MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Nisrine MILIANI

Résolution des systèmes linéaires fractionnaires : Une étude comparative

soutenu publiquement le 26 *Juin* 2019 *devant le jury composé de :*

Président :	Djillali BOUAGADA	Professeur	UMAB
Examinateur :	Mohammed Amine GHEZZAR	MCB	UMAB
Encadreuse :	Zineb KAISSERLI	MCB	UMAB

Année Universitaire : 2018 / 2019

MASTER

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Mes parents

Mes frères et mes sœurs

Toute ma famille

Mes amies

Remerciements

Avant tout, mes remerciements vont à mon dieu ALLAH le tout puissant de m'avoir aider à réaliser ce travail et de m'avoir donner le courage, la patience et la santé durant toutes ces longues années d'étude afin que je puisse arriver à ce niveau.

Je remercie mes très chers parents, qui ont toujours été là pour moi, « vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier ».

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreuse de mémoire Mademoiselle Zineb Kaisserli. Je la remercie de m'avoir encadrer, orienter, aider et conseiller.

Je tiens à remercier Monsieur Djillali Bouagada pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance, ainsi que Monsieur Mohammed Amine Ghezzar pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'examiner mon mémoire.

Je remercie, aussi, mes frères et mes sœurs pour leurs encouragement.

En dernier je tiens à remercier mes collèges pour leur soutien inconditionnel et leur encouragement.

Table des matières

Table des figures

Index des notations

$\mathbb{N}$	:	Corps des nombres entiers.
$\mathbb{Z}$	:	Corps des nombres relatifs.
$\mathbb{R}$	:	Corps des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	:	Corps des nombres réels non-négatives.
$\mathbb{R}_+^*$	:	Corps des nombres réels strictement positifs.
$\mathbb{C}$	:	Corps des nombres complexes.
$\mathbb{R}^{m\times n}$	:	Espaces des matrices réelles de dimension $m \times n$.
$\mathbb{R}^n$	:	Espaces des vecteurs à n entiers réelles.
$\mathscr{C}^n$	:	Espace des fonctions n fois continument différentiable.
t	:	Variable réelle.
s	:	Variable complexe.
v	:	Variable complexe.
$\mathrm{R}e(s)$	:	Partie réelle de s.
α	:	Nombre réel positif non nul.
$\mathbf{D}^{\alpha}_{\mathrm{G-L}}$	:	Dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Grunwald-Letnikov.
$\mathbf{D}^{\alpha}_{\mathrm{R-L}}$	:	Dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann Liouville.
$\mathbf{D}^{\alpha}_{c}$	:	Dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo.
ϕ_i	:	Matrices fondamentales.
μ	:	Indice de nilpotence.
δ	:	Impulsion de Dirac.
$\mathit{\Gamma}$	:	Fonction Gamma d'Euler.
x	:	Vecteur d'état.
u	:	Vecteur d'entrée.
y	:	Vecteur de sortie.
$\mathscr{L}$	:	Transformation de Laplace.
$\mathscr{S}$	:	Transformation de Sumudu.
$\mathscr{N}$	:	Transformation Naturelle.

Introduction

Le calcul fractionnaire a pour but de généraliser les dérivées d'ordre entier (classique) à un ordre non-entier vu que dans notre vie actuelle la modélisation de plusieurs phénomènes et dans diverses domaine de la science et de l'ingénierie comme par exemple la mécanique et l'électronique des matériaux réels [1, 2, 6, 7, 11, 13, 14, 15, 24, 27, 28] se réalise à l'aide des dérivées d'ordre fractionnaires [8, 25, 26].

Ainsi, les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire, qui sont des systèmes dynamiques linéaires représentés par des équations différentielles linéaires dont l'ordre de leur dérivées sont des nombres réels, ont reçu une grande attention grâce à leur plus large flexibilité par rapport aux systèmes entiers pour modeler plus correctement des systèmes de plus en plus complexes [2, 11, 14, 23, 27]. Les opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire ont été étudié marginalement dans la théorie et la pratique des systèmes [7, 13, 15, 24, 28].

Plus récemment, il y a eu un progrès significatif de travaux consacrés aux équations différentielles fractionnaires, y compris le développement de méthodes et de techniques efficaces pour les résoudre [2, 6, 14, 17, 18]. Parmi les techniques et les méthodes, on y trouve l'apparition de plusieurs transformation dans la littératures comme par exemple la transformée de Laplace, la transformée de Sumudu, la transformée Naturelle, la transformée de Millen [3, 4, 9, 10, 13, 20, 30, 32].

L'objectif principal de ce travail porte essentiellement sur la résolution des systèmes dynamiques linéaires fractionnaires par trois transformations différentes et de faire, ensuite, une analyse comparative entre les trois transformations afin de détecter la méthode la plus efficace et la plus flexible pour la résolution et son utilisation.

Ce manuscrit, qui traite une étude théorique suivie par des applications numériques, est composé de 5 chapitre.

- Le premier chapitre est consacré aux définitions et aux notions générales dont on aura besion le long de ce travail. Nous rappelons, dans un premier temps, les notions essentielles de la théorie des matrice ainsi que les différentes dérivées fractionnaires existantes. Ensuite, la définition des systèmes dynamiques ainsi que leur applications dans les différents domaines sont présentées.
- Dans le deuxième chapitre, la première transformation laquelle est la transformation de Laplace est présentée. Cette dernière nous permet de résoudre notre système dynamique linéaire fractionnaire. Nous commencerons par donner les principales définitions et théorèmes de la transformation de Laplace. Ensuite, des résultats sur cette transformation et calcul fractionnaire sont donnés. En dernier la solvabilité des différents types de systèmes dynamiques linéaires fractionnaires est établie en utilisant cette transformée.
- Quant au troisième chapitre, une transformation récemment découverte est exposée. Nous présenterons les principaux résultats dans le cas classique et fractionnaire de cette transformation, dite transformée de Sumudu. Ensuite, une adaptation de certains résultats de la théorie des matrices est faite. En dernier, la résolution des

systèmes dynamiques linéaires fractionnaires est établie.
- Le quatrième chapitre est consacré à une nouvelle transformation connue sous le nom la transformée Naturelle. Nous présenterons certaines définitions et propriétés de cette transformation. Ensuite, l'extension de la transformation Naturelle dans le cas fractionnaire est élaborée suivie par l'expression de la solution des systèmes dynamiques linéaires fractionnaires.
- Des exemples numériques à la fois académiques et réelles des systèmes dynamiques linéaires fractionnaires sont présentés dans ce cinquième et dernier chapitre suivie par leurs solutions en utilisant les différentes approches présentées précédemment. Une étude comparative est faite sur les différentes propriétés des trois transformations Laplace, Sumudu et Naturelle tout en soulignant la transformation la plus efficace.

Une conclusion regroupe les contributions de ce travail ainsi que des perspectives pour nos futurs travaux. Les différents ouvrages et articles utilisés pour la réalisation de ce travail sont présentés dans la bibliographie qui clôture ce manuscrit.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1 Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter les outils de base de la théorie des matrices et du calcul fractionnaire. Les principales définitions et propriétés de dérivation fractionnaire, la compréhension entre des définitions et l'utilisation du calcul fractionnaire, sera plus claire en introduisant quelques notions particulières sur les systèmes dynamiques ainsi que leurs applications.

2 Rappels de quelques notions sur la théorie des matrices et les fonctions spéciales

Dans cette section nous présenterons la définition de la fonction Gamma ainsi que ses propriétés. Aussi, nous rappellerons quelques notions de la théorie des matrices.

2.1 Fonctions spéciales

Définition 1.1 (Fonction Gamma d'Euler) [15] *Pour tout nombre complexe z tel que* $\mathrm{Re}(z) > 0$*, on définit la fonction suivante, appelée fonction Gamma, et notée par* Γ

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \tag{1.1}$$

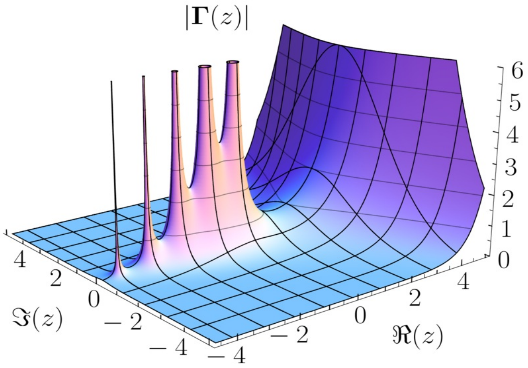

FIGURE 1.1 – Tracé du module de la fonction Gamma d'Euler dans le plan complexe.[15]

La fonction Gamma est exprimée par une intégrale impropre, elle converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

Pour des valeurs réelles positives de z, la fonction Gamma est représenté par la figure 1.2.

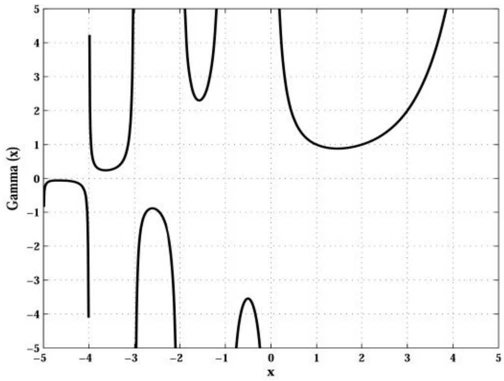

FIGURE 1.2 – Tracé de la fonction Gamma d'Euler dans le plan réel.[15]

La figure 1.2 montre le tracé de la fonction Gamma d'Euler autour de zéro. On note que pour des valeurs entières négatives, la fonction Gamma tend vers l'infinie, cependant, elle est définie pour des valeurs non entières [15].

Exemple 1.1 *Pour des valeurs non entières $z > 0$, $\Gamma(z)$ vérifie la relation*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

En effet, une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^z dt \\ &= [-e^{-t}t^z]_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \\ &= 0 + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \\ &= z\Gamma(z).\end{aligned}$$

Proposition 1.1 *La fonction Γ vérifiée les propriétés suivantes*

1. $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Définition 1.2 (Fonction d'ordre exponentiel) [15] *On dit que la fonction x est d'ordre exponentiel, s'il existe $\mathrm{M} > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que*

$$|x(t)| \leq \mathrm{M}e^{\alpha t}. \tag{1.2}$$

2.2 Définitions fondamentales de la théorie des matrices

Définition 1.3 [12] *Une matrice A de taille $p \times m$ est un tableau de nombres réels ou complexes à p lignes et m colonnes avec $p, m \in \mathbb{N}^*$.*

On note $a_{i,j}$ l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j avec $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq m$.

Exemple 1.2 *Soit la matrice*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

A *est une matrice à valeurs réelles de taille* 2×3.

Définition 1.4 (Inverse d'une matrice) [12] *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* p. A *est inversible s'il existe une matrice* B *d'ordre* p *telle que*

$$\mathrm{A\,B} = \mathrm{I}_p = \mathrm{B\,A}.$$

La matrice B*, inverse de* A*, est notée* A^{-1}.

Exemple 1.3 *Soit la matrice*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Son inverse est la matrice

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Définition 1.5 (Déterminant d'une matrice) [12] *Soit* $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq p} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ *une matrice carrée de taille. On définit son déterminant, noté* $\det(\mathrm{A})$*, par*

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\mathrm{A}_{1j})$$

où les matrices A_{ij} *sont des matrices carrées de taille* $p-1$.

Exemple 1.4 *Soit une matrice* A

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\det(\mathrm{A}) = -9$.

Remarque 1.1 [12] *Pour que l'inverse d'une matrice* A *existe, il faut et il suffit que, son déterminant soit non nul.*

Définition 1.6 (Indépendance linéaire) [12] *Soient* $a_i \in \mathbb{R}^p$, $n \in \mathbb{N}^*$, *des lignes (ou des colonnes) de la matrice* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{p\times p}$, *les vecteurs* a_i *sont linéairement indépendant si seulement s'il existe* $\alpha_i \in \mathbb{C}$ *tel que*

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \quad \text{pour tout} \quad i = 1, \cdots, p.$$

Définition 1.7 (Rang d'une matrice) [12] *Le rang d'une matrice* A *est le nombre de lignes ou de colonnes linéairement indépendant. On le note* rg A.

Exemple 1.5 *Soit la matrice* A

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{rg}\mathrm{A} = 2$.

3 Notions sur les dérivées d'ordre fractionnaires

La définition des différents types des dérivées d'ordre fractionnaires ainsi que la relation entre eux sont présentées dans cette section. Nous rappellerons, également, certains propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaires.

3.1 Définitions

Définition 1.8 (Dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov) [14] *Soient* $\alpha > 0$ *et* x *une fonction continue sur un intervalle fini* $[a, b]$. *La dérivée fractionnaire au sens de G-L de la fonction* x *est définie par*

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{\alpha}_{\mathrm{G-L}} x(t) &= \lim_{h\to 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x(t-kh) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(k-\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha} x^{(n+1)}(s)\,ds,
\end{aligned}$$

où

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

La formule est obtenue sous l'hypothèse les dérivées $x^{(k)}$ *pour* $k = 1, \cdots, n+1$ *sont continue dans l'intervalle fermé* $[a, b]$ *et que* n *est un nombre entier vérifiant la condition* $n > \alpha - 1$, *la plus petite valeur pour* n *est déterminée par l'inégalité* $n < \alpha < n+1$.

Définition 1.9 (Dérivée fractionnaire au sens de Riemann Liouville) [8] *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann Liouville d'ordre* α *avec* $n-1 < \alpha \leq n$, *où* $n \in \mathbb{N}^*$, *de la fonction continue* x *est donnée par*

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{\mathrm{R-L}} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x(\tau)\,d\tau. \tag{1.3}$$

Définition 1.10 (Dérivée fractionnaire au sens de Caputo) [8] *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre* α, $n-1 < \alpha \leq n$ *où* $n \in \mathbb{N}^*$, *de la fonction* $x \in \mathscr{C}^{(n)}([a, b])$ *est donnée par*

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{c} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{x^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}\,d\tau, \tag{1.4}$$

où $x^{(n)}$ *représente la dérivée d'ordre* n *de la fonction* x.

Remarque 1.2 [8] *De la définition 1.10, il s'ensuit que la dérivée au sens de Caputo d'une constante est égal à zéro ce qui coïncide avec la dérivée classique.*

3.2 Quelques propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaires

Les propriétés les plus importantes de la différentiation et d'intégration fractionnaire sont données comme suit [8]

- Si la fonction x est une fonction analytique de t. Alors, sa dérivée d'ordre fractionnaire $\mathbf{D}^{\alpha} x$ est une fonction analytique de t et α.

