Ministère de l'Enseignement Supèrieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Analyse Fonctionnelle"

présenté par :

Mr. MAZOUZ SAID

SOLVABILITE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ELLIPTIQUES, ETABLIEES DANS TROIS HABITATS AVEC DES CONDITIONS LIMITES D'ASYMETRIE AUX INTERFACES

soutenu publiquement le Juin 2019 *devant le jury composé de :*

Président :	Mr. MEDEGHRI AHMED	professeur	Université UMAB
Examinateur :	Mr. RABAH HAOUA	MCB	Université UMAB
Encadreur :	Mr. MENAD ABDALLAH	MCB	Université UMAB

Année Universitaire : 2018 / 2019

M
A
S
T
E
R

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

......

Soutenue le : ../../2019
Devant le jury composé de :

Président
Examinateurs

Directeurs de thèse

Table des matières

Remerciements

....

Introduction

0.1 Motivation

Dans ce travail, on étudie certains problèmes de dispersion de la dynamique de populations qui intègrent des réponses aux intrfaces entre les différents types d'habitats. Ces problèmes sont basés sur des équations aux dérivées partielles de type parabolique situées dans le paysage suivant constitué par trois habitats différents :

$$\Omega = \Omega_- \cup \Omega_0 \cup \Omega_+,$$

où

$$\begin{cases} \Omega_- = \,]-l, 0[\, \times \,]0, 1[\\ \Omega_0 = \,]0, 2L[\, \times \,]0, 1[\\ \Omega_+ = \,]2L, 2L + l[\, \times \,]0, 1[\,, \end{cases}$$

avec $l, L > 0$. L'équation de diffusion est

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = \begin{cases} d.\triangle u_-(t, x, y) + Fu(t, x, y)) & \text{dans} \quad]0, T[\, \times \Omega_- \\ d_0.\triangle u_0(t, x, y) + F_0(u(t, x, y)) & \text{dans} \quad]0, T[\, \times \Omega_0 \\ d.\triangle u_+(t, x, y) + F(u(t, x, y)) & \text{dans} \quad]0, T[\, \times \Omega_+, \end{cases} \tag{1}$$

sous la condition initiale

$$u(0, x, y) = \begin{cases} \varphi_-(x, y) & \text{dans} \quad \Omega_- \\ \varphi_0(x, y) & \text{dans} \quad \Omega_0 \\ \varphi_+(x, y) & \text{dans} \quad \Omega_+, \end{cases}$$

les conditions aux limites

$$\begin{cases} u_-(t, -l, y) = f_-(t, y), & y \in \,]0, 1[\\ u_-(t, x, 0) = u_-(t, x, 1) = 0, & x \in \,]-l, 0[\\ u_0(t, x, 0) = u_0(t, x, 1) = 0, & x \in \,]0, 2L[\\ u_+(t, x, 0) = u_+(t, x, 1) = 0, & x \in \,]2L, 2L + l[\\ u_+(t, 2L + l, y) = f_+(t, y) & y \in \,]0, 1[\,, \end{cases} \tag{2}$$

les conditions de continuité aux interfaces $\Gamma_0 = \{0\} \times \,]0, 1[$, $\Gamma_{2L} = \{2L\} \times \,]0, 1[$

$$\begin{cases} u_0(t, 0, y) = u_-(t, 0, y), & y \in \,]0, 1[\\ u_0(t, 2L, y) = u_+(t, 2L, y), & y \in \,]0, 1[\,, \end{cases} \tag{3}$$

et les conditions d'interface d'assymetrie sont

$$\begin{cases} (1 - p)d\dfrac{\partial u_-}{\partial x}(t, 0, y) = pd_0\dfrac{\partial u_0}{\partial x}(t, 0, y), \ y \in \,]0, 1[\\ pd_0\dfrac{\partial u_0}{\partial x}(t, 2L, y) = (1 - p)d\dfrac{\partial u_+}{\partial x}(t, 2L, y), \ y \in \,]0, 1[\,. \end{cases} \tag{4}$$

Nous avons utilisé ci-dessus les notations naturelles

$$u_- = u/_{\Omega_-}, \qquad u_0 = u/_{\Omega_0}, \quad u_+ = u/_{\Omega_+}.$$

Ici, $u(t,x,y)$ représente la densité de la population, Ω_0 c' est le refuge alors que

$$\Omega_{-} \cup \Omega_{+},$$

est la zone tampon avec leurs coefficients de diffusion correspondants d_0 et d .

L'équation 2.1 désigne la diffusion dans les habitats avec F_0 et F représentent la croissance et la décroissance de la population dans les zones tampons respectives. Dans les conditions aux bords 2 la densité de la population est fixée sur $\{-l\} \times]0,1[$ et$\{2L+l\} \times]0,1[$. Les conditions 3 explicitent la continuité de la population, les conditions 4 sont basées sur la notion du mouvement brownien biaisé caractérisé par le paramètre $p \in]0,1[$ .Dans notre travail on supposera le cas intéréssant du mouvement brownien biaisé correspondant à l'hypothèse

$$p \neq \frac{1}{2}.$$

On considère dans ce travail uniquement la partie linéaire des fonctions logistiques, c'est-à-dire

$$\begin{cases} F(u(t,x,y)) = -ru_{-} & \text{sur} \quad]-l,0[\times]0,1[\\ F_0(u(t,x,y)) = r_0 u_0 & \text{sur} \quad]0,2L[\times]0,1[\\ F(u(t,x,y)) = -ru_{+} & \text{sur} \quad]2L,2L+l[\times]0,1[, \end{cases}$$

avec r_0 est le taux de croissance dans le refuge et r le taux de mortalité dans les zones tampons, donc notre problème stationnaire devient

$$(P)\begin{cases} (Eqs)\begin{cases} d\triangle u_{-} - ru_{-} = g_{-} & \text{sur} \quad]-l,0[\times]0,1[\\ d_0\triangle u_0 + r_0 u_0 = g_0 & \text{sur} \quad]0,2L[\times]0,1[\\ d\triangle u_{+} - ru_{+} = g_{+} & \text{sur} \quad]2L,2L+l[\times]0,1[\end{cases} \\ (Bound.C)\begin{cases} u=0 \quad \text{dans} \quad]-l,2L+l[\times\{0\} \\ u=0 \quad \text{dans} \quad]2L,2L+l[\times\{1\} \\ u_{-}=f_{-} \quad \text{dans} \quad \{-l\}\times]0,1[\\ u_{+}=f_{+} \quad \text{dans} \quad \{2L+l\}\times]0,1[\end{cases} \\ (Int\,\mathrm{erf}\,.C.)\begin{cases} u_{-}=u_0 \quad \text{dans} \quad \{0\}\times]0,1[\\ u_0=u_{+} \quad \text{dans} \quad \{2L\}\times]0,1[\end{cases} \\ (Skew.C.)\begin{cases} (1-p)d\dfrac{\partial u_{-}}{\partial x}(0,y) = pd_0\dfrac{\partial u_0}{\partial x}(0,y), \;\; y \in]0,1[\\ pd_0\dfrac{\partial u_0}{\partial x}(2L,y) = (1-p)d\dfrac{\partial u_{+}}{\partial x}(2L,y), \;\; y \in]0,1[, \end{cases} \end{cases}$$

où g_{-}, g_0 et g_{+} sont des fonctions données dans un espace approprié.

L'objectif de ce travail est de donner une analyse complète de (P), afin d'étudier le problème d'évolution 1∼4.

L'étude de l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution du problème (p) nous permet d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes sur les données aux niveau des interfaces.

Notres techniques utilisées sont basées sur la théorie des semi-groupes, les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires, les espaces d'interpolation, le calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels.

Les résultats obtenus dans ce travail sont donnés par théorème 4.1 et 4.2 page 40, théorème 4.3 et 4.4 page 47 et théorème 4.5 et 4.6 page 50.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à des rappels d'usage sur les outils mathématiques utilisés dans ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, on donne la représentation de la solution du notre problème en utilisant les semi-groupes, les puissances fractionnaires.

Au troisième chapitre, on étudie l'inversibilité de l'opérateur Δ le déterminant du système dans la solution en utulisant le calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels et quelques inégalités d'analyse complexe.

Dans le dernier chapitre, on étudie la régularité de la solution à l'aide des lemmes techniques qui sont basés sur les éspaces d'interpolations et les résultats de Sinestrari. On donne des conditions nécessaires et suffisantes sur les données entre les différents types d'habitats.

Chapitre 1

Notions et rappels

1.1 Opérateurs liénaires fermés

On rappelle que A est un opérateur linéaire sur un espace de Banach X si et seulement si c'est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A)$ (domaine de définition de A) de X à valeurs dans X .

Alors

1. A est dit borné si
$$D(A) = X \text{ et } \exists C > 0; \ \|A\zeta\| \leq C \|\zeta\|_X$$
et on écrit $A \in \mathcal{L}(X)$.
2. A est dit fermé si et seulement si son graphe est fermé, i.e, pour toute suite $(x_n)_n \subset D(A)$ telle que,
$$\begin{cases} x_n \to x, \\ Ax_n \to y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in D(A) \\ Ax = y \end{cases}$$
3. A est dit fermable si et seulement s'il admet une extension fermée, ce qui équivaut à dire que pour toute suite $(x_n)_n \subset D(A)$ telle que,
$$\begin{cases} x_n \to 0, \\ Ax_n \to y \end{cases} \Rightarrow y = 0$$
Les convergences des suites x_n et Ax_n sont au sens de la norme de l'espace X.

Définition 1.1 *Soit X un espace de Banach complexe, muni de la norme $\|.\|_X$. On appelle,*

- **Spectre de A, l'ensemble**
$$\sigma(A) = \{\lambda \epsilon\, \mathbb{C} \text{ t.q } (A - \lambda I) \text{ non inversible}\}.$$
- **Ensemble résolvant de A**, le complémentaire du $\sigma(A)$ dans $\mathbb{C}$ noté $\rho(A)$, c'est -à-dire
$$\rho(A) = \left\{\lambda \epsilon\, \mathbb{C} \text{ t.q } (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\right\}.$$
- **Résolvante de A**, l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ pour $\lambda \in \rho(A)$.

1.2 Les semi-groupes

Définition 1.2 *On appelle semi-groupe fortement continu (ou vérifiant la c_0-condition), une application*

$$\begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \zeta(X) \\ t \to G(t) \end{cases}$$

Telle que,

a) $G(0) = I$

b) $G(t+s) = G(t)G(s)$, $\forall t,\ s \geqslant 0$

c) $\forall\ \varphi \in X$ l'application

$$\begin{cases} \mathbb{R}^+ \to X \\ t \to G(t)\varphi, \end{cases}$$

est fortement continue en 0,

$$(\forall \varphi \in X,\ \lim_{t\to 0^+} \|G(t)\varphi - \varphi\|_X = 0)$$

1) si $t \in \mathbb{R}$, $(G(t))$ est dit groupe.

2) la condition $c)$ n'implique pas que

$$\lim_{t\to 0^+} \|G(t) - I\|_X = 0$$

Définition 1.3 *On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe$(G(t))$, l'opérateur linéaire non borné A définie par*

$$\begin{cases} D_A = \left\{ \varphi \in X : \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{G(t)\varphi - \varphi}{t} \text{ existe dans } X \right\} \\ \forall \varphi \in D_A, \quad A\varphi = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{G(t)\varphi - \varphi}{t}. \end{cases}$$

1.2.1 Semi-groupes analytiques

Définition 1.4 *Soit X un espace de Banach complexe. Soit le secteur*

$$\sum = \{ z \in \mathbb{C} : \theta_1 < \arg z < \theta_2 \ \textit{et}\ \theta_1 < 0 < \theta_2 \},$$

soit $\{G(z)\}_{z\in\sum}$ une famille d'opérateur linéaire bornée sur X, on dit que $\{G(z)\}_{z\in\sum}$ forme un semi-groupe holomorphe, si elle vérifie :

1) $G(0) = I$.

2) $G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2)$, pour tout $z_1,\ z_2 \in \sum$.

3) $\lim_{z\to 0_{z\in\sum}} G(z)\varphi = \varphi$, pour $\varphi \in X$.

4) L'application $z \in \sum \setminus \{0\} \to G(z)\varphi \in X$ est holomorphe $\forall \varphi \in X$.

Théorème 1.1 *(Théorème de Kato)*

Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire non borné vérifiant

1) A est fermé.

2) $\overline{D(A)} = X$ (densité)

3) $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \text{Re } \lambda \geqslant 0\}$ et $\exists L > 0 \ /\forall \lambda \in \rho(A)$ on a

$$\left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_X \leqslant \frac{L}{|\lambda|}.$$

Alors, A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe tel que :

1) $\exists M > 0/\forall t > 0; \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M.$

2) $\forall t > 0,\ G(t) \in \mathcal{L}(X, D(A))$ et $\|AG(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{t}.$

1.3 Les espaces d'interpolation

Définition 1.5 *Soit X un espace de Banach, on désigne par $L_*^p(\mathbb{R}_+, X)$ avec $p \in [1, +\infty[$, l'espace de Banach des fonctions f fortement mesurables définies pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$*

et telles que

$$\left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} = \|f(t)\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X)} < +\infty.$$

Si $p = +\infty$, on définit l'espace $L_*^p(\mathbb{R}_+, X)$ par

$$f \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f : \mathbb{R}_+ \to X, \text{ est fortement mesurable et} \\ \sup ess_{0<t<\infty} \|f(t)\|_X < \infty. \end{array} \right.$$

Définition 1.6 *Soient $(X_0, \|.\|_0)$ et $(X_1, \|.\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continument dans un espace topologique séparé E.*

Pour $p \in [1, +\infty[$, et $\theta \in]0, 1[$, on dit que $x \in (X_0, X_1)_{\theta.p}$ si et seulement si

1) $\forall t > 0,\ \exists u_0(t) \in X_0,\ \exists u_1(t) \in X_1 : x = u_0(t) + u_1(t)$

2) $t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0),\ t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1)$

Proposition 1.1 *Soient $(X_0 \cap X_1,\ \|.\|_{X_0 \cap X_1})$, $(X_0 + X_1,\ \|.\|_{X_0+X_1})$ et $\Big((X_0, X_1)_{\theta,p}, \|.\|_{\theta,p}\Big)$ des espaces de Banach pour les normes respectives*

- $\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1}$ si $x \in X_0 \cap X_1$
- $\|x\|_{X_0+X_1} = \inf\limits_{\substack{x_i \in X_i,\ i=0,1 \\ x = x_0 + x_1}} (\| x_0\|_{X_0} + \| x_1\|_{X_1})$ si $x \in X_0 + X_1$
- $\|x\|_{\theta,p} = \inf\limits_{\substack{u_i : \mathbb{R}_+ \to X_i,\ i=0,1 \\ \forall t>0,\ u_0(t)+u_1(t)=x}} (\left\|t^{-\theta} u_0\right\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0)} + \left\|t^{1-\theta} u_1\right\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1)})$ si $x \in (X_0, X_1)_{\theta,p}$,

et de plus

$$X_0 \cap X_1 \subset (X_0, X_1)_{\theta,p} \subset X_0 + X_1$$

avec injections continues.

Notation 1.1

$$(X_0, X_1)_{\theta,p} = (X_1, X_0)_{1-\theta,p}.$$

Définition 1.7 *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$ muni de la norme,*

$$\forall x \in D(A) : \|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X ,$$

on a alors,

$$D_A(\theta, p) = (D_A, X)_{1-\theta,p} \quad \text{pour } p \in [1, +\infty] \text{ et } 0 < \theta < 1.$$

Grâce à la propriété de réitération on a :

$$D_A(m\theta, p) = D_{A^m}(\theta, p),$$

où m entier$\geqslant 1$, $p \in [1, +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$, (voir [6]) , cas particulier $m = 2$
on a

$$D_A(2\theta, p) = D_{A^2}(\theta, p),$$

1.4 Calcul fonctionnel

1.4.1 Opérateurs sectoriels

Soit A un opérateur linéaire fermé sur X, vérifiant les propriétés suivantes, il existe $\theta \in [0, \pi[$ tels que $\sigma(A) \subseteq \overline{S_\theta}$

$$S_\theta = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C},\ z \neq 0, |\arg\ z| < \theta\} & \text{si } 0 < \theta < \pi \\ (0, \infty) & \text{si} \quad \theta = 0. \end{cases}$$

et pour tout $\alpha \in]\theta, \pi[$,

$$\sup_{w \in \mathbb{C} \setminus S\alpha} \left\| w(wI - A)^{-1} \right\| < +\infty$$

(on dit que A est un opérateur sectoriel avec angle spectral θ) (voir [12] p 17) .

On remarque que si $\mathbb{R}^- \subseteq \rho(A)$ et $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda \left\|(\lambda I + A)^{-1}\right\| < \infty+$ alors A est sectoriel (voir [10] ; lemme 6 :4 :1) :

Remarque 1.1 *Soit* $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$z \in S_\alpha \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{|\mathrm{Im}\ z|}{\mathrm{Re}\ z} < \tan \alpha. \tag{1.1}$$

Définition 1.8 *Pour* $\varphi \in]0, \pi[$

- $H(S_\varphi)$: l'espace des fonctions holomorphes de S_φ dans $\mathbb{C}$.
- $H^\infty(S_\varphi) = \{f \in H(S_\varphi) : \sup_{z \in S_\varphi} |f(z)| < \infty\}$.
- $H_0^\infty(S_\varphi) = \{f \in H(S_\varphi) : \exists s \in \mathbb{R}^+ \ \sup_{z \in S_\varphi} \max\{|z|^S, |z|^{-S}\} |f(z)| < \infty\}$.
- $H_p(S_\varphi) = \{f \in H(S_\varphi) : \exists s \in \mathbb{R}^+ \ \sup_{z \in S_\varphi} \min\{|z|^S, |z|^{-S}\} |f(z)| < \infty\}$.

Remarque 1.2

$$H_0^\infty(S_\varphi) \subseteq H^\infty(S_\varphi) \subseteq H_p(S_\varphi) \subseteq H(S_\varphi)$$

et $H_0^\infty(S_\varphi)$ est un espace de Banach muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{z\in S_\varphi} |f(z)|$.

Définition 1.9 *Soit A un opérateur sectoriel, injectif et $\overline{\mathrm{Im}(A)} = X$, alors pour $f \in H_0^\infty(S_\varphi)$, on définit l'opérateur linéaire bornée $f(A)$*

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_\alpha} f(z)(zI - A)^{-1}dz.$$

ou $\alpha \,\epsilon\,]\theta, \varphi[$ et τ_α est un chemin dans le plan complexe composé par deux demi-linges

$$\left\{\rho\, e^{\pm i\alpha}, \rho \in\ \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\right\},$$

orienté avec une partie imaginaire décroissante (voir [12] p 27).

