MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modilisation Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Melle AMEL MASBAH

Contrôlabilité des systèmes bilinéaires distribués

soutenu publiquement le 27 juin 2019 devant le jury composé de :

Président :	Mohand OULDALI	Professeur	Université UMAB
Examinateur :	Djillali BOUAGADA	Professeur	Université UMAB
Encadreur :	Hamid BOUZIT	M.C.A.	Université UMAB

Année Universitaire : 2018 / 2019

MASTER

Remerciements

Avant tout, louange à ALLAH le tout puissant de m'avoir aidé à réaliser ce modeste travail.

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de mémoire, Monsieur *BOUZIT.Hamid*, pour ses conseils précieux, ainsi que pour sa patience tout au long de mon encadrement en master.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement Monsieur *OULD ALLI. Mohand*, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette mémoire. Je remercie vivement Monsieur *BOUAGADA. Djillali*, d'avoir eu l'amabilité d'examiner ce mémoire.

Je souhaite tout particulièrement exprimer ma profonde reconnaissance à mes parents, mes soeurs et frères et tous les membres de ma grande famille.

Dédicaces

A mes chers parents, pour touts leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, et leurs priéres tout au long de mes études.

A mes chères sours, Fatima, Rabia, Aicha, Rokia pour leurs encouragements parmaneents, et leur soutien moral. A mes chers frères, Nourdine et Kamel, pour leur appui et leurs encouragements.

A mon fiancé, Khaled et à sa respectable famille, pour leur intérêt et leur amour.

A mes amies les plus proches Naib djemia, Fadila, Wiam, Asia, Siham ... etc qui m'ont aidés préparé ma mémoires.

A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universtaire. Que ce travail soit l'accomplissement de voeux tant allégués, et le fuit de votre soutien infaillible.

Merci d'etre toujours là pour moi.

Table des matières

Introduction

Toute étude concernant l'analyse d'un système dynamique est généralement suivie d'une étape de contrôle, qui consiste à déterminer une commande qui permet de conduire le système étudié à un certain objectif, à titre d'exemple, la possibilité d'amener un système d'un état initial à un état désiré ou à ses voisinages à un instant fini T. Ce qui définit respectivement la notion de contrôlabilité exacte ou approchée. Pour $T = +\infty$, on obtient la notion de contrôlabilité asymptotique qui coóncide avec la stabilisabilité lorsque la cible est un point d'équilibre. Dans le cas des systèmes linéaires, les problèmes de contrôlabilité et de stabilisabilité ont été largement étudiés et une théorie complète est maintenant disponible dans la littérature .

Pour les systèmes linéaires de dimensions finies, la contrôlabilité a été caractérisée par une condition de rang qui porte sur la dynamique et l'opérateur de contrôle. Cette condition algébrique admet des extensions au cas de dimension infinie avec une version temporelle faisant intervenir l'opérateur de contrôle, ainsi que le semi-groupe engendré par la dynamique du système.

Dans [13], Khapalov considère le problème de contrôlabilité approchée pour l'équation de diffusion par des contrôles bilinéaires sous une condition de signe reliant l'état initial et l'état désiré. Dans [14][18], Ping Lin et al ont considéré le problème de contrôlabilité exacte des systèmes paraboliques pour certains états désirés. Dans [17], Khapalov a exhibé une classe d'états désirés pour l'équation d'onde qu'il est possible d'atteindre approximativement par des contrôles bilinéaires dans le cas monodimensionnel. Récemment, Ouzahra [19] a donné une extension au cas multidimensionnel pour une équation d'onde avec amortissement. Au début des années 90, et avec des motivations liées aux applications réelles. El Jai et Zerrik [15][16] ont introduit la notion d'analyse régionale, il s'agit là d'analyser et de contrôler un système défini sur un domaine géométrique Ω. Dans le but de réaliser un objectif sur une région donnée w de Ω. Un nouvel axe de recherche est alors ouvert, et l'analyse des systèmes distribués peut alors être traité autrement. Les notions usuelles de contrôlabilité et d'observabilité ont été reconsidérées avec un autre point de vue, en effet si on considère une région $w \subset \Omega$, la contrôlabilité régionale sur Ω consiste à conduire le système considéré de son état initial vers un état désiré sur w [20]. L'observabilité régionale, consiste à étudier la possibilité de reconstruire l'état du système observé, sur une région donnée. La notion de stabilité régionale permet d'étudier le comportement asymptotique d'un système distribué dans une région privilégiée $w \subset \Omega$.

Ce mémoire est constitué de 3 chapitres

Dans le premier chapitre on donne des rappels sur les espaces fonctionnels nécessaire à l'étude des equations aux dérivés partielles, existence, unicité et régularité de la solution, par exemple, les espace L^p et les espaces de sobolev.

On donne aussi un rappel sur les opérateurs non bornés et leurs adjoints, en particuliers les opérateurs qui génèrent des semi-groupes. Quelques rappels des équations " aux dérivées

partièles " d'évolution. non homogènes.
Le chapitre deux est consacré à l'étude de la contrôlabilité des systèmes linéaires, par exemple l'équation de la chaleur et l'équation des ondes.
En fin dans le troisième chapitre on donne une introduction à l'études des systèmes bilinéaires, en particulier la contrôlabilité exacte et approchée de l'equation biléniaire de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(t)}{\partial t} = \Delta y(t) + p(x,t)y(t), & \text{dans } Q_T \\ y = g, & \text{dans } \Sigma_T \\ y(x,0) = y_0, & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

Ainsi que la contrôlabilité approchée de l'equation bilinéaire des ondes.

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = y_{xx}(x,t) + p(x,t)y(x,t) - \vartheta(t)y_t(x,t), & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ y(0,t) = y(1,t) = 0, & \text{sur } (0,T) \\ y(x,0) = y_0, y_t(x,0) = y_1 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{0.1}$$

Notations

On note par

y_t : dérivée partielle première de la fonction y par rapport à la variable t.On utilise également les notations $y^{'}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\partial_t y$.

y_{xx} : dérivée partielle seconde de la fonction y par rapport à la variable x

$\Delta z = \sum_{i=1}^{N} \frac{(\partial z)^2}{(\partial t_1)^2}$: laplacien de z

p.p. : presque partout

Supp f : support de la fonction f

$D(\Omega)$: ensemble des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{\infty}(\Omega)$ et à support compact.

$\rightarrow$: convergence forte

$\rightharpoonup$: convergence faible

δ_{ij} : symbole de Kroneker

$\langle . \rangle$: crochet de dualité

$|.|$:$|\xi| = (\sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^2)^{1/2}$, pour tout $\xi = (\xi_1, ..., \xi_N) \in \mathbb{R}$ norme Hilbertienne

$M^n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

$M^{n,m}(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées à n lignes et m colonnes.

Ω: un ouvert de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$

$\partial\Omega = \Gamma$: frontière de Ω

$D^{\alpha}u$: Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, et $|\alpha| = \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, et $u \in C^{\infty}(\Omega)$. On note

$$D^{\alpha}u := \frac{\partial^{\alpha}u}{\partial x_1^{\alpha_1}, ..., \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$H^k(\Omega)$: espaces de Sobolev d'ordre k

$H_0^1(\Omega)$: espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ de trace nulle sur $\partial\Omega$

$L^2(\Omega)$: espace des fonctions de carrée sommable

$W^{1,p}$: un espace Sobolev tel que $\forall\, I\ =]a, b[$ un intervale Borné ou Non ,et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$ $\big(W^{1,p} = u \in L^p(I), \exists g \in L^p(I) telque \int_I u\varphi^{'} = -\int_I u\varphi, \forall\varphi \in C_0^1(I)\big)$

$L^2(0, T; U)$: espace des classes de fonctions de carré intégrable (au sens de Bochner) de [0, T] dans un espace de Hilbert U.

$C(\Omega, H)$: ensemble des fonctions continues sur Ω à valeurs dans un espace de Hilbert$H$.

$C^k(\Omega, H)$: ensemble des fonctions $y : \Omega \rightarrow H$ de classe C^k

Chapitre 1

Espaces fonctionnels.

1.1 Les distributions

Définition 1.1 Soit φ une fonction continue sur Ω. Le support de φ est défini par :

$$\text{supp} \quad \varphi = \overline{\{ x \in \Omega; \ \ \varphi(x) \neq 0 \}}$$

où $\overline{A}$ désigne l'adhérence de A.

Définition 1.2 On note par $D(\Omega)$ l'ensemble des fonction de classe C^{∞} sur Ω et à support compact contenu dans Ω.

Définition 1.3 On appelle distribution, toute forme linéaire et continue sur $D(\Omega)$.
L'espace des distributions est le dual topologique de $D(\Omega)$ on le note $D^{'}(\Omega)$. Si $T \in D^{'}(\Omega)$ on note $\langle T, \varphi \rangle_{D' \times D}$ au lieu de $T(\varphi), \forall \varphi \in D(\Omega)$, où $\langle ., . \rangle_{D' \times D}$ est appelé le crochet de dualité entre $D^{'}(\Omega)$ et $D(\Omega)$.

Dérivation au sens des distributions:

Définition 1.4 La dérivée d'ordre $\alpha \in \mathbb{N}^n$ d'une distribution T est définie par :

$$\langle D^{\alpha} T, \varphi \rangle_{D' \times D} = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^{\alpha} \varphi \rangle_{D' \times D} \ .$$

1.2 Les espaces L^p

Définition 1.5 Pour $1 \leq p < +\infty$ on note par :

$$L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \}.$$

L'application $f \longrightarrow \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ est un norme sur $L^p(\Omega)$.
De plus, muni de cette norme, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach, reflexif pour $1 < p < +\infty$.

Pour $p = +\infty$ on note

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \{x : |f(x)| \text{ non bornée}\}, \text{ et est de mesure nulle } \}.$$

C'est un espace de Banach pour la norme

$$||f||_\infty = \sup_{x\in\ \Omega} |f(x)| \ .$$

Remarque 1.6 Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx \ .$$

L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme induite par ce produit scalaire.

1.3 Les espaces de Sobolev

Pour Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ et $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u : u \in L^p(\Omega),\ D^\alpha u \in L^p(\Omega);\ |\alpha| \leq m\}.$$

Cet espace est un espace de Banach pour la norme :

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u||_{L^p(\Omega)}.$$

En particulier, pour $p = 2$, l'espace $W^{m,2}(\Omega)$ est noté $H^m(\Omega)$.

Remarque 1.7 L'espace $H^m(\Omega)$ est muni du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_m = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \cdot$$

Donc $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
En particulier pour $m = 1$,

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) : 1 \leq i \leq n\},$$

muni de la norme :

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = ||u||_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N ||\frac{\partial u}{\partial x_i}||_{L^p(\Omega)},$$

En particulier pour $p = 2$, on note $W^{1,2} = H^1(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad u,v \in H^1(\Omega),$$

et la norme associée est

$$||u||_{H^1} = \left(||u||_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{N} || \frac{\partial u}{\partial x_i} ||_{L^2}^2 \right)^{1/2} .$$

Les propositions suivantes présentent les propriétés fondamentales de l'espace $W^{1,p}$.

Théorème 1.8 (Injection de Sobolev) Soit $1 \leq p < \infty$, et $1 \leq p < n$, alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ où p^* est donné par $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, et il existe une constante $C = C(p,n)$ telle que :

$$||u||_{L^{p^*}} \leq C||\nabla u||_{L^p} \ , \ \ \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 1.9
1- $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.
2- Si $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ alors $D(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$.

Notation: on note par:

$$H_0^1(\Omega) \ \text{l'adhérence de} \ D(\Omega) \ \text{dans} \ H^1(\Omega).$$

On note par:

$$D(\overline{\Omega}) = \{u = u|_\Omega : u \in D(\mathbb{R}^n)\}.$$

Proposition 1.10 L'espace $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Trace d'un élément de $H^1(\Omega)$

Proposition 1.11 L'application restrection :

$$\begin{aligned} \gamma_0 : D(\overline{\Omega}) &\longrightarrow C^\infty(\Gamma) \\ u &\longmapsto \gamma_0 u = u|_\Gamma \ \neq (\text{ restriction de } u \text{ à } \Gamma) \end{aligned}$$

est linéaire et continue sur $D(\overline{\Omega})$ muni de la norme de $H^1(\Omega)$ dans $C^\infty(\Gamma)$ muni de la norme de $H^{1/2}(\Gamma)$.
Elle se prolonge donc en une application linéaire et continue

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma).$$

De plus, $u \in H_0^1(\Omega)$ si et seulement si $\gamma_0 u = 0$.
On a donc:

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega),\ \ \gamma_0 u = 0\}.$$

Proposition 1.12 **(Inégalié de Poincaré)** on suppose que Ω est un ouvert borné au moins dans une direction. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que:

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^2(\Omega)},\ \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Conséquence: Si Ω est borné dans une direction au moins, l'application :
$u \longrightarrow ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$.

