 1.$

Définition 1.13 (Transformée de Laplace inverse) [10] *La transformée de Laplace inverse de l'image F est la fonction f définie par*

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\mathrm{F}(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-\infty}^{\gamma+\infty} \mathrm{F}(s)\,e^{st}\,ds. \tag{1.16}$$

Exemple 1.3 *Soit la fonction F définie par*

$$\mathrm{F}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}^i s^{-(i+1)},$$

où A *est une matrice à valeurs réelles de taille* $n \times n$*. Alors,*

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{\mathrm{F}(s)\}(t), \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}^i s^{-(i+1)}\right\}(t), \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}^i \mathscr{L}^{-1}\left\{s^{-(i+1)}\right\}(t), \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}^i \mathscr{L}^{-1}\left\{\mathscr{L}\left\{\frac{t^i}{\Gamma(i+1)}\right\}(s)\right\}(t), \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}^i \frac{t^i}{\Gamma(i+1)}. \end{aligned}$$

En dernier,

$$f(t) = e^{\mathrm{A}t}.$$

4 Solvabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps continu par la transformée de Laplace

Cette section traite la solvabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps continu standards et singuliers en utilisant la transformation de Laplace et d'autres résultats de la théorie des matrices.

4.1 Solvabilité des systèmes dynamiques linéaires standards

Considérons le système dynamique linéaire unidimensionnel à temps continu

$$\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t), \tag{1.17}$$

$$y(t) = \mathrm{C}x(t) + \mathrm{D}u(t), \tag{1.18}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

La condition initiale associée au système (1.17) est

$$x(0) = x_0. \tag{1.19}$$

Le système (1.17) est dit le système linéaire unidimensionnel à temps continu standard (ou explicite).

On suppose que le faisceau $(s\mathrm{I}-\mathrm{A})$ du système (1.17) est régulier, i.e. ;

$$\det(s\mathrm{I}-\mathrm{A}) \neq 0, \tag{1.20}$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

Proposition 1.5 [20, 25, 26] *La série de Laurent au voisinage de* ∞ *du faisceau* $(s\mathrm{I}-\mathrm{A})$ *est donnée par*

$$(s\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}^i s^{-(i+1)}, \tag{1.21}$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

L'expression de la trajectoire associée au système (1.17) est donnée par le théorème suivant.

Théorème 1.2 [8, 19] *La trajectoire du système linéaire unidimensionnel à temps continu standard* (1.17) *est donnée par*

$$x(t) = e^{\mathrm{A}t}x_0 + \int_0^t e^{\mathrm{A}(t-\tau)}\mathrm{B}u(\tau)d\tau, \tag{1.22}$$

où $e^{\mathrm{A}t}$ *est l'exponentielle de la matrice* A *défini par*

$$e^{\mathrm{A}t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^i}{\Gamma(i+1)} t^i,$$

et Γ *représente la fonction Gamma d'Euler.*

Preuve. Soient $\mathscr{L}\{x(t)\}(s) = \mathrm{X}(s)$ et $\mathscr{L}\{u(t)\}(s) = \mathrm{U}(s)$ les transformées de Laplace des fonctions x et u respectivement. L'application de la transformée de Laplace à l'équation (1.17), donne

$$\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t) \Leftrightarrow \mathscr{L}\{\dot{x}(t)\}(s) = \mathscr{L}\{\mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t)\}(s).$$

En utilisant les propriétés de la transformée de Laplace citées dans la proposition 1.3, nous trouvons

$$s\mathrm{X}(s) - x_0 = \mathrm{AX}(s) + \mathrm{BU}(s),$$

ou encore

$$(s\mathrm{I} - \mathrm{A})\mathrm{X}(s) = x_0 + \mathrm{BU}(s). \tag{1.23}$$

Comme le faisceau du système (1.17) est régulier, alors, l'équation (1.23) devient

$$\mathrm{X}(s) = (s\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}x_0 + (s\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{BU}(s).$$

En utilisant la série de Laurent (formule (1.21)), nous obtenons

$$\mathrm{X}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}^i s^{-(i+1)} x_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}^i \mathrm{B} s^{-(i+1)} \mathrm{U}(s). \tag{1.24}$$

Par application de la transformée de Laplace inverse et de ses propriétés (proposition 1.4) à l'équation (1.24), il découle

$$x(t) = e^{\mathrm{A}t}x_0 + \int_0^t e^{\mathrm{A}(t-\tau)}\mathrm{B}u(\tau)d\tau.$$

■

Exemple 1.4 *Considérons le système*

$$\mathrm{E}\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t), \tag{1.25}$$

avec

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{D} = 0 \tag{1.26}$$

et la condition initiale

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il est claire que $\det \mathrm{E} \neq 0$. *Ainsi, le système* (1.25) *devient*

$$\dot{x}(t) = \tilde{\mathrm{A}} x(t) + \tilde{\mathrm{B}} u(t),$$

avec

$$\tilde{\mathrm{A}} = \mathrm{E}^{-1}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \tilde{\mathrm{B}} = \mathrm{E}^{-1}\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par la formule (1.22)*, il s'en suit*

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ -\int_0^t u(\tau)\, d\tau - t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3!} \\ 1 + t + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}.$$

En dernier, en utilisant les systèmes (1.18) *et* (1.26)*, et le vecteur d'état* $x(t)$. *La sortie* $y(t)$ *est*

$$y(t) = 3 + 2t + \frac{t^2}{2}.$$

4.2 Solvabilité des systèmes dynamiques linéaires singuliers

Considérons le système dynamique linéaire unidimensionnel à temps continu

$$\mathrm{E}\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t) \tag{1.27}$$

$$y(t) = \mathrm{C}x(t) + \mathrm{D}u(t) \tag{1.28}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. A, B, C, D et E sont des matrices réelles de tailles appropriées avec $\det \mathrm{E} = 0$.

La condition initiale associée au système (1.27) est

$$x(0) = x_0. \tag{1.29}$$

On suppose que le faisceau $(s\mathrm{E} - \mathrm{A})$ du système (1.27) est régulier, i. e. ;

$$\det(s\mathrm{E} - \mathrm{A}) \neq 0, \tag{1.30}$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

De plus, on suppose que le système (1.27) vérifie les conditions de compatibilité suivantes

- u donnée et $\forall k \in \mathbb{N} \quad : \quad u^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = 0.$
- s^{i-1} existe pour tout $1 \leq i \leq \mu$ avec $\mu \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, le système (1.27) est dit système dynamique linéaire unidimensionnel singulier à temps continu.

Proposition 1.6 [20, 25, 26] *La série de Laurent au voisinage de* ∞ *du faisceau* $(s\mathrm{E}-\mathrm{A})$ *avec* $\det \mathrm{E} = 0$ *est donnée par*

$$(s\mathrm{E}-\mathrm{A})^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i \, s^{-(i+1)}, \tag{1.31}$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$. μ *est appelé l'indice de nilpotence, il est décrit par*

$$\mu = \operatorname{rg}\mathrm{E} - \deg[\det(s\mathrm{E}-\mathrm{A})] + 1, \tag{1.32}$$

et ϕ_i *est appelée la matrice fondamentale.*

Proposition 1.7 [8] *Les matrices fondamentales vérifient les propriétés suivantes*

1. $\phi_i = 0, \quad$ pour $\quad i < -\mu.$
2. $\phi_i = (\phi_0 \mathrm{A})^i \phi_0, \quad$ pour $\quad i \geq 0.$
3. $\phi_0 \mathrm{A} \phi_i = \begin{cases} \phi_{i+1} & \text{pour} \quad i \geq 0, \\ 0 & \text{pour} \quad i < 0. \end{cases}$

La solution du système (1.27) est donnée par le théorème suivant.

Théorème 1.3 [8, 19] *La solution du système dynamique linéaire singulier unidimensionnel à temps continu* (1.27) *est donnée par*

$$x(t) = e^{\phi_0 \mathrm{A} t} \phi_0 \mathrm{E} x_0 + \int_0^t e^{\phi_0 \mathrm{A}(t-\tau)} \phi_0 \mathrm{B} u(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \left(\mathrm{B} u^{(i-1)}(t) + \mathrm{E} x_0 \delta^{(i-1)}(t) \right), \tag{1.33}$$

où $e^{\phi_0 \mathrm{A} t}$ *est l'exponentielle de la matrice* $\phi_0 \mathrm{A} t$, ϕ_i *est la matrice fondamentale,* μ *représente l'indice de nilpotence et* δ *est l'impulsion de Dirac.*

Preuve. Notons $\mathscr{L}\{x(t)\}(s) = \mathrm{X}(s), \mathscr{L}\{u(t)\}(s) = \mathrm{U}(s)$.