Définition 1.10 *On dit que A admet $H^\infty(S_\varphi)$ calcul fonctionnel borné si pour tout $f \in H^\infty(S_\varphi)$ l'opérateur $f(A)$ est borné et il existe $c \in \mathbb{R}^+$ (indépendante de f) tel que*

$$\|f(A)\| \leq c\,\|f\|_\infty$$

Proposition 1.2 *Soit A un opérateur sectoriel, injectif et $\overline{\mathrm{Im}(A)} = X$.*

S'il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $f \in H_0^\infty(S_\varphi)$ on a : $\|f(A)\| \leq c\,\|f\|_\infty$ alors A admet $H^\infty(S_\varphi)$ calcul fonctionnel borné .

Preuve. voir [5] corollaire 2.2 ou [9], théorème 4.9. ■

Proposition 1.3 *Soit A un opérateur sectoriel, injectif et $\overline{\mathrm{Im}(A)} = X$.*

–

$$f, g \in H_p(S_\varphi) \Rightarrow \begin{cases} f(A) + g(A) \subseteq (f+g)(A) \\ f(A).g(A) \subseteq (f.g)(A) \end{cases}$$

–

$$\begin{cases} f, g \ \in\ H_p(S_\varphi) \\ g(A) \ \in\ \zeta(X) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(A) + g(A) = (f+g)(A) \\ f(A).g(A) = (f.g)(A) \end{cases}$$

– Pour la preuve voir [5] ou [9], théorème 4.5 et corollaire 4.6 .

Proposition 1.4 *Soit A un opérateur sectoriel, injectif et $\overline{\mathrm{Im}(A)} = X$.*

Si $f \in H_p(S_\varphi)$,$(\frac{1}{f}) \in H_p(S_\varphi)$ et $(\frac{1}{f})(A) \in \mathcal{L}(X)$ alors $f(A)$ est inversible à inverse borné

$$[f(A)]^{-1} = (\frac{1}{f})(A)$$

Preuve. voir [7], proposition 3.3 ■

Proposition 1.5 *Soit A un opérateur sectoriel, injectif et $\overline{\mathrm{Im}(A)} = X$.*

Si A admet $H^\infty(S_{\frac{\varphi}{2}})$ calcul fonctionnel borné alors $A^{\frac{1}{2}}$ est un opérateur sectoriel, injectif, $\overline{\mathrm{Im}(A)} = X$ et admet $H^\infty(S_{\frac{\varphi}{2}})$ calcul fonctionnel borné .

Preuve. voir [7], proposition 3.4 ■

1.4.2 Les espaces de Hölder

Définition 1.11 *Soient E un espace de banach complexe et $C([0,1],E)$ lespace de banach des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans E, muni de la norme*

$$\|f\|_{C(X)} = \max_{t\in[0,1]} \|f(t)\|_E .$$

On considére, pour $0<\theta<1$, l'espace

$$C^\theta([0,1],E) = \left\{ f \in C([0,1],E) \backslash \sup_{t-s\neq 0} \frac{\|f(t)-f(s)\|_E}{|t-s|^\theta} < +\infty, \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^\theta(E)} = \|f\|_{C(E)} + \sup_{t-s\neq 0} \frac{\|f(t)-f(s)\|_E}{|t-s|^\theta}.$$

Chapitre 2

Représentation de la solution

2.1 Formulation opérationnelle de P

On définit l'opérateur A dans l'espace de Banach $E = C([0,1])$,

$$\begin{cases} D(A) = \{\varphi \in C^2([0,1]) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\} \\ (A\varphi)(y) = \varphi''(y). \end{cases}$$

Cet opérateur fermé vérifie l'hypothèse d'ellipticité de Krein suivante

$$\begin{cases} \text{pour tout } \eta \in \left]0, \pi\right[, \rho(A) \supset S_{\pi-\eta} \cup \{0\} \text{ et} \\ \exists C > 0 : \forall \lambda \in S_{\pi-\eta} \cup \{0\}, \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{L(E)} \leq \dfrac{C}{1 + |\lambda|}, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\rho(A)$ désigne l'ensemble résolvant de A et,

$$S_\eta = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\arg z| < \eta\}, \text{ avec } \eta \in \left]0, \pi\right[,$$

et Il existe une boule $\beta(0,\delta)$, $\delta > 0$, Tel que $\rho(A) \supset \overline{\beta(0,\delta)}$ et l'estimation en 2.1 est toujours vraie dans $S_{\pi-\eta} \cup \overline{\beta(0,\delta)}$.

Les notations usuelles suivantes des fonctions à valeurs vectorielles

$$u_\pm(x)(y) := u_\pm(x,y), \; u_0(x)(y) := u_0(x,y),$$

permettant alors d'écrire le problème (P) dans l'espace E, comme suit :

$$(P_A) \begin{cases} (\text{Eqs}) \begin{cases} u''_-(x) + Au_-(x) - \dfrac{r}{d} u_-(x) = \dfrac{g_-(x)}{d} & \text{sur } \left]-l, 0\right[\\ u''_0(x) + Au_0(x) + \dfrac{r_0}{d_0} u_0(x) = \dfrac{g_0(x)}{d_0} & \text{sur } \left]0, 2L\right[\\ u''_+(x) + Au_+(x) - \dfrac{r}{d} u_+(x) = \dfrac{g_+(x)}{d} & \text{sur } \left]2L, 2L+l\right[\end{cases} \\ (\text{Bound.C}) \begin{cases} u_-(-l) = f_- \\ u_+(2L+l) = f_+ \end{cases} \\ (\text{Int erf .C.}) \begin{cases} u_-(0) = u_0(0) \\ u_0(2L) = u_+(2L) \end{cases} \\ (\text{Skew.C.}) \begin{cases} (1-p)du'_-(0) = pd_0 u'_0(0) \\ pd_0 u'_0(2L) = (1-p)du'_+(2L) \end{cases} \end{cases},$$

la fonction g est telle que

$$\begin{cases} g_- = g|_{[-l,0]} \in C^\theta([-l,0]\,;E) \\ g_0 = g|_{[0,2L]} \in C^\theta([0,2L]\,;E) \\ g_+ = g|_{[2L,2L+l]} \in C^\theta([2L,2L+l]\,;E), \end{cases}$$

(avec $0 < \theta < 1$).

Remarque 2.1 *L'höldérianité de g_-, g_0 et g_+ implique L'höldérianité globale de g sur $[-l, 2L+l]$ si et seulement si $g_-(0) = g_0(0)$ et $g_0(2L) = g_+(2L)$,on ne supposera pas cette condition.*

2.2 Résolution du problème opérationel (P_A)

Afin de ne pas compliquer les calculs, on prendra les constantes d'intervalles $l = 1$, $L = \dfrac{1}{2}$. On pose

$$\begin{cases} p_- = (1-p)\,d, \qquad p_+ = pd_0, \\ \dfrac{r}{d} = k, \qquad \dfrac{r_0}{d_0} = k_0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} G_-(x) = \dfrac{g_-(x)}{d}, \qquad x \in \,]-1,0[\\[2ex] G_0(x) = \dfrac{g_0(x)}{d_0}, \qquad x \in \,]0,1[\,, \end{cases}$$

$$B = -\left[-\left(A - \frac{r}{d}I\right)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad , \quad B_0 = -\left[-\left(A + \frac{r_0}{d_0}I\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

On commence par résoudre le problème suivant

$$\left(P_{(BB_0)}\right) \begin{cases} \text{(Equations)} \begin{cases} u''_-(x) - B^2 u_-(x) = G_-(x) & \text{dans} \quad]-1,0[\\ u''_0(x) - B_0^2 u_0(x) = G_0(x) & \text{dans} \quad]0,1[\end{cases} \\ \text{(Boundary C.)} \begin{cases} u_-(-1) = f_- \\ u'_0(1) = \Psi \end{cases} \\ \text{(Interface C.)} \quad u_-(0) = u_0(0) \\ \text{(Skewness C.)} \quad p_- u'_-(0) = p_+ u'_0(0)\,. \end{cases}$$

où Ψ est un élément dans E à déterminer dans une deuxieme étape, il est bien connu que la solution de l'équation du second ordre suivante

$$u''(x) - B^2 u(x) = G(x)\,,\ x \in \,]a,b[\,,$$

dans E, est écrite

$$u(x) = e^{(x-a)B}\alpha + e^{(b-x)B}\beta + v(G)(x)\,,$$

$$v(G)(x) = \frac{1}{2}\int_a^x e^{(x-t)B}B^{-1}G(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_x^b e^{(t-x)B}B^{-1}G(t)\,dt.$$

Alors

$$
\begin{array}{rcll}
u_{-}(x) & = & e^{-xB}\alpha_{-}+e^{(1+x)B}\beta_{-}+v_{-}(G_{-})(x), & x\in\,]-1,0[\\
u_{0}(x) & = & e^{xB_0}\alpha_{0}+e^{(1-x)B\cdot}\beta_{0}+v_{0}(G_{0})(x), & x\in\,]0,1[
\end{array}
$$

donc

$$
\left\{\begin{array}{ll}
u_{-}'(x)=-Be^{-xB}\alpha_{-}+Be^{(1+x)B}\beta_{-}+v_{-}'(G_{-})(x), & x\in\,]-1,0[\\
u_{0}'(x)=B_0e^{xB_0}\alpha_{0}-B_0e^{(1-x)B_0\cdot}\beta_{0}+v_{0}'(G_{0})(x), & x\in\,]0,1[\,,
\end{array}\right.
$$

avec α_-, β_-, α_0, $\beta_0\in E$ et

$$
\begin{array}{rcl}
v_{-}(G_{-})(x) & = & \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{x}e^{(x-t)B}B^{-1}G_{-}(t)\,dt+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x}^{0}e^{(t-x)B}B^{-1}G_{-}(t)\,dt.\\
v_{0}(G_{0})(x) & = & \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{0}^{x}e^{(x-t)B_0}B_0^{-1}G_{0}(t)\,dt+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x}^{1}e^{(t-x)B_0}B_0^{-1}G_{0}(t)\,dt.
\end{array}
$$

On a

$$
\left\{\begin{array}{l}
u_{-}(-1)=e^{B}\alpha_{-}+\beta_{-}+v_{-}(G_{-})(-1)=f_{-}\\
u_{0}'(1)=B_0e^{B_0}\alpha_{0}-B_0\beta_{0}+v_{0}'(G_{0})(1)=\Psi,
\end{array}\right.
$$

$$
\left\{\begin{array}{ll}
u_{-}'(0)=-B\alpha_{-}+Be^{B}\beta_{-}+v_{-}'(G_{-})(0), & x\in\,]-1,0[\\
u_{0}'(0)=B_0\alpha_{0}-B_0e^{B\cdot}\beta_{0}+v_{0}'(G_{0})(0), & x\in\,]0,1[\,,
\end{array}\right.
$$

et

$$
\left\{\begin{array}{l}
\beta_{-}=-e^{B}\alpha_{-}-v_{-}(G_{-})(-1)+f_{-}\\
\beta_{0}=e^{B_0}\alpha_{0}+B_0^{-1}v_{0}'(G_{0})(1)-B_0^{-1}\Psi,
\end{array}\right. \tag{2.2}
$$

les conditions de transmission

$$
\left\{\begin{array}{l}
u_{-}(0)=u_{0}(0)\\
p_{-}(u_{-})'(0)-p_{+}(u_{0})'(0)=0,
\end{array}\right.
$$

donnent

$$
\left\{\begin{array}{l}
u_{-}(0)=\alpha_{-}+e^{B}\beta_{-}+v_{-}(G_{-})(0)\\
u_{0}(0)=\alpha_{0}+e^{B_0}\beta_{0}+v_{0}(G_{0})(0),
\end{array}\right.
$$

on a

$$
u_{-}(0)=u_{0}(0)\iff\alpha_{-}+e^{B}\beta_{-}+v_{-}(G_{-})(0)=\alpha_{0}+e^{B_0}\beta_{0}+v_{0}(G_{0})(0),
$$

donc

$$
\alpha_{-}+e^{B}\beta_{-}-\alpha_{0}-e^{B_0}\beta_{0}=-v_{-}(G_{-})(0)+v_{0}(G_{0})(0),
$$

et

$$
\begin{array}{rcl}
p_{-}(u_{-})'(0)-p_{+}(u_{0})'(0) & = & 0\iff p_{-}\left(-B\alpha_{-}+Be^{B}\beta_{-}+v_{-}'(G_{-})(0)\right)\\
-p_{+}\left(B_0\alpha_{0}-B_0e^{B_0}\beta_{0}\right)+v_{0}'(G_{0})(0) & = & 0\\
 & \iff & p_{-}\left(-\alpha_{-}+e^{B}\beta_{-}\right)-p_{+}\left(B^{-1}B_0\alpha_{0}-B^{-1}B_0e^{B_0}\beta_{0}\right)\\
 & = & -p_{-}B^{-1}v_{-}'(G_{-})(0)+B^{-1}p_{+}v_{0}'(G_{0})(0),
\end{array}
$$

on obtient donc

$$\begin{cases} \alpha_- + e^{B}\beta_- - \alpha_0 - e^{B_0}\beta_0 = -v_-\left(G_-\right)(0) + v_0\left(G_0\right)(0) \\ \\ p_-\left(-\alpha_- + e^{B}\beta_-\right) - p_+\left(B^{-1}B_0\alpha_0 - B^{-1}B_0e^{B_0}\beta_0\right) \\ = -p_-B^{-1}v_-'\left(G_-\right)(0) + B^{-1}p_+v_0'\left(G_0\right)(0), \end{cases}$$

on remplace β_- et β_0, on obtient

$$\begin{cases} \alpha_- + e^{B}\left(-e^{B}\alpha_- - v_-\left(G_-\right)(-1) + f_-\right) - \alpha_0 - e^{B_0}\left(e^{B_0}\alpha_0 + B_0^{-1}v_0'\left(G_0\right)(1) - B_0^{-1}\Psi\right) \\ = -v_-\left(G_-\right)(0) + v_0\left(G_0\right)(0) \\ p_-\left(-\alpha_- + e^{B}\left(-e^{B}\alpha_- - v_-\left(G_-\right)(-1) + f_-\right)\right) \\ -p_+\left(B^{-1}B_0\alpha_0 - B^{-1}B_0e^{B_0}\left(e^{B_0}\alpha_0 + B_0^{-1}v_0'\left(G_0\right)(1) - B_0^{-1}\Psi\right)\right) \\ = -p_-B^{-1}v_-'\left(G_-\right)(0) + B^{-1}p_+v_0'\left(G_0\right)(0), \end{cases}$$

on rassemble

$$\begin{cases} \left(I - e^{2B}\right)\alpha_- - \left(I + e^{2B_0}\right)\alpha_0 = -e^{B}f_- - e^{B_0}B_0^{-1}\Psi + e^{B}v_-\left(G_-\right)(-1) \\ +e^{B_0}B_0^{-1}v_0'\left(G_0\right)(1) - v_-\left(G_-\right)(0) + v_0\left(G_0\right)(0) \\ -p_-\left(I + e^{2B}\right)\alpha_- - p_+\left(I - e^{2B_0}\right)B_0B^{-1}\alpha_0 \\ = -p_-e^{B}f_- + p_+B^{-1}e^{B_0}\Psi + p_-e^{B}v_-\left(G_-\right)(-1) \\ -p_+B^{-1}e^{B_0}v_0'\left(G_0\right)(1) - p_-B^{-1}v_-'\left(G_-\right)(0) + B^{-1}p_+v_0'\left(G_0\right)(0) \end{cases}$$

on obtient le système

$$\begin{cases} \left(I - e^{2B}\right)\alpha_- - \left(I + e^{2B_0}\right)\alpha_0 = f_* \\ -p_-\left(I + e^{2B}\right)\alpha_- - p_+\left(I - e^{2B_0}\right)B_0B^{-1}\alpha_0 = g_*, \end{cases} \tag{2.3}$$

avec

$$\begin{cases} f_* = -e^{B}f_- - e^{B_0}B_0^{-1}\Psi + e^{B}v_-\left(G_-\right)(-1) + e^{B_0}B_0^{-1}v_0'\left(G_0\right)(1) \\ -v_-\left(G_-\right)(0) + v_0\left(G_0\right)(0) \\ \\ g_* = -p_-e^{B}f_- + p_+B^{-1}e^{B_0}\Psi + p_-e^{B}v_-\left(G_-\right)(-1) \\ -p_+B^{-1}e^{B_0}v_0'\left(G_0\right)(1) - p_-B^{-1}v_-'\left(G_-\right)(0) + B^{-1}p_+v_0'\left(G_0\right)(0). \end{cases} \tag{2.4}$$

Le déterminant abstrait de ce système est

$$\Delta_- = \begin{vmatrix} \left(I - e^{2B}\right) & -\left(I + e^{2B_0}\right) \\ -p_-\left(I + e^{2B}\right) & -p_+\left(I - e^{2B_0}\right)B_0B^{-1} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_- = -p_+\left(I - e^{2B_0}\right)\left(I - e^{2B}\right)B_0B^{-1} - p_-\left(I + e^{2B}\right)\left(I + e^{2B_0}\right). \tag{2.5}$$

maintenant, nous devons inverser Δ_-.