1.4 Les opérateurs linéaires

Soient X et Y deux espaces de Banach réels ou complexes. On note par $||.||_X$ la norme dans X ($||.||$ s'il n'y a pas confusion).

Définition 1.13 Soit $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire .
L'ensemble des $x \in X$ telle que Ax ait un sens dans Y est un sous espace vectoriel de X appelé domaine de A et noté $D(A)$.

Définition 1.14 ***(Opérateur fermé)***
1) On dit qu'un opérateur linéaire A est fermé si son graphe

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$

est un sous espace vectoriel fermé de $X \times Y$. D'une manière équivalente,
2) Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to Y$ est dit fermé si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n \subset D(A)$ telle que

$$x_n \to x \ \text{ et } \ Ax_n \to y,$$

on a $\ x \in D(A)$ et $Ax = y$.
3) L'adjoint de l'opérateur (non borné) $A : D(\Omega) \subset X \longrightarrow Y$ est un opérateur non borné

$$A^* : D(A^*) \subset Y^{'} \longrightarrow X^{'}$$

de domaine

$$D(A^*) = \{f \in Y' |\ \ \exists C \in \mathbb{R}^+, |\langle Ax, f\rangle|_{Y \times Y'} \leq C||x||_X, \forall x \in D(A)\},$$

est définie par :

$$\langle A^* f,\, x\rangle_{X' \times X} \;=\; \langle f,\, Ax\rangle_{Y' \times Y}\,,\ \forall y \in D(A), \forall f \in D(A^*).$$

4) En particulier, si $X = H$ est un espace de Hilbert, en identifiant H à son dual par le théorème de Riesz, l'adjoint de l'opérateur (non borné) A est un opérateur non borné A^* de domaine

$$D(A^*) = \{y \in H;\, \exists C \in \mathbb{R}^+, |\langle Ax, y\rangle|_H \leq C||x||_H, \forall x \in D(A)\},$$

est définie par :

$$\langle A^* y, x\rangle_H = \langle y, Ax\rangle_H, \forall x \in D(A), \forall y \in D(A^*).$$

Définition 1.15 Soit V un espace de Hilbert, V' son dual et $A : V \longrightarrow V'$ un opérateur linéaire . On dit que A est coercif s'il existe $\alpha > 0$ telle que :

$$\langle Au, u\rangle_{V' \times V} \geq \alpha \|u\|_V \ \ \forall u \in V.$$

Théorème 1.16 : Théorème de Lax-Milgram
Soit $A : V \longrightarrow V'$ un opérateur linéaire et continue. Si de plus, A est coercif alors, A est un isomorphisme de V sur V'. En d'autres termes, pour tout $f \in V'$, l'équation $Au = f$ admet une unique solution $u \in V$. De plus,

$$\exists\, c > 0, ||u||_V \leq c||f||_{V'}.$$

1.5 Les semi-groupes

Définition 1.17 Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs lineaires dans X. On dit que cette famille forme un semi groupe dans X si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $G(0) = Id(X)$.
2. $\forall (t, s) \geq 0,\ \ G(t + s) = G(t).G(s)$.

Lorsque la famille $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que la deuxième propriété est vérifiée pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ on dira qu'on a un groupe.

Définition 1.18 On dit qu'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est fortement continu si pour tout $x \in X$, l'application $t \rightarrow G(t)x$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire pour tout $x \in X$

$$\lim_{t \to 0^+} ||G(t)x - x||_X = 0.$$

On dit aussi que $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est un C^0- semi-groupe.

Proposition 1.19 Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un C^0-semi-groupe. Alors il existe $\omega \geq 0, M \geq 1$ tels que

$$\forall t \geq 0, \quad ||G(t)|| \leq Me^{\omega t}.$$

Définition 1.20 Un semi groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est appelé semi groupe uniformément continu d'opérateur linéaire borné si

$$\lim_{t\to 0}||G(t) - I)|| = 0.$$

L'opérateur A^* génère un semi-groupe de classe C^0 noté $S^*(t), \forall t \geq 0$.
Si $A^* = A(resp\ \ A^* = -A)$ l'opérateur est dit auto-adjoint (resp.anti-adjoint) [7]

Définition 1.21 Soit $G(t)$ un C^0-semi-groupe sur H. On definit l'opérateur A par:

$$D(A) = \{x \in H,\ \lim_{t\to 0}\frac{s(t)x - x}{t} \quad \text{existe }\},\quad \text{et} \quad \text{on} \quad \text{pose}\ Ax = \lim_{t\to 0}\frac{s(t)x - x}{t}.$$

L'opérateur $(A, D(A))$ est appelé opérateur infinitésimal du semi-groupe $S(t)$.

1.6 Problème d'évolution non homogènes

Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un C^0-semi greupe $(S(t)_{t>0})$ sur un espace de Hilbert H, et $f : [0, T] \longrightarrow H$.
On considere le problème :

$$\begin{cases} y^{'}(t) = Ay(t) + f(t), & t \in (0, T) \\ y(0) = x \end{cases} \tag{1.1}$$

Définition 1.22 Soit $f \in L^1(0, T; H)$ et $x \in H$. On appelle solution faible de (1.1) la fonction $y \in C([0, T]; H)$ donnée par

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds,\ \ t \in [0, T].$$

On appelle solution classique de (1.1) toute fonction $y \in C([0, T]; H) \cap C^1([0, T]; H)$ telle que $y(t) \in D(A)$ pour tout $t \in [0, T]$ et vérifiant (1.1) dans $[0, T]$.
Une fonction $y \in W^{1,1}(0, T; H)$ est une solution forte si elle vérifie $y(0) = x$, et l'equation de (1.1) presque partout dans $(0, T)$.

Théorème 1.23 si $f \in W^{1,1}(0, T; H)$ alors pour tout $x \in D(A)$, le problème (1.1) admet une unique solution forte.

Chapitre 2

Contrôlabilité des système linéaires.

2.1 Cas d'un système abstrait

soient H et U deux espaces de Hilbert, $z_0 \in H$ et $u \in L^2(0,T;U)$, où T>0. On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} z_t = Az + Bu \\ z(0) = z_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est un opérateur non borné, générateur d'un semi-groupe $S(t)$ et $B : u \longrightarrow H$ est un opérateur linéaire et borné.
D'après le théorème (1.23) on sait que :
pour tout $z_0 \in D(A)$ et $u \in W^{1,1}(0,T;U)$, le problème (2.1) admet une unique solution forte $z \in C([0,T];D(A)) \cap C^1([0,T];H)$ donnée par :

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

où S(t) représente le semi-groupe généré par l'opérateur A dans H.

Définition 2.1
1. Le système (2.1) est dit exactement contrôlable en temps T, si pour tout $z_0, z_T \in H$, il existe un contrôle $u \in L^2(0,T;U)$ tel que la solution z du système (2.1) satisfait

$$z(T) = z_T.$$

2. Le système (2.1) est dit contrôlable à zéro en temps T, si pour tout $z_0 \in H$, il existe une contrôle $u \in L^2(0,T;U)$ tel que la solution z de (2.1) satisfait $z(T) = 0$.
3. Le système (2.1) est dit approximativement contrôlable en temps T, si pour tout $z_0, z_T \in H$, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un contrôle $u \in L^2(0,T;U)$ tel que la solution z de (2.1) satisfait

$$\|z(T) - z_T\|_H \leq \varepsilon.$$

2.2 L'opérateur de contrôlabilité L_T:

On introduit l'opérateur $L_t : L^2(0,T;U) \to H$ défini par:

$$L_t u = \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds.$$

Proposition 2.2 L'opérateur L_t est linéaire et continu de $L^2(0,T;U)$ dans H .

Théorème 2.3 *[11]* Le système (2.1) est exactement contrôlable en temps, $T > 0$ si, et seulement si, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\int_0^T ||B^* S^*(t) y_0||_U^2 dt \geq c \ ||y_0||_H^2 \ , \forall y_0 \in H. \tag{2.2}$$

Pour la preuve de ce théorème, on a besoins des résultats suivants:

Proposition 2.4 Le système (2.1) est exactement contrôlable en $T > 0$ si, et seulement si, l'opérateur L_T est surjectif

Preuve:
1. $\Leftarrow$) Supposons que L_T est surjrctif alors,

$$L_T : (\ \mathrm{Ker}\, L_T)^{\perp} \to H$$

est bijectif.
Comme L_T est linéaire et continu, et que $(\ \mathrm{Ker}\, L_T)^{\perp}$ et H sont des espaces de Hilbert alors, d'aprés le théorème de l'isomorphisme de Banach, son inverse: $Y : H \to (\ \mathrm{Ker}\, L_T)^{\perp}$ est un isomorphisme. Alors, pour tout $z_0, z_T \in H$ si on choisit,

$$u = Y(z_T - S(T)z_0),$$

la solution z du système (2.1) donné par:

$$z(t) = S(t)z_0 + L_t z_0,$$

vérifie,

$$z(T) = S(T)z_0 + L_T Y(z_T - S(T)z_0) = S(T)z_0 + z_T - S(T)z_0 = z_T.$$

Donc le système (2.1) est contrôlable.
2. Réciproquement, si L_T n'est pas surjectif alors,

$$\exists \ z_T \in H : L_T u \neq z_T, \forall u \in L^2(0,T,U).$$

Donc, pour $z_0 = 0$, ce système n'est pas contrôlable car :

$$z(T) = S(T)0 + L_T u = L_T u \neq z_T.$$

Proposition 2.5 L'opérateur $L_T : L^2(0,T;U) \to H$ est surjectif si, et seulement si, il existe une constante $c > 0$:

$$||L_T^* z_0||^2_{L^2(0,T;u)} \geq c||z_0||^2_H, \ \ \forall z_0 \in H, \tag{2.3}$$

où L_T^* est l'opérateur adjoint de L_T.

Pour la preuve de cette proposition; on montre des résultats sur les opérateurs surjectifs et leurs adjoints.

Proposition 2.6 Soit E et H deux espaces de Hilbert et $A : E \longrightarrow H$ un opérateur linéaire et continu. Alors l'opérateur A est surjectif si, et seulement si,

$$\exists c > 0 : ||A^* z||_E \geq c||z||_H \ \ \forall z \in H.$$

Preuve: La preuve se fait en deux étapes.
Etape 01: Montrons que A est surjectif si, et seulement si,

$$\exists c > 0, \ \ B_H(0,1) \subset AB_H(0,c)$$

où $B(a,r)$ désigne la boule fermé de centre a et de rayou r .
i-($\Longrightarrow$) Supposons que A est surjectif, notons par $N(A)$ le noyon de A et $E_0 = N(A)^\perp$ qui est un sous espace fermé de E et donc c'est un espace de Hilbert. L'application

$$\widetilde{A} = A|_{E_0} : \ \ E_0 \longrightarrow H \text{ est bijectif .}$$

Comme E_0 et H sont des espaces de Hilbert alors, d'aprés le théorème de l'isomorphisme de Banach,

$$\widetilde{A}^{-1} : H \longrightarrow E_0 \ \ \text{est un isomorphisme}$$

Alors,

$$\exists c > 0 : ||\widetilde{A}^{-1}(z)||_E \leq c, \forall z \in \{z \in H : ||z|| \leq 1\}.$$

En d'autres termes,

$$z \in B_H(0,1) \Longrightarrow \widetilde{A}^{-1} \in B_E(0,c) \Longleftrightarrow z \in \widetilde{A}B_E(0,1) = AB_E(0,1),$$

et donc, $B_H(0,1) \subset AB_E(0,c)$.
ii-($\Longleftarrow$) Soit $z \in H$ et $z \neq 0$ alors, $\frac{z}{||z||_H} \in B_H(0,1)$. Comme $B_H(0,1) \subset AB_E(0,c)$ alors, $\exists v \in B_E(0,c)$; $\frac{z}{||z||_H} = Av$. Donc

$$\exists u = v||z||_H \in E \text{ tel que } Au = z, \;\; \forall z \neq 0.$$

Comme $A0 = 0$ alors $H \subset ImA$, et donc A est surjectif
Etape 02 : Montrons que

$$B_H(0,1) \subset AB_E(0,c) \Longleftrightarrow c||A^*z||_E \geq ||z||_H, \forall z \in H.$$

i-($\Longrightarrow$) On a:

$$\|z\|_H = \sup_{||y||_H \leq 1} |(z,y)_H|$$

$$\begin{aligned} (\text{ car } B_H(0,1) \subset AB_E(0,c)) \quad &\leq \sup_{||u||_E \leq c} |(z,Au)_E| = c \sup_{||u||_E \leq 1} |(A^*z,u)_E| \\ &\leq c||A^*z||_E. \end{aligned}$$