En appliquant la transformée de Laplace et ses propriétés à l'équation (1.27) et sachant que le faisceau $(s\mathrm{E}-\mathrm{A})$ est régulier, nous trouvons

$$\mathrm{X}(s) = (s\mathrm{E}-\mathrm{A})^{-1} \mathrm{E} x_0 + (s\mathrm{E}-\mathrm{A})^{-1} \mathrm{B} \mathrm{U}(s). \tag{1.34}$$

Par la relation (1.31), nous obtenons

$$\mathrm{X}(s) = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} \mathrm{E} x_0 + \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} \mathrm{B} \mathrm{U}(s), \tag{1.35}$$

ou encore

$$\mathrm{X}(s) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} s^{i-1} \mathrm{E} x_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} \mathrm{E} x_0 + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} s^{i-1} \mathrm{B} \mathrm{U}(s) + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} \mathrm{B} \mathrm{U}(s). \tag{1.36}$$

En dernier, par application de la transformée de Laplace inverse et de ses propriétés à l'équation (1.36), il découle

$$x(t) = e^{\phi_0 \mathrm{A} t} \phi_0 \mathrm{E} x_0 + \int_0^t e^{\phi_0 \mathrm{A}(t-\tau)} \phi_0 \mathrm{B} u(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \left(\mathrm{B} u^{(i-1)}(t) + \mathrm{E} x_0 \delta^{(i-1)}(t) \right).$$

■

Exemple 1.5 *Considérons le système* (1.27) *avec*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad et \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.37}$$

Il est claire que $\det E = 0$. *Alors,*

$$(sE - A) = \begin{vmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & s & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -s^2.$$

Ainsi,

$$(sE - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, l'indice de nilpotence est

$$\begin{aligned} \mu &= \operatorname{rg} E - \deg(\det(Es - A)) + 1, \\ \mu &= 1. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Par suite, les matrices fondamentales sont

$$\phi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\phi_0 A t}\phi_0 E x_0 + \phi_{-1} B u(t) + \phi_{-1} E x_0 \delta(t), \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(t). \end{aligned}$$

En dernier,

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \\ -u(t) \end{pmatrix}. \tag{1.39}$$

Si on prend

$$C = (1\ 1\ 0\ 1) \quad et \quad D = 0.$$

Alors, la sortie y du système (1.28) *devient*

$$y(t) = 1 - u(t).$$

5 Transformation de Sumudu continue

Une nouvelle transformation, dite transformée de Sumudu continue, est présentée dans cette section ainsi que ces différentes propriétés.

La transformation de Sumudu continue est définie sur l'ensemble des fonctions

$$\mathscr{A} = \left\{ x(t) | \exists \mathrm{M}, \tau_1, \tau_2 > 0, |x(t)| < \mathrm{M}\, e^{|t|/\tau_j} \quad \text{si} \quad t \in (-1)^j \times [0, \infty[\right\}.$$

Définition 1.14 (Transformée de Sumudu continue) [5, 6, 31] *La transformation de Sumudu* X *d'une fonction* $x \in \mathscr{A}$ *est donnée par la formule suivante*

$$\mathrm{X}(v) = \mathscr{S}\{x(t)\}(v) = \frac{1}{v} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{v}} x(t)\, dt, \quad v \in [-\tau, \tau]. \tag{1.40}$$

Théorème 1.4 (Théorème d'existence) [31] *Si* $x \in \mathscr{A}$. *Alors,* x *admet la transformée de Sumudu*

$$\mathscr{S}\{x(t)\}(v) = \int_0^\infty e^{-t} x(vt)\, dt, \quad v \in [-\tau, \tau]. \tag{1.41}$$

Exemple 1.6 *Soit la fonction de Heaviside*

$$\mathrm{H}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; t > 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathscr{S}\{\mathrm{H}(t)\}(v) &= \frac{1}{v} \int_0^\infty \mathrm{H}(t) e^{-\frac{t}{v}}\, dt, \\ &= \frac{1}{v} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{v}}\, dt. \end{aligned}$$

D'où,

$$\mathscr{S}\{\mathrm{H}(t)\}(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; v > 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{1.42}$$

Proposition 1.8 [5, 6, 31] *Pour tous* a, $b \in \mathbb{R}^*$ *et pour toutes fonctions* f, $g \in \mathscr{A}$ *de sorte que* f *soit* n *fois différentiable, nous avons les propriétés suivante*

a) **linéarité :**

$$\mathscr{S}\{af(t) + bg(t)\}(v) = a\mathscr{S}\{f(t)\}(v) + b\mathscr{S}\{g(t)\}(v). \tag{1.43}$$

b) **Dérivée :**

$$\mathscr{S}\left\{f'(t)\right\}(v) = \frac{\mathscr{S}\{f(t)\}(v) - f(0)}{v}. \tag{1.44}$$

c) **Dérivée d'ordre** n **:**

$$\mathscr{S}\left\{f^{(n)}\right\}(v) = \frac{\mathscr{S}\{f(t)\}(v)}{v^n} - \frac{f(0)}{v^n} - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{v}. \tag{1.45}$$

d) **Convolution :**

$$\mathscr{S}\left\{(f \star g)(t)\right\}(v) = v\,\mathscr{S}\{f(t)\}(v)\,\mathscr{S}\{g(t)\}(v). \tag{1.46}$$

Proposition 1.9 [5, 6] *Soient* $t \in \mathbb{R}$ *et* δ *la fonction de Dirac. Alors,*

1) $\mathscr{S}\left\{\dfrac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}\right\}(v) = v^{n-1}$, pour tout $\; n \in \mathbb{N}^*$.

2) $\mathscr{S}\{\delta(t)\}(v) = \frac{1}{v}$.

Théorème 1.5 [6] *Soit* X *la transformée de Sumudu de* x *telle que*

i) $vX(v)$ *est une fonction méromorphe, ayant des singularités* $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{v}\right) < \gamma$.

ii) *Il existe une zone circulaire de* γ *de rayon* r *et des constantes positives* M *et* k *avec*

$$|vX(v)| < Mr^{-k}.$$

Alors, la fonction x *est donnée par*

$$\mathscr{S}^{-1}[X(v)](t) = x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left(-\frac{1}{v}\right)e^{\frac{t}{v}}X(v)\,dv.$$

6 Solvabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps continu par la transformée de Sumudu continue

La transformation de Sumudu continue, récemment découverte, est utilisée, dans cette section, pour résoudre les systèmes dynamiques linéaires à temps continu vu les propriétés intéressantes qu'elle possède.

6.1 Solvabilité des systèmes dynamiques linéaires standards

Considérons le système linéaire unidimensionnel à temps continue

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.47}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{1.48}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

La condition initiale associée au système (1.47) est

$$x(0) = x_0. \tag{1.49}$$

Supposons que le faisceau du système (1.47) est régulier, i. e. ;

$$\det(I - vA) \neq 0,$$

pour un certain $v \in \mathbb{C}$.

En s'inspirant des résultats de [20, 25, 26], nous trouvons

Proposition 1.10 *La série de Laurent au voisinage de l'infini du faisceau* $(I - vA)$ *est donnée par*

$$(I - vA)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i v^i, \tag{1.50}$$

pour un certain $v \in \mathbb{C}$.

Soient $\mathscr{S}\{x(t)\}(v) = \mathrm{X}(v)$ et $\mathscr{S}\{u(t)\}(v) = \mathrm{U}(v)$ les transformées de Sumudu continue des fonctions x et u respectivement.

L'application de la transformée de Sumudu continue à l'équation (1.47) donne

$$\mathscr{S}\{\dot{x}(t)\}(v) = \mathscr{S}\{\mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t)\}(v).$$

En utilisant les propriétés de la transformée de Sumudu (proposition 1.8), nous trouvons

$$v^{-1}\mathrm{X}(v) - v^{-1}x_0 = \mathrm{AX}(v) + \mathrm{BU}(v),$$

ou encore

$$(\mathrm{I} - v\mathrm{A})\mathrm{X}(v) = x_0 + v\mathrm{BU}(v). \tag{1.51}$$

Comme le faisceau $(\mathrm{I} - v\mathrm{A})$ est régulier, alors, l'équation (1.51) devient

$$\mathrm{X}(v) = (\mathrm{I} - v\mathrm{A})^{-1}x_0 + (\mathrm{I} - v\mathrm{A})^{-1}v\mathrm{BU}(v)$$

En utilisant la série de Laurent (formule (1.50)), nous obtenons

$$\mathrm{X}(v) = \sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{A}^i v^i x_0 + \sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{A}^i v^{(i+1)}\mathrm{BU}(v). \tag{1.52}$$

En dernier, en utilisant la transformée de Sumudu inverse ainsi que ses propriétés, nous obtenons la trajectoire du système (1.47), laquelle est donnée par le théorème suivant.

Théorème 1.6 *La solution du système dynamique linéaire standard unidimensionnel à temps continu (1.47) est donnée par*

$$x(t) = e^{\mathrm{A}t}x_0 + \int_0^t e^{\mathrm{A}(t-\tau)}\mathrm{B}u(\tau)d\tau, \tag{1.53}$$

où $e^{\mathrm{A}t}$ est l'exponentielle de la matrice A définie par

$$e^{\mathrm{A}t} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mathrm{A}^i}{\Gamma(i+1)}t^i,$$

et Γ est la fonction Gamma d'Euler.

Exemple 1.7 *Considérons le système dynamique linéaire à temps continue (1.47) avec*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad et \quad u(t) = \mathbb{I}(t).$$

En utilisant la formule (1.53), nous trouvons

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 + t + \frac{t^2}{2} \\ 1 + t \end{pmatrix}.$$

6.2 Solvabilité des systèmes dynamiques linéaires singuliers

Considérons le système dynamique linéaire singulier unidimensionnel à temps continu

$$\mathrm{E}\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t) \tag{1.54}$$
$$y(t) = \mathrm{C}x(t) + \mathrm{D}u(t) \tag{1.55}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie respectivement. $\mathrm{A}, \mathrm{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ avec $\det \mathrm{E} = 0$.