Remarque 2.2 *: On suppose que $\exists\Delta_-^{-1} \in L(X)$, dans le chapitre 3, on montre que Δ est inversible à inverse borné, alors on trouve α_-, α_0, β_- et β_0*

on obtient donc

$$\alpha_- = \Delta_-^{-1}\begin{vmatrix} f_* & -\left(I + e^{2B_0}\right) \\ g_* & -P_+\left(I - e^{2B_0}\right)B_0B^{-1} \end{vmatrix}$$

alors :

$$\alpha_- = \Delta_-^{-1}\left[-p_+\left(I-e^{2B_0}\right)B_0B^{-1}f_* + \left(I+e^{2B_0}\right)g_*\right],$$

et

$$\alpha_0 = \Delta_-^{-1}\begin{vmatrix} \left(I-e^{2B}\right) & f_* \\ -p_-\left(I+e^{2B}\right) & g_* \end{vmatrix}$$

alors

$$\alpha_0 = \Delta_-^{-1}\left[p_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right],$$

donc

$$\begin{cases} \alpha_- = \Delta_-^{-1}\left[-p_+\left(I-e^{2B_0}\right)B_0B^{-1}f_* + \left(I+e^{2B_0}\right)g_*\right] \\ \alpha_0 = \Delta_-^{-1}\left[P_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right], \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \beta_- = -e^{B}\Delta_-^{-1}\left[-p_+\left(I-e^{2B_0}\right)B_0B^{-1}f_* + \left(I+e^{2B_0}\right)g_*\right] - v_-\left(G_-\right)(-1) + f_- \\ \beta_0 = e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[P_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] + B_0^{-1}v_0'\left(G_0\right)(1) - B_0^{-1}\Psi. \end{cases}$$

par conséquent, les fonctions

$$\begin{cases} u_-(x) = e^{-xB}\alpha + e^{(1+x)B}\beta_- + v_-\left(G_-\right)(x), & x\in\left]-1,0\right[\\ u_0(x) = e^{xB_0}\alpha_0 + e^{(1-x)B_0}\beta_{0-} + v_0\left(G_0\right)(x), & x\in\left]0,1\right[\end{cases}$$

s'écrivent, pour $x\in\left]-1,0\right[$

$$\begin{aligned} &u_-(x) = e^{-xB}\Delta_-^{-1}\left[-p_+\left(I-e^{2B_0}\right)B_0B^{-1}f_* + \left(I+e^{2B_0}\right)g_*\right] \\ &-e^{(1+x)B}e^{B}\Delta_-^{-1}\left[-p_+\left(I-e^{2B_0}\right)B_0B^{-1}f_* + \left(I+e^{2B_0}\right)g_*\right] \\ &-v_-\left(G_-\right)(-1) + f_- + v_-\left(G_-\right)(x) \end{aligned}$$

avec

$$v_-\left(G_-\right)(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} e^{(x-t)B}B^{-1}G_-(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{x}^{0} e^{(t-x)B}B^{-1}G_-(t)\,dt.$$

Et pour $x\in\left]0,1\right[$,on obtient

$$\begin{aligned} &u_0(x) = e^{xB_0}\Delta_-^{-1}\left[p_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] \\ &+e^{(1-x)B_0}e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[p_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] \\ &+B_0^{-1}v_0'\left(G_0\right)(1) - B_0^{-1}\Psi + v_0\left(G_0\right)(x) \end{aligned}$$

avec

$$v_0\left(G_0\right)(x) = \frac{1}{2}\int_{0}^{x} e^{(x-t)B_0}B_0^{-1}G_0(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{x}^{1} e^{(t-x)B_0}B_0^{-1}G_0(t)\,dt.$$

Maintenant on passa à u_+.

On résoud le problème suivant

$$(P_B)\begin{cases} \text{(Equations)}\; u''(x) - B^2u_+(x) = G_+(x) \quad \text{sur} \quad \left]1,2\right[\\ \text{(BoundaryC.)}\begin{cases} u_+(1) = u_0(1) = H(\Psi) \\ u_+(2) = f_+, \end{cases} \end{cases}$$

avec la condition

$$pdu_0'(1) = (1-p)du_+'(1),$$

qui va nous permetre de trouve Ψ.

Puisque on a

$$\begin{array}{l} u_0(x) = e^{xB_0}\Delta_-^{-1}\left[p_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] \\ +e^{(1-x)B_0}e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[p_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] \\ +e^{(1-x)B_0}B_0^{-1}v_0'(G_0)(1) - e^{(1-x)B_0}B_0^{-1}\Psi + v_0(G_0)(x), \end{array}$$

où $H(\Psi)$ est donné par

$$\begin{array}{rcl} H(\Psi) & = & u_0(1) \\ & = & e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[p_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] \\ & & +e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[p_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] + B_0^{-1}v_0'(G_0)(1) - B_0^{-1}\Psi + v_0(G_0)(1) \\ & = & 2e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[p_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] + B_0^{-1}v_0'(G_0)(1) - B_0^{-1}\Psi + v_0(G_0)(1), \end{array}$$

donc

$$u_+(x) = e^{(x-1)B}\alpha_+ + e^{(2-x)B}\beta_+ + v_+(G_+)(x),$$

avec

$$v_+(G_+)(x) = \frac{1}{2}\int_1^x e^{(x-t)B}B^{-1}G_+(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_x^2 e^{(t-x)B}B^{-1}G_+(t)\,dt,$$

les conditions aux limites

$$\begin{cases} u_+(1) = u_0(1) = H(\Psi) \\ u_+(2) = f_+, \end{cases}$$

donnent

$$\begin{cases} u_+(1) = \alpha_+ + e^B\beta_+ + v_+(G_+)(1) = H(\Psi) \\ u_+(2) = e^B\alpha_+ + \beta_+ + v_+(G_+)(2) = f_+, \end{cases}$$

donc le système

$$\begin{cases} \alpha_+ + e^B\beta_+ = H(\Psi) - v_+(G_+)(1) \\ e^B\alpha_+ + \beta_+ = f_+ - v_+(G_+)(2), \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} \Delta_2 & = & \begin{vmatrix} 1 & e^B \\ e^B & 1 \end{vmatrix} \\ \Delta_2 & = & 1 - e^{2B} \end{array}$$

donc

$$\Delta_2^{-1} = \left(I - e^{2B}\right)^{-1}$$

alors

$$\alpha_+ = \Delta_2^{-1}\begin{vmatrix} H(\Psi) - v_+(G_+)(1) & e^B \\ f_+ - v_+(G_+)(2) & 1 \end{vmatrix}$$

donc

$$\begin{array}{rcl} \alpha_+ & = & \left(I-e^{2B}\right)^{-1}\left[H(\Psi) - v_+(G_+)(1) - e^B\left(f_+ - v_+(G_+)(2)\right)\right] \\ & = & \left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^Bv_+(G_+)(2) \\ & & -\left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^Bf_+ - \left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+(G_+)(1) + \left(I-e^{2B}\right)^{-1}H(\Psi), \end{array}$$

et

$$\begin{aligned}
\beta_+ &= \left(I-e^{2B}\right)^{-1}\begin{vmatrix} 1 & H(\Psi)-v_+(G_+)(1) \\ e^B & f_+-v_+(G_+)(2) \end{vmatrix} \\
&= \left(I-e^{2B}\right)^{-1}\left[f_+-v_+(G_+)(2)-e^B\left(H(\Psi)-v_+(G_+)(1)\right)\right] \\
&= \left(I-e^{2B}\right)^{-1}f_+-\left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+(G_+)(2)-e^B\left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+(G_+)(1) \\
&\quad -e^B\left(I-e^{2B}\right)^{-1}\,H(\Psi),
\end{aligned}$$

donc la solution s'écrit

$$\begin{aligned}
u_+(x) &= e^{(x-1)B}\alpha_++e^{(2-x)B}\beta_++v_+(G_+)(x) \\
&= e^{(x-1)B}\begin{bmatrix} \left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^Bv_+(G_+)(2)-\left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^Bf_+ \\ -\left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+(G_+)(1)+\left(I-e^{2B}\right)^{-1}H(\Psi) \end{bmatrix} \\
&\quad +e^{(2-x)B}\begin{bmatrix} \left(I-e^{2B}\right)^{-1}f_+-\left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+(G_+)(2) \\ +e^B\left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+(G_+)(1)-e^B\left(I-e^{2B}\right)^{-1}\,H(\Psi) \end{bmatrix} \\
&\quad +v_+(G_+)(x) \\
u_+(x) &= e^{(x-1)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}H(\Psi)-e^{(x-1)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+(G_+)(1) \\
&\quad +e^{(2-x)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}\left[f_+-v_+(G_+)(2)\right] \\
&\quad -e^{(x-1)B}e^B\left(I-e^{2B}\right)^{-1}\left[f_+-v_+(G_+)(2)\right]-e^{(2-x)B}e^B\left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+(G_+)(1) \\
&\quad -e^{(2-x)B}e^B\left(I-e^{2B}\right)^{-1}H(\Psi)+v_+(G_+)(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_+(x) &= e^{(x-1)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}H(\Psi)-e^{(x-1)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+(G_+)(1) \\
&\quad +e^{(2-x)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}\left[f_+-v_+(G_+)(2)\right] \\
&\quad -e^{xB}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}\left[f_+-v_+(G_+)(2)\right]-e^{(3-x)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+(G_+)(1) \\
&\quad -e^{(3-x)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}H(\Psi)+v_+(G_+)(x),
\end{aligned}$$

2.3 Calcul de Ψ

pour trouver Ψ on utilise

$$p_+u_0'(1)=p_-u_+'(1),$$

donc

$$\begin{aligned}
u_+'(x) &= Be^{(x-1)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}H(\Psi)-Be^{(x-1)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+(G_+)(1) \\
&\quad -Be^{(2-x)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}\left[f_+-v_+(G_+)(2)\right] \\
&\quad -Be^{xB}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}\left[f_+-v_+(G_+)(2)\right] \\
&\quad +Be^{(3-x)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+(G_+)(1)+Be^{(3-x)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}H(\Psi) \\
&\quad +v_+(G_+)(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_+'(1) &= B\left(I-e^{2B}\right)^{-1}H(\Psi) - B\left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+(G_+)(1) \\
&\quad -Be^{B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}\left[f_+ - v_+(G_+)(2)\right] \\
&\quad -Be^{B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}\left[f_+ - v_+(G_+)(2)\right] + Be^{2B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+(G_+)(1) \\
&\quad +Be^{2B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}H(\Psi) + v_+(G_+)(1)
\end{aligned}$$

avec nos notations

$$\begin{cases} p_- = (1-p)d \\ p_+ = pd_0, \end{cases}$$

qui donne

$$p_+u_0'(1) = p_-u_+'(1),$$

$$\begin{aligned}
& p_+B_0e^{B_0}\alpha_0 - p_+B_0\beta_0 - p_-B\alpha_+ + p_-Be^{B}\beta_+ \\
=\; & p_-v_+'(G_+)(1) - p_+v_0'(G_0)(1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& p_+B_0e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[P_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] + \\
& -p_+B_0\left(e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[P_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] + B_0^{-1}v_0'(G_0)(1) - B_0^{-1}\Psi\right) \\
& -p_-B\left(\begin{array}{c} \left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^{B}v_+(G_+)(2) - \left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^{B}f_+ - \left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+(G_+)(1) \\ +\left(I-e^{2B}\right)^{-1}H(\Psi) \end{array}\right) \\
& -p_-Be^{B}\left(\begin{array}{c} \left(I-e^{2B}\right)^{-1}f_+ - \left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^{B}v_+(G_+)(2) - e^{B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+(G_+)(1) \\ e^{B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}H(\Psi) \end{array}\right) \\
=\; & p_-v_+'(G_+)(1) - p_+v_0'(G_0)(1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -p_+\Psi - p_-B\left(I+e^{2B}\right)\left(I-e^{2B}\right)^{-1}H(\Psi) \\
=\; & p_-v_+'(G_+)(1) - p_+v_0'(G_0)(1) - p_+B_0e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[p_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] \\
& +p_+(B_0e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[p_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] + B_0^{-1}v_0'(G_0)(1)) \\
& +p_-B\left(\left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^{B}v_+(G_+)(2) - \left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^{B}f_+ - \left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+(G_+)(1)\right) \\
& -p_-Be^{B}\left(\left(I-e^{2B}\right)^{-1}f_+ - \left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^{B}v_+(G_+)(2) - e^{B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+(G_+)(1)\right),
\end{aligned}$$

avec

$$H(\Psi) = 2e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[p_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] + B_0^{-1}v_0'(G_0)(1) - B_0^{-1}\Psi + v_0(G_0)(1),$$

donc

$$\begin{aligned}
& -p_+\Psi - p_-B\left(I-e^{2B}\right)\left(I-e^{2B}\right)^{-1}\left[\begin{array}{c} 2e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[P_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] \\ +B_0^{-1}v_0'\left(G_0\right)(1) - B_0^{-1}\Psi + v_0\left(G_0\right)(1) \end{array}\right] \\
= \ & p_-v_+'\left(G_+\right)(1) - p_+v_0'\left(G_0\right)(1) - p_+B_0e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[P_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] \\
& +p_+B_0(e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[P_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] + B_0^{-1}v_0'\left(G_0\right)(1)) \\
& +p_-B\left(\left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^Bv_+\left(G_+\right)(2) - \left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^Bf_+ - \left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+\left(G_+\right)(1)\right) \\
& -p_-Be^B\left(\left(I-e^{2B}\right)^{-1}f_+ - \left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^Bv_+\left(G_+\right)(2) - e^B\left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+\left(G_+\right)(1)\right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& -p_+\Psi \\
& +p_-B\left(I-e^{2B}\right)\left(I-e^{2B}\right)^{-1}B_0^{-1}\Psi \\
= \ & p_-v_+'\left(G_+\right)(1) - p_+v_0'\left(G_0\right)(1) - p_+B_0e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[p_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] \\
& +p_+B_0(e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[p_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] + B_0^{-1}v_0'\left(G_0\right)(1)) \\
& +p_-B\left(\left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^Bv_+\left(G_+\right)(2) - \left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^Bf_+ - \left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+\left(G_+\right)(1)\right) \\
& -p_-Be^B\left(\left(I-e^{2B}\right)^{-1}f_+ - \left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^Bv_+\left(G_+\right)(2) - e^B\left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+\left(G_+\right)(1)\right) \\
& +p_-B\left(I-e^{2B}\right)\left(I-e^{2B}\right)^{-1}\left[\begin{array}{c} 2e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[p_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] \\ +B_0^{-1}v_0'\left(G_0\right)(1) - B_0^{-1}\Psi + v_0\left(G_0\right)(1) \end{array}\right] \\
& \left[-p_+I + p_-\left(I-e^{2B}\right)\left(I-e^{2B}\right)^{-1}BB_0^{-1}\right]\Psi \\
= \ & p_-v_+'\left(G_+\right)(1) - p_+v_0'\left(G_0\right)(1) - p_+B_0e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[p_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] \\
& +p_+B_0(e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[p_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] + B_0^{-1}v_0'\left(G_0\right)(1)) \\
& +p_-B\left(\left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^Bv_+\left(G_+\right)(2) - \left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^Bf_+ - \left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+\left(G_+\right)(1)\right) \\
& -p_-Be^B\left(\left(I-e^{2B}\right)^{-1}f_+ - \left(I-e^{2B}\right)^{-1}e^Bv_+\left(G_+\right)(2) - e^B\left(I-e^{2B}\right)^{-1}v_+\left(G_+\right)(1)\right) \\
& +p_-B\left(I-e^{2B}\right)\left(I-e^{2B}\right)^{-1}\left[\begin{array}{c} 2e^{B_0}\Delta_-^{-1}\left[p_-\left(I+e^{2B}\right)f_* + \left(I-e^{2B}\right)g_*\right] \\ +B_0^{-1}v_0'\left(G_0\right)(1) - B_0^{-1}\Psi + v_0\left(G_0\right)(1) \end{array}\right]
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\Psi = \ & \Delta_1^{-1}\Delta_2^{-1}\left(p_-v_+'\left(G_+\right)(1) - p_+v_0'\left(G_0\right)(1)\right) \\
& +2p_-\Delta_1^{-1}\Delta_2^{-1}Be^B\left(I-e^{2B}\right)^{-1}\left(v_+\left(G_+\right)(2) + f_+\right) \\
& +\Delta_1^{-1}\Delta_2^{-1}(p_+B_0v_0\left(G_0\right)(1) - p_-Bv_+\left(G_+\right)(1)) + \Delta_2^{-1}B_0v_0\left(G_0\right)(1) \\
& +4p_-\Delta_1^{-1}\Delta_2^{-1}Be^Be^{B_0}\Delta_-^{-1}\left(v_-\left(G_-\right)(1) - f_-\right) + v_0\left(G_0\right)(1) \\
& +2p_-\Delta_1^{-1}\Delta_2^{-1}\left(I+e^{2B}\right)e^B\Delta_-^{-1}B_0\left(p_+ + \Delta_1\right)\left(v_0\left(G_0\right)(0) - v_-\left(G_-\right)(0)\right) \\
& +2p_-\Delta_1^{-1}\Delta_2^{-1}\left(I+e^{2B}\right)e^{B_0}\Delta_-^{-1}(p_+v_0'\left(G_0\right)(0) - p_-v_-'\left(G_-\right)(0)).
\end{aligned}$$

Pour tout Ψ il faut inverser

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \left[-p_+I + p_-\left(I-e^{2B}\right)\left(I-e^{2B}\right)^{-1}BB_0^{-1}\right] \\
&= -\left(I-e^{2B}\right)^{-1}\left[p_+\left(I-e^{2B}\right) - p_-\left(I-e^{2B}\right)BB_0^{-1}\right],
\end{aligned}$$

et

$$\Delta_2 = I + 2p_- \left(I + e^{2B}\right) \left(I - e^{2B}\right)^{-1} e^{2B_0} \Delta_-^{-1},$$

pour inverser $\Delta_1$et Δ_2 on utilise les mèmes techniques pour Δ_-
avec

$$\Delta_- = -\left[p_+ \left(I - e^{2B_0}\right) \left(I - e^{2B}\right) B_0 B^{-1} + p_- \left(I + e^{2B}\right) \left(I + e^{2B_0}\right)\right].$$

Chapitre 3

Résultats d'inversibilité

3.1 Quelques résultats et lemmes techniques

Il est bien connu que la racine carrée $(-A)^{\frac{1}{2}}$ est bien défini et

$$\Lambda := -(-A)^{\frac{1}{2}}$$

génère un semigroupe analytique $(e^{t\Lambda})_{t>0}$ dans E, voir [1], qui n'est pas continu à 0. Par contre, il est bien connu qu'il existe des constantes positives δ_0 et M telles que pour tout $t > 0$

$$||e^{t\Lambda}||_{L(E)} \leq Me^{-\delta_0 t}$$

et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe M_m telque pourtout $t > 0$

$$\left\|\Lambda^m e^{t\Lambda}\right\|_{L(E)} \leq M_m t^{-t} e^{-\delta_0 t}.$$

voir [[22], p. 70, propriéritеés (6.5), (6.6) et (6.7)]. nous rappelons les resultats suivant :

La définition et les proprietés de l'espace d'interpolation $D_A\left(\frac{\theta}{2}, +\infty\right)$ sont données, par exemples, dans [11]. Maintenant, considérons l'espace suivant

$$H^{\infty(S_\eta)} = \{f : f \text{ est une fonction holomorphic et liée sur } S_\eta\},$$

en suite, nous rappelon que si $f \in H^\infty(S_\eta)$ est telque $\frac{1}{f} \in H^\infty(S_\eta)$ et :

$$\left(\frac{1}{f}\right)(-A) \in L(E),$$

alors $f(-A)$ est inversible a un inverse borné et

$$[f(-A)]^{-1} = \left(\frac{1}{f}\right)(-A) \tag{3.1}$$

voir, par exemple [5]. Considérons les opérateurs suivantS

$$\mathcal{A} = A - \frac{r}{d}I, \quad A_0 = A + \frac{r_0}{d_0}I$$

qui ont le même domaine

$$D(\mathcal{A}) = D(A_0) = D(A).$$

et il est clair que l'opérateur

$$B = -\left[-\left(A - \frac{r}{d}I\right)\right]^{\frac{1}{2}} = -\left[-\mathcal{A}\right]^{\frac{1}{2}},$$

a les mêmes propriétés que l'operateur $\wedge$ définie ci dessus. nou supposone dans ce travail que $\dfrac{r_0}{d_0}$ est suffisament petit pour que

$$\frac{r_0}{d_0} < \delta$$

et donc l'opérateur $A_0 = A + \dfrac{r_0}{d_0}I$, est inversible et

$$B_0 = -\left[-\left(A + \frac{r_0}{d_0}I\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

est bien défini.