Réciproquement supposons qu'il existe $c > 0$ tel que:

$$||A^*z||_E \geq c||z||_H, \;\; \forall z \in H \quad \text{et} \quad B_H(0,1) \nsubseteq AB_E(0,c) \;\; .$$

Donc $\exists x_0 \in B_H(0,1)$ *et* $x_0 \notin AB_E(0,c)$.
a) Montrons que $AB_E(0,c)$ est fermé.
Soit $(z_n) \subset AB_E(0,c)$ tel que $z_n \longrightarrow z$, montrons que $z \in AB_E(0,c)$
on a: $z_n \in AB_E(0,c)$ alors $\exists u_n, \in B_E(0,c) : z_n = Au_n$. Mais (u_n) est borné dans E, alors il existe une sous suite (u_n) tel que: (u_n) converge faiblement vers u dans E.
Comme $B(0,c)$ est une convexe fermé alors $B(0,c)$ est faiblement fermé et donc $u \in B(0,c)$.
Comme A est linéaire et continu de E dans H alors (Au_n) converge faiblement vers Au dans H. En effet, soit $z \in H$, on a :

$$(Au_n, z)_H = (u_n, A^*z)_E \longrightarrow (u, A^*z)_E = (Au, z)_H$$

donc

$$(Au_n, z) \longrightarrow (Au, z) \;\; \forall z \in H.$$

Mais $z_n \longrightarrow z$ dans H alors $z_n \longrightarrow z$ dans H faible et $z_n = Au_n \longrightarrow Au$ dans H faible. On déduit alors que, $z = Au$. Comme $u \in B_E(0,c)$ alors $z \in AB_E(0,c)$.
Maintenans, du fait que $\{x_0\}$ est compact et $AB_E(0,c)$ est fermé alors, d'aprés le théorème de séparation strict de Hahn-Banach,

$$\exists z_0 \in H \text{ tel que } : \langle z_0, Au\rangle_H < 1 < \langle z_0, x_0\rangle_H, \forall u \in B_E(0,c).$$

On a:

$$||z_0|| = \sup_{||x||_H \leq 1} |\langle z_0, x\rangle| \geq \langle z_0, x_0\rangle > 1.$$

et

$$\begin{aligned} ||A^* z_0||_E &= \sup_{||x||_H \leq 1} \langle A^* z_0, u\rangle_E = \sup_{||x||_H \leq 1} \langle z_0, Au\rangle \\ &= \frac{1}{c} \sup_{||x||_H \leq c} \langle z_0, Au\rangle < \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

donc, $||A^* z_0||_E < \frac{1}{c}$ et $||z_0||_H > 1$. Ona alors,

$$||A^* z_0|_E| < \frac{1}{c}.||z_0||_H \Longleftrightarrow c.||A^* z_0||_E < ||z_0||_H.$$

Contradiction avec l'hypothèse $c||A^* z_0||_E \geq ||z_0||_H$. □

Déterminons l'opérateur adjoint de L_T, noté L_T^* :
On a : $L_T : L^2(0,T;U) \to H$ donc $L_T^* : H^{'} \to (L^2(0,T;U))^{'}$, comme H et $(L^2(0,T;U)$ sont des espaces de Hilbert alors on identifie par le théorème de Riesz : H à son dual et $L^2(0,T;U)$ à dual. Donc

$$L_T^* : H \to L^2(0,T;U)$$

L_T^* est défini par :

$$\begin{aligned} \langle L_T^* z_0, u\rangle_{L^2(0,T;U)} = \langle z_0, L_T u\rangle_H &= \int_0^T (S(T-t)Bu(s), z_0)_H \, ds \\ &= \int_0^T (u(s), B^* S^*(T-t) z_0)_U \, ds. \end{aligned}$$

Donc :

$$L_T^* z_0 = B^* s^*(T-t) z_0. \tag{2.4}$$

En combinant la proposition (2.4), l'inégalité (2.3) et cette derniere inégalité. On déduit le théorème (2.3).

Théorème 2.7 Le système (2.1) est approximativement contrôlable en temps $T > 0$ si, et seulement si,

$$B^* S^*(t) y_0 = 0, \ \ \forall t \in [0,T] \Longrightarrow y_0 = 0. \tag{2.5}$$

2.3 Contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ et ω une sous ensemble ouvert, et non vide de Ω. On considère l'équation linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \triangle y + b(x,t)y = \mathbf{1}_w\, v(x,t), & \text{dans } Q_T = \Omega \times]0,T[\\ y = 0, & \text{sur } \Sigma_T = \partial\Omega \times]0,T[\\ y(x,0) = y_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{2.6}$$

Théorème 2.8 Il existe un contrôle $v \in L^\infty(\omega \times (0,T))$ tel que la solution de (2.6) satisfait

$$y(.,T) = 0, \;\; p.p., \;\; \text{dans} \;\; \Omega. \tag{2.7}$$

De plus on a :

$$||v||_{L^\infty(\omega\times(0,T))} \leq exp\left[C\left(1 + \frac{1}{T} + T + (T^{1/2}+T)||b||_\infty + ||b||_\infty^{2/3}\right)\right] ||y_0||_{L^2(\Omega)'} \tag{2.8}$$

où $C = C(\Omega, \omega) > 0$.

Pour la preuve on a besoin des résultats suivants:

Théorème 2.9 Soit $b = b(x,t) \in L^\infty(Q)$, il existe des constantes $C > 0$ (dépendant de b, Ω et T), et C_{t_1,t_2} (dépendant de t_1, t_2, b et Ω) telles que pour tout $f \in L^p(Q)$ et $\varphi^0 \in L^p(\Omega)$, la solution φ de :

$$\begin{cases} \varphi' - \Delta\varphi + b(x,t) = f & \text{dans } Q. \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma. \\ \varphi(x,T) = \varphi^0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{2.9}$$

satisfait

$$\begin{cases} ||\varphi||_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))} \leq & c(|\varphi^0|_{p(\Omega)} + ||f||_{L^p(Q)}) ....(*) \\ ||\varphi||_{X^p(t_1,t_2)} \leq & c_{t_1,t2}(|\varphi^0|_{p(\Omega)} + ||f||_{L^p(Q)}) ....(**) \end{cases} \tag{2.10}$$

où $X^p(t_1,t_2) = L^p\left(t_1,t_2; W_0^{1,p}(\Omega)\right) \cap W^{1,p}\left(t_1,t_2; L^p(\Omega)\right)$ muni de sa norme naturelle:

$$||\varphi||_{X^p(t_1,t_2)} = ||\varphi||_{L^p\left(t_1,t_2;W_0^{1,p}(\Omega)\right)} + ||\varphi||_{W^{1,p}(t_1,t_2;L^p(\Omega))}$$

En particulier si $f = 0$ et φ est la solution du problème,

$$\begin{cases} \varphi' - \Delta\varphi + b(x,t) = 0 & \text{dans } Q. \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma. \\ \varphi(x,T) = \varphi^0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.11}$$

On aura

$$\left\{ \begin{array}{rl} ||\varphi||_{L^\infty(0,T;L^p(\varphi))} \leq & c(|\varphi^0|_{p(\Omega)})..............(*) \\ ||\varphi||_{X^p(t_1,t_2)} \leq & c_{t_1,t2}(|\varphi^0|_{p(\Omega)}).............(**) \end{array} \right. \tag{2.12}$$

On pose

$$J_\varepsilon(\varphi^0, b; y_0) = \frac{1}{2}\left(\int_q |\varphi| dxdt\right)^2 + \varepsilon||\varphi^0||_{L'(\Omega)} - \int_\Omega \varphi(x,0) y_0 dx$$

Proposition 2.10 Pour tout $\varepsilon > 0$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^\infty(Q), J_\varepsilon(.; b, y_0)$ est une fonction réelle, convexe et continue sur $L^2(\Omega)$. De plus elle satisfait :

$$\liminf_{|\varphi^0|_{L^2} \longrightarrow \infty} \frac{J_\varepsilon(\varphi^0; b, y_0)}{|\varphi^0|_{L^2}} \geq \varepsilon \tag{2.13}$$

La fonction $J_\varepsilon(.; a, y_0)$ atteint donc son minimum en un unique $\widehat{\varphi}^0$ dans $L^2(\Omega)$.
De plus

$$\widehat{\varphi}^0 = 0 \Longleftrightarrow |y^{'}|_{L^p} \leq \varepsilon.$$

Preuve: On pose : $L_b(\varphi^0) = \varphi$, et $I_b(\varphi^0) = \varphi(x,0)$ où φ est la solution de (2.11)
1. Montrons que J_ε est strictement convexe :
Du fait que le système (2.9) est linéaire alors, les applications L_b et I_b sont linéaires Comme la norme de $L^2(\Omega)$ est strictement convexe et l'application : $y_0 \longrightarrow \int \varphi^0 y_0$ est linéaire et continu alors:
On déduit que J_ε est strictement convexe.
2. Montrons que J_ε est continue. On pose $q = w \times (0,T)$.
Du fait que L_b est linéaire et de l'estimation (2.12)($**$) on a:

$$||\varphi||_{L^2(Q)} \leq c_{0,T}||\varphi^0||_{L^2(\Omega)}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a:

$$\int_q |\varphi| dxdt \leq \sqrt{\text{mes}\,(q)}.|\varphi|_{L^2(Q)}$$

donc,

$$\|L_b\varphi^0\|_{L^1(q)} \leq c|\varphi^0|_{L^2(\Omega)} \tag{2.14}$$

On déduit que l'opérateur : $L_b : L^2(\Omega) \longrightarrow L^1(q)$ est linéaire et continu.
Soit (φ_k^0) une suite telle que $\varphi_k^0 \longrightarrow \varphi^0$ dans $L^2(\Omega)$. On a :

$$\begin{aligned} \left|J_\varepsilon(\varphi_k^0 - J_\varepsilon(\varphi^0)\right| &= \left|\frac{1}{2}\left(\int_q L_b(\varphi_k^0)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\int_q L_b(\varphi^0)\right)^2 + \varepsilon\|\varphi_k^0\| - \varepsilon\|\varphi^0\| + \int_\Omega I_b(\varphi_k^0) - I_b(\varphi^0)\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{2}\left(\int_q L_b(\varphi_k^0)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\int_q L_b(\varphi^0)\right)^2\right| + \varepsilon\left|\|\varphi_k^0\|_{L^2} - \|\varphi^0\|_{L^2}\right| + \int_\Omega \left|I_b(\varphi_k^0) - I_b(\varphi^0)\right| \end{aligned}$$

D'une part

$$\left|\frac{1}{2}\left(\int_q |L_b\varphi_k^0|\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\int_q |L_b\varphi^0|\right)^2\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\int_q |L_b\varphi_k^0| - \int_q |L_b\varphi^0|\right)\left(\int_q |L_b\varphi_k^0| + \int_q |L_b\varphi^0|\right)\right|$$
$$\leq \left(\int_q |L_b\varphi_k^0 - L_b\varphi^0|\right) \cdot \int_q \left(|L_b\varphi_k^0| + \int_q |L_b\varphi^0|\right)$$

Mais,d'après (2.14) on a:

$$\int_q |L_b\varphi_k^0 - L_b\varphi^0| = |L_b(\varphi_k^0 - \varphi^0)|_{L^1(q)}$$
$$\leq c_1|(\varphi_k^0 - \varphi^0)|_{L^2(\Omega)}$$

D'aprés la continuité de L_b et le fait que φ_k^0 est bornée dans $L^2(\Omega)$, on a :

$$\int_q |L_b\varphi_k^0| \leq c_2\|\varphi_k^0\|_{L^2(\Omega)} \leq c_2$$

Donc,

$$\left|\frac{1}{2}\left(\int_q |L_b\varphi_k^0|\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\int_q |L_b\varphi^0|\right)^2\right| \leq c_3\|\varphi_k^0 - \varphi^0\|_{L^2}(\Omega) \longrightarrow 0.$$