La condition initiale associée au système (1.54) est

$$x(0) = x_0. \tag{1.56}$$

Nous supposons que le faisceau $(\mathrm{E} - v\mathrm{A})$ du système (1.54) est régulier, i.e. ;

$$\det(\mathrm{E} - v\mathrm{A}) \neq 0,$$

pour un certain $v \in \mathbb{C}$. Par ailleurs, nous assumons que le système (1.54) vérifie les conditions de compatibilité suivantes

- u existe et $u^{(k)}(0) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$
- v^{-i} existe pour tout $1 \leq i \leq \mu$ avec $\mu \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.11 [21] *La série de Laurent au voisinage de l'infini du faisceau* $(\mathrm{E} - v\mathrm{A})$ *avec* $\det \mathrm{E} = 0$ *est donnée par*

$$(\mathrm{E} - v\mathrm{A})^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i v^i, \tag{1.57}$$

pour un certain $v \in \mathbb{C}$. μ *est appelé indice nilpotence, il est décrit par*

$$\mu = \mathrm{rg}\,\mathrm{E} - \deg\left[\det(v^{-1}\mathrm{E} - \mathrm{A})\right] + 1, \tag{1.58}$$

et ϕ_i *est appelée la matrice fondamentale.*

Théorème 1.7 *La solution du système dynamique linéaire singulier unidimensionnel à temps continu* (1.54) *est donnée par*

$$x(t) = e^{\phi_0 \mathrm{A}t}\phi_0 \mathrm{E}x_0 + \int_0^t e^{\phi_0\mathrm{A}(t-\tau)}\phi_0 \mathrm{B}u(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{\mu}\phi_{-i}\left(\mathrm{B}u^{(i-1)}(t) + \mathrm{E}x_0\delta^{(i-1)}(t)\right), \tag{1.59}$$

où $e^{\phi_0\mathrm{A}t}$, ϕ_i, μ, δ *sont, respectivement, l'exponentielle de la matrice* $\phi_0\mathrm{A}t$*, la matrice fondamentale, l'indice de nilpotence et l'impulsion de Dirac.*

Preuve. Soient $\mathscr{S}\{x(t)\}(v) = \mathrm{X}(v)$ et $\mathscr{S}\{u(t)\}(v) = \mathrm{U}(v)$ les transformées de Sumudu des fonctions x et u respectivement. L'application de la transformée de Sumudu et de ses propriétés à l'équation (1.54) donne

$$v^{-1}\mathrm{E}\mathrm{X}(v) - v^{-1}\mathrm{E}x_0 = \mathrm{A}\mathrm{X}(v) + \mathrm{B}\mathrm{U}(v). \tag{1.60}$$

L'équation (1.60) peut se réécrire comme

$$(\mathrm{E} - v\mathrm{A})\mathrm{X}(v) = \mathrm{E}x_0 + v\mathrm{B}\mathrm{U}(v). \tag{1.61}$$

Comme le faisceau du système (1.54) est régulier. Alors, nous trouvons

$$\mathrm{X}(v) = (\mathrm{E} - v\mathrm{A})^{-1}\mathrm{E}x_0 + (\mathrm{E} - v\mathrm{A})^{-1}v\mathrm{B}\mathrm{U}(v). \tag{1.62}$$

De la relation (1.57), nous obtenons

$$X(s) = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i v^i E x_0 + \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i v^{i+1} BU(v),$$

ou encore,

$$X(s) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} v^{-i} E x_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i v^i E x_0 + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} v^{1-i} BU(v) + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i v^{i+1} BU(v).$$

En utilisant la transformée de Sumudu inverse continue et ses propriétés, nous obtenons le résultat souhaité. ■

Exemple 1.8 *Soit le système*

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1.63}$$

avec

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il est claire que $\det E = 0$. *Ainsi,*

$$\det(E - vA) = \begin{vmatrix} -v & 0 & 0 \\ 1 & -v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = v^2.$$

Alors,

$$(E - vA)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{v} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{v^2} & -\frac{1}{v} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'en suit que $\mu = 2$ *et les matrices fondamentales sont*

$$\phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule (1.59), *la trajectoire* $x(t)$ *est*

$$x(t) = \begin{pmatrix} -u(t) \\ -\delta(t)x_{1,0} - \dot{u}(t) \\ x_{0,3} + \int_0^t u(\tau)d\tau \end{pmatrix}.$$

7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques notions sur la théorie des matrices, les fonctions spéciales et les systèmes dynamiques linéaires. La solvabilité de ces derniers a été traité, dans un premier temps, par la transformation de Laplace, puis par une nouvelle transformation, connue sous le nom de la transformée de Sumudu continue. Cette dernière transformation a été présenté suivie par ses différentes propriétés lesquels nous ont aidé a résoudre les systèmes dynamiques linéaires.

Malgré le grand succès et l'immense utilisation de la transformée de Laplace, cependant, la transformée de Sumudu, récemment découverte possède beaucoup plus d'avantages en terme de propriétés et de conditions d'utilisation [22, 30].

L'extension des résultats trouvés dans ce chapitre au cas discret feront l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Systèmes dynamiques linéaires à temps discret

1 Introduction

Ce chapitre traite la solvabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret. Les transformations utilisées, à savoir la transformation en Z et la transformation de Sumudu discrète, sont d'abord présentées suivie par leurs propriétés. Quelques propriétés de la théorie des matrices utilisées sont aussi exposées.

2 Systèmes dynamiques linéaires à temps discret

Cette section présente un rappel sur les différents systèmes dynamiques linéaires à temps discret.

Soit le système dynamique linéaire à temps discret

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}x_{k+1} &= \mathrm{A}x_k + \mathrm{B}u_k && (2.1)\\
y_k &= \mathrm{C}x_k + \mathrm{D}u_k && (2.2)
\end{aligned}
$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u_k \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y_k \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. $\mathrm{A}, \mathrm{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Définition 2.1 [8]

- *Le système* (2.1) *est dit standard si* $\det \mathrm{E} \neq 0$.
- *Le système* (2.1) *est dit singulier si* $\det \mathrm{E} = 0$.
- *Si* $\mathrm{E} = \mathrm{I}$. *Alors, le système* (2.1) *est appelé standard ou explicite.*

Définition 2.2 [8] *Le faisceau* (E, A) *du système* (2.1) *est dit régulier* (*respectivement singulier*) *si et seulement si*

$$\det(z\mathrm{E}-\mathrm{A}) \neq 0, \quad (\textit{ respectivement } \det(z\mathrm{E}-\mathrm{A}) = 0),$$

pour un certain $z \in \mathbb{C}$.

3 Transformation de Z

Dans cette section, la définition de la transformée en Z directe et inverse ainsi que leurs propriétés sont rappelées.

Définition 2.3 (Transformée en Z) [19, 24] *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle transformée en Z de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la fonction, notée $Z[x_n]$, de la variable complexe z définie, lorsqu' il y a convergence, par*

$$Z[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}. \tag{2.3}$$

Exemple 2.1 *Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier n, $x_n = 1$. Alors,*

$$\begin{aligned} Z[1](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} 1 z^{-n}, \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$Z[1](z) = \frac{z}{z-1}. \tag{2.4}$$

Définition 2.4 (Transformée en Z inverse) [19, 24] *La transformée en Z inverse x_n de $Z[x_n](z)$ est définie par*

$$x_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma} Z[x_n](z) z^{n-1} dz, \tag{2.5}$$

où $\oint$ représente l'intégrale de Cauchy [32].

Exemple 2.2 *Soit la transformée en Z de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivante*

$$Z[x_n](z) = \frac{z}{z-1}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma} Z[x_n](z) z^{n-1} dz, \\ x_n &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma} \frac{z}{z-1} z^{n-1} dz \\ x_n &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma} \frac{z^n}{z-1} dz \end{aligned}$$

En utilisant l'intégrale de Dunford [32], *il résulte*

$$x_n = 1.$$

Définition 2.5 (Suite de Dirac retardée) [24] *La suite de Dirac retardée de k (k est un entier positif) est définie de la manière suivante*

$$\delta_{n-k} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq k \\ 1 & \text{si} \quad n = k \end{cases} \tag{2.6}$$

Remarque 2.1 [24] *Vu les résultats sur le rayon de convergence d'une série entière, on peut dire que trois cas peuvent se présenter*

- ⋆ *Soit la transformée en Z est définie quel que soit le nombre complexe z, non nul.*
- ⋆ *Soit il existe un nombre réel positif ou nul R tel que pour $z : |z| > R$ la transformée en Z est définie, et pour z tel que $|z| < R$ la transformée en Z n'est pas définie.*
- ⋆ *Soit la transformée en Z n'est pas définie pour aucun nombre complexe z.*

Proposition 2.1 [16] *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites admettent des transformées de Z et soient a et b deux réels, nous avons les propriétés suivantes*

1) **Linéarité :**
$$Z[au_n + bw_n](z) = aZ[u_n](z) + bZ[w_n](z). \tag{2.7}$$

2) **Retard :**
$$Z[x_{n-k}](z) = z^{-k}Z[x_n](z), \quad k \in \mathbb{N} \text{ et } n < k.$$

3) **Avance :**
$$Z[x_{n+k}](z) = z^k Z[x_n](z) - x_0 z^k - x_1 z^{k-1} - \cdots - x_{k-1} z, \quad \Bbbk \in \mathrm{N}. \tag{2.8}$$

Proposition 2.2 [24] *Soit δ la suite de Dirac retardée. Alors,*
$$Z\left[\delta_{i-j}\right](z) = z^{-j}. \tag{2.9}$$

4 Solvabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret par la transformée en Z

Dans cette section, nous résolvons les systèmes dynamiques linéaires unidimensionnels à temps discret en utilisant la transformée en Z, ses propriétés et quelques notions et résultats de la théorie des matrices.