3.2 Lemmes techniques

Lemme 3.1 *Soient $w, z \in C\backslash\{0\}$,on a :*

$$|w+z| \geqslant (|w| + |z|)\left|\cos\left(\frac{\arg w - \arg z}{2}\right)\right|.$$

Preuve.

$$\text{On pose} \begin{cases} \alpha = \arg w \\ \beta = \arg z \end{cases} \qquad \text{alors} \qquad \begin{cases} w = |w|\, e^{i\alpha} \\ z = |z|\, e^{i\beta} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
|w+z|^2 &= \left||w|\, e^{i\alpha} + |z|\, e^{i\beta}\right|^2 \\
&= ||w|\cos\alpha + i\,|w|\sin\alpha + |z|\cos\beta + i\,|z|\sin\beta|^2 \\
&= |(|w|\cos\alpha + |z|\cos\beta) + i\,(|w|\sin\alpha + |z|\sin\beta)| \\
&= (|w|\cos\alpha + |z|\cos\beta)^2 + (|w|\sin\alpha + |z|\sin\beta)^2 \\
&= |w|^2\cos^2\alpha + |z|^2\cos^2\beta + 2\,|w|\,|z|\cos\alpha\cos\beta + |w|^2\sin^2\alpha + |z|^2\sin^2\beta + 2\,|w|\,|z|\sin\alpha\sin\beta \\
&= |w|^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) + |z|^2\left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right) + 2\,|w|\,|z|\,(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\
&= |w|^2 + |z|^2 + 2\,|w|\,|z|\,(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \quad , \quad \text{car} \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,
\end{aligned}$$

puisqu'on a

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta &= \cos(\alpha - \beta) \\
&= \cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \qquad \text{car} \begin{cases} \cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2} \\ \sin^2\theta = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Alors

$$|w+z|^2 = |w|^2+|z|^2+2|w||z|\left(\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right),$$

et comme

$$\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=1,$$

alors

$$\begin{aligned}
|w+z|^2 &= \left(|w|^2+|z|^2\right)\left(\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)\\
&\quad +2|w||z|\left(\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)\\
&= \left(|w|^2+|z|^2+2|w||z|\right)\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\left(|w|^2-|z|^2-2|w||z|\right)\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&= (|w|+|z|)^2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+(|w|-|z|)^2\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&\geqslant (|w|+|z|)^2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

D'ou

$$|w|+|z| \geqslant (|w|+|z|)\left|\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right|.$$

Alors

$$|w|+|z| \geqslant (|w|+|z|)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

■

Lemme 3.2 *Soient* $\eta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ *et* $z \in S_\eta$

1. $|\arg(1-e^{-z})-\arg(1+e^{-z})| < \eta$.
2. $|1+e^{-z}| \geq 1-\exp\left(\frac{-\pi}{2\tan\eta}\right)$.
3. $\frac{|z|\cos\eta}{1+|z|\cos\eta} \leqslant |1-e^{-z}| \leqslant \frac{2|z|}{1+|z|\cos\eta}$.

Preuve. Soient $\eta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $z \in S_\eta$,on pose $z = \operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z$.

$$\begin{aligned}
1-e^{-z} &= 1-e^{-\operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z} = 1-e^{-\operatorname{Re} z}e^{-i\operatorname{Im} z}\\
&= 1-e^{-\operatorname{Re} z}\left(\cos(\operatorname{Im} z)-i\sin(\operatorname{Im} z)\right)\\
&= 1-e^{-\operatorname{Re} z}\cos(\operatorname{Im} z)+ie^{-\operatorname{Re} z}\sin(\operatorname{Im} z).
\end{aligned}$$

si $z = x+iy$; $x>0$ alors $\arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

si $z \in S_\eta$ alors $|e^{-z}| = e^{-\operatorname{Re} z} < 1$.Donc

$$\arg\left(1+e^{-z}\right) = \arg\left(\frac{e^{-\operatorname{Re} z}\sin(\operatorname{Im} z)}{1-e^{-\operatorname{Re} z}\cos(\operatorname{Im} z)}\right), \qquad \text{car } 1-e^{-\operatorname{Re} z}\cos(\operatorname{Im} z)>0.$$

En utilisant la même méthode on obtient

$$\begin{aligned}
\arg\left(1+e^{-z}\right) &= \arg\left(1+e^{-\operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z}\right) \\
&= \arg\left(1+e^{-\operatorname{Re} z}\cos\left(\operatorname{Im} z\right) - ie^{-\operatorname{Re} z}\left(\sin \operatorname{Im} z\right)\right) = \arctan\left(\frac{-e^{-\operatorname{Re} z}\sin\left(\operatorname{Im} z\right)}{1+e^{-\operatorname{Re} z}\cos\left(\operatorname{Im} z\right)}\right) \\
&= -\arctan\left(\frac{e^{-\operatorname{Re} z}\sin\left(\operatorname{Im} z\right)}{1+e^{-\operatorname{Re} z}\cos\left(\operatorname{Im} z\right)}\right), \quad \text{car la fonction } \arctan \text{ est impaire.}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\arg\left(1-e^{-z}\right) - \arg\left(1+e^{-z}\right) &= \arctan\left(\frac{e^{-\operatorname{Re} z}\sin\left(\operatorname{Im} z\right)}{1-e^{-\operatorname{Re} z}\cos\left(\operatorname{Im} z\right)}\right) \\
&\quad + \arctan\left(\frac{e^{-\operatorname{Re} z}\sin\left(\operatorname{Im} z\right)}{1+e^{-\operatorname{Re} z}\cos\left(\operatorname{Im} z\right)}\right).
\end{aligned}$$

■

Remarque 3.1 *On a l'égalité suivante*

$$\arctan\left(a\right) + \arctan\left(b\right) = \arctan\left(\frac{a+b}{a-ab}\right), \qquad \textit{si} \quad ab < 1.$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-\operatorname{Re} z}\sin\left(\operatorname{Im} z\right)}{1-e^{-\operatorname{Re} z}\cos\left(\operatorname{Im} z\right)}\frac{e^{-\operatorname{Re} z}\sin\left(\operatorname{Im} z\right)}{1+e^{-\operatorname{Re} z}\cos\left(\operatorname{Im} z\right)} &= \frac{e^{-2\operatorname{Re} z}\sin^2\left(\operatorname{Im} z\right)}{1-e^{-2\operatorname{Re} z}\cos^2\left(\operatorname{Im} z\right)} \\
&= \frac{e^{-2\operatorname{Re} z}\left(1-\cos^2\left(\operatorname{Im} z\right)\right)}{1-e^{-2\operatorname{Re} z}\cos^2\left(\operatorname{Im} z\right)} < 1,
\end{aligned}$$

car

$$e^{-2\operatorname{Re} z} < 1 \Rightarrow e^{-2\operatorname{Re} z} - e^{-2\operatorname{Re} z}\cos^2\left(\operatorname{Im} z\right) < 1 - e^{-2\operatorname{Re} z}\cos^2\left(\operatorname{Im} z\right),$$

alors

$$\begin{aligned}
\arg\left(1-e^{-z}\right) - \arg\left(1+e^{-z}\right) &= \arctan\left(\frac{2e^{-\operatorname{Re} z}\sin\left(\operatorname{Im} z\right)}{1-e^{-2\operatorname{Re} z}}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{\sin\left(\operatorname{Im} z\right)}{\sinh\left(\operatorname{Re} z\right)}\right), \quad \textit{car} \quad \sinh\theta = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2},
\end{aligned}$$

et comme $z \in S_\eta, \operatorname{Re} z > 0, \sin\theta$ *et* $\sinh\theta \geq \theta$ *pour* $\theta \geq 0$ *on a*

$$\left|\frac{\sin \operatorname{Im} z}{\sinh\left(\operatorname{Re} z\right)}\right| \leq \frac{\left|\operatorname{Im} z\right|}{\left|\operatorname{Re} z\right|} = \frac{\left|\operatorname{Im} z\right|}{\operatorname{Re} z} < \tan\eta, \quad \text{d'après } (1.4.1).$$

Alors

$$\arg\left(1-e^{-z}\right) - \arg\left(1+e^{-z}\right) < \eta.$$

2)

$$\begin{aligned}
\left|1+e^{-z}\right|^2 &= \left|1+e^{-\operatorname{Re}z-i\operatorname{Im}z}\right|^2 \\
&= \left|1+e^{-\operatorname{Re}z}\cos(\operatorname{Im}z)-ie^{-\operatorname{Re}z}\sin(\operatorname{Im}z)\right|^2 \\
&= \left(1+e^{-\operatorname{Re}z}\cos(\operatorname{Im}z)\right)^2+e^{-2\operatorname{Re}z}\sin(\operatorname{Im}z) \\
&= 1+2e^{-\operatorname{Re}z}\cos(\operatorname{Im}z)+e^{-2\operatorname{Re}z}\cos^2(\operatorname{Im}z)+e^{-2\operatorname{Re}z}\sin^2(\operatorname{Im}z) \\
&= 1+2e^{-\operatorname{Re}z}\cos(\operatorname{Im}z)+e^{-2\operatorname{Re}z}\left(\cos^2(\operatorname{Im}z)+\sin^2(\operatorname{Im}z)\right) \\
&= 1+2e^{-\operatorname{Re}z}\cos(\operatorname{Im}z)+e^{-2\operatorname{Re}z}
\end{aligned}$$

1^{ier} **cas :** si $\operatorname{Re}z \leq \dfrac{-\pi}{2\tan n}$ alors $|\operatorname{Im}z| \leq \frac{-\pi}{2}$ d'après (1.4.1), donc $\operatorname{Im}z \geq 0$, donc $|1+e^{-z}|^2 \geq 1$.

$2^{ème}$ **cas :** si $\operatorname{Re}z \geq \dfrac{-\pi}{2\tan\eta}$, alors

$$\begin{aligned}
\left|1+e^{-z}\right|^2 &= 1+2e^{-\operatorname{Re}z}\cos(\operatorname{Im}z)+e^{-2\operatorname{Re}z} \\
&\geq 1-2e^{-\operatorname{Re}z}+e^{-2\operatorname{Re}z} \\
&= \left(1-e^{-\operatorname{Re}z}\right)^2 \\
&\geq \left(1-\exp\left(\frac{-\pi}{2\tan n}\right)\right)^2,
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\cos(\operatorname{Im}z) &\geq -1 \Rightarrow 2e\,-^{\operatorname{Re}z}\cos(\operatorname{Im}z) \geq -2e^{-\operatorname{Re}z} \\
&\Rightarrow 1+2e\,-^{\operatorname{Re}z}\cos(\operatorname{Im}z) \geq 1-2e\,-^{\operatorname{Re}z} \\
&\Rightarrow 1+2e\,-^{\operatorname{Re}z}\cos(\operatorname{Im}z)+e-^{2\operatorname{Re}z} \geq 1-2e\,-^{\operatorname{Re}z}+e-^{2\operatorname{Re}z},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}z &\geqslant \frac{\pi}{2\tan n} \Rightarrow -\operatorname{Re}z \leq \frac{-\pi}{2\tan n} \\
&\Rightarrow \exp(-\operatorname{Re}z) \leqslant \exp\left(\frac{-\pi}{\tan n}\right) \\
&\Rightarrow -\exp(-\operatorname{Re}z) \geq -\exp\left(\frac{-\pi}{\tan n}\right) \\
&\Rightarrow 1-\exp(-\operatorname{Re}z) \geq 1-\exp\left(\frac{-\pi}{\tan n}\right) \\
&\Rightarrow (1-\exp(-\operatorname{Re}z))^2 \geq \left(1-\exp\left(\frac{-\pi}{\tan n}\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

Donc : pour $n < \frac{\pi}{2}$ et $z \in S_n$ on a

$$\left|1+e^{-z}\right| \geq \left(1-\exp\left(\frac{-\pi}{2\tan n}\right)\right).$$

3) On a, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $e^x \geq 1 + x$, alors
soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} e^x &\geq 1 + x \Rightarrow e^{-x} \leq \frac{1}{1+x} \\ &\Rightarrow 1 - e^{-x} \geq 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}. \end{aligned}$$

Donc : pour $z \in S_n$ on a $\operatorname{Re} z > 0$ et $|e^{-z}| < 1$

$$\begin{aligned} \left|1 - e^{-z}\right| &\geq \left|1 - \left|e^{-z}\right|\right| \\ &= \left|1 - e^{-\operatorname{Re} z}\right| \\ &= 1 - e^{-\operatorname{Re} z} \\ &\geq \frac{\operatorname{Re} z}{1 + \operatorname{Re} z}. \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(\operatorname{Im} z)^2 + (\operatorname{Re} z)^2} \\ &\leq \sqrt{\tan^2 n\,(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Re} z)^2}, \quad \text{d'après } (1.1) \\ &= \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2\,(1 + \tan^2 n)} \\ &= \sqrt{\frac{(\operatorname{Re} z)^2}{\cos^2 n}}, \qquad \text{car } 1 + \tan^2 n = \frac{1}{\cos^2 n} \\ &= \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{\cos^2 n}, \qquad \text{car } n < \frac{\pi}{2} \text{ alors } \cos n > 0 \end{aligned}$$

D'ou

$$\left|1 - e^{-z}\right| \geq \frac{|z| \cos n}{1 + |z| \cos n} \tag{3.0.1}$$

D'autre part, pour $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$e^{-x} \geq \max\{1 - x, 0\} \geq \frac{1 - x}{1 + x},$$

car :

$$\begin{cases} e^{-x} \geq 0 \\ e^{-x} \geq 1 - x \end{cases} \quad \text{alors } e^{-x} \geq \max\{1 - x, 0\}$$

et comme :

$$\max\{1 - x, 0\} = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } \quad x \geq 1 \end{cases}$$

et

$$\frac{1 - x}{1 + x} \leq \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Alors :

$$\max\{1 - x, 0\} \geq \frac{1 - x}{1 + x}$$

donc :

$$e^{-x} \geq \frac{1-x}{1+x}$$

alors

$$1 - e^{-x} \leq 1 - \frac{1-x}{1+x} = \frac{2x}{1+x} \qquad (3.0.2)$$

Pour $z \in S_n$,

$$\left|1 - e^{-z}\right| = \left|\int_{\Gamma_z} e^{-w} dw\right|,$$

avec : Γ_z est un segment dans le plan complexe qui relie 0 à z donc

$$\begin{aligned}
\left|1 - e^{-z}\right| &= \left|\int_{\Gamma_z} e^{-w} dw\right| \\
&\leq \int_0^1 e^{-t \operatorname{Re} z} \left|z\right| dt \qquad \text{on pose } w = tz \\
&= \left(1 - e^{-t \operatorname{Re} z}\right) \frac{|z|}{\operatorname{Re} z} \\
&\leq \frac{2\left|z\right|}{1 + \left|z\right| \cos n}, \qquad \text{d'après } (3.0.2)\,,
\end{aligned}$$

alors

$$\left|1 - e^{-z}\right| \leq \frac{2\left|z\right|}{1 + \left|z\right| \cos n}.$$

De (3.0.1) et (3.0.3), on obtient :

$$\frac{\left|z\right| \cos n}{1 + \left|z\right| \cos n} \leq \left|1 - e^{-z}\right| \leq \frac{2\left|z\right|}{1 + \left|z\right| \cos n}$$

On rappelle que $Q = -\sqrt{-A}$.
Maintenant, considérons l'espace suivant

$$H^{\infty}\left(S_n\right) = \{f,\ f \text{ est une fonction holomorphe et liée sur } S_n\}$$

En suite, nous rappelons que si $f \in H^{\infty}\left(S_n\right)$ est telque $\frac{1}{f} \in H^{\infty}\left(S_n\right)$ est

$$\left(\frac{1}{f}\right)(-A) \in L\left(E\right)$$

alors $f\left(-A\right)$ est inversible avec un inverse borné et

$$\left[f\left(-A\right)\right]^{-1} = \left(\frac{1}{f}\right)\left(-A\right) \qquad (3.2)$$

3.3 Inversibilité de Δ_-

On rappelle que les opérateurs $I-e^{2B_0}, I+e^{2B_0}, I-e^{2B}$ et $I+e^{2B}$ sont bornés et inversibles, voir [[20], p. 60, proposition 2.3.6]. On applique ce résultat dans cette section, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\Delta_- &= -p_+\left(I-e^{2B_0}\right)\left(I-e^{2B}\right)B_0B^{-1}-p_-\left(I+e^{2B}\right)\left(I+e^{2B_0}\right)\\
&= \left(I-e^{2B}\right)\left[p_+\left(I-e^{2B_0}\right)B_0B^{-1}-p_-\left(I-e^{2B}\right)^{-1}\left(I+e^{2B}\right)\left(I+e^{2B_0}\right)\right]\\
&= \left(I-e^{2B}\right)\left(I+e^{2B_0}\right)\left[p_+\left(I-e^{2B_0}\right)\left(I+e^{2B_0}\right)^{-1}B_0B^{-1}\right]\\
&= -\left(I-e^{2B}\right)\left(I+e^{2B_0}\right)\Delta_*,
\end{aligned}$$

On commence par l'étude de l'opérateur suivant afin de l'inverser.