D'autre part

$$\left|\int_q y_0.\left(\varphi_k(x,0) - \varphi(x,0)\right)\right| \leq \|y_0\|_{L^p}.\|I_b\varphi_k^0 - I_b\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0.$$
$$\leq c\|y_0\|.\|\varphi_k^0 - \varphi^0\|_{L^2(\Omega)}.$$

On déduit alors que J_ε est continue.
Montrons que

$$\lim_{|\varphi^0|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \infty} \inf \frac{J_\varepsilon(\varphi^0, a, y_0)}{\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}} \geq \varepsilon$$

supposons qu'il existe une suite $(\varphi_n^0) \subset L^2(\Omega)$ telle que

$$\varphi_n^0 \longrightarrow +\infty \ \text{ dans } \ L^2(\Omega) \quad \text{ et } \quad \frac{J_\varepsilon(\varphi^0, a, y_0)}{\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}} < \varepsilon. \tag{2.15}$$

Posons

$$\widehat{\varphi}_n^0 = \frac{\varphi_n^0}{\|\varphi_n^0\|_{L^2}(\Omega)} \quad .$$

On note par $\widehat{\varphi}_n$ la solution du problème (2.11), avec $\widehat{\varphi}_n(T) = \widehat{\varphi}_n^0$.
Comme $\|\widehat{\varphi}_n^0\|_{L^2(\Omega)} = 1$, on peut extraire une sous suite (notée encore $(\widehat{\varphi}_n^0)$) telle que, $(\widehat{\varphi}_n^0)$ converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ ver un élément $\widehat{\varphi}^0$.
Comme L_b est linéaire et continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^1(q)$ alors $L_b(\widehat{\varphi}_n^0)$ converge faiblement

vers $L_b(\widehat{\varphi}^0)$ dans $L^1(q)$. En effet, notons par L_b^*:

$$L_b^* : L^\infty(q) \longrightarrow L^2(\Omega) \ \ \text{L'adjoint de } L_b \ .$$

Pour tout $f \in L^\infty(q)$, on a:

$$\begin{aligned}\langle L_b(\widehat{\varphi}_n^0), f\rangle_{L^1(q)\times L^\infty(q)} = \langle \widehat{\varphi}_n^0, L_b^* f\rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} &\longrightarrow \langle \widehat{\varphi}^0, L_b^* f\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle L_b\widehat{\varphi}^0, f\rangle_{L^1(q)\times L^\infty(q)}.\end{aligned}$$

De même, $\widehat{\varphi}_n(x,0) = I_b(\widehat{\varphi}_n^0)$ converge vers $\widehat{\varphi}(x,0)$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.
D'autre part on a:

$$\frac{J_\varepsilon(\varphi^0, b; y_0)}{\|\varphi_n^0\|} = \frac{1}{2}\|\varphi_n^0\| \left(\int_q |L_b(\widehat{\varphi}_n^0)| dxdt\right)^2 + \varepsilon + \int_\Omega y_0 \widehat{\varphi}_n(x,0)dx.$$

Comme $\liminf\limits_{|\varphi^0|_2 \longrightarrow \infty} \frac{J_\varepsilon(\varphi^0;b,y_0)}{|\varphi^0|_2} < \varepsilon$ et $\|\varphi_n\| \longrightarrow \infty$ alors

$$\liminf_{\|\varphi_n^0\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \infty} \int_q |b(\widehat{\varphi}_n^0)| = 0 \ .$$

Donc il existe une sous suite (notée en core $\widehat{\varphi}_n^0$) telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_q |L_b \widehat{\varphi}_0^n| dxdt = 0$$

Mais

$$\int_q L_b \widehat{\varphi}_0^n dxdt \longrightarrow \int_q L_b \widehat{\varphi}_0 dxdt.$$

On déduit alors que $L_b\widehat{\varphi}_0 = 0$ dans $w \times (0,T)$ et alors d'après le théorème de $L_b\widehat{\varphi}_0 = 0$ dans Q
Donc,

$$\widehat{\varphi}^0 = 0 \ \text{ et } \ \widehat{\varphi}^0(x,0) = 0.$$

Comme :

$$J_\varepsilon(\varphi_n^0, by_0) \geq \varepsilon \|\varphi_n^0\|_{L^2}(\Omega) - \int_\Omega y_0 \widehat{\varphi}_n^0(x,0)$$

et du fait que $\widehat{\varphi}_n^0$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(\Omega)$ alors $\int_\Omega y_0 \widehat{\varphi}_n^0(x,0) \longrightarrow 0$.
On déduit que

$$\liminf_{|\varphi^0|_2 \longrightarrow \infty} \frac{J_\varepsilon(\varphi^0; b, y_0)}{|\varphi^0|_{L^2(\Omega)}} \geq \varepsilon$$

ce qui contredit l'hypothèse (2.15) et donc l'inégalité (2.13) est vérifiée. Donc J_ε atteint un minimum unique noté $\widehat{\varphi}_\varepsilon^0$.

Soit $\widehat{\varphi}_\varepsilon$ la solution de (2.11) avec $\widehat{\varphi}_\varepsilon(T) = \widehat{\varphi}^0_\varepsilon$. Comme $J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^0_\varepsilon) \leq J(0) = 0$, on a:

$$\frac{1}{2}\left(\int_q |\widehat{\varphi}_\varepsilon|\right) + \varepsilon\|\widehat{\varphi}^0_\varepsilon\| \leq \int_\Omega \widehat{\varphi}_\varepsilon(x,0)y_0(x)dx$$

et donc

$$\frac{1}{2}\left(\int_q |\widehat{\varphi}_\varepsilon|\right)^2 \leq \|\widehat{\varphi}_\varepsilon(x,0)\|_{L^2(\Omega)}\|y_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme

$$\|\widehat{\varphi}_\varepsilon(x,0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left[C\left(1+\frac{1}{T}+T+(T^{1/2}+T)||b||_\infty+||b||^{2/3}_\infty\right)\right]\frac{1}{2}\left(\int_q |\widehat{\varphi}_\varepsilon|dxdt\right)^2. \tag{2.16}$$

On déduit que

$$\int_q |\widehat{\varphi}_\varepsilon|dxdt \leq \left[C\left(1+\frac{1}{T}+T+(T^{1/2}+T)||b||_\infty+||b||^{2/3}_\infty\right)\right]\|y_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

On pose maintenant

$$\upsilon_\varepsilon = \left(\int_q |\widehat{\varphi}_\varepsilon|dxdt\right) sgn(\widehat{\varphi}_\varepsilon).$$

On a

$$\|\upsilon_\varepsilon\|_{L^\infty}(q) = \int_q |\widehat{\varphi}_\varepsilon|dxdt \leq \left[C\left(1+\frac{1}{T}+T+(T^{1/2}+T)||b||_\infty+||b||^{2/3}_\infty\right)\right]\|y_0\|. \tag{2.17}$$

Ce qui donne l'inégalité (2.8).
D'autre part, on a:

$$J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^0_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^0_\varepsilon + \lambda\psi^0), \quad \forall\psi^0 \in L^2(\Omega) \tag{2.18}$$

et

$$J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^0_\varepsilon, \lambda\psi^0) = \frac{\lambda^2}{2}(\psi)^2 + \lambda(\widehat{\varphi}_\varepsilon)(\psi) + \frac{1}{2}(\widehat{\varphi}_\varepsilon)^2 + \varepsilon\|\widehat{\varphi}^0_\varepsilon + \lambda\psi^0\| + \int_\Omega \left(\widehat{\varphi}^0_\varepsilon + \lambda\psi^0\right)y_0.$$

On déduit de (2.18) que:

$$\lambda\left[-\left(\int_\Omega \widehat{\varphi}_\varepsilon\right)\left(\int_\Omega \psi\right) - \int_\Omega \psi(x,0)y_0\right] \leq \frac{\lambda^2}{2}\left(\int_\Omega \psi\right)^2 \varepsilon\left[\|\widehat{\varphi}^0_\varepsilon + \lambda\psi^0\| - \|\widehat{\varphi}^0_\varepsilon\|\right].$$

i) Pour $\lambda > 0$, en divisant par λ et en faisant tendre λ ver 0^+ on aura:

$$\begin{aligned}-\left[\left(\int_q \widehat{\varphi}_\varepsilon\right)\left(\int_q \psi\right) + \int_\Omega \psi(x,0)y_0\right] &\leq \varepsilon \liminf \frac{[\|\widehat{\varphi}^0_\varepsilon + \lambda\psi^0\| - \|\widehat{\varphi}^0_\varepsilon\| - \|\widehat{\varphi}^0_\varepsilon\|]}{\lambda} \\ &\leq \varepsilon.\|\psi^0\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Pour $\lambda < 0$, en divisant par λ et $\lambda \longrightarrow 0^-$ on aura

$$\left(\int_q \widehat{\varphi}_\varepsilon\right)\left(\int_q \psi\right) + \int_\Omega \psi(x,0)y_0 \leq \varepsilon\|\psi^0\|_{L^2(\Omega)}.$$

On déduit alors que:

$$\left|\left(\int_q \widehat{\varphi}_\varepsilon\right)\left(\int_q \psi\right) + \int_\Omega \psi(x,0)y_0\right| \leq \varepsilon\|\psi^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.19}$$

Soit φ la solution du système:

$$\begin{cases} \psi' - \triangle\psi + b(x)\psi = 0 & \text{dans } Q_T \\ \psi(T) = \psi_0 & \text{sur } \Sigma_T \\ \psi = 0 & \text{sur } \Sigma_T \end{cases}$$

En multipliant par ψ l'équation (2.6) avec $\upsilon_\varepsilon = \left(\int_q \widehat{\varphi}_\varepsilon\right) sgn(\widehat{\varphi}_\varepsilon)$ et en intègrant sur $\Omega \times (0,T)$ on aura:

$$\int_q \upsilon_\varepsilon\psi = \int_q \left(y_\varepsilon^{'} - \Delta y_\varepsilon^{'} + b(x)y_\varepsilon^{'}\right)\psi = \int_\Omega y^\varepsilon(T)\psi^0 - \int_\Omega y_0\psi(x,0)dx \ .$$

Comme $\int_q \upsilon_\varepsilon\psi = \left(\int_q \widehat{\varphi}_\varepsilon\right)\left(\int_q \psi\right)$ on déduit que

$$\left(\int_q \widehat{\varphi}_\varepsilon\right)\left(\int_q \psi\right) = \int_\Omega y(x,T)\psi^0 - \int_\Omega y_0\psi(x,0).$$

L'inégalité (2.19) donne alors

$$\left|\int_\Omega y^\varepsilon(T)\psi^0 dx\right| \leq \varepsilon\|\psi^0\|_{L^2(\Omega)}, \ \ \forall\psi^0 \in L^2(\Omega).$$

En particulier, pour $\psi^0 = y^\varepsilon(T)$ on déduit que

$$\|y^\varepsilon(.,T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon. \tag{2.20}$$

De l'inégalité (2.17) on peut extraire une sous suite (υ_ε) telle que

$$\upsilon_\varepsilon \longrightarrow^* \upsilon \quad \text{dans } \ L^\infty(q)$$

et que υ satisfait (2.17).
Soit y la solution de (2.6), avec υ défini précédement. De l'inégalité (2.20) on déduit que $y(.,T) = 0 \ \ p.p$ sur Ω. Donc la solution y du système (2.6) vérifie bien la condition (2.7).

2.4 Contrôlabilité de l'équation des ondes

Dans cette section, nous discutons des résultats liés à la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes linéaire.
Soient $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$, $\omega = (\alpha, \beta), 0 < \alpha < \beta < 1$, pour une fonction donnée $a \in L^\infty(\Omega)$ et un temps $T > 0$, nous considérons l'équation des ondes linéaire suivante:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + a(x)u = v\mathbf{1}_\omega & \text{dans} \quad \Omega \times (0,T) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u(.,T) = u_0, u_t(.,0) = u_1, & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.21}$$

où $\mathbf{1}_\omega$ désigne la fonction indicatrice de ω, $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), u = v(x,t)$ est l'état et $v = v(x,t) \in L^2(\omega \times (0,T))$ est un contrôle distribué sur $(\omega \times (0,T))$.