4.1 Solvabilité des systèmes dynamiques linéaires standards

Rappelons que l'écriture générale d'un système dynamique linéaire standard unidimensionnel à temps discret est

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \tag{2.10}$$
$$y_{k+1} = Cx_k + Du_k \tag{2.11}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u_k \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y_k \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

La condition initiale associée au système (2.10) est

$$x(0) = x_0. \tag{2.12}$$

De plus, nous supposons que le système (2.10) est régulier, c'est-à-dire,

$$\det(zI - A) \neq 0, \tag{2.13}$$

pour un certain $z \in \mathbb{C}$. Ainsi, la série de Laurent est donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.3 [8, 19] *La série de Laurent au voisinage de l'infini du faisceau $(zI - A)$ est donnée par*
$$(zI - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i z^{-(i+1)}, \tag{2.14}$$

pour un certain $z \in \mathbb{C}$.

Dans ce qui suit, nous allons utiliser la transformée en Z pour résoudre le système (2.10). En effet, en appliquant la transformée en Z à l'équation (2.10), nous trouvons

$$Z[x_{k+1}](z) = Z[Ax_k + Bu_k](z).$$

Soient $X(z) = Z[x_k](z)$ et $U(z) = Z[u_k](z)$. L'utilisation des propriétés de la transformée en Z, donne

$$zX(z) - zx_0 = AX(z) + BU(z),$$

ou encore

$$(zI - A)X(z) = zx_0 + BU(z).$$

Comme le faisceau du système (2.10) est régulier, alors, en utilisant la série de Laurent (formule (2.14)), nous trouvons

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} A^i z^{-i} x_0 + \sum_{i=0}^{\infty} A^i z^{-(i+1)} BU(z). \tag{2.15}$$

En appliquant la transformée en Z inverse à l'équation (2.15), il découle

$$x_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Upsilon \sum_{i=0}^{\infty} A^i z^{-i} z^{k-1} x_0 dz + \sum_{i=0}^{\infty} A^i B \frac{1}{2\pi j} \oint_\Upsilon U(z) z^{-(i+1)} z^{k-1} dz.$$

En dernier, la trajectoire est obtenue en utilisant les propriétés de la transformée en Z. Cette dernière est décrite dans le théorème suivant.

Théorème 2.1 [8, 19] *La solution du système dynamique linéaire standard unidimensionnel à temps discret* (2.10) *est donnée par*

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^i B u_{k-i-1}, \tag{2.16}$$

où x_0 est la condition initiale.

Exemple 2.3 *Considérons le système* (2.10) *avec*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Par un calcul direct, nous avons

- $k = 1$:

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 + A^0 B u_{1-0-1}, \\ &= Ax_0 + Bu_0, \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ainsi,

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

- $k = 2$:

$$\begin{aligned} x_2 &= \mathrm{A}^2 x_0 + \mathrm{AB}u_0 + \mathrm{B}u_1, \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_1. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ainsi,

$$x_2 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

- $k = 3$:

$$\begin{aligned} x_3 &= \mathrm{A}^2 \mathrm{B} u_0 + \mathrm{AB}u_1 + \mathrm{B}u_2, \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Ainsi,

$$x_3 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x_k = \begin{pmatrix} u_{k-2} \\ u_{k-1} \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad k \geq 2. \tag{2.21}$$

4.2 Solvabilité des systèmes dynamiques linéaires singuliers

Considérons le système dynamique linéaire singulier unidimensionnel à temps discret

$$\mathrm{E}x_{k+1} = \mathrm{A}x_k + \mathrm{B}u_k \tag{2.22}$$

$$y_{k+1} = \mathrm{C}x_k + \mathrm{D}u_k \tag{2.23}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u_k \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y_k \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. $\mathrm{E}, \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ avec $\det \mathrm{E} = 0$.

La condition initiale associée au système (2.22) est

$$x(0) = x_0. \tag{2.24}$$

Nous supposons que le faisceau $(z\mathrm{E} - \mathrm{A})$ associé au système (2.22) est régulier, c'est-à-dire,

$$\det(z\mathrm{E} - \mathrm{A}) \neq 0,$$

pour un certain $z \in \mathbb{C}$. Ainsi, la série de Laurent est donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.4 [8, 19] *La série de Laurent au voisinage de* ∞ *du faisceau* $(z\mathrm{E} - \mathrm{A})$ *est donnée par*

$$(z\mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i \, z^{-(i+1)}, \tag{2.25}$$

pour un certain $z \in \mathbb{C}$. μ *est appelé indice nilpotence, il est décrit par,*

$$\mu = \mathrm{rg}\ \mathrm{E} - \deg[\det(\mathrm{E}z - \mathrm{A})] + 1, \tag{2.26}$$

et ϕ_i *est appelée la matrice fondamentale.*

Proposition 2.5 [8] *Les matrices fondamentales vérifient les propriétés suivantes*

1. $\phi_i = 0, \quad$ pour $\quad i < -\mu.$
2. $\phi_i = (\phi_0 A)^i \phi_0, \quad$ pour $\quad i \geq 0.$
3. $\phi_0 A \phi_i = \begin{cases} \phi_{i+1} & \text{pour} \quad i \geq 0, \\ 0 & \text{pour} \quad i < 0. \end{cases}$

Ainsi, la solution de système (2.22) est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.2 [8, 19] *La solution du système dynamique linéaire singulier unidimensionnel à temps discret* (2.22) *est donnée par*

$$x_k = \phi_k E x_0 + \sum_{i=-\mu}^{k-1} \phi_i B u_{k-i-1}, \tag{2.27}$$

où x_0, μ *et* ϕ_i *sont la condition initiale, l'indice de nilpotence et la matrice fondamentale respectivement.*

Preuve. Soient $X(z) = Z[x_k](z)$ et $U(z) = Z[u_k](z)$.
L'application de la transformée en Z et de ses propriétés à l'équation (2.22) donne

$$zEX(z) - zEx_0 = AX(z) + BU(z).$$

Comme le système (2.22) est régulier, alors, nous obtenons

$$X(z) = (zE - A)^{-1} zEx_0 + (zE - A)^{-1} BU(z).$$

En utilisant la série de Laurent (formule (2.25)), nous trouvons

$$X(z) = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i z^{-i} E x_0 + \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i z^{-(i+1)} BU(z). \tag{2.28}$$

En dernier, en appliquant la Z transformée inverse et ses propriétés à l'équation (2.28), il s'en suit

$$x_k = \phi_k E x_0 + \sum_{i=-\mu}^{k-1} \phi_i B u_{k-i-1}.$$

■

Exemple 2.4 *Soit le système* (2.22) *avec*

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad D = 2. \tag{2.29}$$

Il est claire que $\det E = 0$. *Alors,*

$$\det(zE - A) = \begin{vmatrix} -1 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -z.$$

Ainsi,

$$(z\mathrm{E}-\mathrm{A})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -z \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{z} & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite, l'indice de nilpotence est $\mu = 2$ *et les matrices fondamentales sont*

$$\phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la propriété 3 *de la proposition* 2.5 *,on en conclut*

$$\phi_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad pour\ i \geq 1.$$

Ainsi, on en déduit que

$$\begin{aligned} x_k &= \phi_{-2}\mathrm{B}u_{k+1} + \phi_{-1}\mathrm{B}u_k + \phi_0\mathrm{B}u_{k-1}, \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_{k+1} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_{k-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$x_k = \begin{pmatrix} -u_{k+1} - u_k \\ -u_k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5 Transformation de Sumudu discrète

Cette section est dédiée à la transformation de Sumudu discrète. Dans un premier temps, la définition de cette nouvelle transformation est présentée suivie par ses propriétés déjà établit. Ensuite, d'autres nouvelles propriétés que nous démontrons sont présentées.

Définition 2.6 [17] *Soit* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *une fonction. La transformée de Sumudu discrète, notée par* $\mathscr{S}_d$*, de* x *est définie par*

$$\mathscr{S}_d[x_k](w) = \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{\infty} x_k \left(\frac{w}{w+1}\right)^{k+1}, \quad w \neq -1. \tag{2.30}$$

Remarque 2.2 [18] *Vu les résultats sur le rayon de convergence de la série* (2.30)*, on peut dire que trois cas peuvent se présenter*

1) *Si* $0 < \mathrm{R} < \infty$*. Alors, la série* (2.30) *est convergente pour* $\left|\frac{w+1}{w}\right| > \mathrm{R}$*, autrement, elle diverge.*
2) *Si* $\mathrm{R} = 0$*. Alors, la série* (2.30) *est convergente pour tout* w *sauf possiblement pour* $w = -1$*.*
3) *Si* $\mathrm{R} = \infty$ *la série* (2.30) *diverge partout.*

Proposition 2.6 [17, 18] *Pour toutes fonctions* x *et* $y : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *admettent des transformées de Sumudu discrètes, et pour tout réel* a*, nous avons les propriétés suivantes*

i) **Linéarité :**

$$\mathcal{S}_d[(x+y)_k](w) = \mathcal{S}_d[x_k](w) + \mathcal{S}_d[y_k](w),$$

et

$$\mathcal{S}_d[ax_k](w) = a\mathcal{S}_d[x_k](w).$$

ii) **Avance :**

$$\mathcal{S}_d[x_{k+m}](w) = \left(\frac{w+1}{w}\right)^m \mathcal{S}_d[x_k](w) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(w+1)^{m-n-1}}{w^{m-n}} x_n.$$

iii) **Convolution :**

$$\mathcal{S}_d[(x\star y)_k](w) = \frac{1}{w}\sum_{k=0}^{\infty}(x\star y)_k\left(\frac{w}{w+1}\right)^{k+1},$$

où

$$(x\star y)_k = \sum_{m=0}^{k} x_{k-m}y_m.$$

En s'inspirent des résultats de la transformation en Z et de la définition et les propriétés de transformation de Sumudu discrète, nous obtenons

Proposition 2.7 *Soit* δ *une suite de Dirac. Alors,*

$$\mathcal{S}_d[\delta_k](w) = \frac{1}{w}\left(\frac{w}{w+1}\right)^{k+1}.$$

6 Solvabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret par la transformation de Sumudu discrète

La résolution des systèmes dynamiques linéaires, à la fois standards et singuliers, à temps discret par la transformation de Sumudu discrète est traitée dans cette section.