- Lorsque $\alpha = n$ où n est un nombre entier, alors, l'opérateur $\mathbf{D}^{\alpha}x$ donne le même résultat que la différentiation ou l'intégration d'ordre classique.
- La différentiation d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires.

$$\mathbf{D}^{\alpha}[\lambda x(t) + \mu y(t)] = \lambda \mathbf{D}^{\alpha} x(t) + \mu \mathbf{D}^{\alpha} y(t),$$

tel que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3.3 Relation entre les dérivées fractionnaires au sens de Riemann Liouville et au sens de Grunwald-Letnikov

On a

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{\mathrm{R-L}}\, x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x(\tau) d\tau.$$

Si on passe par les intégrations par parties et des différentiations répétées on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\alpha}_{\mathrm{R-L}}\, x(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x^{(n+1)}(\tau) d\tau, && (1.5) \\ &= \mathbf{D}^{\alpha}_{\mathrm{G-L}}\, x(t) && (1.6) \end{aligned}$$

D'après (1.5) on remarque qu'il y'a une équivalence entre la dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

3.4 Relation entre les dérivées fractionnaires au sens de Riemann Liouville et au sens de Caputo

Théorème 1.1 [14] *Soit $n-1 < \alpha \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathscr{C}^n([a,b])$. Alors,*

$$\mathbf{D}^{\alpha} x(t) = \mathbf{D}^{\alpha}_{\mathrm{R-L}}[x(t) - \mathrm{T}_{n-1}(t)_a]$$

avec $\mathbf{D}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et

$$\mathrm{T}_{n-1}(t)_a = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^i}{i!} x^{(i)}(a).$$

L'avantage principal de la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo par rapport à celle de Riemann Liouville est celle au sens de Caputo permet de considérer des conditions initiales conventionnelles faciles à utiliser dans la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire. De plus que, la dérivée fractionnaire au ses de Riemann Liouville d'une constante n'est pas bornée en $t = 0$. Pour ces raisons, dans la suite, nous utiliserons la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

4 Généralitées sur les systèmes dynamiques

Tous les phénomènes autour de nous sont des systèmes dynamiques. Certains de ces systèmes sont régis par des lois physiques et mathématiques que les scientifiques ont tenté ou tentent de comprendre et d'analyser .

Pour cela, les chercheurs ont fait recours à des modélisations de ces systèmes et d'en prévoir leurs comportement futurs.

Définition 1.11 (Système dynamique) [7] *Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps t d'un ensemble d'objets en interaction.*

De multiples applications des systèmes dynamiques voient le jour dans de nombreux domaines, comme par exemple [23]

⋆ **Biologie et médecine** : dynamique des cellules vivantes.
⋆ **Éthologie et écologie** : recherche d'un équilibre entre proies et prédateurs.
⋆ **Mécanique rationnelle ou quantique** : pendules, phénomènes oscillatoires.
⋆ **Sociologie** : évolution d'une population.

Ces systèmes dynamiques peuvent être représentés par divers formalismes [7]

- Équations différentielles ordinaires.
- Équations aux dérivées partielles.
- Équations différentielles à retard.
- Équations différentielles stochastiques.
- $\cdots$.

Et donc un système dynamique peut être défini de manière formalisée par la donnée [24]

- D'un ensemble E dit espace des phases (ou des états) : espace d'Hilbert, espace de Banach, variété différentielle, $\cdots$.
- D'un vecteur x de E, objet de l'étude caractérisant l'état du système à l'instant t.
- D'une équation différentielle appelée équation d'évolution définie par $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$.
  Si la fonction f est linéaire alors l'équation peut s'écrire sous la forme $\dfrac{dx}{dt} = \mathrm{A}x$ et donc l'ensemble des trajectoires solutions $t \longmapsto x(t)$ seront de la forme $x(t) = e^{\mathrm{A}t}x_0$ avec $x_0 = x(t_0)$ est la condition initiale.

Deux types de systèmes dynamiques peuvent se distinguer [24]

+ Systèmes dynamiques à temps discret.
+ Systèmes dynamiques à temps continu.

Définition 1.12 (Systèmes dynamiques à temps discret) [23] *Un système dynamique à temps discret est un système dynamique où la loi appliquée est à temps discret, i. e. ; les variables du système ne peuvent avoir qu'un nombre fini de valeurs, autrement dit, l'ensemble de définition est dénombrable.*

Exemple 1.6 [2] *Un exemple est fourni par un modèle de la croissance c d'une population animale p_i. Cette loi de croissance s'écrit*

$$p_{n+1} = cp_n. \tag{1.7}$$

L'équation ci-dessus donne

$$p_n = c^n p_0, \tag{1.8}$$

où p_0 désigne la population initiale.

Définition 1.13 (Systèmes dynamiques à temps continu) [2] *Les systèmes dynamiques à temps continu représentent la limite des systèmes discrets où l'évolution se fait à des intervalles de temps de plus en plus brefs. Dans ce cas, la loi devient une équation différentielle.*

Exemple 1.7 [2] *L'équation*

$$\frac{dp}{dt} = cp, \tag{1.9}$$

peut être vue comme une limite continue de l'équation (1.7). *Pour* $c > 0$, *elle décrit aussi un modèle simple de croissance d'une population. Quand la population est petite la solution est bien connue*

$$p(t) = p_0 e^{ct}.$$

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques notions sur les fonctions spéciales et la théorie des matrices. Les différentes définitions de la dérivée fractionnaire avec leur propriétés sont, également, présentées suivie par des généralités sur les différents types de systèmes dynamiques.

Chapitre 2

Transformée de Laplace

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons introduire la première transformation qui nous permet de résoudre un système linéaire fractionnaire, il s'agit de la transformation de Laplace. La transformée de Laplace est la méthode la plus classique et est largement utilisée dans plusieurs domaines. Nous commencerons par rappeler quelques définitions et théorèmes sur cette transformation. Ensuite la transformée de Laplace dans le cas fractionnaire nous présenterons. En dernier, la solvabilité des systèmes linéaires fractionnaires à la fois standards et singuliers nous traiterons.

2 Définitions et théorèmes

Dans cette section, la transformée de Laplace directe et inverse ainsi que leurs propriétés sont rappelées.

2.1 Transformée de Laplace directe

Définition 2.1 (Transformée de Laplace directe) [14] *La transformée de Laplace* X *d'une fonction réelle continue* x *sur* $[0,\infty[$, *notée par* $\mathscr{L}$, *est donnée par*

$$\mathrm{X}(s) = \mathscr{L}[x(t)](s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt, \tag{2.1}$$

où s *est la variable complexe.*

Avant d'illustrer certaines propriétés importantes de la transformée de Laplace, nous ferons quelques commentaires :

1. L'intégrale donnée par la définition 2.1 est impropre, ainsi, il est nécessaire de voir les conditions de sa convergence.
2. La transformée de Laplace est unilatérale, autrement dit, la fonction X ne tient compte que du comportement de la fonction x pour des valeurs positives de t vu que la borne inférieure de l'intégrale donnée par la définition 2.1 est nulle.
3. De plus, la fonction x est d'ordre exponentiel (formule 1.2).

Pour répondre aux commentaires précédents, nous présentons quelques résultats essentiels.

Sous les conditions des commentaires précédentes, il est simple (par une majoration) de vérifier que $\int_0^{\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ converge pour tout s vérifiant $\mathrm{Re}(s) > \beta$. Ceci prouve l'existence de la transformée de Laplace de x. Ainsi, nous admettons les théorèmes suivants.

Théorème 2.1 [14] *Soit $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors, il existe un unique $\beta \in \mathbb{R}$ tel que*

a) $\mathrm{Re}(s) > \beta \Rightarrow \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$ *converge absolument.*

b) $\mathrm{Re}(s) < \beta \Rightarrow \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$ *diverge.*

β *est appelé abscisse de la convergence simple.*

Théorème 2.2 [14] *Soit $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction. $\mathscr{L}[x] = \mathrm{X}$ est une intégrale généralisée bien définie si*

1. *x est une fonction continue par morceaux.*
2. *x est une fonction d'ordre exponentiel.*
3. $\exists\beta$ *avec* $0 < \beta < 1$ *tel que* $\lim t^{\beta}|x(t)| \to 0$ *quand* $t \to 0$.

Exemple 2.1 *Considérons la fonction suivante*

$$x(t) = \begin{cases} a & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Calculons sa transformée de Laplace. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[x(t)](s) &= \int_0^{+\infty} ae^{-st}dt, \\ &= a\int_0^{+\infty} e^{-st}dt, \\ &= -\frac{a}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}, \\ &= -\frac{a}{s}e^{-tx}e^{-ity}\Big|_0^{\infty}, \\ &= \frac{a}{s}. \end{aligned}$$

La transformation de Laplace de la fonction x existe puisque $e^{-st} = e^{-tx}e^{-ity}$ et $|e^{-ity}| = 1$. Ainsi, la convergence de l'intégrale dépend de $\mathrm{Re}(s)$ seulement lequel est strictement positive.

Remarque 2.1 [20] *La définition 2.1 peut être étendue aux cas des fonctions continues par morceaux $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$. C'est-à-dire, sur chaque intervalle fini de la forme $[a, b] \in \mathbb{R}_+$, $a < b$, les discontinuités de x, lorsqu'elles existent, sont en nombre fini et sont du première espèce.*

2.2 Transformée de Laplace inverse

Définition 2.2 (Transformée de Laplace inverse) [14] *La transformée de Laplace inverse x de la fonction X, notée par $\mathscr{L}^{-1}$, est donnée par*

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[\mathrm{X}(s)](t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-st}\mathrm{X}(s)\,ds, \quad c = \mathrm{Re}(s) > c_0, \tag{2.2}$$

où c_0 réside dans le demi plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace.

Exemple 2.2 *Considérons la fonction* X *définie par*

$$X(s) = \frac{a}{s}.$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse (formule (2.2)), *nous obtenons*

$$x(t) = \begin{cases} a & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2.3 Quelques propriétés de la transformée de Laplace [29]

1. **Linéarité :** Soient f et g deux fonctions dans $\mathscr{C}([0,\infty[)$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\mathscr{L}\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right](s) = \alpha \mathscr{L}\left[f(t)\right](s) + \beta \mathscr{L}\left[g(t)\right](s).$$

   La linéarité de la transformation de Laplace découle des propriétés de l'intégrale.

2. **Dérivation :** Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^n([0,\infty[)$. Nous avons,

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right](s) = s^n \mathrm{F}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(t)\Big|_{t=0},$$

   où, $\mathrm{F}(s) = \mathscr{L}[f(t)](s)$ est la transformée de Laplace de f et $f^{(k)}(t)\Big|_{t=0}$ représente la dérivée d'ordre k de la fonction f au point $t = 0$.

3. **Produit de convolution :** Pour toutes fonctions f et g dans $\mathscr{C}([0,+\infty[)$, la transformation de Laplace du produit de convolution entre f et g

$$\left(f \star g\right)(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau,$$

   est donnée par

$$\mathscr{L}\left[\left(f \star g\right)(t)\right](s) = \mathrm{F}(s)\,\mathrm{G}(s),$$

   où

$$\mathrm{F}(s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s) \quad et \quad \mathrm{G}(s) = \mathscr{L}\left[g(t)\right](s).$$

4. **Impulsion de Dirac :** La transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac est

$$\mathscr{L}\left[\delta(t)\right](s) = 1.$$

3 Transformée de Laplace fractionnaire

Dans cette section, quelques résultats sur la transformation de Laplace fractionnaire sont présentés. Ces résultats seront utilisés dans les sections qui suivent.

3.1 Définitions

Définition 2.3 [14] *Soit x une fonction continue, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est donnée par*

$$\mathscr{L}\left[\mathbf{D}^{\alpha}_{\mathrm{R-L}} x(t)\right](s) = s^{\alpha} \mathrm{X}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k\, \mathbf{D}^{\alpha-k-1}_{\mathrm{R-L}} x(t)\Big|_{t=0}, \tag{2.3}$$

où $n-1 < \alpha \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, X représente la transformée de Laplace de x et $t = 0$ est le point initial.

Définition 2.4 [14] *La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $x \in \mathscr{C}^n$ est donnée par*

$$\mathscr{L}\left[\mathbf{D}_c^{\alpha} x(t)\right](s) = s^{\alpha}\mathrm{X}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}, \tag{2.4}$$

où $n-1<\alpha\leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, X représente la transformée de Laplace de x et $x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}$ est la dérivée d'ordre k de la fonction x au point $t=0$.

3.2 Quelques propriétés de la transformée de Laplace fractionnaire [6]

Soient $t \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n-1<\alpha\leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $u : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue d'ordre exponentiel tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = 0$. Alors, nous avons les propriétés suivantes

- $\mathscr{L}\left[\dfrac{t^a}{\Gamma(a+1)}\right](s) = s^{-(a+1)}$, où Γ représente la fonction Gamma.
- $\mathscr{L}\left[\mathbf{D}_c^{\alpha} u(t)\right](s) = s^{\alpha}\mathrm{U}(s)$, où U représente la transformée de Laplace de u.
- $\mathscr{L}\left[\mathbf{D}_c^{\alpha} \delta(t)\right](s) = s^{\alpha}$, où δ représente l'impulsion de Dirac.

4 Solvabilité des systèmes linéaires dynamiques fractionnaires standards

Cette section a pour but de présenter la solvabilité des systèmes linéaires dynamiques fractionnaires standards en utilisant la transformation de Laplace.

4.1 Notions préliminaires

Définition 2.5 (Système dynamique linéaire fractionnaire standard) [13] *Un système dynamique linéaire fractionnaire standard à temps continu est décrit par les équations suivantes*

$$\mathbf{D}_c^{\alpha} x(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t), \tag{2.5}$$

$$y(t) = \mathrm{C}x(t) + \mathrm{D}u(t), \tag{2.6}$$

où $\mathbf{D}_c^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x avec $n-1<\alpha\leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{q\times q}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{q\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

La condition initiale associée au système (2.5) est

$$x(0) = x_0.$$

Définition 2.6 (Système dynamique linéaire fractionnaire standard régulier) [6] *Le système (2.5) est dit régulier si*

$$\det(s^{\alpha}\mathrm{I} - \mathrm{A}) \neq 0, \tag{2.7}$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

Proposition 2.1 [14] *Soit* $A \in \mathbb{R}^{q\times q}$. *Alors, pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *et* $n-1 < \alpha \leq n$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$, *la série de Laurent au voisinage de* ∞ *est donnée par*

$$(s^{\alpha}I - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i s^{-(i+1)\alpha}. \tag{2.8}$$

4.2 Résultats

Considérons le système dynamique linéaire standard d'ordre fractionnaire à temps continu

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_c^{\alpha} x(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad (2.9) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \quad (2.10) \end{aligned}$$

où $\mathbf{D}_c^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x avec $n-1 < \alpha \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^q$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie et A, B, C et D sont des matrices de dimensions appropriées.

La condition initiale associée au système (2.9) est

$$x(0) = x_0.$$

De plus, la solution x du système (2.9) est sans impulsion, ce qui est équivalent aux conditions de compatibilités suivantes [13]

- $A^i s^{-(i\alpha+k+1)} x^{(k)}(0)$ existe pour tout $s \in [0, +\infty[$, $i \in \mathbb{N}$, $n-1 < \alpha \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n-1$.
- u est donnée.