Définition 2.11 On dit que le système (2.21) est exactement contrôlable si pour tout état désiré (z_0, z_1), et tout état initial (u_0, u_1), il existe un contrôle $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ tel que la solution du système (2.21) vérifie:

$$u(x,T) = z_0, \;\; u_t(x,T) = z_1, \;\; p.p, x \in \Omega. \tag{2.22}$$

Théorème 2.12 Pour tout $(u_0, u_1, v) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(q)$, le système (2.21) admet une unique solution $u \in C([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega))$.

Le problème de contrôlabilité exacte de (2.21) est défini comme suit:

Théorème 2.13 Pour tout $T > T_0 = 2\max(\alpha, 1-\beta)$, le système (2.21) est exactement contrôlable en T.

Preuve: Nous allons utiliser la méthode; HUM
Considérons le système :

$$\begin{cases} z_{tt} - z_{xx} + a(x)z = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times (0,T) \\ z(0,t) = z(1,t) = 0, & \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ z(.,T) = z_0, z_t(.,T) = z_1, & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.23}$$

qui admet une unique solution $z \in C(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T; L^2(\Omega))$.
Considérons aussi le système :

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \varphi_{xx} + a(x,t)\varphi = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times (0,T) \\ \varphi = 0, & \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ \varphi(.,0) = \varphi_0, \varphi_t(.,0) = \varphi_1, & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.24}$$

Où $(\varphi_0, \varphi_1) \in L^2 \times H^{-1}(\Omega)$.
Ce système admet une unique solution $\varphi \in C([0,T], L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T], H^{-1}(\Omega))$, définie au sens de la transposition suivante:

Définition 2.14 On dit que φ est solution au sens de la transposition du système (2.24) si $\varphi \in C([0,T], L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T], H^{-1}(\Omega))$ et satisfait:

$$\int_{Q_T} \varphi f dxdt = \langle \varphi^1, \theta(0) \rangle_{H^{-1} \times H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega \varphi^0 \theta_t(0) dx,$$

où $\theta \in C([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega))$ est l'unique solution du système :

$$\begin{cases} \theta_{tt} - \theta_{xx} + a(x) = f & \text{dans} \quad \Omega \times (0,T) \\ \theta = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ \theta(T) = \theta_t(T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.25}$$

Pour toute solution φ de (2.24), on introduit le système suivant

$$\begin{cases} \psi_{tt} - \psi_{xx} + a(x,t)\psi = \varphi \mathbf{1}_w & \text{dans} \quad \Omega \times (0,T) \\ \psi = 0, & \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ \psi(.,T) = \psi^{'}(.,T) = 0, & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.26}$$

et on définit l'opérateur linéaire et continu suivant:

$$\Theta : L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \to L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

par

$$\Theta(\varphi_0, \varphi_1) = (-\psi^{'}(x,0), \psi(x,0)). \tag{2.27}$$

Remarque 2.15 Si Θ est un isomorphisme alors, pour

$$(-\psi_t(0), \psi(0) = (-u_1 + z_t(0), u_0 - z_0))$$

il existe $(\varphi^0, \varphi^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ telle que:

$$\Theta(\varphi^0, \varphi^1) = (-u_1 + z_t(0), u_0 - z_0). \tag{2.28}$$

Par conséquent, la fonction $u = \psi + z$ est solution du problème (2.21) et satisfait la condition (2.22).

Proposition 2.16 l'opérateur Θ est un isomorphisme

Preuve:
En multipliant l'équation (2.26) par φ (solution de (2.24)) et en intégrant sur Q_T, on

obtient l'égalité suivante:

$$\langle\Theta(\varphi_0,\varphi_1),(\varphi_0,\varphi_1)\rangle = \int_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 dxdt,\ \ \forall(\varphi_0,\varphi_1)\in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$$

$$k - \int_\Omega \psi_t(0)\varphi(0)dx + \langle\varphi_1,\psi(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \int_{W\times(0,T)} |\varphi|^2\ \ \forall(\varphi_0,\varphi_1)\in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega). \tag{2.29}$$

Mais

$$-\int_\Omega \psi_t(0)\varphi(0)dx + \langle\varphi_1,\psi(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \langle\Theta(\varphi_0,\varphi_1),(\varphi_0,\varphi_1)\rangle_{H^1\times H}$$

où $H = L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ et $H^1 = L^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ le dual de H. On obtient alors (2.29)
Une condition nécessaire et suffisante pour que Θ soit coercif est alors l'estimation d'observabilité suivante

$$\int_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 dxdt \geq C\left(\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right), C>0.$$

cette inégalité est donnée par le lemme suivant dont on peut trouver la preuve dans [12].

Lemme 2.17 Pour $T > 2\max(\alpha, 1-\beta)$ il existe deux constantes positives $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq C_1 e^{C_2\sqrt{\|a\|_\infty}} \int_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 dxdt \tag{2.30}$$

pour tout solution φ de (2.24).

On déduit alors d'après le théorème de Lax-Milgram que l'opérateur Θ est un isomorphisme. Alors l'equation (2.28) admet une unique solution $(\varphi_0,\varphi_1)\in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ et la solution φ du système (2.24) donne le contrôle souhaité

$$\upsilon(x,t) = \varphi(x,t)\mathbf{1}_w. \tag{2.31}$$

Remarque 2.18 En prenant $\upsilon = \varphi$, où φ est la solution du système (2.24), en multipliant l'equation du système (2.21) par φ et en integrant sur Q_T.
On aurra:

$$\int_0^T\int_\omega |\upsilon|^2 dxdt = \int_\Omega z_1\varphi(T)dx - \langle z_0,\varphi_t(T)\rangle_{1,-1} - \int_\Omega u_1\varphi_0 dx + \langle u_0,\varphi_1\rangle_{1,-1}, \tag{2.32}$$

où $\langle .,.\rangle_{1,-1}$ désigne le produit de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et son dual $H^{-1}(\Omega)$.

Remarque 2.19 Dans le cas de contrôlabilité à zéro, c'est à dire $z_0 = z_1 = 0$, on déduit à partir de (2.32) l'estimation suivante :

$$\int_0^T\int_\omega |\upsilon|^2 dxdt \leq C\|(u_0,u_1\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)'} \tag{2.33}$$

où $C = \|(\varphi_0, \varphi_1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}$.

Chapitre 3

Contrôlabilité des systèmes bilinéaires.

3.1 Préliminaires

On considère le système bilinéaire suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + p(t)By(t), \quad t > 0 \\ \qquad\qquad y(0) = y_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où p est un contrôle bilinéaire à valeurs réelles, $B : H \longrightarrow H$ est un opérateur linéaire borné et A est un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ qui genère un semi-groupe $S(t)$ de classe C^0 dans un espace de Hilbert réel H. Contrairement au cas du système linéaire (2.1), où l'application $v \longrightarrow y(t)$ est linéaire pour $y_0 = 0$, dans le cas du système bilinéaire (3.1), l'application $p \longrightarrow y(t)$ est non linéaire. Par conséquent, l'approche de dualité développée concernant la contrôlabilité du système linéaire (2.1) ne s'applique pas pour le système (3.1). Il faut donc développer une nouvelle méthodologie pour étudier la contrôlabilité des équation aux dérivées partielles par des contrôles bilinéaires nécessitant des modifications par rapport aux système linéaires. Tout d'abord, au lieu d'étudier la contrôlabilité de l'ensemble $E(y_0, T)$ constitué de tous les états, dans le cas des systèmes bilinéaires (3.1), nous allons considérer l'ensemble des états qui sont accessibles à tout instant [1][8] Notons cet ensemble par :

$$W(y_0) = \bigcup_{t \geq 0, p \in L^r([0,\infty];\mathbb{R}) r > 1} y(y_0, t, p)$$

dans le cas du système linéaire (2.1) la contrôlabilité approchée locale (resp exacte) implique la contrôlabilité approchée globale (resp exacte) [17]. Ce n'est pas le cas pour les systèmes bilinéaires. En général on ne peut pas s'attendre à la contrôlabilité exacte, local ou global de (3.1) dans H. En effet, il a été démontré par Ball et al [1] que l'ensemble $W(y_0)$ et contenu dans une réunion dénombrable de compacts de H, en particulier cet ensemble a un complémentaire non vide. En d'autre termes, d'aprèe le théorème de Baire l'ensemble $W(y_0)$ n'est pas dense dans un espace de dimension infinie H. D'autre part, si $W(y_0)$ est dense dans H, alors le système (3.1) est approximativement contrôlable dans H. Toutefois, on peut se contenter de l'étude de la contrôlabilité exacte sur un sous espace de H.

En général, nous n'avons par la contrôlabilité approchée dans H pour l'équation bilinéaire (3.1), comme le montre l'exemple ci-dessous:

Exemple:

On considère l'équation de la chaleur avec la condition de Direchlet suivante:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(t)}{\partial t} = \triangle y(t) + p(x,t)y(t), & \text{dans } Q_T \\ \quad y = 0, & \text{dans } \Sigma_T \\ y(x,0) = y_0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1$, est un domaine de bord assez régulier $\partial\Omega, T > 0$ fixé, $y_0 \in L^2(\Omega)$ est l'état initial et $p \in L^\infty(Q_T)$ représente un contrôle bilinéaire.

Il est alors évident qu'un tel système n'est pas globalement contrôlable pour $y_0 = 0$, car alors $y(t) = 0, \forall t > 0$. Dans la suite, on va donc considérer des états initiaux non nuls. De plus, même si $y_0 \neq 0$, le système (3.2) peut ne pas être approximativement contrôlable à cause de l'implication suivante, qui résulte du principe du maximum :

$$y_0 \leq 0 \ \ (resp.\ \ y_0 \geq 0) \Longrightarrow y(x,t) \leq 0, (resp.\ \ y(x,t) \geq 0) x \in \Omega, t > 0.$$

En effet, si on supose par exemple, que $y_0 \leq 0$, alors en multipliant l'équation (3.2) par $y^+(t) = \max\ (y(t), 0)$, et on intégrant sur Ω, on obtient, du fait que $y^+ = 0$ sur Σ_T

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||y^+(t)||^2 \leq -||\nabla y^+(t)||^2 + ||p||.||y^+(t)||^2,$$

ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}||y^+(t)||^2 \leq 2||p||.||y^+(t)||^2,$$

en utilisant l'inégalité de Gronwall, on déduit que:

$$||y^+(t)|| \leq e^{2t||p||}||y_0^+||, \ \ \forall t \in (0, T).$$

Puisque $y_0 \leq 0$ alors $y_0^+ = 0$, ce qui implique que $y^+(t) = 0$, d'où $y(t) \leq 0$.

En conséquence, il est intéressant d'étudier la contrôlabilité du système (3.2) où les états initiaux et les états désirés ont le même signe.

3.2 Contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur

Dans cette section on considère le problème de contrôlabilité approchée du système (3.2).

Définition 3.1 Le système (3.2) est approximativement contrôlable dans $L^2(\Omega)$, si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $y_0, \theta \in L^2(\Omega)$, de même signe que $y_0 \neq 0$, il existe un temps $T = T(\varepsilon, y_0, \theta)$ et un contrôle bilinéaire $p \in L^\infty(Q_T)$ tel que pour toute solution de (3.2) on a :

$$||y(.,T) - \theta||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon. \tag{3.3}$$

Le résultat suivant concèrne la contrôlabilité approchée du système (3.2) dans le sens de la définition (3.1).

Théorème 3.2 Soit $y_0 \in L^2(\Omega),\ \ y_0 > 0$ dans Ω. Alors le système (3.2) est approximativement contrôlable par une contrôle statique $p = p(x), p \in L^\infty(\Omega)$.