6.1 Solvabilité des systèmes dynamiques linéaires standards

Considérons le système dynamique linéaire standard unidimensionnel à temps discret

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \tag{2.31}$$

$$y_{k+1} = Cx_k + Du_k \tag{2.32}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ et $y_k \in \mathbb{R}^p$ sont les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie respectivement. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

La condition initiale associée au système (2.31) est

$$x(0) = x_0. \tag{2.33}$$

Nous supposons que le système (2.31) est régulier, autrement dit,

$$\det\left(I - \frac{w}{w+1}A\right) \neq 0,$$

pour un certain $w \in \mathbb{C}/\{-1\}$. Ainsi, en s'inspirant des résultats de [8, 19, 26], nous obtenons la proposition suivante

Proposition 2.8 *La série de Laurent au voisinage de l'infini du faisceau* $\left(\mathrm{I}-\frac{w}{w+1}\mathrm{A}\right)$ *est donnée par*

$$\left(\mathrm{I}-\frac{w}{w+1}\mathrm{A}\right)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{A}^i\left(\frac{w}{w+1}\right)^i, \tag{2.34}$$

pour un certain $w\in\mathbb{C}/\{-1\}$.

La trajectoire du système (2.31) est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.3 *La solution du système dynamique linéaire standard unidimensionnel à temps discret* (2.31) *est donnée par*

$$x_k=\mathrm{A}^k x_0+\sum_{i=0}^{k-1}\mathrm{A}^i\mathrm{B}u_{k-i-1}, \tag{2.35}$$

où x_0 *est la condition initiale.*

Preuve. En appliquant la transformée de Sumudu discrète à l'équation (2.31), nous trouvons

$$\mathcal{S}_d[x_{k+1}](w)=\mathcal{S}_d[\mathrm{A}x_k+\mathrm{B}u_k](w). \tag{2.36}$$

Notons $\mathrm{X}(w)$ et $\mathrm{U}(w)$ les transformées de Sumudu discrète de x_k et u_k respectivement. Ainsi, l'utilisation des propriétés de la transformée de Sumudu discrète (proposition 2.6), transforme l'équation (2.36) en

$$\left(\mathrm{I}-\frac{w}{w+1}\mathrm{A}\right)\mathrm{X}(w)=\frac{1}{w+1}x_0+\frac{w}{w+1}\mathrm{BU}(w).$$

Or, le système (2.31) est régulier, ainsi, l'utilisation de la série de Laurent (formule (2.34)) donne

$$\mathrm{X}(w)=\frac{1}{w+1}\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{A}^i\left(\frac{w}{w+1}\right)^i x_0+\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{A}^i\left(\frac{w}{w+1}\right)^{i+1}\mathrm{BU}(w). \tag{2.37}$$

En appliquant la transformée de Sumudu discrète inverse et ses propriétés à l'équation (2.37), nous obtenons

$$x_k=\mathrm{A}^k x_0+\sum_{i=0}^{k-1}\mathrm{A}^i\mathrm{B}u_{k-i-1}.$$

■

Exemple 2.5 *Soit le système* (2.31) *avec*

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad x_0=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

Par un calcul direct, nous avons

- $k=1$:

$$\begin{aligned}x_1&=\mathrm{A}x_0+\mathrm{A}^0\mathrm{B}u_{1-0-1},\\&=\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}u_0,\\&=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}u_0.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Ainsi,

$$x_1=\begin{pmatrix}u_0\\0\\1+u_0\end{pmatrix}.$$

- $k = 2$:

$$\begin{aligned} x_2 &= \mathrm{A}^2 x_0 + \mathrm{AB}u_0 + \mathrm{B}u_1, \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_0. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Ainsi,

$$x_2 = \begin{pmatrix} u_0 + u_1 \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

- $k = 3$:

$$\begin{aligned} x_3 &= \mathrm{A}^2 \mathrm{B}u_0 + \mathrm{AB}u_1 + \mathrm{B}u_2, \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_0. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Ainsi,

$$x_3 = \begin{pmatrix} u_0 + u_1 + u_2 \\ 0 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$x_1 = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ 1 + u_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x_k = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{k-1} u_i \\ 0 \\ u_{k-1} \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad k \geq 2. \tag{2.42}$$

6.2 Solvabilité des systèmes dynamiques linéaires singuliers

Rappelons que l'écriture générale d'un système dynamique linéaire singulier à temps discret est

$$\mathrm{E}x_{k+1} = \mathrm{A}x_k + \mathrm{B}u_k \tag{2.43}$$

$$y_{k+1} = \mathrm{C}x_k + \mathrm{D}u_k \tag{2.44}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u_k \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y_k \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. E, A, B, C et D sont des matrices réelles de dimensions appropriées avec $\det \mathrm{E} = 0$.

La condition initiale associée au système (2.43) est

$$x(0) = x_0. \tag{2.45}$$

Supposons que le système (2.43) est régulier, c'est-à-dire

$$\det\left(\mathrm{E} - \frac{w}{w+1}\mathrm{A}\right) \neq 0,$$

pour un certain $w \in \mathbb{C}/\{-1\}$. Ainsi, dans ce cas, la série de Laurent [8, 19, 26] devient

Proposition 2.9 *La série de Laurent au voisinage de ∞ du faisceau $\left(\mathrm{E}-\frac{w}{w+1}\mathrm{A}\right)$ est donnée par*

$$\left(\mathrm{E}-\frac{w}{w+1}\mathrm{A}\right)^{-1}=\sum_{i=-\mu}^{\infty}\phi_i\left(\frac{w}{w+1}\right)^i, \tag{2.46}$$

pour un certain $w\in\mathbb{C}/\{-1\}$. μ est appelé indice nilpotence, il est décrit par

$$\mu=\mathrm{rg}\,\mathrm{E}-\deg\left[\det\left(\frac{w+1}{w}\mathrm{E}-\mathrm{A}\right)\right]+1, \tag{2.47}$$

et ϕ_i est appelée la matrice fondamentale.

Notons $\mathrm{X}(w)$ et $\mathrm{U}(w)$ les transformées de Sumudu discrète de x_k et u_k respectivement.Par application de la transformée de Sumudu discrète à l'équation (2.43), nous trouvons

$$\mathscr{S}_d[\mathrm{E}x_{k+1}](w)=\mathscr{S}_d[\mathrm{A}x_k+\mathrm{B}u_k](w) \tag{2.48}$$

Les propriétés de la transformée de Sumudu discrète, transforme l'équation (2.48) en

$$\left(\mathrm{E}-\frac{w}{w+1}\mathrm{A}\right)\mathrm{X}(w)=(w+1)\mathrm{E}x_0+\mathrm{BU}(w),$$

Comme le faisceau $\left(\mathrm{E}-\frac{w}{w+1}\mathrm{A}\right)$ est régulier, alors, par la série de Laurent (formule (2.46)), nous obtenons

$$\mathrm{X}(w)=(w+1)\sum_{i=-\mu}^{\infty}\phi_i\left(\frac{w}{w+1}\right)^i\mathrm{E}x_0+\frac{w}{w+1}\sum_{i=-\mu}^{\infty}\phi_i\left(\frac{w}{w+1}\right)^i\mathrm{BU}(w). \tag{2.49}$$

En dernier, le théorème suivant découle en appliquant la transformée inverse de Sumudu discrète et ses propriétés à l'équation (2.49).

Théorème 2.4 *La trajectoire du système dynamique linéaire singulier unidimensionnel à temps discret (2.43) est donnée par*

$$x_k=\phi_k\mathrm{E}x_0+\sum_{i=-\mu}^{k-1}\phi_i\mathrm{B}u_{k-i-1}, \tag{2.50}$$

ou x_0 est la condition initiale, μ est l'indice de nilpotence et ϕ_i sont les matrices fondamentales.