Par ailleurs, nous supposons que le faisceau du couple (I, A) est régulier, i. e. ;

$$\det(s^{\alpha}I - A) \neq 0,$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

Ainsi, la trajectoire du système (2.9) par la transformée de Laplace est décrite par le théorème suivant.

Théorème 2.3 [6] *Le système dynamique linéaire fractionnaire standard* (2.9) *admet comme solution*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i B}{\Gamma((i+1)\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(i+1)\alpha-1} u(\tau)\, d\tau + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} A^i \frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)} x^{(k)}(t)\bigg|_{t=0}, \tag{2.11}$$

où Γ *représente fonction Gamma.*

Preuve. Par application de la transformation de Laplace à l'équation (2.9), nous trouvons

$$\mathbf{D}_c^{\alpha} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \Rightarrow \mathscr{L}\left[\mathbf{D}_c^{\alpha} x(t)\right](s) = A\mathscr{L}\left[x(t)\right](s) + B\mathscr{L}\left[u(t)\right](s).$$

En utilisant la formule (2.4) et sachant que X et U sont les transformées de Laplace de x et u respectivement, nous obtenons

$$s^{\alpha}X(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} x^{(k)}(t)\bigg|_{t=0} = AX(s) + BU(s),$$

laquelle peut aussi s'écrire sous la forme

$$(s^\alpha I - A)X(s) = BU(s) + \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}. \tag{2.12}$$

Comme le faisceau du couple (I, A) est régulier. Alors, l'équation (2.12) devient

$$X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1} BU(s) + (s^\alpha I - A)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}. \tag{2.13}$$

D'après la définition de la série de Laurent (2.8), nous trouvons

$$X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} A^i B s^{-(i+1)\alpha} U(s) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} A^i s^{-(i\alpha+k+1)} x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}.$$

En utilisant les propriétés de la transformée de Laplace directe et inverse, il découle

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i B}{\Gamma((i+1)\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(i+1)\alpha-1} u(\tau) d\tau + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} A^i \frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)} x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}. \tag{2.14}$$

■

Pour $\alpha = 1$, le même résultat présenté dans [5] est obtenu.

Proposition 2.2 *Pour $\alpha = 1$, le système dynamique linéaire standard (2.9) admet comme trajectoire*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i B}{\Gamma(i+1)} \int_0^t (t-\tau)^i u(\tau)\, d\tau + \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^i}{\Gamma(i+1)} x_0,$$

où Γ représente la fonction Gamma.

5 Solvabilité des systèmes linéaires dynamiques fractionnaires singuliers

5.1 Notions préliminaires

Dans cette section, la solvabilité des systèmes linéaires dynamiques fractionnaires singuliers par l'utilisation de la transformée de Laplace sera présentée.

Définition 2.7 (Système dynamique linéaire fractionnaire singulier) [13] *Un système dynamique linéaire fractionnaire singulier est définit par les équations*

$$E\mathbf{D}_c^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{2.15}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \tag{2.16}$$

où $\mathbf{D}_c^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo avec $n-1 < \alpha \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. $E, A \in \mathbb{R}^{q\times q}$, $B \in \mathbb{R}^{q\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$ et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$, avec $\det E = 0$.

La condition initiale associée au système (2.15) est

$$x(0) = x_0.$$

Définition 2.8 (Système dynamique linéaire fractionnaire singulier régulier) [5] *Le système* (2.15) *est dit régulier si*

$$\det(s^{\alpha}\mathrm{E}-\mathrm{A}) \neq 0, \tag{2.17}$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

Proposition 2.3 [12] *Soit* $\mathrm{A}, \mathrm{E} \in \mathbb{R}^{q\times q}$ *avec* $\det \mathrm{E} = 0$. *Alors, pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *et* $n-1 < \alpha \leq n$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$, *la série de Laurent au voisinage de* ∞ *est donnée par*

$$(s^{\alpha}\mathrm{E}-\mathrm{A})^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)\alpha}, \tag{2.18}$$

où μ *est appelé indice de nilpotence, il est décrit par*

$$\mu = \mathrm{rg}\,\mathrm{E} - \deg\left(\det\left(s^{\alpha}\mathrm{E}-\mathrm{A}\right)\right) + 1,$$

et ϕ_i *est appelée la matrice fondamentale de* (2.15), *elle satisfait*

1. $\phi_i = 0, \quad$ pour $\quad i < -\mu$.
2. $\phi_i = (\phi_0 \mathrm{A})^i \phi_0, \quad$ pour $\quad i \geq 0$.

5.2 Résultats

Considérons le système dynamique linéaire d'ordre fractionnaire singulier à temps continu

$$\mathrm{E}\mathbf{D}_c^{\alpha}x(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t), \tag{2.19}$$

$$y(t) = \mathrm{C}x(t) + \mathrm{D}u(t), \tag{2.20}$$

où $\mathbf{D}_c^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x avec $n-1 < \alpha \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^q$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie respectivement. A, B, C, D et E sont des matrices de dimensions appropriées avec $\det \mathrm{E} = 0$.

La condition initiale associée au système (2.19) est

$$x(0) = x_0.$$

La solution x du système (2.19) est sans impulsion, ce qui est équivalent aux conditions de compatibilités suivantes [14]

- $s^{\alpha-1-k}\mathrm{E}x^{(k)}(0)$ existe pour tout $s \in [0, +\infty[$, $n-1 < \alpha \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n-1$.
- u existe et $u^{(k)}(0)$ est nulle, $\quad \forall k \geq 0$.

Par application de la transformation de Laplace à l'équation (2.19), nous trouvons

$$\mathscr{L}\left[\mathrm{E}\mathbf{D}_c^{\alpha}x(t)\right](s) = \mathrm{A}\mathscr{L}\left[x(t)\right](s) + \mathrm{B}\mathscr{L}\left[u(t)\right](s).$$

En utilisant les formules (2.1) et (2.4) et sachant que X et U sont les transformées de Laplace de x et u respectivement, nous obtenons

$$\mathrm{E}s^{\alpha}\mathrm{X}(s) - \mathrm{E}\sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k}x^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = \mathrm{AX}(s) + \mathrm{BU}(s),$$

qui peut, aussi, s'écrire sous la forme

$$(s^{\alpha}\mathrm{E}-\mathrm{A})\mathrm{X}(s) = \mathrm{BU}(s) + \mathrm{E}\sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k}x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}. \tag{2.21}$$

Comme le faisceau (E, A) est régulier, alors, l'équation (2.21) devient

$$X(s) = (s^{\alpha}E - A)^{-1}BU(s) + (s^{\alpha}E - A)^{-1}E\sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k}x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}. \tag{2.22}$$

Ainsi, l'utilisation de la série de Laurent (formule (2.18)) donne

$$X(s) = \sum_{i=-\mu}^{\infty}\phi_i s^{-(i+1)\alpha}BU(s) + \sum_{i=-\mu}^{\infty}\phi_i s^{-(i+1)\alpha}E\sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k}x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}.$$

En dernier, en appliquant les propriétés de la transformée de Laplace directe et inverse, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 2.4 [6] *Le système dynamique linéaire fractionnaire singulier* (2.19) *admet comme solution*

$$\begin{aligned} x(t) = &\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i\left(\frac{B}{\Gamma((i+1)\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}u(\tau)d\tau + E\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)}x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{\mu}\phi_{-i}\left(\mathbf{B}\mathbf{D}^{(i-1)\alpha}u(t) + E\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{D}^{i\alpha-k-1}\delta(t)x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}\right), \end{aligned} \tag{2.23}$$

où Γ, μ *et* ϕ *représentent la fonction Gamma, l'indice de nilpotence et les matrices fondamentales respectivement.*

Pour $\alpha = 1$, on trouve un résultat identique à celui présenter dans [5].

Proposition 2.4 *Pour* $\alpha = 1$, *le système dynamique linéaire singulier* (2.19) *admet comme trajectoire*

$$\begin{aligned} x(t) = &\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i\left(\frac{B}{\Gamma(i+1)}\int_0^t (t-\tau)^{i}u(\tau)d\tau + E\frac{t^{i}}{\Gamma(i+1)}x(t)\Big|_{t=0}\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{\mu}\phi_{-i}\left(Bu^{(i-1)}(t) + E\,\delta^{(i-1)}(t)x(t)\Big|_{t=0}\right), \end{aligned} \tag{2.24}$$

où Γ, μ *et* ϕ *représentent la fonction Gamma, l'indice de nilpotence et les matrices fondamentales respectivement.*

6 Conclusion

Le présent chapitre a été consacré à l'étude de la solvabilité des systèmes dynamiques linéaires fractionnaires à temps continu par la transformée de Laplace.

Dans un premier temps, nous avons rappelé quelques définitions et théorèmes fondamentaux sur la transformée de Laplace. Ensuite, la transformée de Laplace fractionnaire est présenté ainsi que ces propriétés. En dernier, la solvabilité des systèmes dynamiques linéaires fractionnaires à temps continu à la fois standards et singuliers est traitée.

Chapitre 3

Transformée de Sumudu

1 Introduction

Ce chapitre, présente une récente méthode, très efficace et très utile, pour la résolution des systèmes dynamiques linéaires fractionnaires, laquelle est la transformée de Sumudu. Quelques définitions, théorèmes, propriétés de la transformée de Sumudu sont rappelés. Ensuite, la relation entre cette dernière et le calcul fractionnaire est illustrée. La solvabilité des systèmes dynamiques linéaires fractionnaires à la fois standards et singuliers est établie.

2 Définitions et théorèmes

Dans cette partie, nous présenterons la définition de la transformée de Sumudu directe et inverse d'une fonction continu ainsi que quelques propriétés.

2.1 Transformée de Sumudu directe

Définition 3.1 (Forme intégrale de la transformée de Sumudu) [3] *Soit l'ensemble $\mathscr{A}$ donné par*

$$\mathscr{A} = \left\{ x(t) / \exists \mathrm{M}, \tau_1, \tau_2 > 0 |x(t)| < \mathrm{M} e^{\frac{|t|}{t_j}} \text{ si } t \in (-1)^j \times [0, \infty] \right\}.$$

La transformation de Sumudu X d'une fonction continue $x \in \mathscr{A}$ est donnée par la formule suivante

$$\mathrm{X}(v) = \mathscr{S}\left[x(t)\right](v) = \int_0^{\infty} x(vt) e^{-t} dt, \quad v \in [-t_1, t_2]. \tag{3.1}$$

Théorème 3.1 (Théorème d'existence) [3, 4, 30] *Toute fonction continue x définie sur l'ensemble $\mathscr{A}$ admet une transformée de Sumudu X de la forme*

$$\mathrm{X}(v) = \mathscr{S}\left[x(t)\right](v) = \frac{1}{v} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{v}} x(t) dt.$$

Exemple 3.1 *La transformée de Sumudu de la fonction échelon (unité) donnée par*

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < 0 \\ 1 & \text{pour} \quad t \geq 0 \end{cases},$$

vaut par identification

$$\mathrm{X}(v) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad v < 0 \\ 1 & \text{pour} \quad v \geq 0 \end{cases}.$$

Ainsi, nous pouvons conclure que la transformée de Sumudu de la fonction échelon est la fonction échelon elle-même. Autrement dit la fonction x et sa transformée Sumudu X sont égales dans le demi plan positif.

Il existe un lien entre la transformée de Laplace et celle de Sumudu. Ce dernier est décrit par le théorème suivant.

Théorème 3.2 [30] *Soit $f \in \mathscr{A}$ une fonction continue et soient F et G ces transformées de Laplace et de Sumudu respectivement. Alors, pour tout $v \in \mathbb{C}^*$, nous avons*

$$\mathrm{G}(v) = \frac{\mathrm{F}\left(\frac{1}{v}\right)}{v}. \tag{3.2}$$

2.2 Transformée de Sumudu inverse

Théorème 3.3 [3, 4, 30] *Soit X la transformée de Sumudu de x telle que*

i) *$v\mathrm{X}$ est une fonction méromorphe, ayant des singularités $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{v}\right) < \gamma$.*

ii) *Il existe une zone circulaire de γ de rayon r et des constantes positives M et k avec*

$$|v\mathrm{X}(v)| < \mathrm{M}r^{-k}.$$

Alors, la fonction x est donnée par

$$\mathscr{S}^{-1}[\mathrm{X}(v)](t) = x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty}\left(-\frac{1}{v}\right)e^{\frac{t}{v}}\mathrm{X}(v)dv.$$

Exemple 3.2 *Soit la transformée de Sumudu $\mathrm{X}(v) = \frac{1}{v}$ avec $v \in \mathbb{C}^*$. Cherchons la fonction x.*

En effet,

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathscr{S}^{-1}[\mathrm{X}(v)](t), \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty}\frac{1}{v^2}e^{\frac{t}{v}}dv. \end{aligned}$$

L'utilisation des résultats de [31], *donne*

$$x(t) = \delta(t).$$

2.3 Quelques propriétés de la transformée de Sumudu [24]

1. **Linéarité :** Soient f et g deux fonctions dans $\mathscr{A}$ et soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\mathscr{S}\left[af(t) + bg(t)\right](v) = a\mathscr{S}\left[f(t)\right](v) + b\mathscr{S}\left[g(t)\right](v).$$

2. **Dérivation :** Soit $f \in \mathscr{A}$ une fonction n fois différentiable. Alors,

$$\mathscr{S}\left[f^{(n)}(t)\right](v) = \frac{\mathscr{S}[f(t)](v)}{v^n} - \frac{f(0)}{v^n} - \frac{f'(0)}{v^{n-1}} - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{v}.$$

3. **Primitive :** Soit $f \in \mathscr{A}$. Alors,

$$\mathscr{S}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](v) = v\mathscr{S}[f(t)](v).$$

4. **Produit de convolution :** Soient $f, g \in \mathscr{A}$ deux fonctions continues et soient F et G leur transformées de Sumudu respectivement. Alors, la transformée de Sumudu du produit de convolution entre f et g

$$\left(f \star g\right)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

est donnée par

$$\mathscr{S}\left[(f \star g)(t)\right](v) = v\,\mathrm{F}(v)\,\mathrm{G}(v).$$

En particulier si $g(t) = 1$, alors, la transformée de Sumudu devient

$$\mathscr{S}\left[(f \star 1)(t)\right](v) = \mathscr{S}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = v\,\mathrm{F}(v).$$

5. **Impulsion de Dirac :** La transformée de Sumudu de l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ est

$$\mathscr{S}\left[\delta(t)\right](v) = \frac{1}{v}.$$

3 Transformée de Sumudu fractionnaire

La transformée de Sumudu fractionnaire ainsi que ces propriétés sont présentées dans cette section.

3.1 Définitions

Définition 3.2 [19] *La transformée de Sumudu de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $x \in \mathscr{A}$ est donnée par formule suivante*

$$\mathscr{S}\left[\mathbf{D}^{\alpha}_{\mathrm{R-L}}x(t)\right](v) = v^{-\alpha}\mathscr{S}\left[x(t)\right](v) - \sum_{k=1}^{n} v^{-k}\mathbf{D}^{\alpha-k}_{\mathrm{R-L}}x(t)\bigg|_{t=0},$$

où $n-1 < \alpha \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $t = 0$ est le point initial.