Preuve: : La preuve de ce théorème se fait en cinq étapes.
Étape 01. L'idée principale est de sélectionner le contrôle $p = p(x)$ de sorte que l'état désiré θ (ou son approximation) devienne co-liniaire à la première fonction propre de l'opérateur défini par

$$Ay(t) = \frac{\partial^2 y(t)}{\partial x^2} + p(x)y(t).$$

Notons par λ_k et $\varphi_k(x), k = 1, ...,$ respectivement les valeur et les fonction propre dans $L^2(\Omega)$ de

$$A\varphi = \lambda\varphi,\ \ \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.4}$$

on sait que

$$||p||_{L^\infty(\Omega)} \geq \lambda_1 > \lambda_2 > ..., \tag{3.5}$$

et $\lambda_k \to -\infty$ quand $k \to +\infty$. [8]
L'unique solution de (3.2) dans $C([0;T]; L^2(\Omega) \cap L^2([0,T]; H_0^1(\Omega)))$ s'ecrit sous la forme:

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t}\langle y_0, \varphi_k\rangle \varphi_k(x). \tag{3.6}$$

On munit l'espace $H_0^1(\Omega)$ de la norme

$$||\varphi||_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_0^1 \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + (-p(x)+c)\varphi^2(x)\right) dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

où c est une constante positive supérieure à $||p||_{L^\infty(\Omega)}$. Alors

$$||\varphi_k||_{H_0^1(\Omega)} = \int_0^1 (-\lambda_k + c)\ \ \varphi_k^2 dx.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
||\varphi_k||_{H_0^1(\Omega)} &= \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x} \right)^2 + (c - p(x))\, \varphi_k^2(x) \right] dx \\
&= \int_0^1 \left[- \frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial^2 x} \varphi_k(x) + (c - p(x))\, \varphi_k^2(x) \right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\left(- \frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial^2 x} - p(x)\varphi_k(x) \right) \varphi_k(x) + c\ \ \varphi_k^2 \right] dx \\
&= \int_0^1 \left(-A\varphi_k(x).\varphi_k(x) + c\ \ \varphi_k^2 \right) dx \\
&= \int_0^1 (-\lambda + c)\, \varphi_k^2(k) dx.
\end{aligned}$$

Le plan du reste de la preuve du théorème est le suivant:
(i) On va montrer que pour tout état désiré positif $\theta \in L^2(\Omega)$, on peut trouver un contrôle $p_*(x)$ tel que $\frac{\theta}{||\theta||_{L^2(\Omega)}}$ soit la première fonction propre de (3.4), associée à la plus grande valeur propre, en d'autre terme,

$$\varphi_1(x) = \frac{\theta(x)}{||\theta||_{L^2(\Omega)}}. \tag{3.7}$$

(ii) En suite, on va montre que le contrôle $p(x) = p_*(x) + a$, où a est une constante choisie de façon que le premier terme de (3.6) converge vers θ, tandis que le reste de la série converge vers zéro l'orsque $t \to +\infty$. Notons que les valeures propres correspondantes à p_* et p sont respectivement λ_k et $\lambda_k + a$, alors que les fonction propres restent les mêmes .

Étape 2. Pour démontrer le résultat du théorème, il suffit de considérer l'ensemble des états désirés $\theta \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $\theta > 0$ sur Ω, tel que $(\theta_{xx}/\theta) \in L^\infty(\Omega)$ ce qui constitue un ensemble dense dans $L^2(\Omega)$. En effet, en régularisant par convolution, chaque fonction $\theta \in L^2(\Omega), \theta \geq 0$, peut être approchée par une suite de fonction strictement positives de $C^\infty(\Omega)$. Ensuite, fixons $\varepsilon > 0$, nous pouvons alors trouver une fonction $\theta^\varepsilon \in C^\infty(\Omega),\ \ \theta^\varepsilon > 0$ sur $\overline{\Omega}$, telle que $||\theta - \theta^\varepsilon|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (voir [3]).

Étape 3. soit $y_0 \in L^2(\Omega)$ strictement positif. Pour tout θ décrit comme dans l'étape 2, on pose

$$p_*(x) = -\frac{\theta_{xx}(x)}{\theta(x)}, \ \ x \in \Omega. \tag{3.8}$$

Notons que $p_*(x)$ n'est pas identiquement nul dans $L^\infty(\Omega)$. On pose

$$A^* y = y_{xx} + p^* y \quad \text{et} \quad \varphi_{k_*}(x) = \frac{\theta(x)}{||\theta||_{L^2(\Omega)}}. \tag{3.9}$$

On montre que $A^*\varphi_{k_*} = 0$, on déduit alors que φ_{k_*} est une fonction propre de A^* et la valeur propre associée est $\lambda_{k_*} = 0$. Les fonctions propres sont orthonormales dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire

$$\int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx = \delta_{ij},$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker et $\varphi_{k_*} > 0$ sur Ω. La fonction donnée par (3.9) est la seule fonction propre positive avec $p = p_*$, (plus précisement, c'est la seule fonction propre qui ne change pas de signe dans Ω). Notons que, du fait que $\varphi_{k_*} > 0$, on a :

$$\int_0^1 \varphi_{k_*} y_0 dx > 0. \tag{3.10}$$

Étape 4. Montrons que $k_* = 1$, ie., $\lambda_1 = 0$. Rappelons que [3]

$$\lambda_1 = \min_{u \in D(A) \setminus \{0\}} \frac{\langle A^* u, u\rangle}{||u||^2},$$

où

$$\begin{aligned}\langle A^* u, u\rangle &= \int_0^1 \left(u_x.u + p_x.u^2\right) dx \\ &= \int_0^1 (-u_x^2 + p_* u^2) dx.\end{aligned}$$

Puisque $\lambda_{k*} = 0$, il suffit alors de montrer que $\lambda_1 \leq 0$, et donc de montre que

$$\int_0^1 \left(p_* u^2 - u_x^2\right) dx \leq 0, \ \ \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \text{avec } \Omega = (0,1).$$

En remplaçant p_* par sa valeur et en intégrant par parties, on obtient, du fait que θ et u sont dans $H_0^1(\Omega)$,

$$\int_0^1 p_* u^2 dx = -\int_0^1 \frac{\theta_{xx}}{\theta} u^2 dx = \int_0^1 \theta_x \frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{\theta}\right) dx = 2\int_0^1 \theta_x \frac{u u_x}{\theta} dx - \int_0^1 \theta_x^2 \frac{u^2}{\theta^2} dx,$$

Donc,

$$\int_0^1 \left(p_* u^2 - u_x^2\right) dx = -\int_0^1 \left(\theta_x (\frac{u}{\theta}) - u_x\right)^2 \leq 0, \ \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

On déduit alors que $\lambda_1 = 0$. En effet, on a $\lambda_1 > \lambda_2 > ....\lambda_k \longrightarrow -\infty$.
Comme $\lambda_1 \leq 0$ alors $\lambda_k < 0, \ \ \forall k \geq 2$, et comme $\lambda_{k_*} = 0$ alors $\lambda_1 = \lambda_{k_*} = 0$.
Étape 5. On écrit le contrôle bilinéaire p sous la forme :

$$p = p_* + a, \ \ a \in \mathbb{R},$$

La solution du système (3.2) s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} y(x,t) &= e^{at}\left(y_0,\varphi_1\right)_{L^2(\Omega)}\varphi_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} e^{(\lambda_k+a)t}\left(y_0,\varphi_k\right)_{L^2(\Omega)}\varphi_k(x) \\ &= e^{at}\left(y_0,\varphi_1\right)_{L^2(\Omega)}\varphi_1(x) + r(x,t) \end{aligned}$$

où $\lambda_k < 0$ pour $k \geq 2$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} ||y(.,t)-\theta||_{L^2(\Omega)} &\leq \left|\left|e^{at}\left(y_0,\varphi_1\right)_{L^2(\Omega)}.\varphi_1(x)dx - \theta\right|\right|_{L^2(\Omega)} + ||r(t)||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left|\left|e^{at}\left(y_0,\varphi_1\right)_{L^2(\Omega)}.\varphi_1(x)dx - \theta\right|\right|_{L^2(\Omega)} + e^{(a+\lambda_2)t}||y_0||_{L^2(\Omega)}. \\ &\leq \left|\left|e^{at}\left(y_0,\varphi_1\right)_{L^2(\Omega)}.\frac{\theta}{||\theta||_{L^2(\Omega)}} - \theta\right|\right|_{L^2(\Omega)} + e^{(a+\lambda_2)t}||y_0||^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.11}$$

On choisit a et $T > 0$ tels que

$$e^{at}\left(y_0,\varphi_1\right)_{L^2(\Omega)} = ||\theta||_{L^2(\Omega)}$$

ce qui implique que

$$a = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{||\theta||_{L^2(\Omega)}}{\left(y_0,\varphi_1\right)_{L^2(\Omega)}}\right).$$

Alors,

$$\left|\left|e^{at}\left(y_0,\varphi_1\right)_{L^2(\Omega)}.\frac{\theta}{||\theta||_{L^2(\Omega)}} - \theta\right|\right|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Il découle alors de (3.11) que

$$||y(.,T)-\theta||_{L^2(\Omega)} \leq e^{\lambda_2 T}\frac{||\theta||_{L^2(\Omega)}}{\left(y_0,\varphi_1\right)_{L^2(\Omega)}}||y_0||_{L^2(\Omega)} \to 0, \text{ quand } \ T \to \infty, \tag{3.12}$$

car, $\lambda_2 < 0$. Ce qui permet de conclure la démonstration du théorème (3.2) $\square$

3.3 Contrôlabilité exacte de l'équation de la chaleur

Dans cette section on considère le système bilinéaire, avec les conditions de Direchlet non homogènes, suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(t)}{\partial t} = \Delta y(t) + p(x,t)y(t) & \text{dans } Q_T, \\ \quad y = g & \text{dans } \Sigma_T, \\ y(x,0) = y_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.13}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n, (n \geq 1)$ est un domaine de bord assez régulier $\partial\Omega$ et $T > 0$ est fixé. La fonction $g \in C(\overline{\Omega})$ est la condition aux limites de direchlet et $p \in L^\infty(Q_T)$ représente le contrôle. Dans la suite on va établir un résultat de contrôlabilité exacte pour (3.13). On aura besoin des deux lemmes suivants concernant respectivement, la version différentielle du lemme de Gronwall et une estimation polynomiale du semi-groupe $S(t)$ dans $L^\infty(\Omega)$.

Lemme 3.3 [?] Soient $\phi : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ avec $0 \leq t_0 < t_1$ et $\psi : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Soit $r : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que

$$r'(t) \leq \phi(t)r(t) + \psi(t), \text{ pour tout } t \in [t_0, t_1]. \tag{3.14}$$

Alors,

$$r(t) \leq exp\left(\int_{t_0}^{t} \phi(s)ds\right) r(t_0) + \int_{t_0}^{t} exp\left(\int_{\tau}^{t} \phi(s)ds\right) \psi(\tau)d\tau, \ \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{3.15}$$

Lemme 3.4 [2] Soit $S(t)$ le semi-groupe sur $L^1(\Omega)$ généré par Δ avec les conditions de Dirichlet. Alors,

$$||S(t)y_0||_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 \, t^{-\frac{n}{2}} \, ||y_0||_{L^2(\Omega)}, \forall y_0 \in L^2(\Omega), \ \forall t > 0, \tag{3.16}$$

où la constante C_1 est indépendante de y_0.