Exemple 2.6 *Considérons le système (2.43) avec*

$$\mathrm{E}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad x_0=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{2.51}$$

Il est claire que $\det\mathrm{E}=0$. *Alors,*

$$\det\left(\mathrm{E}-\frac{w}{w+1}\mathrm{A}\right)=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\-\frac{w}{w+1}&0&1&0\\0&-\frac{w}{w+1}&0&0\\0&0&0&-\frac{w}{w+1}\end{vmatrix}=\frac{w^2}{(w+1)^2}.$$

Ainsi,

$$\left(\mathrm{E}-\frac{w}{w+1}\mathrm{A}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{w}{w+1} & 0\\ \frac{w}{w+1} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{w}{w+1}\end{pmatrix}.$$

par suite, l'indice de nilpotence μ *est égale à* 1 *et les matrices fondamentales sont*

$$\phi_{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad \phi_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \phi_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned}x_k &= \phi_k\mathrm{E}x_0+\sum_{i=-1}^{k-1}\phi_i\mathrm{B}u_{k-i-1},\\ x_k &= \phi_1\mathrm{E}x_0+\phi_{-1}\mathrm{B}u_k+\phi_0\mathrm{B}u_{k-1}+\phi_1\mathrm{B}u_{k-2},\\ x_k &= \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}u_k.\end{aligned}$$

En dernier,

$$x_k=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-u_k\end{pmatrix}.$$

7 Conclusion

Le présent chapitre a été consacré à l'étude de la solvabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret par deux transformations. La première transformation est la transformation en Z, laquelle est très connue et très utilisée. Tandis que la deuxième transformation est la transformation de Sumudu discrète récemment découverte. Pour cette dernière transformation, nous avons établi quelques propriétés.

L'étude de la stabilité de certains systèmes dynamiques linéaires à temps discret, présentés dans ce chapitre, fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Stabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret

1 Introduction

Ce chapitre représente le cœur du manuscrit. On y présente les principaux résultats sur la stabilité de certains systèmes dynamiques linéaires à temps discret. Tout d'abord, nous rappelons quelques notions sur la stabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret. Ensuite, la stabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret non commandés est traitée. La quatrième section fait l'objet de l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret commandés. En dernier, la stabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret perturbés est exposée.

2 Rappels de quelques notions sur la stabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret

Dans cette première partie, nous rappelons quelques notions sur la stabilité [33] des systèmes dynamiques à temps discret. Soit le système à temps discret autonome sous la forme

$$\begin{cases} x_{k+1} &= f(k, x_k) \\ x_{k_0} &= x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue.

Nous désignons par x_e une trajectoire d'équilibre telle que $f(x_e, 0) = 0,\ \forall k \geq k_0$ et par $x(k, x_{k_0}, k_0)$ la trajectoire d'état, solution à l'instant k du système autonome initialisé au point x_{k_0} à l'instant k_0.

Définition 3.1 (Stabilité) [33] *On dit que x_e est un point d'équilibre stable du système (3.1), si*

$$\forall \xi > 0, \forall k_0 > 0, \exists \delta(k_0, \xi) > 0 : ||x_0 - x_e|| < \delta \Rightarrow ||x(k, x_0, k_0) - x_e|| < \xi, \quad \forall k \geq k_0. \tag{3.2}$$

Définition 3.2 (Attractivité) [33] *On dit que le point d'équilibre x_e du système (3.1) est attractif, si*

$$\forall \xi > 0, \forall k_0 > 0, \exists \delta(k_0) > 0 : ||x_0 - x_e|| < \delta \Rightarrow \lim_{k \to \infty} x(k, x_0, k_0) = x_e, \quad \forall k \geq k_0. \tag{3.3}$$

Définition 3.3 (Stabilité asymptotique) [33] *La trajectoire d'équilibre x_e est asymptotiquement stable si le système (3.1) est stable et attractif.*

3 Stabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret non commandés

Dans cette section, la stabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret non commandés est traitée par plusieurs tests et méthodes. La première méthode, consiste à utiliser les valeurs propres pour tester la stabilité. Dans certains cas, le calculs des valeurs propres s'avère compliqué, c'est pour cela, nous présentons, dans la deuxième partie, le test de Schur-Cohn. La dernière partie de cette section est dédiée à la méthode de Lyapunov.

3.1 Test par les valeurs propres

Soit le système dynamique linéaire unidimensionnel à temps discret

$$\begin{cases} x_{k+1} & = & \mathrm{A}x_k \\ x_{k_0} & = & x_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

avec $x_k \in \mathbb{R}^n$ et A une matrice réelle de taille $n \times n$.

Le système (3.4) est dit le système dynamique linéaire unidimensionnel à temps discret non commandé vue que $u_k = 0, \quad \forall k$.

Théorème 3.1 [27] *Un point d'équilibre $x_e = 0$ du système (3.4) est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice A sont à l'intérieur du cercle unité du plan complexe (c'est-à-dire, si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des valeurs propres de la matrice A alors $|\lambda_i| < 1, \forall i = 1, \cdots, n$).*

Théorème 3.2 [27] *Un point d'équilibre $x_e = 0$ du système (3.4) est instable s' il y a au moins une valeur propre à l'extérieur du cercle unité du plan complexe (c'est-à-dire, si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des valeurs propres de la matrice A alors $|\lambda_i| > 1$ pour un certain i).*

Remarque 3.1 [4] *Si $\exists i = 1 \cdots, n$ tel que $|\lambda_i| = 1$ et $|\lambda_j| < 1, \forall j = 1, \cdots, n$ avec $j \neq i$. Alors, le système est dit simplement stable.*

Exemple 3.1 *Considérons le système (3.4) avec*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1.$$

Comme $\forall i = 1, 2 : |\lambda_i| = 1$. Alors, le système est simplement stable.

3.2 Critère de Schur-Cohn

Dans cette section, nous présentons une méthode appelée *le critère de Schur-Cohn*. Ce critère nous permet de déterminer si les racines d'un polynôme à coefficients réels donné par

$$\mathrm{P}(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n > 0, \tag{3.5}$$

se trouvent à l'intérieur du cercle unité du plan complexe $\mathbb{C}$. Cette méthode étudie la stabilité de l'équilibre $x_e = 0$ du système (3.4), en utilisant uniquement l'équation caractéristique de la matrice A sans le calcul de ses racines.

Le théorème suivant montre la procédure du critère de Schur-Cohn.

Théorème 3.3 (Critère de Schur-Cohn) [1] *Le polynôme* (3.5) *à coefficients réels a toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité si et seulement si*

i) $P(1) > 0$ *et* $(-1)^n P(-1) > 0$.

ii) *Les matrices suivantes sont positifs*

$$\Delta_{n-1}^{\pm} = \begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_3 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ \vdots & \vdots & & a_0 & a_1 \\ \vdots & 0 & \vdots & a_1 & \vdots \\ 0 & a_0 & \vdots & \vdots & a_{n-1} \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.2 *Soit la matrice suivante*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique associé est donné par

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{4}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(1) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \quad &\Rightarrow \quad P(1) = \frac{3}{8} \geq 0. \\ (-1)^2 P(-1) = 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \quad &\Rightarrow \quad P(-1) = \frac{15}{8} \geq 0. \end{aligned}$$

De plus,

$$\Delta_1 = 1 + \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad \Delta_1 = \frac{17}{8} \geq 0.$$

Par conséquent, les racines du polynôme P *se trouve à l'intérieur du cercle unité du plan complexe* $\mathbb{C}$. *Ce qui implique que le système* (3.4) *associé à la matrice* A *est stable.*

3.3 Méthode de Lyapunov

La méthode de Lyapunov est un outil important en automatique, permettant de déterminer la stabilité d'un point d'équilibre du système. Elle repose sur l'existence de fonction, vérifiant certains critères. Ces dernières représentent d'une certaine manière l'énergie du système (fonction de Lyapunov).

Définition 3.4 (Fonction propre) [14] *Soit*

$$V(x_k, k) : \mathbb{B}_r \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$$

une fonction continue. V *est dite propre définie positive si*

1) $\forall k \in \mathbb{B}_r, \forall x_k \in \mathbb{R}^n, x_k \neq 0 \quad : \quad V(x_k, k) > 0.$

2) $\forall k \in \mathbb{B}_r \quad : \quad V(x_k, k) = 0 \Rightarrow x_k = 0.$

3) $\forall k \in \mathbb{B}_r, \quad : \quad \lim_{\|x_k\| \to \infty} V(x_k, k) = \infty.$

Théorème 3.4 [14] *On dit que $x_e = 0$ est asymptotiquement stable s' il existe une fonction* V *propre définie positive et un voisinage $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de l'origine telle que*

$$\Delta \mathrm{V}(x_k, k) < 0, \quad \forall x \in \Omega \text{ et } x \neq 0,$$

avec $\Delta \mathrm{V}(x_k, k) = \mathrm{V}(x_{k+1}, k+1) - \mathrm{V}(x_k, k)$.

Exemple 3.3 *Le système décrit par l'équation*

$$x_{k+1} = 2x_k,$$

a un équilibre $x_e = 0$.

En effet, soit $\mathrm{V}(x_k) = x_k^2$. V est une fonction définie positive. Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta \mathrm{V}(x_k) &= \mathrm{V}(x_{k+1}) - \mathrm{V}(x_k), && (3.6)\\ &= 4x_k^2 - x_k^2, && (3.7)\\ &= 3x_k^2. && (3.8) \end{aligned}$$

Comme $\Delta \mathrm{V}(x_k) > 0$, alors, le système est instable.

Dans ce qui suit, la stabilité au sens de Lyapunov du système sans commande est étudiée.

Soit le système dynamique linéaire non commandé à temps discret

$$\begin{cases} x_{k+1} = \mathrm{A}x_k \\ x_{k_0} = x_0 \end{cases} \tag{3.9}$$

avec $x_k \in \mathbb{R}^n$ et A une matrice réelle de taille $n \times n$.