Définition 3.3 [10] *La formule de la transformée de Sumudu de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction $x \in \mathscr{A}$ de classe $\mathscr{C}^n$ est donnée par*

$$\mathscr{S}\left[\mathbf{D}^{\alpha}_{c}x(t)\right](v) = v^{-\alpha}\mathscr{S}\left[x(t)\right](v) - \sum_{k=0}^{n-1} v^{k-\alpha}x^{(k)}(t)\bigg|_{t=0}, \tag{3.3}$$

où $n-1 < \alpha \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $x^{(k)}(t)\big|_{t=0}$ est la dérivée d'ordre k de la fonction x au point $t = 0$.

3.2 Quelques propriétés de la transformée de Sumudu fractionnaire [18]

Soient $t \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $n-1 < \alpha \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $u : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue d'ordre exponentiel tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = 0$. Alors, nous avons les propriétés suivantes

- $\mathscr{S}\left[\dfrac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}\right](v) = v^{n-1}$, où Γ représente la fonction Gamma d'Euler.
- $\mathscr{S}\left[\mathbf{D}_c^{\alpha}\delta(t)\right](v) = v^{-(\alpha+1)}$, où δ est l'impulsion de Dirac.
- $\mathscr{S}\left[\mathbf{D}_c^{\alpha}u(t)\right](v) = v^{-\alpha}\mathrm{U}(v)$, où U est la transformée de Sumudu de u.

4 Solvabilité des systèmes linéaires dynamiques fractionnaires standards par la transformée de Sumudu

Dans cette section, la résolution des systèmes linéaires dynamiques fractionnaires standards est établie en utilisant la transformée de Sumudu.

4.1 Notions préliminaires

Définition 3.4 (Système dynamique linéaire fractionnaire standard) [15] *Un système dynamique linéaire fractionnaire standard est définit par*

$$\mathbf{D}_c^{\alpha}x(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t), \tag{3.4}$$
$$y(t) = \mathrm{C}x(t) + \mathrm{D}u(t), \tag{3.5}$$

où $\mathbf{D}_c^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x avec $n-1 < \alpha \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{q\times q}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{q\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ *et* $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

La condition initiale associée au système (3.4) est

$$x(0) = x_0.$$

Définition 3.5 (Système dynamique linéaire fractionnaire standard régulier) [18] *Le système (3.4) est dit régulier si*

$$\det(\mathrm{I} - v^{\alpha}\mathrm{A}) \neq 0. \tag{3.6}$$

pour un certain $v \in \mathbb{C}$.

Proposition 3.1 [18] *Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{q\times q}$. Alors, pour tous $v \in \mathbb{C}$ et $n-1 < \alpha \leq < n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, la série de Laurent au voisinage de ∞ est donnée par*

$$(\mathrm{I} - v^{\alpha}\mathrm{A})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}^i v^{i\alpha}. \tag{3.7}$$

Preuve. Soient $s \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathbb{R}^{q\times q}$. Nous avons

$$\begin{aligned}(s^{\alpha}I - A)^{-1} &= (s^{\alpha}(I - s^{-\alpha}A))^{-1}\\ &= s^{-\alpha}(I - s^{-\alpha}A)^{-1}\end{aligned}$$

Or, d'après la formule (2.8), nous obtenons

$$(I - s^{-\alpha}A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^{i} s^{-i\alpha}.$$

En dernier, par le changement de variable $s^{-1} = v$, il découle

$$(I - v^{\alpha}A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^{i} v^{i\alpha}.$$

■

4.2 Résultats

Considérons le système dynamique linéaire d'ordre fractionnaire standard à temps continu

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_c^{\alpha} x(t) &= Ax(t) + Bu(t), &(3.8)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), &(3.9)\end{aligned}$$

où $\mathbf{D}_c^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x avec $n-1 < \alpha \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. $x \in \mathbb{R}^q$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie respectivement. A, B, C et D sont des matrices de dimensions appropriées.

La condition initiale associée au système (3.8) est

$$x(0) = x_0.$$

De plus, la solution x du système (3.8) est sans impulsion, ce qui est équivalent aux conditions de compatibilités suivantes

- $A^{i} v^{i\alpha+k} x^{(k)}(0)$ existe pour tout $v \in [-t_1, t_2[$, $i \in \mathbb{N}$, $n-1 < \alpha \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n-1$.
- u est donnée.

Par ailleurs, nous supposerons que le faisceau (I, A) est régulier, i. e. ;

$$\det(I - v^{\alpha}A) \neq 0,$$

pour un certain $v \in \mathbb{C}$.

En appliquant de la transformation de Sumudu à l'équation (3.8), nous trouvons

$$\mathbf{D}_c^{\alpha} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \Rightarrow \mathscr{S}\left[\mathbf{D}_c^{\alpha} x(t)\right](v) = A\mathscr{S}\left[x(t)\right](v) + B\mathscr{S}\left[u(t)\right](v).$$

En utilisant la formule (3.3) et sachant que X et U sont les transformées de Sumudu de x et u respectivement, nous obtenons

$$\frac{X(v)}{v^{\alpha}} - \sum_{k=0}^{n-1} v^{k-\alpha} x^{(k)}(t)\bigg|_{t=0} = AX(v) + BU(v),$$

ou encore,

$$\mathrm{X}(v) - \sum_{k=0}^{n-1} v^k x^{(k)}(t)\bigg|_{t=0} = v^{\alpha}\mathrm{AX}(v) + v^{\alpha}\mathrm{BU}(v). \tag{3.10}$$

La formule (3.10) peut aussi s'écrire sous la forme

$$(\mathrm{I} - v^{\alpha}\mathrm{A})\mathrm{X}(v) = v^{\alpha}\mathrm{BU}(v) + \sum_{k=0}^{n-1} v^k x^{(k)}(t)\bigg|_{t=0}. \tag{3.11}$$

Comme le faisceau (I, A) est régulier, alors, l'équation(3.11) devient

$$\mathrm{X}(v) = v^{\alpha}(\mathrm{I} - v^{\alpha}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{BU}(v) + (\mathrm{I} - v^{\alpha}\mathrm{A})^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} v^k x^{(k)}(t)\bigg|_{t=0}.$$

En dernier, l'expression de l'entrée x du système (3.4) est obtenue en utilisant la série de Laurant (formule (3.7)), les propriétés de la transformée de Sumudu directe et inverse et est présentée par le théorème suivant.

Théorème 3.4 [18] *La trajectoire x du système dynamique linéaire fractionnaire standard* (3.4) *est*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^i\mathrm{B}}{\Gamma((i+1)\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(i+1)\alpha-1} u(\tau)d\tau + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{A}^i \frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)} x^{(k)}(t)\bigg|_{t=0}, \tag{3.12}$$

où Γ représente la fonction Gamma.

Pour $\alpha = 1$, nous obtenons le même résultat obtenu dans [5].

Proposition 3.2 *Pour $\alpha = 1$, la solution x du système dynamique linéaire standard* (3.4) *devient*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^i\mathrm{B}}{\Gamma(i+1)} \int_0^t (t-\tau)^i\, u(\tau)\, d\tau + \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}^i \frac{t^i}{\Gamma(i+1)} x_0,$$

où Γ représente la fonction Gamma.

5 Solvabilité des systèmes linéaires dynamiques fractionnaires singuliers

Cette section a pour but de présenter la solvabilité des systèmes linéaires dynamiques fractionnaires singuliers en utilisant la transformation de Sumudu.

5.1 Notions préliminaires

Définition 3.6 (Système dynamique fractionnaire singulier) [15] *Un système dynamique linéaire fractionnaire singulier est définit par*

$$\mathrm{E}\mathrm{D}_c^{\alpha} x(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t), \tag{3.13}$$

$$y(t) = \mathrm{C}x(t) + \mathrm{D}u(t), \tag{3.14}$$

où $\mathbf{D}_c^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x avec $n-1<\alpha\leq n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$. $x\in\mathbb{R}^q$ représente le vecteur d'état, $u\in\mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y\in\mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. $\mathrm{E},\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{q\times q}$, $\mathrm{B}\in\mathbb{R}^{q\times m}$, $\mathrm{C}\in\mathbb{R}^{p\times q}$ et $\mathrm{D}\in\mathbb{R}^{p\times m}$, avec $\det(\mathrm{E})=0$.

La condition initiale associée au système (3.13) est

$$x(0)=x_0.$$

Définition 3.7 (Système dynamique linéaire fractionnaire singulier régulier) [17] *Le système* (3.13) *est dit régulier si*

$$\det(\mathrm{E}-v^\alpha\mathrm{A})\neq 0, \tag{3.15}$$

pour un certain $v\in\mathbb{C}$.

Proposition 3.3 [17] *Soient* $\mathrm{A},\mathrm{E}\in\mathbb{R}^{q\times q}$ *avec* $\det(\mathrm{E})=0$. *Alors, pour tous* $v\in\mathbb{C}$ *et* $n-1<\alpha\leq n$ *avec* $n\in\mathbb{N}^*$, *la série de Laurent au voisinage de* ∞ *est donnée par*

$$(\mathrm{E}-v^\alpha\mathrm{A})^{-1}=\sum_{i=-\mu}^{\infty}\phi_i v^{i\alpha}, \tag{3.16}$$

où μ *est appelé indice de nilpotence, il est décrit par*

$$\mu=\mathrm{rg}\,\mathrm{E}-\deg\big(\det(v^{-\alpha}\mathrm{E}-\mathrm{A})\big)+1,$$

et ϕ_i *représente la matrice fondamentale de* (3.13).

5.2 Résultats

Soit le système dynamique linéaire d'ordre fractionnaire singulier à temps continu

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\mathbf{D}_c^\alpha x(t) &= \mathrm{A}x(t)+\mathrm{B}u(t), &(3.17)\\ y(t) &= \mathrm{C}x(t)+\mathrm{D}u(t), &(3.18)\end{aligned}$$

où $\mathbf{D}_c^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x avec $n-1<\alpha\leq n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$. $x\in\mathbb{R}^q$, $u\in\mathbb{R}^m$ et $y\in\mathbb{R}^p$ représentent les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie respectivement. A, B, C, D et E sont des matrices de dimensions appropriées, avec $\det(\mathrm{E})=0$.

La condition initiale associée au système (3.17) est

$$x(0)=x_0.$$

La solution x du système (3.17) est sans impulsion, ce qui est équivalent aux conditions de compatibilités suivantes [17]

- $v^{i\alpha+k}\mathrm{E}x^{(k)}(0)$ existe pour tout $v\in[-t_1,t_2[$, $i\in\mathbb{N}$, $n-1<\alpha\leq n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ et $0\leq k\leq n-1$.
- u existe et $u^{(k)}(0)=0$, $\quad\forall k\in\mathbb{N}$.

La résolution de système (3.17) par la transformée de Sumudu est donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.5 [17] *Le système dynamique linéaire fractionnaire singulier* (3.17) *admet comme solution*

$$\begin{aligned}x(t)=&\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i\left(\frac{\mathrm{B}}{\Gamma((i+1)\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}u(\tau)d\tau+\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{E}\frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)}x^{(k)}(t)\bigg|_{t=0}\right)\\&+\sum_{i=1}^{\mu}\phi_{-i}\left(\mathrm{B}\mathbf{D}^{(i-1)\alpha}u(t)+\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{E}\mathbf{D}^{-(k-i\alpha+1)}\delta(t)x^{(k)}(t)\bigg|_{t=0}\right),\end{aligned}\tag{3.19}$$

où Γ, μ et ϕ_i représentent la fonction Gamma, l'indice de nilpotence et les fonctions fondamentales respectivement.

Preuve. Par application de la transformation de Sumudu au système (3.17), nous trouvons

$$\mathrm{E}\mathbf{D}_c^{\alpha}x(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t) \Rightarrow \mathrm{E}\mathscr{S}\left[\mathbf{D}_c^{\alpha}x(t)\right](v) = \mathrm{A}\mathscr{S}\left[x(t)\right](v) + \mathrm{B}\mathscr{S}\left[u(t)\right](v).$$

En utilisant la formule (3.3) et sachant que X et U sont les transformées de Sumudu de x et u respectivement, nous obtenons

$$\mathrm{E}\frac{\mathrm{X}(v)}{v^{\alpha}} - \mathrm{E}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k-\alpha}x^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = \mathrm{AX}(v) + \mathrm{BU}(v),$$

ou encore,

$$\left(\mathrm{E} - v^{\alpha}\mathrm{A}\right)\mathrm{X}(v) = v^{\alpha}\mathrm{BU}(v) + \mathrm{E}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k}x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}. \tag{3.20}$$

Comme le faisceau (E, A) est régulier, alors, l'équation (3.20) devient

$$\mathrm{X}(v) = v^{\alpha}\left(\mathrm{E} - v^{\alpha}\mathrm{A}\right)^{-1}\mathrm{BU}(v) + \left(\mathrm{E} - v^{\alpha}\mathrm{A}\right)^{-1}\mathrm{E}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k}x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}.$$

Or, par la définition de la série de Laurent (formule (3.16)), nous trouvons

$$\begin{aligned}\mathrm{X}(v) = &\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i\left(v^{(i+1)\alpha}\mathrm{BU}(v) + \mathrm{E}\sum_{k=0}^{n-1} v^{i\alpha+k}x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}\right)\\ &+\sum_{i=1}^{\mu}\phi_{-i}\left(v^{(1-i)\alpha}\mathrm{BU}(v) + \mathrm{E}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k-i\alpha}x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}\right),\end{aligned}$$

En dernier, la trajectoire x est établie en utilisant les propriétés de la transformée de Sumudu directe et inverse. ■

Pour $\alpha = 1$, nous obtenons

Proposition 3.4 [5] *Pour $\alpha = 1$, le système dynamique linéaire singulier (3.17) admet comme solution*

$$\begin{aligned}x(t) = &\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i\left(\frac{\mathrm{B}}{\Gamma(i+1)}\int_0^t (t-\tau)^i u(\tau)d\tau + \mathrm{E}\frac{t^i}{\Gamma(i+1)}x(t)\Big|_{t=0}\right)\\ &+\sum_{i=1}^{\mu}\phi_{-i}\left(\mathrm{B}u^{(i-1)}(t) + \mathrm{E}\,\delta^{(i-1)}(t)x(t)\Big|_{t=0}\right),\end{aligned} \tag{3.21}$$

où Γ, μ et ϕ représentent la fonction Gamma, l'indice de nilpotence et les matrices fondamentales respectivement.

6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la transformée de Sumudu pour la résolution des systèmes dynamiques linéaires. Cette nouvelle transformation est considérée comme l'une les plus importante transformation.