$$\Delta_* = p_+\left(I-e^{2B_0}\right)\left(I+e^{2B_0}\right)^{-1}B_0B^{-1}+p_-\left(I+e^{2B}\right)\left(I-e^{2B}\right)^{-1}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\Delta_- &= -p_+\left(I-e^{2B_0}\right)\left(I-e^{2B}\right)B_0B^{-1}-p_-\left(I+e^{2B_0}\right)\left(I+e^{2B}\right)\\
&= -\left(I-e^{2B}\right)\left(I+e^{2B}\right)\Delta_*.
\end{aligned}$$

On utilise le H^∞ calcul en considérant la fonction

$$f(z) = \frac{p_+\sqrt{z-k_0}\left(1-e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right)}{\sqrt{z+k}\left(1+e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right)}+p_-\frac{\left(1+e^{-2\sqrt{z+k}}\right)}{\left(1-e^{-2\sqrt{z+k}}\right)}$$

maintenant soit $z\in S_{n,k_0}$ avec

$$S_{n,k_0} = \{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\} : |\arg z|<\eta \text{ et } |z|\geq k_0\}, \text{ avec } \eta\in\left]0,\pi\right[$$

alors $f\in H^\infty\left(S_{n,k_0}\right)$ .On a pour tout $z\in S_{n,k_0}$,

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left|\frac{p_+\sqrt{z-k_0}\left(1-e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right)}{\sqrt{z+k}\left(1+e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right)}+p_-\frac{\left(1+e^{-2\sqrt{z+k}}\right)}{\left(1-e^{-2\sqrt{z+k}}\right)}\right|\\
&\geq \left(\left|\frac{p_+\sqrt{z-k_0}\left(1-e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right)}{\sqrt{z+k}\left(1+e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right)}\right|+\left|p_-\frac{\left(1+e^{-2\sqrt{z+k}}\right)}{\left(1-e^{-2\sqrt{z+k}}\right)}\right|\right)\\
&\quad \left|\cos\frac{\arg w_1-\arg w_2}{2}\right|,
\end{aligned}$$

avec

$$w_1 = \frac{p_+\sqrt{z-k_0}}{\sqrt{z+k}}\frac{\left(1-e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right)}{\left(1+e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right)}, \qquad w_2 = \frac{\left(1+e^{-2\sqrt{z+k}}\right)}{\left(1-e^{-2\sqrt{z+k}}\right)}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\arg w_1 &= \arg\sqrt{z-k_0} - \arg\sqrt{z+k} + \arg\left(1-e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right) - \arg\left(1+e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right) \\
\arg w_2 &= \arg\left(1+e^{-2\sqrt{z+k}}\right) - \arg\left(1-e^{-2\sqrt{z+k}}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\arg w_1 - \arg w_2 &= \arg\sqrt{z-k_0} - \arg\sqrt{z+k} + \arg\left(1-e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right) - \arg\left(1+e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right) \\
&\quad + \arg\left(1-e^{-2\sqrt{z+k}}\right) - \arg\left(1+e^{-2\sqrt{z+k}}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left|\arg w_1 - \arg w_2\right| &\leqslant \left|\arg\left(1-e^{-2\sqrt{z+k}}\right) - \arg\left(1+e^{-2\sqrt{z+k}}\right)\right| \\
&\quad + \left|\arg\left(1-e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right) - \arg\left(1+e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right)\right| + \left(\arg\sqrt{z-k_0} - \arg\sqrt{z+k}\right);
\end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\left|\arg\left(1-e^{-2\sqrt{z+k}}\right) - \arg\left(1+e^{-2\sqrt{z+k}}\right)\right| \leq \arg\sqrt{z+k} \leq \frac{\pi-\eta}{2},$$

il n'est pas difficile de voir qu'il existe un petite nombre réei positif $\varepsilon_0 \in]0,\pi[$ tel que

$$\left|\arg\left(1-e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right) - \arg\left(1+e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right)\right| \leq \arg\sqrt{z-k_0} \leq \frac{\pi-\eta-\varepsilon_0}{2},$$

$$\left|\arg w_1 - \arg w_2\right| \leq \arg\sqrt{z+k} + \arg\sqrt{z-k_0} + \arg\sqrt{z-k_0} - \arg\sqrt{z+k} \leq \pi-\eta-\varepsilon_0,$$

et

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left|\frac{p_+\sqrt{z-k_0}\left(1-e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right)}{\sqrt{z+k}\left(1+e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right)} + p_-\frac{\left(1+e^{-2\sqrt{z+k}}\right)}{\left(1-e^{-2\sqrt{z+k}}\right)}\right| && (3.3)\\
&\geq \left(\left|\frac{p_+\sqrt{z-k_0}\left(1-e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right)}{\sqrt{z+k}\left(1+e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right)}\right| + \left|p_-\frac{\left(1+e^{-2\sqrt{z+k}}\right)}{\left(1-e^{-2\sqrt{z+k}}\right)}\right|\right)\left|\cos\frac{\pi-\eta-\varepsilon_0}{2}\right| && (3.4)\\
&\geq p_-\left|\frac{\left(1+e^{-2\sqrt{z+k}}\right)}{\left(1-e^{-2\sqrt{z+k}}\right)}\right|\sin\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) && (3.5)\\
&\geqslant p_-\sin\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\frac{1+|z+k|^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi-\eta}{2}\right)}{4\,|z+k|^{\frac{1}{2}}}\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{(\pi-\eta)}{2}\right)}\right) && (3.6)\\
&\geqslant p_-\sin\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi-\eta}{2}\right)\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{(\pi-\eta)}{2}\right)}\right) > 0. && (3.7)
\end{aligned}$$

Donc$\frac{1}{f} \in H^{\infty}\left(S_{n,k_0}\right)$.On peut écrire

$$\begin{aligned}
\Delta_* &= p_+\left(I-e^{2B_0}\right)\left(I+e^{2B_0}\right)^{-1}B_0B^{-1}+p_-\left(I+e^{2B}\right)\left(I-e^{2B}\right)^{-1}\\
&= p_+\left(I+e^{2B_0}-2e^{2B_0}\right)\left(I+e^{2B_0}\right)^{-1}B_0B^{-1}+p_-\left(I-e^{2B}+2e^{2B}\right)\left(I-e^{2B}\right)^{-1}\\
&= p_+B_0B^{-1}+p_-I-2p_+e^{2B_0}\left(I+e^{2B_0}\right)^{-1}B_0B^{-1}+2p_-e^{2B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1},
\end{aligned}$$

on a aussi

$$\begin{aligned}
f(z) &= p_-+p_+\frac{\sqrt{z-k_0}}{\sqrt{z+k}}-\frac{2p_+\sqrt{z-k_0}e^{-2\sqrt{z-k_0}}}{\sqrt{z+k}\left(1+e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right)}+\frac{2p_-e^{-2\sqrt{z+k}}}{\left(1-e^{-2\sqrt{z+k}}\right)}\\
&= p_-+p_+\frac{\sqrt{z-k_0}-\sqrt{z+k}+\sqrt{z+k}}{\sqrt{z+k}}-\frac{2p_+\sqrt{z-k_0}e^{-2\sqrt{z-k_0}}}{\sqrt{z+k}\left(1+e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right)}\\
&\quad+\frac{2p_-e^{-2\sqrt{z+k}}}{\left(1-e^{-2\sqrt{z+k}}\right)}\\
&= p_-+p_+-\frac{p_+(k+k_0)}{\sqrt{z+k}\left(\sqrt{z-k_0}+\sqrt{z+k}\right)}-\frac{2p_+\sqrt{z-k_0}e^{-2\sqrt{z-k_0}}}{\sqrt{z+k}\left(1+e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right)}\\
&\quad+\frac{2p_-e^{-2\sqrt{z+k}}}{\left(1-e^{-2\sqrt{z+k}}\right)},
\end{aligned}$$

$$f(z)=(p_-+p_+)\left[\begin{array}{c}1-\frac{p_+(k+k_0)}{(p_-+p_+)\sqrt{z+k}\left(\sqrt{z-k_0}+\sqrt{z+k}\right)}-\frac{2p_+\sqrt{z-k_0}e^{-2\sqrt{z-k_0}}}{(p_-+p_+)\sqrt{z+k}\left(1+e^{-2\sqrt{z-k_0}}\right)}\\ +\frac{2p_-e^{-2\sqrt{z+k}}}{(p_-+p_+)\left(1-e^{-2\sqrt{z+k}}\right)},\end{array}\right].$$

Il est clair de 3.3 que $f/(p_-+p_+)$ et $\frac{1}{f/(p_-+p_+)}$ appartiennent $H^{\infty}\left(S_{n,k_0}\right)$ est de l'egalité ci dessus on déduit que

$$\left(\frac{1}{\left(\frac{f}{(p_-+p_+)}\right)}\right)(-A)=\left(\frac{1-\left(\frac{f}{(p_-+p_+)}\right)}{\left(\frac{f}{(p_-+p_+)}\right)}+1\right)(-A)=\left(\frac{1-\left(\frac{f}{(p_-+p_+)}\right)}{\left(\frac{f}{(p_-+p_+)}\right)}\right)(-A)+I\in L(E)$$

donc 3.2, Δ_* est inversible et

$$\Delta_*^{-1}=\left(\frac{1}{\left(\frac{f}{(p_-+p_+)}\right)}\right)(-A)\in L(E).$$

Chapitre 4

Régularité de la solution

4.1 Analyse de $v_-\,(G_-)\,, v_0\,(G_0)$ et $v_+\,(G_+)$

Dans ce chapitre nous allons utilisé les propositions suivantes (voir [24])

Proposition 4.1 *Soit L le g.i. d"un S.G analytiqiue généralisé* $(e^{xL})_{x\geqslant 0}$.
1 Soit $\varphi \in \overline{D(L)}$.Alors les assertions suivantes équivalentes
(a) $e^{L}\varphi \in C([0,1]\ ;\ X)$.
(b)$\varphi \in \overline{D(L)}$.
2 Soit $\theta \in [0,1], g \in C^{\theta}([0,1]\ ;\ X), \varphi \in X$. Posons

$$S(x) = e^{xL}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)}g(s)ds,\ \ X \in [0,1].$$

Alors les assertios suivantes sont équivalentes
(a) $S \in C^{1}([0,1]\ ;\ X) \cap C^{\theta}([0,1]\ ;\ D(L))$.
(b) $\varphi \in D(L)\ \ etg(0) + L\varphi \in \overline{D(L)}$.

Proposition 4.2 *soit $\theta \in\ ]0,1[$ et L le g.i. d"un S.G analytiqiue généralisé* $(e^{xL})_{x\geqslant 0}$.
1 Alors les assertions suivantes équivalentes
(a) $e^{L}\varphi \in C^{\theta}([0,1]\ ;\ X)$.
(b)$\varphi \in D_L(\theta,+\infty)$.
2 Soit $g \in C([0,1]\ ;\ X)$ et$\varphi \in X$.Posons

$$S(x) = e^{xL}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)}g(s)ds,\ \ X \in [0,1].$$

Alors les assertios suivantes sont équivalentes
(a) $S \in C^{1,\theta}([0,1]\ ;\ X) \cap C^{\theta}([0,1]\ ;\ D(L))$.
(b)$g \in C^{\theta}([0,1]\ ;\ X), \varphi \in D(L)\ \ etg(0) + L\varphi \in D_L(\theta,+\infty)$.
3 Soit $g \in C^{\theta}([0,1]\ ;\ X)$ Alors

$$L\int_0^1 e^{SL}(g(s) - g(0))ds \in D_L(\theta,+\infty)$$

4.1.1 Analyse de $v_-(G_-)$ sur (-1,0)

On a pour $x \in \left]-1,0\right[$

$$\begin{aligned}
v_-(G_-)(x) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} e^{(x-t)B}B^{-1}G_-(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{x}^{0} e^{(t-x)B}B^{-1}G_-(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} e^{(x-t)B}B^{-1}\left[G_-(t)-G_-(x)\right]dt + \frac{1}{2}\int_{x}^{0} e^{(t-x)B}B^{-1}\left[G_-(t)-G_-(x)\right]dt \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{-1}^{x} e^{(x-t)B}B^{-1}G_-(x)\,dt + \frac{1}{2}\int_{x}^{0} e^{(t-x)B}B^{-1}G_-(x)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} e^{(x-t)B}B^{-1}\left[G_-(t)-G_-(x)\right]dt + \frac{1}{2}\int_{x}^{0} e^{(t-x)B}B^{-1}\left[G_-(t)-G_-(x)\right]dt \\
&\quad -\frac{1}{2}\left[e^{(x-t)B}B^{-2}G_-(x)\right]_{-1}^{x} + \frac{1}{2}\left[e^{(t-x)B}B^{-2}G_-(x)\right]_{x}^{0} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} e^{(x-t)B}B^{-1}\left[G_-(t)-G_-(x)\right]dt + \frac{1}{2}\int_{x}^{0} e^{(t-x)B}B^{-1}\left[G_-(t)-G_-(x)\right]dt \\
&\quad -\frac{1}{2}B^{-2}G_-(x) + \frac{1}{2}e^{(x+1)B}B^{-2}G_-(x) + \frac{1}{2}e^{-xB}B^{-2}G_-(x) - \frac{1}{2}B^{-2}G_-(x) \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} e^{(x-t)B}B^{-1}\left[G_-(t)-G_-(x)\right]dt + \frac{1}{2}\int_{x}^{0} e^{(t-x)B}B^{-1}\left[G_-(t)-G_-(x)\right]dt \\
&\quad +\frac{1}{2}e^{(x+1)B}B^{-2}\left[G_-(x)-G_-(-1)\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}e^{(x+1)B}B^{-2}G_-(-1) + \frac{1}{2}e^{-xB}B^{-2}\left[G_-(x)-G_-(0)\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}e^{-xB}B^{-2}G_-(0) - B^{-2}G_-(x) \\
&= R_-(x) + S_{-,-1}(x) + S_{-,0}(x),
\end{aligned}$$

ou

$$S_{-,-1}(x) = \frac{1}{2}e^{(x+1)B}B^{-2}G_-(-1), \qquad S_{-,0}(x) = \frac{1}{2}e^{-xB}B^{-2}G_-(0).$$

Du lemme 3.1, R_- a la propriété de régularité maximales suivante

$$\forall x \in [-1,0] \quad R_-(x) \in D\left(B^2\right) \text{ et } x \mapsto B^2R_-(x) \in C^{\theta}\left([-1,0];E\right),$$

alors que pour $S_{-,-1}(x)$ et $S_{-,0}(x)$ nous avons seulment

$$S_{-,-1} \in C\left([-1,0];D\left(B^2\right)\right) \text{ et } S_{-,0} \in C\left([-1,0];D\left(B^2\right)\right).$$

le comportement de $B^2S_{-,-1}(x)$ au voissinage de -1 est celui de

$$\frac{1}{2}^{(x+1)B}G_-(-1), \tag{4.1}$$

et le comportement de $B^2S_{-,0}(x)$ ou voissinage de 0 est celui de

$$\frac{1}{2}e^{-xB}G_-(0) \tag{4.2}$$

4.1.2 Analyse de $v_0(G_0)$ sur (0,1)

Rappelons que, pour $x \in \,]0,1[$

$$v_0(G_0)(x) = \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-t)B_0}B_0^{-1}G_0(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(t-x)B_0}B_0^{-1}G_0(t)\,dt,$$

qui peut être écrit comme suit

$$\begin{aligned}
v_0(G_0)(x) &= \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-t)B_0}B_0^{-1}[G_0(t)-G_0(x)]\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-t)B_0}B_0^{-1}G_0(x)\,dt \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(t-x)B_0}B_0^{-1}[G_0(t)-G_0(x)]\,dt + \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(t-x)B_0}B_0^{-1}G_0(x) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-t)B_0}B_0^{-1}[G_0(t)-G_0(x)]\,dt + \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(t-x)B_0}B_0^{-1}[G_0(t)-G_0(x)]\,dt \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-t)B_0}B_0^{-1}G_0(x)\,dt + \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(t-x)B_0}B_0^{-1}G_0(x) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-t)B_0}B_0^{-1}[G_0(t)-G_0(x)]\,dt + \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(t-x)B_0}B_0^{-1}[G_0(t)-G_0(x)]\,dt \\
&\quad - \left[\frac{1}{2}e^{(x-t)B_0}B_0^{-2}G_0(x)\right]_0^x + \left[\frac{1}{2}e^{(t-x)B_0}B_0^{-2}G_0(x)\right]_x^1 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-t)B_0}B_0^{-1}[G_0(t)-G_0(x)]\,dt + \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(t-x)B_0}B_0^{-1}[G_0(t)-G_0(x)]\,dt \\
&\quad - \frac{1}{2}B_0^{-2}G_0(x) + \frac{1}{2}e^{xB_0}B_0^{-2}G_0(x) + \frac{1}{2}e^{(1-x)B_0}B_0^{-2}G_0(x) - \frac{1}{2}B_0^{-2}G_0(x) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-t)B_0}B_0^{-1}[G_0(t)-G_0(x)]\,dt + \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(t-x)B_0}B_0^{-1}[G_0(t)-G_0(x)]\,dt \\
&\quad - B_0^{-2}G_0(x) + \frac{1}{2}e^{xB_0}B_0^{-2}[G_0(x)-G_0(0)] \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{(1-x)B_0}B_0^{-2}[G_0(x)-G_0(1)] \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{xB_0}B_0^{-2}G_0(0) + \frac{1}{2}e^{(1-x)B_0}B_0^{-2}G_0(1) \\
&= R_0(x) + S_{0,0}(x) + S_{0,1}(x),
\end{aligned}$$

où

$$S_{0,0}(x) = \frac{1}{2}e^{xB_0}B_0^{-2}G_0(0), \qquad S_{0,1}(x) = \frac{1}{2}e^{(1-x)B_0}B_0^{-2}G_0(1).$$