Théorème 3.5 [14] *Le système (3.9) est asymptotiquement stable à l'origine au sens de Lyapunov, si et seulement s'il existe deux matrices P et Q symétriques définies positives telle que l'égalité suivante*

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{PA} - \mathrm{P} + \mathrm{Q} = 0, \tag{3.10}$$

soit vérifiée.

Remarque 3.2 [8] *L'équation $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{PA} - \mathrm{P} = -\mathrm{Q}$ est dite équation de Stein.*

Preuve. En choisissant la fonction de Lyapunov $\mathrm{V}(x_k, k) = x_k^{\mathrm{T}}\mathrm{P}x_k$ avec $\mathrm{P} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}} > 0$, nous aurons

$$\begin{aligned} \Delta \mathrm{V}(x_k, k) &= \mathrm{V}(x_{k+1}, k+1) - \mathrm{V}(x_k, k)\\ &= x_{k+1}^{\mathrm{T}}\mathrm{P}x_{k+1} - x_k^{\mathrm{T}}\mathrm{P}x_k,\\ &= (\mathrm{A}x_k)^{\mathrm{T}}\mathrm{PA}x_k - x_k^{\mathrm{T}}\mathrm{P}x_k,\\ &= x_k^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{PA}x_k - x_k^{\mathrm{T}}\mathrm{P}x_k,\\ &= x_k^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{PA} - \mathrm{P})x_k. \end{aligned}$$

Le système (3.9) est asymptotiquement stable si $\Delta \mathrm{V}(k, x_k) < 0$. Ainsi,

$$\Delta \mathrm{V}(x_k, k) < 0 \Rightarrow \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{PA} - \mathrm{P} < 0. \tag{3.11}$$

D'où

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{PA} - \mathrm{P} = -\mathrm{Q} \quad \text{avec } \mathrm{Q} > 0.$$

■

Exemple 3.4 *Considérons le système* (3.9) *avec*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

En choisissant

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors,

$$\begin{aligned} A^T PA - P = -Q \quad &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 9P_{23} & \frac{3}{2}P_{22} \\ \frac{3}{2}P_{22} & \frac{1}{4}P_{11} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 9P_{23} - P_{11} & \frac{1}{2}P_{22} \\ \frac{1}{2}P_{22} & \frac{1}{4}P_{11} - P_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par identification, nous trouvons

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 9P_{23} - P_{11} & = & -1 \\ \frac{1}{2}P_{22} & = & 0 \\ \frac{1}{4}P_{11} - P_{23} & = & -1 \end{array} \right. .$$

ou encore

$$P = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme les valeurs propres de la matrice P *sont*

$$\sigma(P) = \{-1, -8\},$$

alors, la matrice P *n'est pas définie positive, ce qui implique que le système est instable.*

4 Stabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret commandés

Soit le système dynamique linéaire commandé à temps discret

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_k & = & Ax_k + Bu_k \\ x_{k_0} & = & x_0 \end{array} \right. \tag{3.12}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u_k \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande, A et B sont des matrices réelles de dimensions respectives $n \times n$ et $n \times m$.

Supposons que la commande u_k est une fonction linéaire de l'état, c'est-à-dire, le système est en boucle fermé par un retour d'état [11] du type

$$u_k = Fx_k,$$

où $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Ainsi, le système (3.12) en boucle fermé est donné par l'équation linéaire classique

$$x_{k+1} = (A + BF)x_k.$$

Théorème 3.6 [11] *Le système* (3.12) *est stabilisable s'il existe une matrice* F *telle que* $u_k = \mathrm{F}x_k$ *et si toutes les valeurs propres de la matrice* $(\mathrm{A}+\mathrm{BF})$ *soient dans le cercle unité.*

Remarque 3.3 *Les résultats de stabilité cités dans la section précédente pour la matrice* A *restent valable pour un système commandé pour la matrice* $\mathrm{A}+\mathrm{BF}$.

Exemple 3.5 *Considérons le système* (3.12) *avec*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1.2 & 0 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{F} = \begin{pmatrix} -0.95 & 0 \\ 2.2 & 0.3 \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Nous avons

$$\mathrm{A}+\mathrm{BF} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 1.5 & 0.65 \end{pmatrix},$$

alors,

$$\sigma(\mathrm{A}+\mathrm{BF}) = \{0.65, 0.25\}.$$

Comme les valeurs propres de la matrice $\mathrm{A}+\mathrm{BF}$ *sont inférieur à 1, alors, le système* (3.12) *associé aux matrices* (3.13) *est stable.*

5 Stabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret perturbés

Soit le système linéaire unidimensionnel à temps discret

$$\begin{cases} x_{k+1} &= (\mathrm{A}+\Theta)\,x_k \\ x_{k_0} &= x_0 \end{cases} \tag{3.14}$$

avec $x_k \in \mathbb{R}^n$ et A et Θ sont des matrices réelles de dimension $n \times n$.

En s'inspirant des résultats obtenus dans [27], nous aurons

Théorème 3.7 *Un point d'équilibre* $x_e = 0$ *du système* (3.14) *est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propre de la matrice* $(\mathrm{A}+\Theta)$ *sont à l'intérieur du cercle unité du plan complexe* (*c'est-à-dire, si* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *des valeurs propres de la matrice* $(\mathrm{A}+\Theta)$ *alors* $|\lambda_i| < 1, \forall i = 1, \cdots, n$).

Théorème 3.8 *Un point d'équilibre* $x_e = 0$ *du système* (3.14) *est instable s' il y a au moins une valeur propre à l'extérieur du cercle unité du plan complexe* (*c'est-à-dire, si* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *sont les valeurs propres de la matrice* $(\mathrm{A}+\Theta)$, *alors,* $\exists i = 1, \cdots, n : |\lambda_i| > 1$).

Exemple 3.6 *Soit le système* (3.14) *avec*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Theta = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.05 \\ 0.001 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Ainsi,

$$\mathrm{A}+\Theta = \begin{pmatrix} 0.52 & 0.05 \\ 0.001 & 0.25 \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Les valeurs propres de la matrice $(A+\Theta)$ *sont,*

$$\lambda_1 = 0.52 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 0.24.$$

Comme $|\lambda_i| < 1$ *pour* $i = 1,2$*. Alors, le système est stable.*
Changeons la matrice de perturbation, prenons par exemple

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.03 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Par suite,

$$\sigma(A+\Theta) = \{1.3, 0.7\}.$$

On remarque que pour $i = 1$: $|\lambda_i| > 1$*, ce qui implique que le système devient instable.*

Dans ce qui suit, nous testerons la stabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret perturbés par la méthode de Lyapunov. Pour cela, considérons le système

$$\begin{cases} x_{k+1} & = & (A+\Theta)x_k \\ x_{k_0} & = & x_0 \end{cases} \tag{3.18}$$

avec $x_k \in \mathbb{R}^n$ et A, $\Theta \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

L'extension du théorème 3.5 dans un cas perturbé est donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.9 *Le système* (3.18) *est asymptotiquement stable à l'origine au sens de Lyapunov si et seulement s'il existe deux matrices* P, Q *symétriques définies positives telle que l'égalité suivante*

$$(A+\Theta)^T P (A+\Theta) - P = -Q. \tag{3.19}$$

soit vérifiée.

Preuve. Choisissons la fonction de Lyapunov $V(x_k, k) = x_k^T P x_k$ avec $P = P^T > 0$.

Par le calcul de $\Delta V(x_k, k) = V(x_{k+1}, k+1) - V(x_k, k)$, nous aurons

$$\begin{aligned} \Delta V(x_k, k) &= V(x_{k+1}, k+1) - V(x_k, k), \\ &= x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k, \\ &= [(A+\Theta)x_k]^T P (A+\Theta) x_k - x_k^T P x_k, \\ &= x_k^T (A+\Theta)^T P (A+\Theta) x_k - x_k^T P x_k, \\ &= x_k^T [(A+\Theta)^T P (A+\Theta) - P] x_k. \end{aligned}$$

On sait que le système (3.18) est asymptotiquement stable si $\Delta V(k, x_k) < 0$. Ainsi,

$$\Delta V(x_k, k) < 0 \Rightarrow (A+\Theta)^T P (A+\Theta) - P < 0. \tag{3.20}$$

D'où, l'existence d'une matrice $Q > 0$ vérifiant

$$(A+\Theta)^T P (A+\Theta) - P = -Q.$$

■

Exemple 3.7 *Soit le système* (3.18) *avec*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \Theta = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

En choisissant

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$(A+\Theta)^T P(A+\Theta) - P = -Q \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par un simple calcul, nous trouvons

$$P = \begin{pmatrix} 1.5155 & 0.2118 \\ 0.2118 & 2.0531 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$\sigma(P) = \{1.44, 2.12\},$$

on en déduit que la matrice P *est définie positive. Cela implique que le système est stable.*

6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation des principaux résultats sur la stabilité des systèmes dynamiques linéaires standards à temps discret. Nous avons testé la stabilité de différents type de systèmes lesquelles sont système commandé, système non commandé et système perturbé. De plus, la stabilité de ces systèmes a été établie selon trois critères à savoir critére des valeurs propres, celui de Schur-Cohn et en dernier, le critère de Lyapunov.

Conclusion

Dans ce manuscrit on s'est intéressé, dans un premier temps, à l'étude de la solvabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps continu et discret par deux transformations différentes à savoir la transformée de Laplace et la transformée en Z qui sont largement utilisée, puis la transformée de Sumudu continue et discrète récemment découverte.

Toutefois, le principal objectif de ce mémoire est de testé la stabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret. La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour des points d'équilibre.