La définition de cette nouvelle transformation directe et inverse pour une fonction continu est présentée suivie par ces propriétés. Ensuite, la définition et les propriétés de la transformée de Sumudu fractionnaire sont données. En dernier, la solvabilité des systèmes dynamiques linéaires fractionnaires standards et singuliers est établie.

Chapitre 4

Transformée Naturelle

1 Introduction

Ce chapitre est dédié à la présentation d'une nouvelle transformation. Cette dernière laquelle permet de résoudre des systèmes dynamiques linéaires fractionnaires est plus récente par rapport à ceux présentées dans les chapitres précédents.

Dans un premier temps, nous présentons quelques notions sur cette nouvelle transformation, dites transformée Naturelle. Ensuite certaines propriétés de la transformée Naturelle fractionnaire sont démontrées. En dernier, la solvabilité des systèmes dynamiques linéaires fractionnaires standards et singuliers est établie.

2 Définitions et théorèmes

Dans cette section, les définitions de la transformée Naturelle directe et inverse sont rappelées suivie par quelques propriétés.

2.1 Transformée Naturelle directe

Définition 4.1 (Forme intégrale de la transformée Naturelle) [32] *Soit $\mathscr{A}$ un ensemble défini par*

$$\mathscr{A} = \left\{ x(t) / \exists \mathrm{M}, \tau_1, \tau_2 > 0 |x(t)| < \mathrm{M} e^{\frac{|t|}{t_j}} \, si \, t \in (-1)^j \times [0, \infty] \right\}. \tag{4.1}$$

La transformation Naturelle de la fonction $x \in \mathscr{A}$, notée par $\mathscr{N}$, est continue par morceaux, ordre exponentiel et est définie par

$$\mathscr{N}\left[x(t)\right](s, v) = \mathrm{X}(s, v) = \frac{1}{v} \int_0^\infty e^{\frac{-st}{v}} x(t) dt, \tag{4.2}$$

où s et v sont des variables de transformation telle que $\mathrm{Re}(s) > 0$, $v \in (\tau_1, \tau_2)$.

Théorème 4.1 [32] *Soit x une fonction continue dans chaque intervalle fini $0 \leq t \leq k$ et d'ordre γ exponentiel pour $t > \mathrm{K}$. Alors, sa transformation Naturelle X existe pour tous $s > \gamma$ et $v > \gamma$.*

Exemple 4.1 *Soit la fonction x définit par*

$$x(t) = e^{at} \tag{4.3}$$

La transformée Naturelle de x est

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}[x(t)](s,v) &= \frac{1}{v}\int_0^{\infty} e^{\frac{-st}{v}} e^{at}\,dt,\\
&= \frac{1}{v}\int_0^{\infty} e^{\frac{(av-s)t}{v}}\,dt,\\
&= \frac{1}{s-av}.
\end{aligned}$$

2.2 Transformée Naturelle inverse

Définition 4.2 (Transformée Naturelle inverse) [9] *Soit* X *une fonction continue par morceaux, d'ordre exponentiel. La transformée Naturelle inverse de* X*, notée par* $\mathcal{N}^{-1}$*, est donnée par*

$$\mathcal{N}^{-1}[\mathrm{X}(s,v)](t) = x(t) = \lim_{\mathrm{T}\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\mathrm{T}}^{\beta+i\mathrm{T}} e^{\frac{st}{v}}\mathrm{X}(s,v)\,ds, \tag{4.4}$$

avec $\beta\in\mathbb{R}$.

Exemple 4.2 *La transformée Naturelle inverse de la fonction* $\mathrm{X}(s,v)=\frac{1}{s}$ *est*

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{N}^{-1}[\mathrm{X}(s,v)](t),\\
&= \lim_{\mathrm{T}\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\mathrm{T}}^{\beta+i\mathrm{T}} \frac{1}{s}e^{\frac{st}{v}}\,ds.
\end{aligned}$$

Par un calcul simple, nous trouvons

$$x(t)=1.$$

2.3 Quelques propriétés de la transformée Naturelle [32]

1. **Linéarité :** Soient f et g deux fonctions dans $\mathcal{A}$ et soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Alors,

$$\mathcal{N}\left[\alpha f(t)+\beta g(t)\right](s,v) = \alpha\mathcal{N}[f(t)](s,v)+\beta\mathcal{N}[g(t)](s,v).$$

2. **Dérivation :** Soit $f\in\mathcal{A}$ une fonction n fois différentiable. Alors,

$$\mathcal{N}\left[f^{(n)}(t)\right](s,v) = \frac{s^n}{v^n}\mathcal{N}[f(t)](s,v) - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^{n-k-1}}{v^{n-k}}f^{(k)}(t)\Big|_{t=0},$$

où $f^{(k)}(t)\big|_{t=0}$ représente la dérivée d'ordre k de la fonction f au point $t=0$.

3. **Produit de convolution** Pour toutes fonctions f, g dans $\mathcal{A}$, la transformée Naturelle du produit de convolution entre f et g est donnée par

$$\mathcal{N}\left[(f\star g)(t)\right](s,v) = v\,\mathcal{N}[f(t)](s,v)\,\mathcal{N}[g(t)](s,v).$$

4. **Impulsion de Dirac :** La transformée Naturelle de l'impulsion de Dirac est

$$\mathcal{N}[\delta(t)](s,v) = \frac{1}{v}.$$

3 Transformée Naturelle fractionnaire

Dans cette section, l'extension de la transformée Naturelle dans le cas fractionnaire est établie en s'inspirant des résultats obtenus dans [5, 15, 17, 18] et de la définition de la dérivée de la transformée Naturrelle [32]. Les résultats obtenus lors de cette extension seront utilisés dans la résolution des systèmes dynamiques linéaires fractionnaires.

La transformée Naturelle de la dérivée au sens de Caputo de la fonction x est donnée par la définition suivante.

Définition 4.3 *La formule de la transformée Naturelle de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction x de classe* $\mathscr{C}^n$ *est donnée par*

$$\mathcal{N}\left[\mathbf{D}_c^{\alpha} x(t)\right](s,v) = \left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha} \mathrm{X}(s,v) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{v^{\alpha-k}} x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}, \tag{4.5}$$

où $n-1<\alpha\leq n, n\in\mathbb{N}^*$ *et* $x^{(k)}(t)\big|_{t=0}$ *est la dérivée d'ordre k de x au point* $t=0$.

Quelques propriétés de la transformée Naturelle dans le cas fractionnaire sont présentées dans la proposition suivante.

Proposition 4.1 *Soient* $t\in\mathbb{R}_+$, $a\in\mathbb{R}_+^*$, $n-1<\alpha\leq n$ *avec* $n\in\mathbb{N}^*$ *et soit* $u:[0,+\infty[\to\mathbb{C}$ *une fonction continue d'ordre exponentiel tel que* $\forall k\in\mathbb{N}$, $u^{(k)}(t)\Big|_{t=0}=0$. *Alors, nous avons les propriétés suivantes*

- $\mathcal{N}\left[\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}\right](s,v) = \frac{s^{-a}}{v^{-a+1}}$, *où* Γ *représente la fonction Gamma d'Euler.*
- $\mathcal{N}[\mathbf{D}_c^{\alpha}\delta(t)](s,v) = \frac{s^{\alpha}}{v^{\alpha+1}}$ *où* δ *représente l'impulsion de Dirac.*
- $\mathcal{N}[\mathbf{D}_c^{\alpha}u(t)](s,v) = \left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha}\mathrm{U}(s,v)$, *où* U *représente la transformée Naturelle de la fonction u.*

4 Solvabilité des des systèmes linéaires dynamiques fractionnaires standards par la transformée Naturelle

Cette partie présente l'utilisation de la transformée Naturelle dans la résolution des systèmes linéaires fractionnaires standards.

4.1 Notions préliminaires

Définition 4.4 (Système dynamique linéaire fractionnaire) [13] *Un système dynamique linéaire fractionnaire standard est définit par*

$$\mathbf{D}_c^{\alpha} x(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t), \tag{4.6}$$
$$y(t) = \mathrm{C}x(t) + \mathrm{D}u(t), \tag{4.7}$$

où $\mathbf{D}_c^{\alpha}$ *est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x avec* $n-1<\alpha\leq n$ *et* $n\in\mathbb{N}^*$. $x\in\mathbb{R}^q$ *est le vecteur d'état,* $u\in\mathbb{R}^m$ *est le vecteur d'entrée et* $y\in\mathbb{R}^p$ *est le vecteur de sortie.* $\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{q\times q}$, $\mathrm{B}\in\mathbb{R}^{q\times m}$, $\mathrm{C}\in\mathbb{R}^{p\times q}$ *et* $\mathrm{D}\in\mathbb{R}^{p\times m}$.

La condition initiale associée au système (4.6) est

$$x(0) = x_0.$$

De [6, 15, 18], nous obtenons

Définition 4.5 (Système dynamique linéaire fractionnaire standard régulier) *Le système (4.6) est dit régulier si*

$$\det\left(\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha}\mathrm{I}-\mathrm{A}\right)\neq 0, \tag{4.8}$$

pour un certain $s\in\mathbb{C}$ et un certain $v\in\mathbb{C}^{*}$.

Et, aussi,

Proposition 4.2 *Soit $\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{q\times q}$. Alors, pour $s\in\mathbb{C}$, $v\in\mathbb{C}^{*}$ et $n-1<\alpha\leq n$ avec $n\in\mathbb{N}^{*}$, la série de Laurent au voisinage de ∞ est donnée par*

$$\left(\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha}\mathrm{I}-\mathrm{A}\right)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{A}^{i}\left(\frac{s}{v}\right)^{-(i+1)\alpha}. \tag{4.9}$$

4.2 Résultats

Considérons le système dynamique linéaire standard d'ordre fractionnaire à temps continu

$$\mathbf{D}_{c}^{\alpha}x(t) = \mathrm{A}x(t)+\mathrm{B}u(t), \tag{4.10}$$
$$y(t) = \mathrm{C}x(t)+\mathrm{D}u(t), \tag{4.11}$$

où $\mathbf{D}_{c}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo avec $n-1<\alpha<n$ avec $n\in\mathbb{N}^{*}$. $x\in\mathbb{R}^{q}$, $u\in\mathbb{R}^{m}$ et $y\in\mathbb{R}^{p}$ sont les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie respectivement. A, B, C, D et sont des matrices de dimensions appropriées.

La condition initiale associée au système (4.10) est

$$x(0) = x_0.$$

De plus, la solution x du système (4.10) est sans impulsion, ce qui est équivalent aux conditions de compatibilités suivantes

- $\mathrm{A}^{i}\dfrac{s^{-(i\alpha+1+k)}}{v^{-(i\alpha+k)}}x^{(k)}(0)$ existe pour tous $\mathrm{Re}(s)>0$, $v\in[\tau_1,\tau_2[$, $i\in\mathbb{N}$, $n-1<\alpha\leq n$ avec $n\in\mathbb{N}^{*}$ et $k\geq 1$.

- u est donnée.

Par ailleurs, nous supposerons que le faisceau (I, A) est régulier, i. e. ;

$$\det\left(\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha}\mathrm{I}-\mathrm{A}\right)\neq 0,$$

pour un certain $s\in\mathbb{C}$ et un certain $v\in\mathbb{C}^{*}$. Ainsi, la résolution de système (4.10) par la transformée Naturelle est donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.2 *Le système dynamique linéaire fractionnaire standard (4.10) admet comme solution*

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{A}^{i}\mathrm{B}\int_{0}^{t}\frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)}u(\tau)d\tau+\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{A}^{i}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)}x^{(k)}(t)\bigg|_{t=0}, \tag{4.12}$$

où Γ représente la fonction Gamma.

Preuve. Par application de la transformation Naturelle à l'équation (4.10), nous trouvons

$$\mathbf{D}_c^{\alpha} x(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t) \Rightarrow \mathcal{N}\left[\mathbf{D}_c^{\alpha} x(t)\right](s,v) = \mathrm{A}\mathcal{N}\left[x(t)\right](s,v) + \mathrm{B}\mathcal{N}\left[u(t)\right](s,v)$$

En utilisant la formule (4.5) et sachant que X et U sont les transformées Naturelle de x et u respectivement, nous obtenons

$$\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha} \mathrm{X}(s,v) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-1-k}}{v^{\alpha-k}} x^{(k)}(t)\bigg|_{t=0} = \mathrm{AX}(s,v) + \mathrm{BU}(s,v),$$

Laquelle peut, aussi, s'écrire sous la forme

$$\left(\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha} \mathrm{I} - \mathrm{A}\right)\mathrm{X}(s,v) = \mathrm{BU}(s,v) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-1-k}}{v^{\alpha-k}} x^{(k)}(t)\bigg|_{t=0}. \tag{4.13}$$

Comme le faisceau (I, A) est régulier, alors, l'équation(4.13) devient

$$\mathrm{X}(s,v) = \left(\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha} \mathrm{I} - \mathrm{A}\right)^{-1} \mathrm{BU}(s,v) + \left(\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha} \mathrm{I} - \mathrm{A}\right)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-1-k}}{v^{\alpha-k}} x^{(k)}(t)\bigg|_{t=0}.$$

L'utilisation de la série de Laurent 4.9, donne

$$\mathrm{X}(s,v) = v\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}^i \mathrm{B} \frac{s^{-(i+1)\alpha}}{v^{-(i+1)\alpha+1}} \mathrm{U}(s,v) + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{A}^i \frac{s^{-i\alpha-1-k}}{v^{-(k+i\alpha)}} x^{(k)}(t)\bigg|_{t=0}.$$

En dernier, la trajectoire x est obtenue en appliquant la transformée Naturelle inverse et ces propriétés,

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}^i \mathrm{B} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)} u(\tau)d\tau + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{A}^i \frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)} x^{(k)}(t)\bigg|_{t=0}.$$

■

Le même résultat que celui présenté dans [5] est obtenu pour $\alpha = 1$.

Proposition 4.3 *Pour* $\alpha = 1$, *la solution du système dynamique linéaire* (4.10) *devient*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}^i \mathrm{B} \int_0^t \frac{(t-\tau)^i}{\Gamma(i+1)} u(\tau)d\tau + \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}^i \frac{t^i}{\Gamma(i+1)} x_0,$$

où Γ *représente la fonction Gamma.*

5 Solvabilité des systèmes linéaires dynamiques fractionnaires singuliers

Cette section comporte la solvabilité des systèmes linéaires dynamiques fractionnaires singuliers par l'utilisation de la transformation Naturelle

5.1 Notions préliminaires

Définition 4.6 (Système dynamique fractionnaire singulier) [13] *Un système dynamique linéaire fractionnaire singulier à temps continu est définit par*

$$\begin{aligned} E\mathbf{D}_c^{\alpha}x(t) &= Ax(t)+Bu(t), &(4.14)\\ y(t) &= Cx(t)+Du(t), &(4.15)\end{aligned}$$

où $\mathbf{D}_c^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x où $n-1<\alpha\leq n$ et $n\in\mathbb{N}^*$. $x\in\mathbb{R}^q$ est le vecteur d'état, $u\in\mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y\in\mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. $E, A\in\mathbb{R}^{q\times q}$, $B\in\mathbb{R}^{q\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{p\times q}$ et $D\in\mathbb{R}^{p\times m}$, avec $\det(E)=0$.