Du lemme 3.1, le terme R_0 a la propriétér de régularité maximales suivantes

$$\forall x \in [0,1] \quad R_0(x) \in D\left(B_0^2\right) \text{ et } x \mapsto B_0^2 R_0(x) \in C^{\theta}([0,1];E),$$

alors que pour $S_{0,0}(x)$ et $S_{0,1}(x)$ nous avons seulement

$$S_{0,0} \in C\left([0,1];D\left(B_0^2\right)\right) \text{ et } S_{0,1} \in C\left([0,1];D\left(B_0^2\right)\right).$$

le comportement de $B_0^2 S_{0,0}(x)$ au voissinage de 0 est celui de

$$\frac{1}{2}e^{xB_0}G_0(0),$$

et le comportement de $B_0^2 S_{0,1}(x)$ ou voissinage de 1 est celui de

$$\frac{1}{2}e^{(1-x)B_0}G_0(1).$$

4.1.3 Analyse de $v_+(G_+)$ sur $(1,2)$

On a, pour $x \in]1,2[$

$$\begin{aligned}
v_+(G_+)(x) &= \frac{1}{2}\int_1^x e^{(x-t)B}B^{-1}G_+(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_x^2 e^{(t-x)B}B^{-1}G_+(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_1^x e^{(x-t)B}B^{-1}\left[G_+(t)-G_+(x)\right]dt + \frac{1}{2}\int_1^x e^{(x-t)B}B^{-1}G_+(x)\,dt \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_x^2 e^{(t-x)B}B^{-1}\left[G_+(t)-G_+(x)\right]dt + \frac{1}{2}\int_x^2 e^{(t-x)B}B^{-1}G_+(x)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_1^x e^{(x-t)B}B^{-1}\left[G_+(t)-G_+(x)\right]dt + \frac{1}{2}\int_x^2 e^{(t-x)B}B^{-1}\left[G_+(t)-G_+(x)\right]dt \\
&\quad - \left[\frac{1}{2}e^{(x-t)B}B^{-1}G_+(x)\right]_1^x + \frac{1}{2}\left[e^{(t-x)B}B^{-1}G_+(x)\right]_x^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_1^x e^{(x-t)B}B^{-1}\left[G_+(t)-G_+(x)\right]dt + \frac{1}{2}\int_x^2 e^{(t-x)B}B^{-1}\left[G_+(t)-G_+(x)\right]dt \\
&\quad -\frac{1}{2}B^{-2}G_+(x) + \frac{1}{2}e^{(x-1)B}B^{-2}G_+(x) + e^{(2-x)B}B^{-2}G_+(x) - \frac{1}{2}B^{-2}G_+(x) \\
&= \frac{1}{2}\int_1^x e^{(x-t)B}B^{-1}\left[G_+(t)-G_+(x)\right]dt + \frac{1}{2}\int_x^2 e^{(t-x)B}B^{-1}\left[G_+(t)-G_+(x)\right]dt \\
&\quad +\frac{1}{2}e^{(x-1)B}B^{-2}\left[G_+(x)-G_+(1)\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}e^{(2-x)B}B^{-2}\left[G_+(x)-G_+(2)\right] - B^{-2}G_+(2) \\
&\quad +\frac{1}{2}e^{(x-1)B}B^{-2}G_+(1) + \frac{1}{2}e^{(2-x)B}B^{-2}G_+(2) \\
&= R_+(x) + S_{+,1}(x) + S_{+,2}(x),
\end{aligned}$$

où

$$S_{+,1}(x) = \frac{1}{2}e^{(x-1)B}B^{-2}G_+(1), \qquad S_{+,2}(x) = \frac{1}{2}e^{(2-x)B}B^{-2}G_+(2).$$

Du lemme 3.1, le terme R_+ a la propriétér de régularité maximales suivantes

$$\forall x \in [1,2] \quad R_+(x) \in D\left(B^2\right) \text{ et } x \mapsto B^2 R_+(x) \in C^\theta([1,2];E),$$

alors pour les termes $S_{+,1}(x)$ et $S_{+,2}(x)$ on a seulement

$$S_{+,1} \in C\left([1,2];D\left(B^2\right)\right) \text{ et } S_{+,2} \in C\left([1,2];D\left(B^2\right)\right).$$

le comportement de $B^2 S_{+,1}(x)$ au voissinage de 1 est celui de

$$\frac{1}{2}e^{(x-1)B}G_+(1),$$

et le comportement de $B^2 S_{+,2}(x)$ ou voissinage de 2 est celui de

$$\frac{1}{2}e^{(2-x)B}G_+(2).$$

4.2 Analyse des dérivées

Analysons le comportement des dérivées de $v_-(G_-)$, $v_0(G_0)$ et $v_+(G_+)$, afin d'étudier la régularité de la solution de problème. Pour tout $x \in]-1,0[$,on a

$$\begin{aligned} v'_-(G_-)(x) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} e^{(x-t)B}B^{-1}G_-(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{x}^{0} e^{(t-x)B}G_-(t)\,dt + \frac{1}{2}B^{-1}G_-(x) - \frac{1}{2}B^{-1}G_-(x) \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} e^{(x-t)B}G_-(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{x}^{0} e^{(t-x)B}G_-(t)\,dt, \end{aligned}$$

et alors

$$\begin{aligned} v'_-(G_-)(0) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{-tB}G_-(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{-tB}\left[G_-(t) - G_-(0)\right]dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{-tB}G_-(0) \\ &= -\frac{1}{2}B^{-1}G_-(0) + \frac{1}{2}B^{-1}e^{B}G_-(0) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{-tB}\left[G_-(t) - G_-(0)\right]dt. \end{aligned}$$

Similairement, pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$v'_0(G_0)(x) = \frac{1}{2}\int_{0}^{x} e^{(x-t)B_0}G_0(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{x}^{1} e^{(t-x)B_0}G_0(t)\,dt,$$

et alors

$$\begin{aligned} v'_0(G_0)(1) &= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{(1-t)B_0}G_0(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{(1-t)B_0}\left[G_0(t) - G_0(1)\right]dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{(1-t)B_0}G_0(1)\,dt \\ &= -\frac{1}{2}B_0^{-1}G_0(1) + \frac{1}{2}B_0^{-1}e^{B_0}G_0(1) + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{(1-t)B_0}\left[G_0(t) - G_0(1)\right]dt. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} v'_0(G_0)(0) &= -\frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{tB_0}G_0(t)\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{tB_0}\left[G_0(t) - G_0(0)\right]dt - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{tB_0}G_0(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}B_0^{-1}G_0(0) - \frac{1}{2}B_0^{-1}e^{B_0}G_0(0) - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{tB_0}\left[G_0(t) - G_0(0)\right]dt, \end{aligned}$$

et

$$v'_+(G_0)(1) = \frac{1}{2}B^{-1}G_+(1) - \frac{1}{2}B^{-1}e^{B}G_+(1) - \frac{1}{2}\int_{1}^{2} e^{(t-1)B}\left[G_+(t) - G_+(1)\right]dt.$$

4.2.1 Etude de la regularité de la solution du probleme (P_A)

analyse de u_- au voisinage de -1

On suppose la condition nécessaire $f_- \in D(B^2) = D(A)$. Rappelons que

$$u_-(x) = e^{-xB}\alpha_- + e^{(1+x)B}\beta_- + v_-(G_-)(x),$$

ou, du 2.2, on a

$$\beta_- = -e^B\alpha_- - v_-(G_-)(-1) + f_-.$$

Puis le comportement de $B^2u_-(x)$ au voisinage de -1 est celui la fonction

$$e^{(1+x)B}B^2[-v_-(G_-)(-1) + f_-] + B^2v_-(G_-)(x).$$

On a

$$\begin{aligned} v_-(G_-)(-1) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{(t+1)B}B^{-1}[G_-(t) - G_-(-1)]\,dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{(t+1)B}B^{-1}G_-(-1)\,dt \\ &= -\frac{1}{2}B^{-2}G_-(-1) + R_*(G_-)(-1), \end{aligned}$$

et le terme R_* est régulier puisque

$$B^2[R_*G_-(-1)] \in D_B(\theta, +\infty),$$

voir lemme 3.1.

Maintenant, à partir de l'étude et des résultats sur le comportement de $B^2v_-(G_-)(x)$ au voisinage de -1, voir4.1, nous concluons que le comportement de $B^2u_-(x)$ au voisinage de -1 est le même que

$$\begin{aligned} & e^{(1+x)B}\left[\frac{1}{2}G_-(-1) + B^2f_-\right] + \frac{1}{2}e^{(1+x)B}G_-(-1) \\ = \;& e^{(1+x)B}\left[G_-(-1) + B^2f_-\right]. \end{aligned}$$

Du Lemme 3.1, $B^2u_-(.)$ le propriétér suivantes de la régularité maximale au voisinage de -1

$$\begin{cases} B^2u_-(.) \in C([-1,0[;E) \text{ ssi } [G_-(-1) + B^2f_-] \in \overline{D(B^2)} = \overline{D(A)} \\ B^2u_-(.) \in C^\theta([-1,0[;E) \text{ ssi } [G_-(-1) + B^2f_-] \in D_B(\theta, +\infty). \end{cases}$$

Pour l'analyse de u_+ au voisinage de 2, on peut utiliser les même techniques que l'analyse de u_- au voisinage de -1, on obtient la régularité maximale suivante de $B^2u_+(.)$ au voisinage de 2

$$\begin{cases} B^2u_+(.) \in C([1,2[;E) \text{ ssi } [G_+(2) + B^2f_-] \in \overline{D(B^2)} = \overline{D(A)} \\ B^2u_+(.) \in C^\theta([1,2[;E) \text{ ssi } [G_+(2) + B^2f_-] \in D_B(\theta, +\infty). \end{cases}$$

Analyse de u_- à l'interface $\{0\}\times]0,1[$

$$\begin{aligned}
u_- &\simeq v\left(G_-\right)(x) - p_+ e^{-xB}\Delta_-^{-1}\left(I - e^{2B_0}\right)B_0B^{-1}f_* + e^{-xB}\Delta_-^{-1}\left(I+e^{2B_0}\right)g_* + Rég \\
&= Rég + v\left(G_-\right)(x) - p_+e^{-xB}\Delta_-^{-1}\left(I-e^{2B_0}\right)B_0B^{-1}\begin{bmatrix} -e^Bf_- - e^{B_0}B_0^{-1}\Psi + e^Bv_-\left(G_-\right)(-1) \\ +e^{B_0}B_0^{-1}v_0'\left(G_0\right)(1) \\ -v_-\left(G_-\right)(0) + v_0\left(G_0\right)(0)\end{bmatrix} \\
&\quad + e^{-xB}\Delta_-^{-1}\left(I+e^{2B_0}\right)\begin{bmatrix} -p_-e^Bf_- + p_+B^{-1}e^{B_0}\Psi + p_-e^Bv_-\left(G_-\right)(-1) - p_+B^{-1}e^{B_0}v_0'\left(G_0\right)(1) \\ -p_-B^{-1}v_-'\left(G_-\right)(0) + B^{-1}p_+v_0'\left(G_0\right)(0)\end{bmatrix} \\
&= Rég + v\left(G_-\right)(x) \\
&\quad - p_+e^{-xB}\Delta_-^{-1}\left(I-e^{2B_0}\right)B_0B^{-1}\left[v\left(G_-\right)(0) + v_0\left(G_0\right)(0)\right] \\
&\quad + p_+e^{-xB}\Delta_-^{-1}\left(I-e^{2B_0}\right)B_0B^{-1}\left[-e^{2B_0}B_0^{-1}\Psi\right] \\
&\quad + \Delta_-^{-1}e^{-xB}\left(I-e^{2B_0}\right)B^{-1}\left[p+v'\left(G_-\right)(0) + v_0'\left(G_0\right)(0)\right] \\
&\quad + \Delta_-^{-1}e^{-xB}\left(I-e^{2B_0}\right)B^{-1}\left[p+e^{B_0}B^{-1}\Psi\right].
\end{aligned}$$

Or on a

$$\left[v\left(G_0\right)(0) - v_-\left(G_-\right)(0)\right] = \frac{1}{2}(B^{-2}(G_-(0)) - B_0^{-2}(G_0(0))) + Rég,$$

et

$$p + v'(G_0)(0) - p - v'(G_-)(0) = \frac{p+}{2}B_0^{-1}G_0(0) + \frac{p-}{2}B_0^{-1}G_-(0) + Rég,$$

donc on obtient

$$\begin{aligned}
u_- &\simeq Rég + v(G_-)(x) \\
&\quad + \frac{1}{2}p + e^{-xB}\Delta^{-1}(I - e^{éB_0})B_0B^{-1}(B^{-2}(G_-(0)) - B_0^{-2}(G_0(0))) \\
&\quad + e^{-xB}\Delta^{-1}(I-e^{2B_0})B^{-1}\left[\frac{p+}{2}B_0^{-1}G_0(0) + \frac{p-}{2}B_0^{-1}G_-(0)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_- &\simeq Rég + \frac{1}{2}B^{-2}e^{-xB}G_-0) \\
&\quad + \frac{1}{2}p_+e^{-xB}\Delta^{-1}(I-e^{2B_0})B_0B^{-1}(B^{-2}(G_-(0)) - B_0^{-2}(G_0(0))) \\
&\quad + e^{-xB}\Delta^{-1}(I-e^{2B_0})B^{-1}\left[\frac{p+}{2}B_0^{-1}G_0(0) + \frac{p-}{2}B^{-1}G_-(0)\right].
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\Delta &= -p + (I-e^{2B_0})B_0B^{-1}(I-e^{2B}) - p - (I-e^{2B})(I-e^{2B_0}) \\
&= -\left[p + (I-e^{2B_0})B_0B^{-1}(I-e^{2B}) - p - (I-e^{2B})(I-e^{2B_0})\right] \\
&= [p_+B_0B^{-1} + p - I + Opereg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_- \quad \simeq \quad & Rég + \frac{1}{2}B^{-2}e^{-xB}G_-(0) \\
& -\frac{1}{2}p_+e^{-xB}\Delta^{-1}(I-e^{2B_0})B_0B^{-1}(B^{-2}(G_-(0)) - B_0^{-2}(G_0(0)) \\
& +e^{-xB}\Delta^{-1}(I-e^{2B_0})B^{-1}\left[\frac{p+}{2}B_0^{-1}G_0(0) + \frac{p-}{2}B^{-1}G_-(0)\right] \\
\simeq \quad & Rég + \frac{1}{2}B^{-2}e^{-xB}G_-(0) \\
& +\frac{1}{2}e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}(I-e^{2B_0})\left[p_+B_0B^{-1}\right](B^{-2}(G_-(0)) - B_0^{-2}(G_0(0)) \\
& -\frac{1}{2}e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}(I+e^{2B_0})\left[p_+B^{-1}B_0^{-1}G_0(0) + p_-B^{-2}(G_-(0)\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_- \quad \simeq \quad & Rég + \frac{1}{2}B^{-2}e^{-xB}G_-(0) \\
& +L+M.
\end{aligned}$$

On écrit que

$$\begin{aligned}
L \quad = \quad & \frac{1}{2}e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}(I-e^{2B_0})\left[p_+B_0B^{-1}\right](B^{-2}(G_-(0)) - B_0^{-2}(G_0(0)) \\
= \quad & \frac{1}{2}e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}(I-e^{2B_0})\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]\times \\
& (B^{-2}G_-(0) - B_0^{-2}G_0(0)) \\
& +\frac{1}{2}e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}(I-e^{2B_0})\left[-p_-I - Opereg\right]\times \\
& (B^{-2}G_-(0) - B_0^{-2}(G_0(0)) \\
= \quad & \frac{1}{2}e^{-xB}(B^{-2}G_-(0) - B_0^{-2}G_0(0)) + Opereg \\
& -\frac{p+}{2}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}(B^{-2}G_-(0) - B_0^{-2}G_0(0)) \\
= \quad & \frac{1}{2}e^{-xB}(B^{-2}G_-(0) - B_0^{-2}G_0(0)) + Opereg \\
& -\frac{p_-}{2}e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}B^{-2}G_-(0) \\
& +\frac{p_-}{2}e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}B_0^{-2}G0(0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M \quad = \quad & -\frac{1}{2}e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}(I+e^{2B_0})\left[p_+B^{-1}B_0^{-1}G_0(0) + p_-B^{-2}G_-(0)\right] \\
= \quad & -\frac{1}{2}e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}\left[p_+B^{-1}B_0^{-1}G_0(0) + p_-B^{-2}G_-(0)\right] + Opereg \\
= \quad & -\frac{p_+}{2}e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}B^{-1}B_0^{-1}G_0(0) + Opereg \\
& -\frac{p_+}{2}e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}B^{-2}G_-(0) + Opereg.
\end{aligned}$$

Il reste

$$\begin{aligned} u_- \simeq\ & Rég + \frac{1}{2}B^{-2}e^{-xB}G_-(0) \\ & +\frac{1}{2}e^{-xB}B^{-2}G_-(0) + Opereg \\ & -\frac{1}{2}e^{-xB}B_0^{-2}G_0(0) \\ & -\frac{p_-}{2}e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}B^{-2}G_-(0) \\ & +\frac{p_+}{2}e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}B_0^{-2}G_0(0) \\ & -\frac{p_+}{2}e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}B^{-1}B_0^{-1}G_0(0) + Opereg \\ & -\frac{p_-}{2}e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}B^{-2}G_-(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_- \simeq\ & Rég + e^{-xB}B^{-2}G_-(0) \\ & -\frac{1}{2}e^{-xB}B_0^{-2}G_0(0) \\ & -p_-e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}B^{-2}G_-(0) \\ & +\frac{1}{2}e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}(p_-B_0^{-2} - p_+B_0^{-1}B^{-1})G_0(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_- \simeq\ & Rég \\ & +e^{-xB}\left[I - p_-\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}\right]B^{-2}G_-(0) \\ & \frac{1}{2}e^{-xB}\left[I - \left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}(p_-I - p_+B_0B^{-1})\right]B^{-2}G_0(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_- \simeq\ & Rég \\ & +e^{-xB}\left[I - p_-\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + p_+B_0B^{-1}\right]\right]B^{-2}G_-(0) \\ & -\frac{1}{2}e^{-xB}\left[I - \left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}\left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + 2p_+B_0B^{-1}\right]\right]B_0^{-2}G_0(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_- \simeq\ & Rég \\ & +e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1}\right]\ \left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}B^{-2}G_-(0) \\ & -e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1}\right]\ \left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}B^{-2}G_0^{-2}(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_- \simeq\ & Rég \\ & +e^{-xB}\left[p_+B_0B^{-1}\right]\ \left[p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg\right]^{-1}(B^{-2}G_-(0) - B^{-2}G_0^{-2}(0)) \end{aligned}$$