L'étude de la stabilité pratique joue un rôle très important en théorie du contrôle lorsque l'origine du système ne présente pas un point d'équilibre. Dans ce cas, l'objectif se ramène à l'étude de stabilité de toute une boule centrée en l'origine.

Analyser la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre. On s'est intéressé, plus particulièrement, dans ce mémoire à l'étude du problème de la stabilité et de la stabilisation d'un système dynamique linéaire discret non commandé, commandé et perturbé. Cette étude a été faite en utilisant trois différent tests, il s'agit de

- Les pôles de la matrice d'état.
- Le critère de Schur-Cohn.
- La méthode de Lyapunov.

Ce travail ouvre la voie à d'autres développements qui restent ouverts notamment en ce qui concerne la recherche de l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires avec retard à temps discret de la forme

$$\begin{cases} x_{k+1} &= Ax_k + A_d x(k-\tau(k)), \\ x_k &= \phi(k), \quad \forall k \in [0,m], \end{cases}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, A, $A_d \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $0 < \tau(k) < m$ est un entier positif représentant le retard borné variable avec $m > 0$ et $\phi(k)$ est une fonction d'initialisation réelle, définie sur l'intervalle $[-m, 0]$.

Bibliographie

[1] **Antsaklis, P. J., and Michel, A. N.**, (2007), *A Linear Systems Primer*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin. 3, 32

[2] **Arzelier, D.**, (2010), *Représentation et analyse des systèmes linéaires*, Notes de cours. version 5.2. LAAS-CNRS. France.

[3] **Aström, K. J.**, (1970), *Introduction to stochastic control theory*, Academic press. 1, 2, 1

[4] **Bachelier, O.**, (2017), *Cours d'Automatique : Représentations d'état linéaires des systèmes monovariables*, Université Poitiers, France. 3, 31

[5] **Belgacem, F. B. M., Karaball, A. A., and Kalla, S.**, (2003), *Analytical investigations of the sumudu transform and applications to integral production equations*, Problems in Engineering, Hindawi Publishing Corporation, **3**, 103–118. 13

[6] **Belgacem, F. B. M., and Karaballi, A. A.**, (2006), *Sumudu Transform Fundamental Properties Investigations And Applications*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, Hindawi Publishing Corporation, **2006**, Article ID 91083, 23 pages. https ://doi.org/10.1155/JAMSA/2006/91083. 2, 13, 14

[7] **Bonnet, S.**, (2008), *Approches numériques pour la commande des systèmes dynamiques*, Thèse de Doctorat de l'Université de Technologie Compiègne, France. 1

[8] **Bouagada, D.**, (2007), *Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs*. Thèse de Doctorat en Mathématiques, Université d'Oran, Algérie. 2, 6, 9, 11, 18, 20, 21, 22, 23, 25, 27, 33

[9] **Boukal, Y.**, (2017), *Observation et commande des systèmes dynamiques d'ordre non entier*. Thèse de Doctorat en Automatique, Traitement du signal et des images, Génie informatique, Université de Lorraine, France.

[10] **Cohen, A. M.**, (2007) *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*, Numerical Methods and Algorithms, **5**, Springer-Verlag US. 2, 6, 7

[11] **Da Silva, J. M. G.**, (1997), *Sur la stabilité locale de systèmes linéaires avec saturation des commandes*, Thèse de Doctorat en Automatique, Université Paul Sabatier, Toulouse III, France. 3, 34, 35

[12] **Désilles, A.**, (2003), *Introduction à la théorie des systèmes dynamiques à temps discret*, Présentation diapos. 2

[13] **Durand, J. F.**, (2002), *Éléments de Calcul Matriciel et d'Analyse Factorielle de Données*. Cours Licence MASS, Université de Montpellier II, France. 2, 4, 5

[14] **El Hachemi, F.**, (2012), *Analyse de stabilité des systèmes à commutations singulièrement perturbés*, Thèse de Doctorat en Automatique, Université de Lorraine, France. 3, 32, 33

[15] **Gantmacher, F. R.**, (2000), *The Theory of Matrices*, American Mathematical Society Chelsea Publishing, Rhode Island. 4, 5

[16] **Granjon, Y.**, (2010) *Automatique : Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu,à temps discret, représentation d'état*, Dunod, Paris. 6, 7, 20

[17] **Jarad, F., and Tas, K.**, (2012), *On Sumudu Transform Method in Discrete Fractional Calculus*, Abstract and Applied Analysis, Hindawi Publishing Corporation, **2012**, Article ID 270106, 16 pages. doi :10.1155/2012/270106. 2, 24

[18] **Jarad, F., Bayram, K., Abdejawad, T., and Baleanu, D.**, (2012), *On The Discrete Sumudu Transfrom*, Romanian Reports in Physics, **64(2)**, 347–356. 24

[19] **Kaczorek, T.**, (2002), *Positive 1D and 2D systems*, Communications and Control Engineering, Springer-Verlag London Ltd. 9, 11, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 27

[20] **Kaczorek, T., and Rogowski, K.**, (2015), *Fractional Linear Systems and Electrical Circuits*, Studies in Systems, Decision and Control, **13**, Springer International Publishing, Switzerland. 8, 11, 14

[21] **Kaisserli. Z., and Bouagada, D.**, (2019) *Solution of State-Space Singular Continuous-Time Fractional Linear Systems using Sumudu Transform*, à paraitre dans Lobachevskii Journal of Mathematics. 16

[22] **Kiliçman, A., Eltayeb, N., and Atan, R. A. M.**, (2011), *A note on the comparison between Laplace and Sumudu transforms*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, **37**, 131–141. 17

[23] **Lang, F.**, (2011), *Transformation de Laplace*, Haute École d'Ingénierie et de gestion du Canton de Vaud.

[24] **Lathi, B. P.**, (2004), *Linear Systems and Signals*, Oxford Series in Electrical and Computer Engineering, Oxford University Press, USA. 6
19, 20

[25] **Lewis, F. L., and Mertzios, B. G.**, (1990), *On the analysis of discrete linear time-invariant singular systems*, IEEE, Transaction on Automatic Control, **35(4)**, 506–511. 8, 11, 14

[26] **Mertzios, B. G., and Lewis, F. L.**, (1989), *Fundamental matrix of discrete singular systems*, Circuits, Systems, Signal Processing, **8(3)**, 341–355. 8, 11, 14, 25, 27

[27] **Petit, P., and Rouchon, P.**, (2013), *Automatique Dynamique et contrôle des systèmes*, Cours présenté à MINES ParisTech, CAS, Unité Mathématiques et Systèmes, France. 31, 35

[28] **Podlubny, I.**, (1998), *Fractional Differential Equations*, **198**, Academic Press, New York. 5, 6

[29] **Trélat, E.**, *Contrôle optimal : théorie et applications*, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Institut Universitaire de France. 1

[30] **Vashi, J., and Timol, M. G.**, (2016), *Laplace and Sumudu transforms and their application*, International Journal of Innovation Science, Engineering & Technology, **3(8)**, 538–542. 17

[31] **Watugala, G. K.**, (1993), *Sumudu transform : a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **24**, 35–43. 2, 13

[32] **Yosida, K.**, (1980), *Functional Analysis*, Sixth Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 19

[33] **Zemouche, A.**, (2007), *Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires*, Thèse de Doctorat en Automatique, Université Louis Pasteur, Strasbourg I, France. 30

Problèmes de stabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret

Résumé : Ce manuscrit a pour but l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps discret. Cette propriété est très intimement liée à l'état et à la trajectoire d'état et de point d'équilibre d'un système dynamique.

C'est pour cette raison que nous traitons dans la première partie de ce mémoire la solvabilité des systèmes dynamiques à temps discret par deux méthodes, la première méthode est la transformation en Z tandis que la deuxième est la transformation de Sumudu discrète récemment découverte.

Ensuite, nous nous intéressons à l'étude du problème de la stabilité et de la stabilisation des systèmes dynamiques linéaires à temps discret commandé, non commandé et perturbé vu que la stabilité est une propriété intéréssante et permet d'étudier l'évolution de la trajectoire d'état lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre.

L'analyse de la stabilité est faite par le test des valeurs propres, le critère Schur-Chon et en dernier la méthode de Lyapunov en utilisant des résultats existant et d'autres que nous développons.

Mots-Clés. Système dynamique linéaire à temps discret, Solvabilité, Transformée en Z, Transformée de Sumudu discrète, Stabilité, Stabilisation, Méthode de Lyapunov, Critère de Schur-Cohn.

Stability problems of discrete time linear dynamical systems

Abstract : The main purpose of this manuscript is the study of the stability of discrete time linear dynamical systems. This property is very closely related to the state and to its trajectory and equilibrium point of a dynamic system.

For this reason, in the first part of this work, we establish the solvability of such systems using two methods. The first one is the Z transform widely known and used and the second one is the discrete Sumudu transform recently investigated.

Then, we will focus on the problem of the stability and the stabilization of three types of discrete time linear dynamical systems which are controlled, uncontrolled and perturbed since the stability plays an important role and it is used in the study of the evolution of the state and its trajectory when the initial state is close to an equilibrium point.

The stability of these discrete time linear dynamical systems is done using existing results as for example the eigenvalues test, the Schur-Cohn criterion, and Lyapunov method, and others that we develop.

Key Words. Discrete time linear dynamical system, Solvability, Z transform, Discrete Sumudu Transform, Stability, Stabilization, Lyapunov method, Schur-Cohn Criterion.