La condition initiale associée au système (4.14) est

$$x(0)=x_0.$$

Définition 4.7 (Système dynamique linéaire fractionnaire singulier régulier) [6] *Le système (4.14) est dit régulier si*

$$\det\left(\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha}E-A\right)\neq 0, \tag{4.16}$$

pour un certain $s\in\mathbb{C}$ et un certain $v\in\mathbb{C}^*$.

Par même raisonnement que celui de [6, 17], nous obtenons

Proposition 4.4 *Soient* $A, E\in\mathbb{R}^{q\times q}$, $\det(E)=0$. *Alors, pour $s\in\mathbb{C}$, $v\in\mathbb{C}^*$ et $n-1<\alpha\leq n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$, la série de Laurent au voisinage de ∞ est donnée par*

$$\left(\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha}E-A\right)^{-1}=\sum_{i=-\mu}^{\infty}\phi_i\left(\frac{s}{v}\right)^{-(i+1)\alpha}. \tag{4.17}$$

où μ est appelé indice de nilpotence, il est décrit par

$$\mu=\operatorname{rg}E-\deg\left(\det\left(\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha}E-A\right)\right)+1$$

et ϕ_i est appelée la matrice fondamentale de (4.14).

5.2 Résultats

Considérons le système dynamique linéaire singulier d'ordre fractionnaire à temps continu

$$\begin{aligned} E\mathbf{D}^{\alpha}x(t) &= Ax(t)+Bu(t), &(4.18)\\ y(t) &= Cx(t)+Du(t), &(4.19)\end{aligned}$$

où $\mathbf{D}_c^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x avec $n-1<\alpha\leq n$ et $n\in\mathbb{N}^*$. $x\in\mathbb{R}^q$, $u\in\mathbb{R}^m$ et $y\in\mathbb{R}^p$ sont les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie respectivement. A, B, C, D et E sont des matrices à dimensions appropriées avec
$\det(E)=0$.

La condition initiale associée au système (4.18) est

$$x(0)=x_0.$$

La solution x du système (4.18) est sans impulsion, ce qui est équivalent aux conditions de compatibilités suivantes [6, 15, 17]

- $\frac{s^{\alpha-1-k}}{v^{\alpha-k}}\mathrm{E}x^{(k)}(0)$ existe pour tout $\mathrm{Re}(s)>0$, $v\in[\tau_1,\tau_2[$, $n-1<\alpha\leq n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ et $0\leq k\leq n-1$.
- u existe et $u^{(k)}(0)$ est nulle, $\quad\forall k\in\mathbb{N}$.

La résolution de système (4.18) par la transformée Naturelle est donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.3 *Le système dynamique linéaire fractionnaire singulier (4.18) admet comme solution*

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i\mathrm{B}\frac{1}{\Gamma((i+1)\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}u(\tau)d\tau+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\phi_i\mathrm{E}\frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)}x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}$$
$$+\sum_{i=1}^{\mu}\phi_{-i}\mathrm{B}\mathbf{D}^{(i-1)\alpha}x(t)+\sum_{i=1}^{\mu}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{E}\mathbf{D}^{i\alpha-k-1}\delta(t)x^{(k)}(t)\Big|_{t=0},$$

où Γ, ϕ_i et μ représentent la fonction Gamma, la matrice fondamentale et l'indice nilpotence respectivement.

Preuve. L'application de la transformation Naturelle à l'équation (4.18) donne

$$\mathrm{E}\mathbf{D}_c^{\alpha}x(t)=\mathrm{A}x(t)+\mathrm{B}u(t)\Rightarrow\mathcal{N}\left[\mathrm{E}\mathbf{D}_c^{\alpha}x(t)\right](s,v)=\mathrm{A}\mathcal{N}\left[x(t)\right](s,v)+\mathrm{B}\mathcal{N}\left[u(t)\right](s,v).$$

En utilisant la formule (4.5) et sachant que X et U sont les transformées Naturelle de x et u respectivement, nous obtenons

$$\left(\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha}\mathrm{E}-\mathrm{A}\right)\mathrm{X}(s,v)=\mathrm{BU}(s,v)+\mathrm{E}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{s^{\alpha-1-k}}{v^{\alpha-k}}x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}. \tag{4.20}$$

Comme le faisceau (E, A) est régulier, alors, l'équation (4.20) devient

$$\mathrm{X}(s,v)=\left(\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha}\mathrm{E}-\mathrm{A}\right)^{-1}\mathrm{BU}(s,v)+\left(\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha}\mathrm{E}-\mathrm{A}\right)^{-1}\mathrm{E}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{s^{\alpha-1-k}}{v^{\alpha-k}}x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}.$$

En remplaçant $\left(\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha}\mathrm{E}-\mathrm{A}\right)^{-1}$ par la série de Laurent(4.17), nous obtenons

$$\mathrm{X}(s,v)=\sum_{i=-\mu}^{\infty}\phi_i\left(\frac{s}{v}\right)^{-(i+1)\alpha}\mathrm{BU}(s,v)+\sum_{i=-\mu}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\phi_i\mathrm{E}\left(\frac{s}{v}\right)^{-(i+1)\alpha}\frac{s^{\alpha-1-k}}{v^{\alpha-k}}x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}.$$

L'utilisation de la transformée Naturelle inverse et de ces propriétés donne le résultat souhaité. ■

Proposition 4.5 [5] *Pour $\alpha=1$, la solution du système dynamique linéaire singulier (4.18) est*

$$\begin{aligned}x(t)=&\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i\left(\frac{\mathrm{B}}{\Gamma(i+1)}\int_0^t(t-\tau)^iu(\tau)d\tau+\mathrm{E}\frac{t^i}{\Gamma(i+1)}x(t)\Big|_{t=0}\right)\\&+\sum_{i=1}^{\mu}\phi_{-i}\left(\mathrm{B}u^{(i-1)}(t)+\mathrm{E}\,\delta^{(i-1)}(t)x(t)\Big|_{t=0}\right),\end{aligned} \tag{4.21}$$

où Γ, μ et ϕ représentent la fonction Gamma, l'indice de nilpotence et les matrices fondamentales respectivement.

6 Conclusion

Ce chapitre traite la résolution des systèmes linéaires dynamiques fractionnaires à temps continu à la fois standards et singuliers par la transformation Naturelle. Tout d'abord, nous avons présenté la définition de la transformée Naturelle directe et inverse suivi par quelques propriétés. Ensuite, la transformation Naturelle fractionnaire a été illustré. En dernier, la solvabilité a été traité.

Chapitre 5

Résultats numériques et comparaison

1 Introduction

Dans cette section, nous allons présenter des exemples à la fois académiques et réelles et cela pour les deux cas à savoir système dynamiques fractionnaires standards et singuliers. Pour la résolution, nous utiliserons les trois méthodes présentées précédemment. La dernière partie de ce chapitre est dédiée à une étude comparative sur les trois transformations en précisant leurs avantages et limites.

2 Application à des exemples académiques

La solvabilité des exemples académiques de systèmes dynamiques fractionnaires standards et singuliers est présentée dans cette section en utilisant les trois transformations présentées dans les chapitres précédents.

2.1 Systèmes dynamiques linéaires fractionnaires standards

Soit le système linéaire dynamique fractionnaire standard

$$\mathbf{D}_c^{\alpha} x(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{5.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \tag{5.2}$$

où $\mathbf{D}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x avec $n-1 < \alpha \leq n$ et $n \in \mathbb{N}^*$. $x \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. $A \in \mathbb{R}^{q\times q}$, $B \in \mathbb{R}^{q\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$ et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Exemple 5.1 *Considérons le système (5.1) avec*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

La condition initiale associée au système (5.1) est

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, la commande u est donnée par la fonction de Heaviside H

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}.$$

Comme $\det(s^{\alpha}I - A) = s^{2\alpha} \neq 0$ *pour un certain* $s \in \mathbb{C}$*, alors, en utilisant la transformation de Laplace (formule* (2.11)*), la trajectoire est donnée par*

$$x(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + 1 + \dfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ \dfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.2 *Soit les systèmes* (5.1) *et* (5.2) *avec* $\alpha = \frac{1}{2}$ *et*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad D = 3.$$

La condition initiale associée au système (5.1) *est*

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, l'entrée u est définie par la fonction

$$u(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

Il est clair que le système (5.1) *est régulier, i.e. ;* $\det(I - v^{\alpha}A) = 1 - 2v^{\alpha} \neq 0$ *pour un certain* $v \in \mathbb{C}$*. Ainsi, en utilisant la transformation de Sumudu (formule* (3.12)*), l'état x est donné par*

$$x(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{2\sqrt{\pi}}{\pi} t^{\frac{1}{2}} + 2t + \displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} \dfrac{2^{i+1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(i+1)\right)(i+1)} t^{\frac{i+1}{2}} \\ 2t+2 \\ \dfrac{4\sqrt{\pi}}{\pi} \end{pmatrix}.$$

En dernier, l'utilisation du système (5.2)*, les matrices* C *et* D *et la trajectoire x, la sortie y devient*

$$y(t) = 2t + 2 + 3u(t).$$

Exemple 5.3 *Considérons le système dynamique linéaire fractionnaire standard*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mathbf{D}_c^{\alpha} x(t) &= Ax(t) + Bu(t), && (5.3) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), && (5.4) \end{aligned}$$

où $0 < \alpha \leq 1$ *et*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad D = 0.$$

La condition initiale associée au système (5.3) *est*

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det \mathrm{E} \neq 0$*, alors, le système* (5.3) *est équivalent au système*

$$\mathbf{D}_c^{\alpha} x(t) = \tilde{\mathrm{A}} x(t) + \tilde{\mathrm{B}} u(t), \tag{5.5}$$

avec

$$\tilde{\mathrm{A}} = \mathrm{E}^{-1}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\tilde{\mathrm{B}} = \mathrm{E}^{-1}\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque le système (5.5) *est régulier, c'est-à-dire* $\det\left(\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha}\mathrm{I} - \mathrm{A}\right) = \left(\frac{s}{v}\right)^{4\alpha} - \left(\frac{s}{v}\right)^{3\alpha} \neq 0$ *pour certain* $s \in \mathbb{C}$ *et* $v \in \mathbb{C}^*$*. Donc en utilisant la transformée Naturelle (formule* (4.12)*), la trajectoire* x *est donnée par*

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \dfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ -\displaystyle\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u(\tau)\, d\tau - \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \\ 1 + \dfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \dfrac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \end{pmatrix}.$$

En dernier, l'utilisation du système (5.4)*, les matrices* C *et* D *et l'état* x*, la sortie* y *devient*

$$y(t) = 3 + \frac{2t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}.$$

2.2 Systèmes dynamiques linéaires fractionnaires singuliers

Considérons le système dynamique linéaire fractionnaire singulier

$$\mathrm{E}\mathbf{D}_c^{\alpha} x(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t), \tag{5.6}$$

$$y(t) = \mathrm{C}x(t) + \mathrm{D}u(t), \tag{5.7}$$

où $\mathbf{D}_c^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x avec $n-1 < \alpha \leq n$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^q$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ sont les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie respectivement. $\mathrm{E}, \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{q\times q}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{q\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ avec $\det \mathrm{E} = 0$.

Exemple 5.4 *Soit le système* (5.6) *avec* $0 < \alpha \leq 1$ *et*

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La condition initiale du système (5.6) *est*

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}.$$

On a pour $0 < \alpha \leq 1$

$$s^{\alpha}\mathrm{E}-\mathrm{A}=\begin{pmatrix} s^{\alpha}+1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det(s^{\alpha}\mathrm{E}-\mathrm{A}) = 2(s^{\alpha}+1) \neq 0$ *pour certain* $s \in \mathbb{C}$*, alors, le système* (5.6) *est régulier. De plus,*

$$(s^{\alpha}\mathrm{E}-\mathrm{A})^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{s^{\alpha}+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix},$$

où encore,

$$(s^{\alpha}\mathrm{E}-\mathrm{A})^{-1}=\begin{pmatrix} s^{-\alpha}+s^{-2\alpha}s^{-3\alpha}+\cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

L'indice de nilpotence est

$$\begin{aligned} \mu &= \mathrm{rgE}-\deg(\det(s^{\alpha}\mathrm{E}-\mathrm{A}))+1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

et les matrices fondamentales sont

$$\phi_{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \phi_i=\begin{pmatrix} (-1)^i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

En utilisant la transformée de Laplace (formule (2.23)*), on trouve*

$$x(t) = \phi_{-1}\mathrm{B}u(t)+\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i\mathrm{B}\int_0^t \frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)}u(\tau)d\tau+\phi_{-1}\mathrm{E}\mathbf{D}_c^{\alpha-1}\delta(t)x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i\mathrm{E}\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}x^{(k)}(t)\Big|_{t=0}.$$

D'où : la solution x est donnée par

$$x(t)=\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\int_0^t \frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)}u(\tau)d\tau+(-1)^i x_{0,1}\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} \\ u(t) \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.5 *Considérons le système* (5.6) *avec* $0 < \alpha \leq 1$ *et*

$$\mathrm{E}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \mathrm{D}=2.$$

La condition initiale associe au système (5.6) *est*

$$x_0=\begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ x_{0,3} \end{pmatrix}.$$

Pour un certain $v \in \mathbb{C}$, nous avons

$$\mathrm{E} - v^{\alpha}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -v^{\alpha} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -v^{\alpha} & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque le faisceau du système (5.6) *est régulier; i. ,e.; $\det(\mathrm{E} - v^{\alpha}\mathrm{A}) = -v^{2\alpha} \neq 0$, pour certain $v \in \mathbb{C}$, alors*

$$(\mathrm{E} - v^{\alpha}\mathrm{A})^{-1} = \begin{pmatrix} -v^{-\alpha} & 0 & -v^{-2\alpha} \\ 0 & 0 & -v^{-\alpha} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'indice de nilpotence est

$$\begin{aligned} \mu &= \mathrm{rgE} - \deg(\det(v^{-\alpha}\mathrm{E} - \mathrm{A})) + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

et les matrices fondamentales sont

$$\phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'utilisation du théorème 3.5*, nous donne*

$$x(t) = \sum_{i=1}^{2} \phi_{-i}\mathrm{B}\mathbf{D}_c^{(i-1)\alpha}u(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \mathrm{B} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)} u(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{2} \phi_{-i}\mathrm{E}\mathbf{D}_c^{(i\alpha-1)}\delta(t)x_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \mathrm{E} x_0 \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}.$$

En dernier, l'état x est donné par

$$x(t) = \begin{pmatrix} -u(t) - \mathbf{D}_c^{\alpha}u(t) - \mathbf{D}_c^{\alpha-1}\delta(t)x_{02} \\ -u(t) \\ x_{03} \end{pmatrix}.$$