Théorème 4.1 *Soient* $\frac{g_-}{d} \in C^\theta([-1,0]\,;E)$ *et* $\frac{g_0}{d_0} \in C^\theta([0,1]\,;E)$ *avec* $0 < \theta < 1$. *On suppose que*

$$f_- \in D(B^2).$$

Alors

Notation 4.1 *1. u_-est la solution du notre problème sur* $[-1,0]$

2. $u_- \in C^\theta([-1,0]\ ;D(B^2)) \cap C^2([-1,0]\ ;E)$ *si et seulement si*

$$B^2 f_- + \frac{g_-(-1)}{d} \in \overline{D(B)},$$

et

$$\left(\frac{g_-(0)}{d} - \frac{g_0(0)}{d_0}\right) \in \overline{D(B)}.$$

Théorème 4.2 *Soient* $\frac{g_-}{d} \in C^\theta([-1,0]\,;E)$ *et* $\frac{g_0}{d_0} \in C^\theta([0,1]\ ;E)$ *avec* $0 < \theta < 1$. *On suppose que*

$$f_- \in D(B^2).$$

Alors

1. *u_-est la solution du notre problème sur* $[-1,0]$
2. $B^2 u_-(.), u_- \in C^\theta([-1,0]\ ;D(B^2)) \cap C^2([-1,0]\ ;E)$ *si et seulement si*

$$B^2 f_- + \frac{g_{-(-1)}}{d} \in D_B(\theta, +\infty),$$

et

$$\left(\frac{g_-(0)}{d} - \frac{g_0(0)}{d_0}\right) \in D_B(\theta, +\infty).$$

Analyse de u_-au voisinage de l'interface $\{0\} \times]0,1[$

$$\begin{aligned} u_0 &\simeq Rég + G_0(x) \\ &+ e^{xB_0}\Delta_-^{-1}P_-\left(I + e^{2B}\right) f_* + e^{xB_0}\Delta_-^{-1}\left(I - e^{2B}\right) g_*, \end{aligned}$$

on remplace f_* et g_* on obtient

$$\begin{aligned} u_0 \simeq\ & Rég + vG_0(x) \\ & + e^{xB_0}\Delta_-^{-1}P_-\left(I + e^{2B}\right)\begin{pmatrix} -e^B f_- - e^{B_0}B_0^{-1}\Psi + e^B v_-(G_-)(-1) \\ +e^{B_0}B_0^{-1}v_0'(G_0)(1) - v_-(G_-)(0) + v_0(G_0)(0) \end{pmatrix} \\ & + e^{xB_0}\Delta_-^{-1}\left(I - e^{2B}\right)\begin{pmatrix} -p_- e^B f_- + p_+ B^{-1} e^{B_0}\Psi + p_- e^B v_-(G_-)(-1) \\ -p_+ B^{-1} e^{B_0} v_0'(G_0)(1) - p_- B^{-1} v_-'(G_-)(0) + B^{-1} p_+ v_0'(G_0)(0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} u_0 &\simeq Rég + vG_0(x) \\ &+ e^{xB_0}\Delta_-^{-1}P_-\left(I + e^{2B}\right)\left(-e^{B_0}B_0^{-1}\Psi - v_-(G_-)(0) + v_0(G_0)(0)\right) \\ &+ e^{xB_0}\Delta_-^{-1}\left(I - e^{2B}\right)\left[p_+ B^{-1} e^{B_0}\Psi - p_- B^{-1} v_-'(G_-)(0) + B^{-1} p_+ v_0'(G_0)(0)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 &\simeq Rég + G_0(x) \\ &+e^{xB_0}\Delta_-^{-1}P_-\left(I+e^{2B}\right)\left(v_0(G_0)(0) - v_-(G_-)(0)\right) \\ &+e^{xB_0}\Delta_-^{-1}\left(I-e^{2B}\right)B^{-1}\left[p_+v_0'(G_0)(0) - p_-v_-'(G_-)(0)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 &\simeq Rég + vG_0(x) \\ &+e^{xB_0}\Delta_-^{-1}P_-\left(I+e^{2B}\right)\left(\frac{1}{2}(B^{-2}(G_-)(0) - B_0^{-2}(G_0)(0))\right) \\ &+e^{xB_0}\Delta_-^{-1}\left(I-e^{2B}\right)B^{-1}\left[\frac{p_+}{2}B_0^{-1}G_0(0) - \frac{p_-}{2}B^{-1}G_-(0)\right] \end{aligned}$$

$$v_0(G_0)(x) = \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-t)B_0}B_0^{-1}G_0(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(t-x)B_0}B_0^{-1}G_0(t)\,dt$$

$$\begin{aligned} u_0 &\simeq Rég + \frac{1}{2}e^{xB_0}B_0^{-2}G_0(0) \\ &+e^{xB_0}\Delta_-^{-1}P_-\left(I+e^{2B}\right)\left(\frac{1}{2}(B^{-2}(G_-)(0) - B_0^{-2}(G_0)(0))\right) \\ &+e^{xB_0}\Delta_-^{-1}\left(I-e^{2B}\right)B^{-1}\left[\frac{p_+}{2}B_0^{-1}G_0(0) - \frac{p_-}{2}B^{-1}G_-(0)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_- &= -p+(I-e^{2B_0})B_0B^{-1}(I-e^{2B}) - p - (I-e^{2B})(I-e^{2B_0}) \\ &= -\left[p+(I-e^{2B_0})B_0B^{-1}(I-e^{2B}) - p - (I-e^{2B})(I-e^{2B_0})\right] \\ &= [p_+B_0B^{-1} + p_-I + Opereg] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 &\simeq Rég + \frac{1}{2}e^{xB_0}B_0^{-2}G_0(0) \\ &+e^{xB_0}[p_+B_0B^{-1}+p_-I+Opereg]^{-1}P_-\left(I+e^{2B}\right)\left(\frac{1}{2}(B^{-2}G_-(0) - B_0^{-2}G_0(0))\right) \\ &+e^{xB}[p_+B_0B^{-1}+p_-I+Opereg]^{-1}\left(I-e^{2B}\right)B^{-1}\left[\frac{p_+}{2}B_0^{-1}G_0(0) - \frac{p_-}{2}B^{-1}G_-(0)\right] \end{aligned}$$

$$u_0 \simeq Rég + \frac{1}{2}e^{xB_0}B_0^{-2}G_0(0) + I + II$$

$$\begin{aligned} I &= -e^{xB_0}[p_+B_0B^{-1}+p_-I+Opereg]^{-1}P_-\left(I+e^{2B}\right)\left(\frac{1}{2}(B^{-2}(G_-)(0) - B_0^{-2}(G_0)(0))\right) \\ &= -e^{xB_0}[p_+B_0B^{-1}+p_-I+Opereg]^{-1}\left[\left(p_+B_0B^{-1}+p_-I+Opereg\right) - p_+B_0B^{-1} - Opereg\right] \\ &\quad\times\left(I+e^{2B}\right)\left(\frac{1}{2}(B^{-2}(G_-)(0) - B_0^{-2}(G_0)(0))\right) \\ &= -e^{xB_0}\left(I+e^{2B}\right)\left(\frac{1}{2}(B^{-2}(G_-)(0) - B_0^{-2}(G_0)(0))\right) \\ &\quad+e^{xB_0}[p_+B_0B^{-1}+p_-I+Opereg]^{-1}\left[p_+B_0B^{-1}\right]\left(\frac{1}{2}(B^{-2}(G_-)(0) - B_0^{-2}(G_0)(0))\right) + Opereg \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
II &= e^{xB}[p_+B_0B^{-1}+p_-I+Opereg]^{-1}\left(I-e^{2B}\right)B^{-1}\left[\frac{p_+}{2}B_0^{-1}v\left(G_0\right)(0)-\frac{p_-}{2}B^{-1}\left(G_-\right)(0)\right]\\
&= e^{xB_0}[p_+B_0B^{-1}+p_-I+Opereg]^{-1}\left[\frac{p_+}{2}B_0^{-1}G_0\left(0\right)-\frac{p_-}{2}B^{-1}G_-\left(0\right)\right]+Opereg
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I+II &= -e^{xB_0}\left(I+e^{2B}\right)\left(\frac{1}{2}(B^{-2}\left(G_-\right)(0)-B_0^{-2}\left(G_0\right)(0))\right)\\
&\quad +e^{xB_0}[p_+B_0B^{-1}+p_-I+Opereg]^{-1}\left[p_+B_0B^{-1}\right]\left(\frac{1}{2}(B^{-2}G_-\left(0\right)-B_0^{-2}G_0\left(0\right))\right)\\
&\quad -e^{xB_0}[p_+B_0B^{-1}+p_-I+Opereg]^{-1}\left[\frac{p_+}{2}B^{-1}B_0^{-1}G_0\left(0\right)-\frac{p_-}{2}B^{-1}G_-\left(0\right)\right]+Opereg
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I+II &= -\frac{1}{2}e^{xB_0}\frac{1}{2}(B^{-2}G_-\left(0\right)-B_0^{-2}G_0\left(0\right))\\
&\quad -e^{xB_0}[p_+B_0B^{-1}+p_-I+Opereg]^{-1}\left[p_+B_0B^{-1}\right]B_0^{-2}G_0\left(0\right)\\
&\quad +\frac{1}{2}e^{xB_0}[p_+B_0B^{-1}+p_-I+Opereg]^{-1}(p_+B_0B^{-1}-p_-I)B^{-2}G_-\left(0\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq Rég+\frac{1}{2}e^{xB_0}B_0^{-2}G_0\left(0\right)\\
&\quad +I+II
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq Rég+\frac{1}{2}e^{xB_0}B_0^{-2}G_0\left(0\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}e^{xB_0}(B^{-2}G_-\left(0\right)-B_0^{-2}G_0\left(0\right))\\
&\quad -e^{xB_0}[p_+B_0B^{-1}+p_-I+Opereg]^{-1}\left[p_+B_0B^{-1}\right]B_0^{-2}G_0\left(0\right)\\
&\quad +\frac{1}{2}e^{xB_0}[p_+B_0B^{-1}+p_-I+Opereg]^{-1}(p_+B_0B^{-1}-p_-I)B^{-2}G_-\left(0\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq Rég+\frac{1}{2}e^{xB_0}B_0^{-2}G_0\left(0\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}e^{xB_0}(B^{-2}G_-\left(0\right)-B_0^{-2}G_0\left(0\right))\\
&\quad -e^{xB_0}[p_+B_0B^{-1}+p_-I+Opereg]^{-1}\left[p_+B_0B^{-1}\right]B_0^{-2}G_0\left(0\right)\\
&\quad +\frac{1}{2}e^{xB_0}[p_+B_0B^{-1}+p_-I+Opereg]^{-1}(p_+B_0B^{-1}-p_-I)B^{-2}\left(G_-\right)(0)\times\\
&\quad (p_+B_0B^{-1}-p_-I+opereg-p_-I-opereg-p_-I)B^{-2}\left(G_-\right)(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq Rég + \frac{1}{2} e^{xB_0} B_0^{-2} G_0(0) \\
&-\frac{1}{2} e^{xB_0} (B^{-2} G_-(0) - B_0^{-2} G_0(0)) + \frac{1}{2} e^{xB_0} B^{-2} G_-(0) \\
&-e^{xB_0} [p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + Opereg]^{-1} \left[p_+ B_0 B^{-1}\right] B_0^{-2} G_0(0) \\
&-p_- e^{xB_0} (p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + Opereg]^{-1}) B^{-2} G_-(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq Rég + e^{xB_0} B_0^{-2} G_0(0) - e^{xB_0} [p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + Opereg]^{-1} \left[p_+ B_0 B^{-1}\right] B_0^{-2} G_0(0) \\
&-p_- e^{xB_0} ([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + Opereg]^{-1}) B^{-2} G_-(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq Rég + e^{xB_0} \left[I - ([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + Opereg]^{-1}) \left[p_+ B_0 B^{-1}\right]\right] B_0^{-2} G_0(0) \\
&-p_- e^{xB_0} ([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + Opereg]^{-1}) B^{-2} G_-(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq Rég + e^{xB_0} \left[\begin{array}{c} [p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + Opereg]^{-1}) \times \\ [p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + Opereg + p_- I + Opereg] \end{array} \right] \times B_0^{-2} G_0(0) \\
&-p_- e^{xB_0} ([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + Opereg]^{-1}) B^{-2} G_-(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq Rég + e^{xB_0} [p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + Opereg]^{-1}) B_0^{-2} G_0(0) \\
&-p_- e^{xB_0} ([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + Opereg]^{-1}) B^{-2} G_-(0)
\end{aligned}$$

$$u_0 \simeq Rég + p_- B^{-2} e^{xB_0} \left([p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + Opereg]\right)^{-1} (B^2 B_0^{-2} G_0(0) - G_-(0)).$$

Analyse de u_0 au voisinage de 1

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq Rég + v_0(G_0)(0) \\
&+e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} v_0'(G_0)(1) - e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} \Psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq Rég + v_0(G_0)(0) \\
&+e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} v_0'(G_0)(1) \\
&-e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} \Delta_1^{-1} \Delta_2^{-1} \left(p_- v_+'(G_+)(1) + p_+ v_0'(G_0)(1)\right) \\
&-e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} \Delta_1^{-1} \Delta_2^{-1} (p_+ B_0 v_0(G_0)(1) - p_- B v_+(G_+)(1)) \\
&-e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} \Delta_1^{-1} B_0 v_0(G_0)(1) \\
&-e^{(1-x)B_0} B_0^{-1} v_0'(G_0)(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 &\simeq Rég + v_0 (G_0)(0) \\ &-e^{(1-x)B_0} B_0^{-1}\Delta_1^{-1}\Delta_2^{-1}\left(p_- v'_+ (G_+)(1) + p_+ v'_0 (G_0)(1)\right) \\ &-e^{(1-x)B_0} B_0^{-1}\Delta_1^{-1}\Delta_2^{-1}\left(p_+ B_0 v_0 (G_0)(1) - p_- B v_+ (G_+)(1)\right) \\ &-e^{(1-x)B_0} B_0^{-1}\Delta_1^{-1} B_0 v_0 (G_0)(1). \end{aligned}$$

Or on a

$$p_- v'_+ (G_+)(1) + p_+ v'_0 (G_0)(1) = \frac{p_-}{2} B^{-1} v_+ (G_+)(0) - \frac{p_+}{2} B_0^{-1} v_0 (G_0)(1)$$

et

$$p_+ B_0 v_0 (G_0)(1) - p_- B v_+ (G_+)(1) = \frac{p_-}{2} B^{-1} v_+ (G_+)(1) - \frac{p_+}{2} B_0^{-1} v_0 (G_0)(1)$$

et

$$v_0 (G_0)(1) = Rég - \frac{1}{2} B_0^{-2} v_0 (G_0)(1)$$

$$\begin{aligned} u_0 &\simeq Rég + v_0 (G_0)(0) \\ &-e^{(1-x)B_0} B_0^{-1}\Delta_1^{-1}\Delta_2^{-1}\left(\frac{p_-}{2} B^{-1} v_+ (G_+)(0) - \frac{p_+}{2} B_0^{-1} v_0 (G_0)(1)\right) \\ &-e^{(1-x)B_0} B_0^{-1}\Delta_1^{-1}\Delta_2^{-1}\left(\frac{p_-}{2} B^{-1} v_+ (G_+)(1) - \frac{p_+}{2} B_0^{-1} v_0 (G_0)(1)\right) \\ &-e^{(1-x)B_0} B_0^{-1}\Delta_1^{-1}\left(-\frac{1}{2} B_0^{-2} v_0 (G_0)(1)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 &\simeq Rég + v_0 (G_0)(0) \\ &-e^{(1-x)B_0} B_0^{-1}\Delta_1^{-1}\Delta_2^{-1}\left(p_- B^{-1} v_+ (G_+)(0) - p_+ B_0^{-1} v_0 (G_0)(1)\right) \\ &+\frac{1}{2} e^{(1-x)B_0}\Delta_1^{-1} B_0^{-2} v_0 (G_0)(1). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \Delta_-^{-1} &= -[p_+ B_0 B^{-1} + p_- I + Opereg]^{-1} \\ \Delta_1 &= \left[I + 2p_-\left(I + e^{2B}\right) e^{2B_0}\Delta_-^{-1}\right] \\ &= I + opereg \\ \Delta_1^{-1} &= [I + opereg]^{-1} \simeq I \\ \Delta_2 &= \left[-p_+ I + p_+ B B_0^{-1}\left(I + e^{2B}\right)\left(I + e^{2B}\right)^{-1}\right] \\ &= \left[-p_+ I + p_- B B_0^{-1} + opereg\right] \\ \Delta_2^{-1} &= \left[-p_+ I + p_- B B_0^{-1} + opereg\right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 &\simeq Rég + \frac{1}{2} e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} (G_0)(1) \\ &-e^{(1-x)B_0} B_0^{-1}\left[-p_+ I + p_- B B_0^{-1} + opereg\right]^{-1}[I + opereg]^{-1}\left(p_- B^{-1} G_+ (1) - p_+ B_0^{-1} G_0 (1)\right) \\ &+\frac{1}{2} e^{(1-x)B_0} B_0^{-2}[I + opereg]^{-1} G_0 (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq R\acute{e}g + \frac{1}{2}e^{(1-x)B_0}B_0^{-2}G_0(1) \\
&-e^{(1-x)B_0}B_0^{-1}\left[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + opereg\right]^{-1}\left(p_-B^{-1}G_+(1) - p_+B_0^{-1}G_0(1)\right) \\
&+\frac{1}{2}e^{(1-x)B_0}B_0^{-2}G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq R\acute{e}g + \frac{1}{2}e^{(1-x)B_0}B_0^{-2}G_0(1) \\
&-e^{(1-x)B_0}\left[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + opereg\right]^{-1}\left(p_-B_0^{-1}B^{-1}G_+(1) - p_+B_0^{-2}G_0(1)\right) \\
&+\frac{1}{2}e^{(1-x)B_0}B_0^{-2}G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq R\acute{e}g + \frac{1}{2}e^{(1-x)B_0}B_0^{-2}G_0(1) \\
&-e^{(1-x)B_0}\left[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + opereg\right]^{-1}[p_-B_0^{-1}B^{-1}]G_+(1) \\
&-e^{(1-x)B_0}\left[p_-BB_0^{-1} - p_+I + opereg\right]^{-1}[p_-BB_0^{-1} - p_+I - p_-BB_0^{-1}]B_0^{-2}G_0(1) \\
&+\frac{1}{2}e^{(1-x)B_0}B_0^{-2}G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq R\acute{e}g + e^{(1-x)B_0}B_0^{-2}G_0(1) \\
&-e^{(1-x)B_0}\left[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + opereg\right]^{-1}[p_-B_0^{-1}B^{-1}]G_+(1) \\
&+e^{(1-x)B_0}B_0^{-2}G_0(1) \\
&-e^{(1-x)B_0}\left[p_-BB_0^{-1} - p_+I + opereg\right]^{-1}[p_-BB_0^{-1}]B_0^{-2}G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq R\acute{e}g + e^{(1-x)B_0}B_0^{-2}G_0(1) \\
&-e^{(1-x)B_0}\left[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + opereg\right]^{-1}[p_-B_0^{-1}B^{-1}]G_+(1) \\
&+e^{(1-x)B_0}B_0^{-2}G_0(1) \\
&-e^{(1-x)B_0}\left[p_-BB_0^{-1} - p_+I + opereg\right]^{-1}[p_-BB_0^{-1} - p_+I + p_+I]B_0^{-2}G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq R\acute{e}g + e^{(1-x)B_0}B_0^{-2}G_0(1) \\
&-e^{(1-x)B_0}\left[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + opereg\right]^{-1}[p_-B_0^{-1}B^{-1}]G_+(1) \\
&+e^{(1-x)B_0}B_0^{-2}G_0(1) \\
&-e^{(1-x)B_0}B_0^{-2}G_0(1) \\
&-e^{(1-x)B_0}\left[p_-BB_0^{-1} - p_+I + opereg\right]^{-1}B_0^{-2}G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq Rég + e^{(1-x)B_0} B_0^{-2} G_0 (1) \\
&-e^{(1-x)B_0} \left[-p_+ I + p_- B B_0^{-1} + opereg\right]^{-1} [p_- B_0^{-1} B^{-1}] G_+ (1) \\
&+e^{(1-x)B_0} \left[p_- B B_0^{-1} - p_+ I + opereg\right]^{-1} [p_- B B_0^{-1} - p_+ I - p_- B B_0^{-1}] B_0^{-2} G_0 (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq Rég \\
&+e^{(1-x)B_0} \left[I - \left[p_- B B_0^{-1} - p_+ I + opereg\right]^{-1}\right] B_0^{-2} v_0 (G_0) (1) \\
&-e^{(1-x)B_0} \left[-p_+ I + p_- B B_0^{-1} + opereg\right]^{-1} [p_- B_0^{-1} B^{-1}] v_+ (G_+) (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq Rég \\
&+e^{(1-x)B_0} \left[I - \left[p_- B B_0^{-1} - p_+ I + opereg\right] \left[p_- B B_0^{-1} - p_+ I + opereg\right]^{-1}\right] B_0^{-2} G_0 (1) \\
&-e^{(1-x)B_0} \left[-p_+ I + p_- B B_0^{-1} + opereg\right]^{-1} [p_- B_0^{-1} B^{-1}] G_+ (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq Rég \\
&+e^{(1-x)B_0} \left[-p_+ I + p_- B B_0^{-1} + opereg\right]^{-1} [p_- B_0^{-1} B^{-1}] B_0^{-2} G_0 (1) \\
&-e^{(1-x)B_0} \left[-p_+ I + p_- B B_0^{-1} + opereg\right]^{-1} [p_- B_0^{-1} B^{-1}] B^{-2} G_+ (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\simeq Rég \\
&+e^{(1-x)B_0} \left[-p_+ I + p_- B B_0^{-1} + opereg\right]^{-1} [p_- B_0^{-1} B^{-1}] (B_0^{-2} G_0 (1) - B^{-2} G_+ (1)).
\end{aligned}$$