Preuve: pour $n = 1$ on a,

$$y(t) = S(t)y_0 = \sum_{1 \geq 1} e^{\lambda_i(t)} \langle y_0, \varphi_i \rangle \varphi_i = e^{\lambda_1(t)} \langle y_0, \varphi_1 \rangle \varphi_1$$

où λ_1 et φ_1 désignent respectivement les valeurs et les vecteurs propre de $\triangle$ dans $L^2(\Omega)$ En utilisant le fait que

$$e^{\lambda_1(t)} = o(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}), \ \forall t > 0,$$

on obtient l'inégalité (3.16).
pour $n \geq 2$, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(t)}{\partial t} = \Delta y(t), & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ y = 0, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ y(x,0) = y_0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.17}$$

Soit k un entier positif et soit $t > 0$. En multipliant l'équation (3.17) par $t^{k+2}|y|^{p-2}y$. où $p > 2$ et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$t^{k+2}p^{-1}\frac{d}{dt}||y(t)||_p^p + (p-1)t^{k+2}\int_\Omega |\nabla y(t)|^2|y(t)|^{p-2}dx = 0;$$

i.e.,

$$t^{k+2}\frac{d}{dt}||y(t)||_p^p + \frac{4}{p^2}t^{k+2}\int_\Omega |\nabla|y(t)|^{p/2}|^2dx = 0$$

L'inégality de Cauchy-shwarz, permet d'avoir :

$$\left(\int_\Omega |\nabla|y(t)|^{p/2}|dx\right)^2 \leq \text{mes}\,(\Omega)\int_\Omega |\nabla|y(t)|^{p/2}|^2dx,$$

donc

$$t^{k+2}p^{-1}\frac{d}{dt}||y(t)||_p^p + c.t^{k+2}\left(\int_\Omega |\nabla|y(t)|^{p/2}|\right)^2 dx \leq 0. \tag{3.18}$$

En utilisant l'injection de Sobolev:
i) Pour $n = 2$, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \geq 1$ et donc, $\exists c > 0$ telle que

$$c\left(\int_\Omega |y(t)|^{\frac{pq}{2}}|dx\right)^{\frac{2}{q}} \leq \int_\Omega |\nabla|y(t)|^{p/2}|^2dx, \;\; \forall q > 1. \tag{3.19}$$

en particulier, pour $q = 2$, l'inégalité (3.19) s'écrit :

$$c\int_\Omega |y(t)|^pdx \;\leq\; \int_\Omega |\nabla\left(|y(t)|^{\frac{p}{2}}\right)|^2dx. \tag{3.20}$$

ii) pour $n \geq 3$, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \Leftrightarrow p^* = \frac{2n}{n-2}$,
alors $\exists c > 0$:

$$c\left(\int_\Omega |y(t)|^{\frac{pn}{n-2}}|dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq \int_\Omega |\nabla|y(t)|^{p/2}|^2dx, \tag{3.21}$$

Utilisant (3.20) et (3.21), l'inégalité (3.18) devient

$$t^{k+2}\frac{d}{dt}||y(t)||_p^p + c.t^{k+2}||y(t)||_p^p \leq 0, \;\; \forall t \geq 0, \;\; \text{si} \quad n = 2, \tag{3.22}$$

$$t^{k+2}\frac{d}{dt}||y(t)||_p^p + c.2t^{k+2}\left(\int_\Omega |y(t)|^{\frac{pn}{n-2}}|dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq 0, \text{ si } \quad n \geq 3. \tag{3.23}$$

$$t^{k+2}\frac{d}{dt}||y(t)||_p^p = \frac{d}{dt}\left(t^{k+2}||y(t)||_p^p\right) - (k+2)||y(t)||_p^p \ , \tag{3.24}$$

En inégrant l'inégalité (3.22) sur l'intervalle $[0,t]$ on aura, pour $n=2$,

$$t^{k+2}||y(t)||_p^p + C\int_0^t s^{k+2}||y(s)||_p^p ds \leq (k+2)\int_0^t s^{k+1}||y(s)||_p^p ds, n=2. \tag{3.25}$$

Pour $n \geq 3$, utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient:

$$\int_\Omega |y|^p dx = \int_\Omega |y|^\gamma |y|^{p-\gamma} dx \leq \left(\int_\Omega |y|dx\right)^\gamma \left(\int_\Omega |y|^{\frac{p-\gamma}{1-\gamma}}\right)^{1-\gamma}.$$

On choisit $0<\gamma<1$ et $(p-\gamma)(1-\gamma)^{-1} = \frac{np}{n-2}$, ce qui donne:

$$||y(t)||_p^p \leq ||y(t)||_1^\gamma \left(\int_\Omega |y|^{\frac{p}{n-2}p}\right)^{\frac{n-2}{np}(p-\gamma)}$$

donc,

$$||y(t)||_p^p \leq ||y(t)||_1^\gamma ||y(t)||_{\alpha p}^{p-\gamma}, \ \ \alpha = \frac{n}{n-2}.$$

En utilisant cette inégalité dans (3.23) , on obtient :

$$t^{k+2}||y(t)||_p^p + C\int_0^t s^{k+2}||y(s)||_{\alpha p}^p ds \leq (k+2)\int_0^\gamma s^{k+1}||y(t)||_1^\gamma ||y(s)||_{\alpha p}^{p-\gamma} ds$$

D'aprés (2.12)($*$), on a:

$$\|y\|_{L^\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \leq C\|y_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme, $\|y(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq (\operatorname{mes}\Omega)^{1/2}\|y(t)\|_{L^2(\Omega)}$ on a:

$$\begin{aligned}\|y(t)\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |y(t)|dx \leq (\operatorname{mes}\Omega)^{1/2}\left(\int_\Omega |y(t)|^2\right)^{1/2} \\ &\leq |\Omega|^{1/2}\|y(t)\|_{L^2}^\gamma \leq C.\|y_0\|_{L^2}^\gamma\end{aligned}$$

alors,

$$\|y(t)\|_{L^2}^\gamma \leq C.\|y_0\|_{L^2}^\gamma$$

On obtient:

$$t^{k+2}||y(t)||_p^p + C\int_0^t s^{k+2}||y(s)||_{\alpha p}^p ds \leq (k+2)||y_0||_1^\gamma \int_0^t ||y(s)||_{\alpha p}^{p-\gamma} s^{\frac{(k+2)(p-\gamma)}{p}} s^{(k+2)-\frac{(k+2)(p-\gamma)}{p}} ds$$

$$\leq (k+2)||y_0||_1^{\gamma}\left(\int_0^t ||y(s)||_{\alpha p}^p s^{k+2}ds\right)^{\frac{p-\gamma}{p}}\left(\int_0^t s^{\frac{(k+1)p}{\gamma}-\frac{(k+2)(p-\gamma)}{\gamma}}ds\right)^{\frac{\gamma}{p}}$$

$$\leq (k+2)||y_0||_1^{\gamma}\left(\int_0^t ||y(s)||_{\alpha p}^p s^{k+2}ds\right)^{\frac{p-\gamma}{p}}\times\left(k+3-\frac{p}{\gamma})\right)^{\frac{-\gamma}{p}} t^{\frac{(k+3)\gamma}{p}-1}.$$

En utilisant l'inégalité $ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$, où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, on déduit que :

$$t^{k+2}||y(t)||_p^p + c\int_0^t s^{k+2}||y(s)||_{\alpha p}^p ds \leq \frac{c}{2}\int_0^t s^{k+2}||y(s)||_{\alpha p}^p ds$$
$$+ c(k+2)^{\frac{p}{\gamma}}||y_0||_2^p\left(k+3-\frac{p}{\gamma}\right)^{-1} t^{k+3-\frac{p}{\gamma}},$$

ce qui implique que

$$t^{k+2}||y(t)||_p^p + c\int_0^t s^{k+2}||y(s)||_{\alpha p}^p ds \leq \frac{c}{2}\int_0^t s^{k+2}||y(s)||_{\alpha p}^p ds$$
$$+ c(k+2)^{\frac{p}{\gamma}}||y_0||_2^p\left(k+3-\frac{p}{\gamma}\right)^{-1} t^{k+3-\frac{p}{\gamma}}.$$

Alors

$$||y(t)||_p \leq c(k+2)^{\frac{1}{\gamma}}||y_0||_2\left(k+3-\frac{p}{\gamma}\right)^{\frac{-1}{p}} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}},$$

où k est un entier arbitraire et $(p-\gamma)(1-\gamma)^{-1}=\alpha p$. L'orsque $p\to\infty$, on a $\gamma\to\frac{2}{n}$ et par conséquent,

$$||y(t)||_\infty \leq c(k+2)^{\frac{n}{2}}\, t^{-\frac{n}{2}}||y_0||_2, \forall t>0,$$

ce qui donnez l'estimation (3.16). □

Le résultat suivant concerne la contrôlabilité exacte du système (3.13).

Théorème 3.5 [10] Soit $\theta\in W^{2,\infty}(\Omega)$ vérifiant :

1. $\theta=g$ sur $\partial\Omega$ où $g\in C(\overline{\Omega})$
2. $\theta>0$ dans $\overline{\Omega}$ et $\Delta\theta\geq 0$ p.p, dans $\overline{\Omega}$.

Alors il existe $T=T(\theta)>0$, indépondant de y_0, et un contrôle bilinéaire $p\in L^\infty(Q_T)$ tels que la solution du système (3.13) est dans $C(0,T,H_0^1(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$ et satisfait $y(.,T)=\theta$ p.p. dans Ω.

Preuve: Soit $z(t)=y(t)-\theta$ et $z_0=y_0-\theta$. D'après l'équation (3.13) on voit que z satisfait

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(t)}{\partial t}-\Delta z(t)=p(t)(z(t)+\theta)+\Delta\theta & \text{dans } Q_T,\\ z=0 & \text{sur } \Sigma_T,\\ z(x,0)=z_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.26}$$

D'apréés [9] on déduit que pour tout $z_0 \in L^2(\Omega), p \in L^\infty(Q_T)$ et θ vérifiant les hypothèses du théorème (3.5) ; le système (3.26) admet une unique solution dans $C(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.
Pour montrer le théorème (3.5), il suffit de montrer que le système (3.26) est contrôlable à zéro, ce qui sera montré en trois étapes.
Étape 01: on va montrer que pour un $T_1 > 0$, donné, il existe $M_1 > 0$ (M_1 dépond de θ mais pas de z_0) tel que la solution de (3.26) satisfait $||z(.,T_1)||_{L^2(\Omega)} \leq M_1$. En effet, supposons que p est une constante et $p < -1$. En multipliant l'équation (3.26) par $z(x,t)$ et en intégrant dans Ω, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega z^2(x,t)dx+2\int_\Omega |\nabla z(x,t)|^2dx = 2\int_\Omega pz^2(x,t)dx+2\int_\Omega p\theta(x)z(x,t)dx+2\int_\Omega \Delta\theta(x)z(x,t)dx$$
$$\leq \int_\Omega (2p+||p||_{L^\infty(Q_T)}+1)z^2(x,t)dx+||p||_{L^\infty(Q_T)}\int_\Omega \theta^2(x)dx+\int_\Omega |\Delta\theta^2(x)|^2dx$$
$$\leq esssup_{Q_t}(2p+||p||_{L^\infty(Q_T)}+1)\int_\Omega z^2(x,t)dx+||p||_{L^\infty(Q_T)}\int_\Omega \theta^2(x)dx+\int_\Omega |\Delta\theta^2(x)|^2dx.$$

où $Q_t = \Omega \times (0,t)$. En utilisant le lemme (3.4) on déduit que :

$$||z(.,t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{(p+1)t}||z(.,0)||^2_{L^2(\Omega)}+\frac{|p|(e^{(p+1)t}-1)}{p+1}\int_\Omega \theta^2(x)dx+\frac{e^{(p+1)t}-1}{p+1}\int_\Omega |\Delta\theta^2(x)|^2dx.$$

Ainsi, pour un $T_1 > 0$ donné, on peut choisir le contrôle constant $p_1 < -1$(p_1 dépend de $z_0, |p_1|$ est suffisamment grand) et $M_1 > 0$ (M_1 dépend de θ mais indépendant de z_0), tel que la solution de(3.26) satisfait $||z(.,T_1)||_{L^2(\Omega)} \leq M_1$.

Étape 02: On va montrer que pour tout $\varepsilon_0 > 0$, on peur trouver un $T_2 > 0$ suffisamment grand et un contrôle p_2 pour lequel la solution de (3.26) satisfait :

$$||z(T_2+1)||_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon_0.$$

Pour $\theta \in W^{2,\infty}(\Omega)$, en utilisant le théorème d'injection de Sobolev, on déduit que $\theta \in C(\overline{\Omega})$. En combinant le dernier résultat et le fait que $\theta > 0$ dans $\overline{\Omega}$, on déduit qu'il existe une constante $\nu > 0$ telle que $\theta \geq \nu > 0$ dans $\overline{\Omega}$. Par conséquent, $0 \leq \frac{\Delta\theta}{\theta} \in L^\infty(\Omega)$, on choisit $p_2 = -\frac{\Delta\theta}{\theta}$ dans (T_1,T_2). Ainsi, le système (3.26) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(t)}{\partial t} - \Delta z(t) + \dfrac{\Delta\theta}{\theta}z(t) = 0 & \text{dans } \Omega \times (T_1,T_2), \\ z = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (T_1,T_2), \\ z(x,T_1) = z(x,T_1) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.27}$$

En multipliant (3.27) par z et en integrant sur Ω, on déduit que :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|z|^2dx + \int_{\Omega} -\Delta z.zdx + \int_{\Omega}\frac{\Delta\theta}{\theta}z^2dx = 0.$$