L'utilisation du système (5.7)*, les matrices* C *et* D *et l'état x, la sortie y devient*

$$y(t) = u(t).$$

Exemple 5.6 *Considérons le système dynamique linéaire fractionnaire* (5.6) *avec* $0 < \alpha \leq 1$ *et*

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad \mathrm{D} = 0.$$

La condition initiale associée au système (5.6) *est*

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour certain $s \in \mathbb{C}$ et un certain $v \in \mathbb{C}^*$, nous avons

$$\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha}\mathrm{E}-\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme le faisceau du système (5.6) est régulier, i. e. ; $\det\left(\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha}\mathrm{E}-\mathrm{A}\right)=-\left(\frac{s}{v}\right)^{2\alpha}\neq 0$. *Alors*

$$\left(\mathrm{E}\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha}-\mathrm{A}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \left(\frac{s}{v}\right)^{-\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \left(\frac{s}{v}\right)^{-2\alpha} & \left(\frac{s}{v}\right)^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'indice de nilpotence est

$$\begin{aligned} \mu &= \mathrm{rgE}-\deg\left(\det\left(\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha}\mathrm{E}-\mathrm{A}\right)\right)+1, \\ &= 1 \end{aligned}$$

et les matrices fondamentales sont

$$\phi_{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \phi_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \phi_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après l'expression donnée dans le théorème 4.3, nous trouvons

$$\begin{aligned} x(t) =&\phi_{-1}\mathrm{B}u(t)+\phi_0\mathrm{B}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u(\tau)d\tau+\phi_1\mathrm{B}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}u(\tau)d\tau+\phi_{-1}\mathrm{E}\mathbf{D}_c^{\alpha-1}\delta(t)x_0 \\ &+\phi_0\mathrm{E}x_0+\phi_1\mathrm{E}\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}x_0. \end{aligned}$$

Donc, la solution x est donnée par

$$x(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ -u(t) \end{pmatrix}$$

La sortie y définie par le système (5.7), les matrices C *et* D *et la trajectoire x est*

$$y(t)=1-u(t).$$

3 Application à des exemples réelles

Exemple 5.7 *Considérons le système dynamique linéaire fractionnaire régulier à temps continu*

$$\mathbf{D}_c^{1.5}x(t) \quad = \quad \mathrm{A}x(t)+\mathrm{B}u(t), \tag{5.8}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_h^{\alpha} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad et \quad \omega_h = 20.$$

Le système dynamique linéaire fractionnaire régulier à temps continu (5.8) *est obtenu à partir d'un modèle de suspension des voitures de degré 1 comme le montre la figure* 5.1.

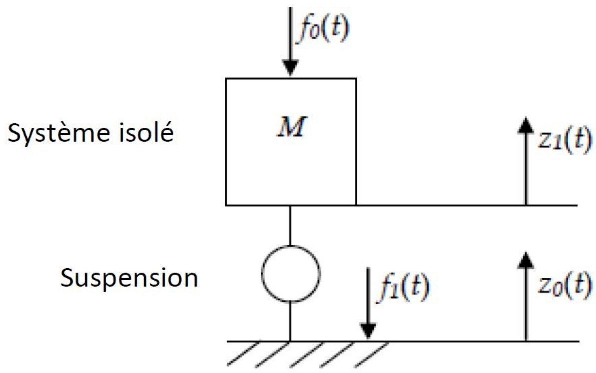

FIGURE 5.1 – Modèle de suspension des voitures de degré 1[11]

M *représente la masse de la voiture,* z_0 *est le profil de la roux,* f_0 *est l'effort appliqué lors de la suspension et* z_1, f_1 *sont la force générée par la suspension et le mouvement vertical de la masse respectivement.*

Par la transformation de Sumudu (*formule* (3.12)), *l'état x est*

$$\begin{aligned} x(t) =& \frac{2\sqrt{\pi}}{\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \int_0^t (t-\tau)^{0.5} u(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\omega_h^{1.5} \end{pmatrix} \int_0^t (t-\tau)^2 u(\tau) d\tau + \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ x_{0,3} \end{pmatrix} \\ &+ \frac{4\sqrt{\pi}}{3\pi} \begin{pmatrix} x_{0,2} \\ x_{0,3} \\ -x_{0,3}\,\omega_h^{1.5} \end{pmatrix} t^{1.5} + \begin{pmatrix} x'_{0,1} \\ x'_{0,2} \\ x'_{0,3} \end{pmatrix} t + \frac{8\sqrt{\pi}}{15\pi} \begin{pmatrix} x'_{0,2} \\ x'_{0,3} \\ -x'_{0,3}\omega_h^{1.5} \end{pmatrix} t^{2.5} \\ &+ \sum_{i=2}^{\infty} \begin{pmatrix} (-\omega_h^{1.5})^{i-2} \\ (-\omega_h^{1.5})^{i-1} \\ (-\omega_h^{1.5})^{i} \end{pmatrix} \Bigg[\frac{1}{(1.5i+0.5)\Gamma(1.5i+0.5)} \int_0^t (t-\tau)^{1.5i+0.5} u(\tau) d\tau \\ &+ \frac{x_{0,3}}{1.5i\,\Gamma(1.5i)} t^{1.5i} + \frac{x'_{0,3}}{(2.25i^2+1.5i)\Gamma(1.5i)} t^{1.5i+1} \Bigg], \end{aligned}$$

où

$$x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ x_{0,3} \end{pmatrix}$$

est la condition initiale associée au système (5.8) *et la dérivée de* $x(t)$ *au point* $t = 0$ *est*

$$x'(0) = x'_0 = \begin{pmatrix} x'_{0,1} \\ x'_{0,2} \\ x'_{0,3} \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.8 *La figure* 5.2 *montre un circuit électrique fractionnaire à deux mailles, où* R_1 *et* R_2 *sont les résistances données,* L_1 *et* L_2 *représentent les inductances, u est la source de voltages. On note par* x_1 *et* x_2 *les intensités du courant dans les deux mailles.*

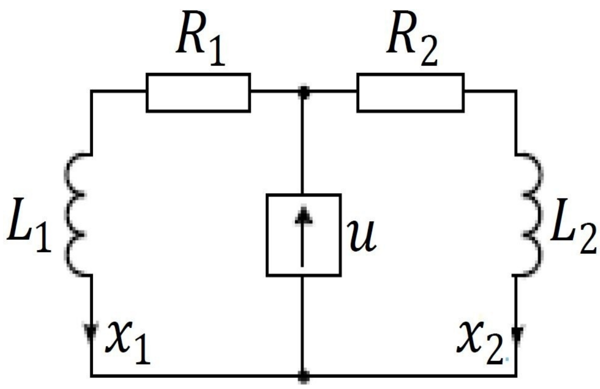

FIGURE 5.2 – Circuit électrique fractionnaire [15]

En appliquant la loi de kirchhoff, nous obtenons l'équation

$$\mathrm{E}\mathbf{D}_c^{\alpha}x(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t), \tag{5.9}$$

avec $0 < \alpha \leq 1$ *et*

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} \mathrm{L}_1 & -\mathrm{L}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} -\mathrm{R}_1 & \mathrm{R}_2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad et \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notons

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$$

la condition initiale associée au système (5.9).

Pour un certain $s \in \mathbb{C}$, *nous avons*

$$(s^{\alpha}\mathrm{E} - \mathrm{A}) = \begin{pmatrix} s^{\alpha}\mathrm{L}_1 + \mathrm{R}_1 & -s^{\alpha}\mathrm{L}_2 - \mathrm{R}_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$\det(s^{\alpha}\mathrm{E} - \mathrm{A}) = s^{\alpha}(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2) + \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 \neq 0,$$

alors, le couple (E, A) *associé au système* (5.9) *est régulier et*

$$(s^{\alpha}\mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s^{\alpha}(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2) + \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2} & \dfrac{s^{\alpha}\mathrm{L}_2 + \mathrm{R}_2}{s^{\alpha}(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2) + \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2} \\ \dfrac{-1}{s^{\alpha}(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2) + \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2} & \dfrac{s^{\alpha}\mathrm{L}_1 + \mathrm{R}_1}{s^{\alpha}(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2) + \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2} \end{pmatrix}.$$

L'indice de nilpotence est

$$\begin{aligned} \mu &= \mathrm{rgE} - \deg(\det(s^{\alpha}\mathrm{E} - \mathrm{A})) + 1, \\ &= 1. \end{aligned}$$

et les matrices fondamentales sont obtenues en utilisant la division Euclidienne comme suit

$$\phi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\mathrm{L}_2}{\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2} \\ 0 & \dfrac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2} \end{pmatrix},$$

et $\forall i \in \mathbb{N}$

$$\phi_i = \begin{pmatrix} (-1)^i \dfrac{(\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2)^i}{(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2)^{i+1}} & (-1)^i \dfrac{\mathrm{R}_2(\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2)^i}{(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2)^{i+1}} + (-1)^{i+1}\mathrm{L}_2 \dfrac{(\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2)^{i+1}}{(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2)^{i+2}} \\ (-1)^{i+1} \dfrac{(\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2)^i}{(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2)^{i+1}} & (-1)^i \dfrac{\mathrm{R}_1(\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2)^i}{(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2)^{i+1}} + (-1)^{i+1}\mathrm{L}_1 \dfrac{(\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2)^{i+1}}{(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2)^{i+2}} \end{pmatrix}.$$

Par l'utilisation de la transformée de (formule (2.23)*), nous obtenons*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \frac{B}{\Gamma((i+1)\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(i+1)\alpha-1} u(\tau)d\tau + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i E \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} x_0$$
$$+ \phi_{-1} E \mathbf{D}_c^{\alpha-1} \delta(t) x_0 + \phi_{-1} B u(t).$$

En dernire, la solution x du système est donnée par le vecteur

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

avec

$$x_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma((i+1)\alpha)} \left[(-1)^i \frac{R_2(R_1+R_2)^i}{(L_1+L_2)^{i+1}} (-1)^{i+1} L_2 \frac{(R_1+R_2)^{i+1}}{(L_1+L_2)^{i+2}} \right] \int_0^t (t-\tau)^{(i+1)\alpha-1} u(\tau)d\tau$$
$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \left[(-1)^i L_1 \frac{(R_1+R_2)^i}{(L_1+L_2)^{i+1}} x_{0,1} + (-1)^{i+1} L_2 \frac{(R_1+R_2)^i}{(L_1+L_2)^{i+1}} x_{0,2} \right] \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} + \frac{L_2}{L_1+L_2} u(t),$$

et

$$x_2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma((i+1)\alpha)} \left[(-1)^i \frac{R_1(R_1+R_2)^i}{(L_1+L_2)^{i+1}} (-1)^{i+1} L_1 \frac{(R_1+R_2)^{i+1}}{(L_1+L_2)^{i+2}} \right] \int_0^t (t-\tau)^{(i+1)\alpha-1} u(\tau)d\tau$$
$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \left[(-1)^{i+1} L_1 \frac{(R_1+R_2)^i}{(L_1+L_2)^{i+1}} x_{0,1} + (-1)^i L_2 \frac{(R_1+R_2)^i}{(L_1+L_2)^{i+1}} x_{0,2} \right] + \frac{L_1}{L_1+L_2} u(t).$$

Exemple 5.9 *Considérons le système suivant, où* R *et* L *sont des constantes et u représente l'entrée*

$$\begin{aligned} L\mathbf{D}_c^{\alpha} x_3(t) &= u(t), \\ x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) &= 0, \\ R x_2 &= u(t). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Le système (5.10) *peut être réécris sous la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{D}_c^{\alpha} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

avec

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -R & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où $0 < \alpha \leq 1$

La condition initiale associée au système (5.10) *est*

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ x_{3,0} \end{pmatrix}.$$

Comme $\det E = 0$ *alors le système* (5.10) *est singulier, par contre, le couple* (E, A) *est régulier vu que pour certain $s \in \mathbb{C}$ et un certain $v \in \mathbb{C}^*$, nous avons*

$$\det\left(\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha} E - A\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & L\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha} \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix} = -RL\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha} \neq 0.$$

L'indice de nilpotence est

$$\begin{aligned}\mu &= \mathrm{rgE} - \deg\left(\det\left(\left(\frac{s}{v}\right)^{\alpha}\mathrm{E}-\mathrm{A}\right)\right)+1\\ &= 1,\end{aligned}$$

et les matrices fondamentales sont

$$\phi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{\mathrm{R}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mathrm{R}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \phi_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{L}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\mathrm{L}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le théorème 4.3, il découle

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{L}}\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u(\tau)d\tau + x_{0,3} + \frac{1}{\mathrm{R}}u(t) \\ \frac{1}{\mathrm{R}}u(t) \\ \frac{1}{\mathrm{L}}\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u(\tau)d\tau + x_{0,3} \end{pmatrix}.$$

4 Comparaison et discussion

Dans cette section nous allons passer au noyau du notre travail lequel est la comparaison entre les trois transformées présentées précédemment en précisant leurs avantages et limites lors de la résolution des différents types de systèmes dynamiques linéaires fractionnaires.

Après avoir étudier les propriétés des transformations en profondeur, nous détectons les différences entre elles. Ces différences nous permettons de déduire la méthode la plus efficace pour la résolution des systèmes dynamiques linéaires fractionnaires.

Il est très connu, dans le domaine de l'ingénierie, que la transformation la plus connue et utilisée est la transformation de Laplace, par contre, la transformation de Sumudu, découverte en 1993, a été peu utilisé dans les premiers temps contrairement à l'heure actuelle où son utilisation ne cesse de croitre. En dernier, la transformation Naturelle a été découverte en 2008, son utilisation reste très limitée.

Dans se qui suit, nous présenterons la comparaison entre les trois transformations. Cette dernière se fait selon leurs propriétés à savoir conditions d'existence, multiplication par un scalaire, la transformation des fonctions spéciales et autres.

4.1 Conditions d'existence

Transformée de Laplace [20]

Une fonction x peut être Laplace transformable si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes

1. x doit être continu par morceaux.
2. x doit être d'ordre exponentiel.
3. x satisfait les conditions de Dirichlet.

Transformée de Sumudu [20]

Si une fonction x est dans l'ensemble $\mathscr{A}$ définit par

$$\mathscr{A} = \left\{ x(t)/\exists \mathrm{M}, \tau_1, \tau_2 > 0 |x(t)| < \mathrm{M}e^{\frac{|t|}{\tau_j}} \; si \; t \in (-1)^j \times [0, \infty] \right\},$$

autrement dit

1. x une fonction continue,
2. x une d'ordre exponentiel.

Alors, sa transformée Sumudu existe.

Transformée Naturelle [32]

Toute fonction x vérifiant les conditions suivantes

1. x une fonction continue par morceaux,
2. x une fonction d'ordre exponentiel,

admet une transformée Naturelle.

Discussion

A partir de ce qui précède, nous remarquons que les transformées Sumudu et Naturelle possèdent moins de conditions en comparant avec la transformée de Laplace.