Théorème 4.3 *Soient* $\dfrac{g_-}{d} \in C^\theta([-1,0]\ ; E)$ *et* $\dfrac{g_0}{d_0} \in C^\theta([0,1]\ ; E)$ *et* $\dfrac{g_+}{d} \in C^\theta([1,2]\ ; E)$ *avec* $0 < \theta < 1$.

Alors

1. u_0 *est la solution du notre problème sur* $]0,1[$
2. $u_0 \in C([0,1]\ ; D(B^2)) \cap C^2([0,1]\ ; E)$ *si et seulement si*

$$\left(\frac{g_0(0)}{d_0} - \frac{g_-(0)}{d}\right) \in \overline{D(B_0)},$$

et

$$\left(\frac{g_0(1)}{d_0} - \frac{g_+(1)}{d_0}\right) \in \overline{D(B_0)}.$$

Théorème 4.4 *Soient* $\dfrac{g_-}{d} \in C^\theta([-1,0]\ ; E)$ *et* $\dfrac{g_0}{d_0} \in C^\theta([0,1]\ ; E)$ *et* $\dfrac{g_+}{d} \in C^\theta([1,2]\ ; E)$ *avec* $0 < \theta < 1$.

Alors

1. u_0 *est la solution de notre problème sur* $]0,1[$

2. $B_0^2 u_0(.)$, $u_0'' \in C^\theta([0,1]\ ;E)$ *si et seulement si*

$$\left(\frac{g_0(0)}{d_0} - \frac{g_-(0)}{d}\right) \in D_{B_0}(B_0,+\infty),$$

et

$$\left(\frac{g_0(1)}{d_0} - \frac{g_+(1)}{d_0}\right) \in D_{B_0}(B_0,+\infty).$$

4.2.2 Analyse de u_+ au voisinage de 1

$$\begin{aligned}
u_+ \ \backsimeq\ & e^{(x-1)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1} v_+\left(G_+\right)(1) \\
& + e^{(x-1)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1} B_0^{-1} v_0'\left(G_0\right)(1) + e^{(x-1)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1} v_0\left(G_0\right)(1) \\
& + e^{(x-1)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1} \Lambda\Delta_2^{-1}\Delta_1^{-1}\left(p_- v_+'\left(G_+\right)(1) + p_- v_0'\left(G_0\right)(1)\right) \\
& + e^{(x-1)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1} \Lambda\Delta_2^{-1}\Delta_1^{-1}\left(p_+ B_0 v_0\left(G_0\right)(1) - p_- B v_+\left(G_+\right)(1)\right) \\
& + e^{(x-1)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1} \Lambda\Delta_{1+}^{-1} B_0 v_0\left(G_0\right)(1) \\
& + e^{(x-1)B}\left(I-e^{2B}\right)^{-1} \Lambda v_0'\left(G_0\right)(1) \\
& + v_+\left(G_+\right)(x)
\end{aligned}$$

avec

$$\Lambda = -B_0^{-1}\Delta_1 + 2p_+ e^{2B_0}\Delta^{-1}\left(I-e^{2B}\right)^{-1} B^{-1}$$

$$\begin{aligned}
u_+ \ \backsimeq\ & Rég + v_+ G_+(x) \\
& - e^{(x-1)B}\left(-\frac{1}{2}B^{-2}G_+(1)\right) + e^{(x-1)B} B_0^{-1}\left(-\frac{1}{2}B_0^{-2}G_0(1)\right) \\
& + e^{(x-1)B}\left(-\frac{1}{2}B_0^{-2}G_0(1)\right) \\
& + e^{(x-1)B}\left[-B_0^{-1} + Opereg\right]\left[-p_+ I + p_- B B_0^{-1} + Opereg\right]^{-1} \times \\
& \left[I + Opereg\right]^{-1}\left(\frac{p_-}{2}B^{-1}G_+(1) - \frac{p_+}{2}B_0^{-1}G_0(1)\right) \\
& + e^{(x-1)B}\left[-B_0^{-1} + Opereg\right]\left[-p_+ I + p_- B B_0^{-1} + Opereg\right]^{-1} \times \\
& \left[I + Opereg\right]^{-1}\left(\frac{p_-}{2}B^{-1}G_+(1) - \frac{p_+}{2}B_0^{-1}G_0(1)\right) \\
& + e^{(x-1)B}\left[-B_0^{-1} + Opereg\right]\left[I + Opereg\right]^{-1} B_0\left(-\frac{1}{2}B_0^{-2}G_0(1)\right) \\
& + e^{(x-1)B}\left[-B_0^{-1} + Opereg\right]\left(-\frac{1}{2}B_0^{-2}G_0(1)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_+ \;\backsimeq\;& Rég + \frac{1}{2}B^{-2}e^{(x-1)B}G_+(1) \\
&+\frac{1}{2}e^{(x-1)B}B^{-2}G_+(1) - \frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-3}G_0(1) \\
&-\frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-2}G_0(1) \\
&+e^{(x-1)B}B_0^{-1}\left[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + Opereg\right]^{-1}\left(\frac{p_+}{2}B_0^{-1}G_0(1) - \frac{p_-}{2}B^{-1}G_+(1)\right) \\
&+e^{(x-1)B}B_0^{-1}\left[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + Opereg\right]^{-1}\left(\frac{p_+}{2}B_0^{-1}G_0(1) - \frac{p_-}{2}B^{-1}G_+(1)\right) \\
&+\frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-2}G_0(1) \\
&+\frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-3}G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_+ \;\backsimeq\;& Rég + B^{-2}e^{(x-1)B}G_+(1) \\
&-\frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-2}G_0(1) \\
&+e^{(x-1)B}B_0^{-1}\left[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + Opereg\right]^{-1}\left(p_+B_0^{-1}G_0(1) - p_-B^{-1}G_+(1)\right) \\
&+e^{(x-1)B}B_0^{-1}\left[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + Opereg\right]^{-1}\left(p_+B_0^{-1}G_0(1) - p_-B^{-1}G_+(1)\right) \\
&+\frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-2}G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_+ \;\backsimeq\;& Rég + B^{-2}e^{(x-1)B}G_+(1) \\
&-\frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-2}G_0(1) \\
&+\frac{1}{2}e^{(x-1)B}p_+B_0^{-2}\left[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + Opereg\right]^{-1}G_0(1) \\
&-\frac{1}{2}e^{(x-1)B}p_-B_0^{-1}B^{-1}\left[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + Opereg\right]^{-1}G_+(1) \\
&+\frac{p_+}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-2}\left[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + Opereg\right]^{-1}G_0(1) \\
&-\frac{1}{2}e^{(x-1)B}\left[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + Opereg\right]_-^{-1}B^{-1}B_0^{-1}B^{-1}G_+(1) \\
&+\frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-2}G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_+ \;\backsimeq\;& Rég + B^{-2}e^{(x-1)B}G_+(1) \\
&-\frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-2}G_0(1) \\
&+e^{(x-1)B}p_+\left[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + Opereg\right]^{-1}B_0^{-2}G_0(1) \\
&-e^{(x-1)B}p_-B_0^{-1}B^{-1}\left[-p_+I + p_-BB_0^{-1} + Opereg\right]^{-1}G_+(1) \\
&+\frac{1}{2}e^{(x-1)B}B_0^{-2}G_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_+ &\backsimeq Rég \\ &+e^{(x-1)B}\left(I+p_-BB_0^{-1}\left[-p_+I+p_-BB_0^{-1}+Opereg\right]^{-1}\right)B_0^{-2}G_0(1) \\ &+e^{(x-1)B}p_+\left[-p_+I+p_-BB_0^{-1}+Opereg\right]^{-1}B_0^{-2}G_0(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_+ &\backsimeq Rég \\ &+e^{(x-1)B}\left(I-\left[-p_+I+p_-BB_0^{-1}+Opereg\right]^{-1}\left[p_-BB_0^{-1}-p_+I+p_+I\right]\right)B^{-2}G_+(1) \\ &+e^{(x-1)B}p_+\left[-p_+I+p_-BB_0^{-1}+Opereg\right]^{-1}B_0^{-2}G_0(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_+ &\backsimeq Rég \\ &-e^{(x-1)B}p_+\left[-p_+I+p_-BB_0^{-1}+Opereg\right]^{-1}B^{-2}G_+(1) \\ &+e^{(x-1)B}p_+\left[-p_+I+p_-BB_0^{-1}+Opereg\right]^{-1}B_0^{-2}G_0(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_+ &\backsimeq Rég \\ &e^{(x-1)B}p_+\left[-p_+I+p_-BB_0^{-1}+Opereg\right]^{-1}\left(B_0^{-2}G_0(1)-B^{-2}G_+(1)\right). \end{aligned}$$

Donc on aura les théorèmes suivants

Théorème 4.5 *Soient* $\frac{g_0}{d_0} \in C^\theta([0,1];E)$ *et* $\frac{g_+}{d} \in ([1,2];E)$ *avec* $0<\theta<1$*. On suppose que*

$$f_+ \in D\left(B^2\right).$$

Alors

1. u_+ est la solution de notre problème sur $]1,2[$.
2. $u_+ \in C([1,2];D(B^2)) \cap C^2([1,2];E)$ si seulement si

$$B^2 f_+ + \frac{g_+(2)}{d} \in \overline{D(B)},$$

et

$$\left(\frac{g_0(1)}{d_0} - \frac{g_+(1)}{d}\right) \in \overline{D(B)}.$$

Théorème 4.6 *Soient* $\frac{g_0}{d_0} \in C^\theta([0,1];E)$ *et* $\frac{g_+}{d} \in ([1,2];E)$ *avec* $0<\theta<1$*. On suppose que*

$$f_+ \in D\left(B^2\right).$$

Alors

1. u_+ est la solution de notre problème sur $]1,2[$.
2. $B^2 u_+(.), u''_+ \in C^\theta([1,2];E)$ si seulement si

$$B^2 f_+ + \frac{g_+(2)}{d} \in D(B)(\theta,+\infty),$$

et

$$\left(\frac{g_0(1)}{d_0} - \frac{g_+(1)}{d}\right) \in D(B)(\theta,+\infty)$$

Bibliographie

[1] **Balakrishnan A. V . :** *Fractional powers of closed operators and the semigroupes generated by them,* Pacif. J. Math. 10, pp 419 - 437(1960)

[2] **Cantrell, R. S., and Cosner, C. :** *Diffusion Models for Population Dynamics Incorporating Individual Behavior at Boundaries : Applications to Refuge Design,* Theoretical Population Biology 55, 189-207 (1999).

[3] **Cantrell R. S. and Cosner C. :** *Skew Brownian Motion : A Model for Diffusion with Interfaces.* Mathematical Models in Medical and Health Sciences. Mary Ann Horn, Gieri Simonett, and Glenn Webb (eds.), pp.73-78. Copyright 1998 bay Vanderbilt University Press, Nashville, TN.

[4] **S. Campanato. :** *Generation of Analytic Semigroups by Elliptic Operators of Second Order in Hölder Spaces*, Annal. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4) 8(3) (1981), p. 495-512.

[5] **Cowling M. I. Doust. McIntosh A. and Yagi A. :** *Banach SpaceOperator with a Bounded H^∞ Functional Calculus,* J. Austral. Math. Soc., Ser. A 60, (1996), 51-89.

[6] **Da Prato G., Grisvard P. :** *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles*, J. Math. Pures Appl., IX Ser. 54, (1975), no. 3, 305-387.

[7] **Dore A., Favini A., Labbas R., Lemrabet K. :** *An Abstract Transmission Problem in a Thin Layer, I : Sharp Estimates*, Journal of Functional Analysis, 261 (2011) 1865–1922.

[8] **Dore A., Favini A., Labbas R., Lemrabet K. :** *A Transmission Problem in a Thin Layer,* to appear,Rev. Mat. Complut. 18(2005)143-176

[9] **Dore G., Venni A.** : *H^∞ Functional Calculus for Sectorial and Bisectorial Operators*, Studia Math. 166, (2005), 221-241.

[10] **Fattorini H.O. :** *The Cauchy problem, Encyclopedia Math., Appl., vol. 18, Addison-Wesley publishing Co., Reading, MA, 1983.*

[11] **Grisvard P. :** *Spazi di Tracce e Applicazioni*, Rendiconti di Matematica (4) Vol. 5, série VI, (1972), 657-729.

[12] **Haase M. :** *The Functional Calculus for Sectorial Operators and Similarity Methods*, Thesis, Universität Ulm, Germany, 2003.

[13] **Haase M. :** *The Functional Calculus for Sectorial Operators,* Oper. Theory Adv. Appl., vol. 169, 2006.

[14] **Holmes E. E., Lewis M. A., Banks J. E. and Veit R. R.** : *Partial Differential Equations in Ecology : Spatial Interaction and Population Dynamics,* Ecology, Vol. 75, N°1, 17-29.

[15] **Krein.S. G.** : *Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Moscou, 1967.

[16] **Labbas R., Medeghri A., and Menad A. :** *Solvability of elliptic differential equations, set in three habitats with skewness boundary conditions at the interfaces,* Mediterranean Journal of Mathematics, (2018).

[17] **Labbas R and Terreni B. :** *Sommes d'opérateurs linéaires de type parabolique, 1ere* Partie. Boll. Un. Math. Ital. 1-B (7) ,pp.545-569 (1987).

[18] **Labbas R and Terreni B. :** *Sommes d'opérateurs linéaires de type parabolique, 2ere* Partie. Boll. Un. Math. Ital. 2-B (7) ,pp. 141-162 (1988).

[19] **J.L. Lions et J. Peetre**. : *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 19 (1964), 5-68

[20] **Lunardi A. :** *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems,* Birkhäuser, (1995).

[21] **A. McINTOSH :** *Operators wich have an $\mathcal{H}_\infty$ Functional Calculus, Minconference on operator theory and partial differential equations (North Ryde, 1986), Proc. Center. Anal. Austral. Nat. univ., 14, 210-231, Austral. Nat. Univ., Camberra, (1986).*

[22] **Pazy A.** : *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 119 (1983).

[23] **Shuklar V. P**. : *Effects of Dispersive Migration on Stability of two Species-System in two-dimensional Habitats under Non-uniform reservoir conditions,* Indian J. pure appli. Math., 15(7), 781-794.

[24] **Sinestrari E. :** *On the Abstract Cauchy Problem of Parabolic Type in Space of Continuous Functions*, J. Math. Anal. App. 66, (1985), 16-66.

[25] **Tanabe H. :** *Equations of Evolution,* Monographs and Studies in Mathematics 6, Pitman, London-San Francisco-Melbourne, (1979).

[26] **Triebel H. :***Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators,* North Holland, Amesterdam, (1078).

[27] **CL. Zuily et H. Queffélec**. : *Eléments d'analyse pour l'agrégation* , Masson, Paris, 1995.

Résumé

Dans ce travail on étudie certains problèmes de dispersion décrivant une dynamique de population dans trois habitats dont un refuge et deux zones défavorables. Rabah Labbas, Ahmed Medaghri et Abdallah Menad ont étudié ce type de problème et ont montré des résultats de régularité.

On montre l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution. La méthode utilisée est basée sur une construction directe de la solution. On utilise des outils d'analyse fonctionnelle, en particulier les notions d'opérateurs linéaires fermés, la théorie des semi-groupes, les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires, la théorie d'interpolation, le calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels.

On donne des conditions nécessaires et suffisantes sur les données entre les différents types d'habitats.