4.2 Multiplication par un scalaire

Transformée de Laplace

Théorème 5.1 [14] *Soit x une fonction admettant une transformée de Laplace* X*. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, nous avons*

$$\mathscr{L}[x(at)](s) = \frac{1}{a}\mathrm{X}\left(\frac{s}{a}\right).$$

Transformée de Sumudu

Théorème 5.2 [3] *Soit* X *la transformée de Sumudu de la fonction x. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$\mathscr{S}[x(at)](v) = \mathrm{X}(av).$$

Transformée Naturelle

Théorème 5.3 [28] *Soit x une fonction admettant une transformée Naturelle* X*. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, nous avons*

$$\mathscr{N}[x(at)](s, v) = \frac{1}{a}\mathrm{X}(s, v).$$

Discussion

A partir des théorèmes 5.1, 5.2 et 5.3, nous déduirons que les transformations de Laplace et Naturelle change définitivement lors de la multiplication par un scalaire cependant la transformation de Sumudu reste inchangée.

4.3 Propriétés des limites

Transformée de Laplace

Théorème 5.4 [17] *Soit x une fonction admettant une transformée de Laplace* X. *Alors,*

- $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$,
- $\lim_{t\to 0+} x(t) = \lim_{s\to+\infty} sX(s)$,

si les limites envisagées existent.

Transformée de Sumudu

Théorème 5.5 [3, 4] *Soient x et X une fonction et sa transformée de Sumudu respectivement admettant des limites au voisinage de* 0 *et* ∞. *Alors,*

- $\lim_{v\to 0} X(v) = \lim_{t\to 0} x(t)$,
- $\lim_{v\to\pm\infty} X(v) = \lim_{t\to\pm\infty} x(t)$.

Transformée Naturelle

En s'inspirant des deux théorèmes précédent, nous obtenons

Théorème 5.6 *Soient x et X une fonction et sa transformée Naturelle respectivement admettant des limites au voisinage de* 0 *et* ∞. *Alors,*

- $\lim_{v\to 0} X(s,v) = \lim_{t\to 0} x(t)$,
- $\lim_{v\to\pm\infty} X(s,v) = \lim_{t\to\pm\infty} x(t)$.

Discussion

Les transformations de Sumudu et Naturelle ne changent pas de voisinage lors d'un passage à la limite contrairement à la transformation de Laplace.

4.4 Impulsion de Dirac et fonction de Heaviside

Transformée de Laplace [29]

Soient H et δ la fonction de Heaviside et l'impulsion de Dirac respectivement. Alors,

$$\mathscr{L}[H(t)](s) = \frac{1}{s},$$

et

$$\mathscr{L}[\delta(t)](s) = 1,$$

Transformée de Sumudu [30]

Les transformées de Sumudu de la fonction Heaviside et l'impulsion de Dirac sont

$$\mathscr{S}[H(t)](v) = 1,$$

et

$$\mathscr{S}[\delta(t)](v) = \frac{1}{v},$$

respectivement.

Transformée Naturelle [9]

La fonction de Heaviside et l'impulsion de Dirac ont les transformées Naturelle

$$\mathcal{N}[\mathrm{H}(t)](s,v) = 1,$$

et

$$\mathcal{N}[\delta(t)](s,v) = \frac{1}{v},$$

respectivement.

Discussion

La fonction de Heaviside ne change pas d'expression sous effet des transformées Sumudu et Naturelle.

4.5 Autres propriétés

- Une propriété très intéressante de la transformation de Sumudu est que la fonction d'origine et sa transformation de Sumudu ont les mêmes coefficients de Taylor, à l'exception d'un facteur $n!$, comme le montre le théorème suivant.

  Théorème 5.7 [10] *La transformée de Sumudu amplifie les coefficients de la série de puissance. En effet,*

  $$\mathcal{S}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right](v) = \sum_{n=0}^{\infty} n! a_n v^n \tag{5.11}$$

- Le plus grand avantage de la transformée de Sumudu est que la transformation de Sumudu permet de résoudre des problèmes sans recourir à un nouveau domaine de fréquence, i. e. ; la transformée de Sumudu permet la préservation de la fréquence et l'unité [3, 4, 20].

4.6 Discussion générale

D'après tous ce qui précède, nous concluons que la transformation la plus avantageuse est celle de Sumudu.

5 Conclusion

Ce chapitre traite, dans un premier temps, la résolution numérique des systèmes dynamiques linaires fractionnaires standards et singuliers par les trois transformations présentées dans les chapitres précédents. Une comparaison entre les différentes propriétés des transformées a été, ensuite, établie suivie par une discussion qui révèle que la transformée de Sumudu est un outil puissant pour la résolution des différents problèmes.

Conclusion

L'objectif principal de ce travail est de faire une étude comparative entre les différentes transformations pour la résolution des systèmes dynamiques linéaires fractionnaires vu qu'au cours de ces dernières années, les différents phénomènes et dans diverses domaines peuvent être modéliser par des systèmes dynamiques fractionnaires.

L'étude que nous avons menée dans ce mémoire a été organisé en deux parties.

La première partie consiste à la résolution des systèmes dynamiques linéaires fractionnaires standards et singuliers. Cette résolution a été établit par les différentes méthodes passant de la plus classique à savoir la transformation de Laplace, ensuite, la transformée de Sumudu, en dernier, la plus récente, la transformée Naturelle. Des contributions sur ces transformations ont été aussi établit.

Pour la deuxième partie, de ce travail, une étude sur les différentes méthodes présentées précédemment a été faite en citant leurs avantages et leurs points limites. D'après l'état de l'art effectué l'information essentielle à conclure est que la transformation de Sumudu est la transformation la plus efficace pour la résolution des systèmes proposés.

L'étude menée dans ce travail ouvre la voie à plusieurs perspectives. Nous considérons, dans un future proche, la résolution des systèmes dynamiques linéaires fractionnaires bidimensionnels,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\begin{pmatrix}\mathbf{D}^{\alpha_1}_{c,t_1}(t_1,t_2)\\ \mathbf{D}^{\alpha_2}_{c,t_2}(t_1,t_2)\end{pmatrix} &= \mathrm{A}\begin{pmatrix}x^h(t_1,t_2)\\ x^v(t_1,t_2)\end{pmatrix} + \mathrm{B}u(t_1,t_2),\\
y(t_1,t_2) &= \mathrm{C}\begin{pmatrix}x^h(t_1,t_2)\\ x^v(t_1,t_2)\end{pmatrix} + \mathrm{D}u(t_1,t_2),
\end{aligned}$$

où $\mathbf{D}^{\alpha_1}_{c,t_1}$ et $\mathbf{D}^{\alpha_2}_{c,t_2}$ sont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo de x^h et x^v par rapport à t_1 et t_2 respectivement avec $n_1 - 1 < \alpha_1 \leq n_1$ et $n_2 - 1 < \alpha_2 \leq n_2$
et $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, $x^h \in \mathbb{R}^{q_1}$, $x^v \in \mathbb{R}^{q_2}$ sont les vecteurs d'états, avec $q_1 + q_2 = q$, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie, $\mathrm{A}, \mathrm{E} \in \mathbb{R}^{q\times q}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{q\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$, par la méthode la plus puissante dans le cas où la matrice E est inversible ou non.

Bibliographie

[1] **Aström, K. J.**, (1970), *Introduction to stochastic control theory*, Academic press. 1

[2] **Baleanu, D., Machado, J. A. T., and Luo, A. C. J.**, (2012), *Fractional Dynamics and Control*, Springer-Verlag, New York. 1, 8

[3] **Belgacem, F. B. M., and Karaballi, A. A.**, (2006), *Sumudu Transform Fundamental Properties Investigations And Applications*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, Hindawi Publishing Corporation, **2006**, Article ID 91083, 23 pages. https ://doi.org/10.1155/JAMSA/2006/91083. 1, 18, 19, 44, 45, 46

[4] **Belgacem, F. B. M., Karaball, A. A., and Kalla, S.**, (2003), *Analytical investigations of the sumudu transform and applications to integral production equations*, Problems in Engineering, Hindawi Publishing Corporation, **3**, 103–118. 1, 18, 19, 45, 46

[5] **Bouagada, D.**, (2007), *Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs.* Thèse de Doctorat en Mathématiques, Université d'Oran, Algérie. 15, 16, 17, 23, 25, 28, 30, 32

[6] **Bouagada, D., and Van Dooren, P.**, (2012), *State space solution of implicit fractional continuous-time systems*, An international journal for theory and Applications . **15(3)**, 356–361. 1, 13, 14, 17, 29, 31

[7] **Caponetto, R .**, (2010), *Fractional Order Systems : Modeling and Control Applications*, World scientific series on nonlinear science, Series A, 72, World scientific, Singapore. 1, 8

[8] **Caputo, M.**, (1969), *Elasticità e Dissipazione*, Zanichelli, Bologna. 1, 6

[9] **Chindhe, A. D., and Kiwne, S. B.**, (2018), *On The Generalized Natural Transform*, Mathematical Journal of Interdisciplinary Sciences, **7(3)**, 9–13. 1, 27, 46

[10] **Eltayeb, H. and Kiliçman, A.**, (2010), *A Note on the Sumudu Transforms and Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences **4(22)**, 1089 – 1098. 1, 20, 46

[11] **Fadiga, L., Farges, C., Sabatier, J., and Moze, M.**, *On computation of $\mathscr{H}_\infty$-norm for Commensurate Fractional order Systems,* 50^{th} IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, Orlando, FL, USA, 8231–8236. v, 1, 40

[12] **Gantmacher, F. R.**, (2000), *The Theory of Matrices*, American Mathematical Society Chelsea Publishing, Rhode Island. 4, 5, 16

[13] **Kaczorek,T.**, (2011), *Selected problems of fractional systems theory*, Lecture Note in Control and Information Sciences, **411**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 1, 13, 14, 15, 28, 31

[14] **Kaczorek, T., and Rogowski, K.**, (2015), *Fractional Linear Systems and Electrical Circuits*, Studies in Systems, Decision and Control, **13**, Springer International Publishing, Switzerland. 1, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 44

[15] **Kaczorek,T.**, (2011), *Singular Fractional Linear Systems and Electrical Circuits*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., **21(2)**, 379–384. v, 1, 3, 4, 21, 23, 28, 29, 31, 41

[16] **Kaczorek, T.**, (2002), *Positive 1D and 2D systems*, Communications and Control Engineering, Springer-Verlag London Ltd.

[17] **Kaisserli. Z., and Bouagada, D.**, (2019), *Solution of State-Space Singular Continuous-Time Fractional Linear Systems using Sumudu Transform*, à paraitre dans Lobachevskii Journal of Mathematics 1, 24, 28, 31, 45

[18] **Kaisserli. Z., and Bouagada, D.**, (2021), *Application of the Sumudu transform to Solve Regular Fractional Continuous-Time Linear Systems*, Kragujevac Journal of Mathematics **45(2)**, 267–274. 1, 21, 23, 28, 29

[19] **Katatbeh, Q. D., and Belgacem, F. B. M.**, (2011), *Applications of the Sumudu transform to fractional differential equations*, Nonlinear Studies, **18(1)**, 99–112. 20

[20] **Kiliçman, A., Eltayeb, N., and Atan, R. A. M.**, (2011), *A note on the comparison between Laplace and Sumudu transforms*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, **37**, 131–141. 1, 11, 43, 44, 46

[21] **Lewis, F. L., and Mertzios, B. G.**, (1990), *On the analysis of discrete linear time-invariant singular systems*, IEEE, Transaction on Automatic Control, **35(4)**, 506–511.

[22] **Mertzios, B. G., and Lewis, F. L.**, (1989), *Fundamental matrix of discrete singular systems*, Circuits, Systems, Signal Processing, **8(3)**, 341–355

[23] **Monje, C. A.** ,(2010), *Fractional-order Systems and Controls : Fundamentals and Applications*, Advances in Industrial Control, Springer. 1, 8

[24] **Ortigueira, M. D and Machado, J . A . T .** , (2006), *Fractional calculus applications in signals and systems*, Signal Processing, Elsevier, Special Issue, **86**(10), 2503–3094 . 1, 8, 19

[25] **Podlubny, I.**, (1998), *Fractional Differential Equations*, **198**, Academic Press, New York. 1

[26] **Sabatier, J., Agrawal, O. P., and Machado, J. A. T.**, (2007), *Advances in Fractional Calculus, Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, Springer Netherlands, London. 1

[27] **Samko, S. G., Kilbas, A. A., and Marichev, O. I.**, (1993) *Fractional Integrals and derivatives : Theory and Applications*, Gorden and Breach Science Publisher, Amsterdam, the Netherlands. 1

[28] **Valerio, D., and Da Costa, J. S.**, (2013), *An introduction to Fractional Control*, Control Engineering Series **91**. The Institution of Engineering and Technology, London, United Kingdom. 1, 44

[29] **Vashi, J., and Timol, M. G.**, (2016), *Laplace and Sumudu transforms and their application*, International Journal of Innovation Science, Engineering & Technology, **3(8)**, 538–542. 12, 45

[30] **Watugala, G. K.**, (1993), *Sumudu transform : a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **24**, 35–43. 1, 18, 19, 45

[31] **Yosida, K.**, (1980), *Functional Analysis*, Sixth Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 19

[32] **Zafar, H. K., and Waqar, A. K.**, (2008), *N-Transform propperties and Applications*, NUST journal of Engineering sciences. **1(1)**, 127–133. 1, 26, 27, 28, 44

Résolution des systèmes linéaires fractionnaires : Une étude comparative

Résumé : Ce travail porte essentiellement sur les systèmes dynamiques linéaires fractionnaires vu leur importance utilisation dans de nombreux domaines.

Nous avons tout d'abord étudié la résolution des systèmes dynamiques linéaires fractionnaires par trois transformations différentes. Ces transformations sont la transformée de Laplace, la transformée de Sumudu, en dernier la transformée Naturelle.

Pour chacune des transformations nous avons précisé leurs caractéristiques et propriétés lesquelles peuvent se distinguer l'une à l'autre. A travers de cette étude de propriétés nous avons établie une étude comparative qui a montré que la transformée de Sumudu est la transformation la plus avantageuse pour la résolution ce type des systèmes.

Mots-Clés. Transformée de Laplace ; Transformée de Sumudu ; Transformée Naturelle ; Systèmes dynamiques linéaires fractionnaire ; Série de Laurant.

Resolution of fractional linear systems : A comparative study

Abstract : The main goal of this work focuses on fractional linear systems since their importance in many fields and areas.

In the first part of this manuscript, we establish the solution of fractional linear systems using three different transformations. These transformations are the Laplace transform, the Sumudu transform, and finally the Natural transform.

For each transformations we have specified their characteristics and properties which can be distinguished from each other. Through this study, a comparative study has been established who showed that the Sumudu transform is the most advantageous transformation for the resolution such systems.

Key Words. Laplace transform ; Sumudu transform ; Natural transform ; Fractional linear systems ; Laurant series.