En utilisant le fait que $\frac{\Delta\theta}{\theta} \geq 0$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|z|^2dx + \lambda\int_{\Omega}z^2dx \leq 0. \tag{3.28}$$

où $\lambda > 0$ est la première valeure propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$. En effet si (λ_i, φ_i) sont les valeurs propres et les fonctions propres de $-\Delta$, en écrivant

$$z = \sum_{i\geq 1}(z, \varphi_i)\varphi_i$$

et donc

$$\begin{aligned} -\Delta z &= \sum_{i\geq 1}(z, \varphi_i)(-\Delta\varphi_i) \\ &= \sum_{i\geq 1}(z, \varphi_i)(\lambda\varphi_i). \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega}(-\Delta z)z &= \sum_{i,j\geq 1}\lambda_i(z, \varphi_i)(z, \varphi_j)\int_{\Omega}\varphi_i\varphi_j \\ &= \sum_{i\geq 1}\lambda_i(z, \varphi_i)^2 \\ &\geq \lambda_1\sum_{i\geq 1}(z, \varphi_i)^2 = \lambda_1\int_{\Omega}z^2 \end{aligned}$$

car les (λ_i) forment une suite croissante de nombres positifs et qui tend vers $+\infty$.
Alors, en intégrant l'énégalité (3.28) sur (T_1, T_2) on aura

$$||z(T_2)||_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda(T_2-T_1)}||z(T_1)||_{L^2(\Omega)} \leq M_1e^{-\lambda(T_2-T1)}. \tag{3.29}$$

En appliquant le même contrôle $p_3 = p_2$ dans (T_2, T_2+1), le système (3.26) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(t)}{\partial t} - \Delta z(t) + \dfrac{\Delta\theta}{\theta}z(t) = 0, & \text{dans } \Omega\times(T_2, T_2+1) \\ z = 0, & \text{sur } \partial\Omega\times(T_2, T_2+1) \\ z(x, T_2) = z(x, T_2), & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.30}$$

En utilisant à nouveau le fait que $\frac{\Delta\theta}{\theta} \geq 0$ et le lemme (3.4) on déduit que :

$$||z(T_2+1||_{L^\infty(\Omega)} \leq C||z(T_1)||_{L^1(\Omega)} \leq Ce^{-\lambda(T_2-T1)}. \tag{3.31}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe un $T_2(\theta) > 0$ suffisamment grand tel que

$$||z(T_2+1||_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon_0.$$

Étape 03: Nous obtenons le résultat de contrôlabilité à zéro, en se basant sur un résultat de contrôlabilité à zéro d'un système linéaire.
On considère le système suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(t)}{\partial t} - \Delta z(t) = p(t)(z(t)+\theta) + \Delta\theta, & \text{dans } \Omega \times (T_2+1, T_2+2) \\ z = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T_2+1, T_2+2) \\ z(x, T_2+1) = z(x, T_2+1), & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.32}$$

Pour $p_4 = \frac{\Delta\theta}{\theta} + p$, le système (3.32) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(t)}{\partial t} - \Delta z(t) + \dfrac{\Delta\theta}{\theta} z(t) = p_4(z(t)+\theta) + \Delta\theta, & \text{dans } \Omega \times (T_2+1, T_2+2) \\ z = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T_2+1, T_2+2) \\ z(x, T_2+1) = z(x, T_2+1), & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.33}$$

On considère le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(t)}{\partial t} - \Delta z(t) + \dfrac{\Delta\theta}{\theta} z(t) = v(t,x), & \text{dans } \Omega \times (T_2+1, T_2+2) \\ z = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T_2+1, T_2+2) \\ z(x, T_2+1) = z(x, T_2+1), & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.34}$$

En utilisant le théorème (2.8). on déduit qu'il existe un contrôle $v \in L^\infty(\Omega\times(T_2+1, T_2+2))$ tel que la solution du système (3.34) satisfait

$$z(., T_2+2) = 0, \ \ p.p. \ \text{ dans } \ \Omega. \tag{3.35}$$

De plus on a:

$$||v||_{L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))} \leq c||z(T_2+1)||_{L^2(\Omega)} \leq c_1||z(T_2+1)||_{L^2(\Omega)} \tag{3.36}$$

où c_1 est indépendante de T_2.
D'autre part, par le principe du maximum, on a

$$||z||_{L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))} \leq ||z(T_2+1)||_{L^\infty(\Omega)} + c_2||\upsilon||_{L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))}, \tag{3.37}$$

où c_2 est indépendante de T_2. De (3.36) et (3.37) on obtient :

$$||z||_{L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))} \leq (1+c_1c_2)||z(T_2+1)||_{L^\infty(\Omega)} \tag{3.38}$$

On prend

$$\varepsilon_0 < \frac{1}{1+c_1c_2} < \frac{\upsilon}{1+c_1c_2}.$$

Pour $\upsilon > 1$, on peut sélectionner $T_2 > 0$ suffisamment grand dans (3.31) tel que

$$||z(T_2+1)||_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon_0.$$

Par conséquent, on a

$$||z||_{L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))} < \upsilon. \tag{3.39}$$

Ensuite, nous pouvons sélectionner le contrôle bilinéaire dans (3.33) par

$$p_4 = \frac{\upsilon}{z+\theta} \ \ p.p. \text{ dans } \ \Omega\times(T_2+1,T_2+2), \tag{3.40}$$

où z est une solution de (3.32). En utilisant $\theta \geq \upsilon > 0$ et (3.39), on déduit que

$$p_4 \in L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))$$

Ainsi, dans l'intervalle de temps $(T_2+1, T_2+2))$, la solution de (3.33) avec le contrôle p_4, i.e., la solution de (3.32) avec le contrôle $p = \frac{-\Delta\theta}{\theta} + p_4$ et la solution de (3.34) avec le contrôle υ sont identiques. Par conséquent, on a $z(.,T_2+2) = 0$, où z est la solution de (3.32) avec $p = \frac{-\Delta\theta}{\theta} + p_4$.
D'après ce qui a été fait dans les étapes 1,2 et 3, on peut choisir $T_2(\theta) > 0$ tel que la solution z de (3.26) avec le contrôle

$$\begin{cases} p_1, & \text{dans } (0,T_1) \\ p_2 = p_3 = -\dfrac{\Delta\theta}{\theta}, & \text{dans } (T_1,T_2+1) \\ -(\dfrac{\Delta\theta}{\theta}) + p_4, & \text{dans } (T_2+1,T_2+2) \end{cases} \tag{3.41}$$

satisfait $z(.,T_2+2) = 0$, où $T(\theta) = T_2+2$ est indépendant de y_0. Ce qui donne le résultat du théorème (3.5). □

Remarque 3.6 [10] On a le même résultat du théorème (3.5), si on prend $\theta < 0$ dans $\overline{\Omega}$. et $\Delta\theta \leq 0$ p.p, dans Ω.

3.4 Contrôlabilité approchée de l'équation des ondes

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = y_{xx}(x,t) + p(x,t)y(x,t) - \vartheta(t)y_t(x,t), & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ y(0,t) = y(1,t) = 0, & \text{sur } (0,T), \\ y(x,0) = y_0, y_t(x,0) = y_1 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.42}$$

où $\Omega = (0,1)$, $p(x,t)$ et $\vartheta(t)$ sont des contrôles, $y(x,t)$ représente la solution de (3.42). Le théorème suivant donne un résultat de contrôlabilité approchée pour le système (3.42).

Théorème 3.7 [8] On considère $(y_0, y_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), y_0 \neq 0, y_0 \geq 0$ *p.p.* dans Ω et $\theta \in H_0^1(\Omega)$ un état désiré, où $\theta \geq 0$ *p.p.* dans Ω. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T = T(\varepsilon, y_0, y_1, \theta)$, un contrôle statique $p \in C^1(\Omega)$ et un contrôle $\vartheta > 0$ tels que :

$$||(y(.,T), y_t(.,T)) - (\theta, 0)||_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq \varepsilon. \tag{3.43}$$

Preuve: On considère $p \in L^\infty(\Omega)$. Soient λ_k et $\varphi_k, k = 1, ...,$ respectivement les valeurs et les fonctions propres orthonormales dans $L^2(\Omega)$ du problème

$$\varphi_{xx} + p(x)\varphi = \lambda\varphi, \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.44}$$

On a (voir [8])

$$||p||_{L^\infty(\Omega)} \geq \lambda_1 > \lambda_2 > ... \text{ et } \quad \lambda_k \to -\infty. \tag{3.45}$$

Le plan de la preuve est comme suit :
1) On va montrer que pour tout état désiré positif $\theta \in H_0^1(\Omega)$, il existe $\overline{p}(x)$ tel que

$$\theta_{xx} + \overline{p}(x)\theta = 0, x \in \Omega, \tag{3.46}$$

et $\frac{\theta}{||\theta||_{L^2(\Omega)}}$ est la première fonction propre, associée à la plus grande valeur propre (avec $\overline{p}$ au lieu de p dans (3.44)) i.e.,

$$\varphi_1(x) = \frac{\theta(x)}{||\theta||_{L^2(\Omega)}}. \tag{3.47}$$

2) La solution de (3.42) sera représenté par les séries (3.49)-(3.54) ci dessous, nous allons montrer que la couple de contrôle (p, ϑ) peut être sélectionné sous la forme :

$$p(x) = \overline{p}(x) + a, \vartheta(t) = \vartheta > 0, \tag{3.48}$$

où a est une constante choisie telle que le premier terme dans (3.49)-(3.54) converge vers l'état désiré $(\theta, 0)$ quand $t \to +\infty$, et tel que la constante positive ϑ sera sélectionnée de sorte que le reste de la série (3.49)-(3.54) converge vers zéro.
La preuve du théorème (3.7) sera faite en quatre étapes.

Étape 1. Le système (3.42) admet une unique solution dans $C(0,T;H_0^1(\Omega))\cap C^1(0,T;L^2(\Omega))$ pour tout $T > 0$, .
On considère $\vartheta \in L^\infty(\Omega), \vartheta > 0$ dans (3.42). Alors, la solution de (3.42) s'écrit :

$$y(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\varphi_k(x),\ x \in \Omega,\ t > 0,$$

où

$$\frac{d^2 c_k(t)}{dt^2} = \lambda_k c_k(t) - \vartheta \frac{dc_k(t)}{dt},\ t > 0, \tag{3.49}$$

et

$$c_k(0) = \int_\Omega y_0(x)\varphi_k(x)dx,\ \frac{dc_k(0)}{dt} = \int_\Omega y_1(x)\varphi_k(x)dx. \tag{3.50}$$

La résolution du système d'équations différentielles ordinaires (3.49) donne :
- Dans le cas $\vartheta^2 + 4\lambda_k = 0$,

$$c_k(t) = e^{\frac{\vartheta}{2}} c_k(0) + t\left(\frac{dc_k(0)}{dt} + \frac{c_k(0)\vartheta}{2}\right) e^{-\frac{\vartheta}{2}} t. \tag{3.51}$$

- Pour $\vartheta^2 + 4\lambda_k > 0$,

$$\begin{aligned} c_k &= e^{(-\frac{\vartheta}{2}+\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k})t} \times \frac{\frac{dc_k(0)}{dt} - c_k(0)(-\frac{\vartheta}{2} - \sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k})}{\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k}} \\ &+ e^{(-\frac{\vartheta}{2}\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k})t} \times \frac{\frac{dc_k(0)}{dt} - c_k(0)(-\frac{\vartheta}{2} + \sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k})}{\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k}} \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned} \frac{dc_k(0)}{dt} &= e^{(-\frac{\vartheta}{2}+\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k})t}\left(-\frac{\vartheta}{2} + \sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k}\right) \\ &\times \frac{\frac{dc_k(0)}{dt} - c_k(0)(-\frac{\vartheta}{2} - \sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k})}{\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k}} \\ &+ e^{(-\frac{\vartheta}{2}-\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k})t}\left(-\frac{-\vartheta}{2} - \sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k}\right) \\ &\times \frac{\frac{-dc_k(0)}{dt} + c_k(0)(-\frac{\vartheta}{2} + \sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k})}{\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k}} \end{aligned} \tag{3.53}$$

- Dans le cas où $\vartheta^2 + 4\lambda_k < 0$,

$$c_k(t) = c_k(0)e^{-\frac{\vartheta}{2}t} cos\left(t\sqrt{-\frac{\vartheta^2}{4} - \lambda_k}\right) + e^{-\frac{\vartheta}{2}t} sin\left(t\sqrt{-\frac{\vartheta^2}{4} - \lambda_k}\right)$$

$$\times \frac{\frac{dc_k(0)}{dt} + \vartheta c_k(0)/2}{\sqrt{\vartheta^2/4 + \lambda_k}}$$

$$\frac{dc_k(t)}{dt} = c_k(0)e^{-\frac{\vartheta}{2}t} - \frac{\vartheta}{2}cos\left(t\sqrt{-\frac{\vartheta^2}{4} - \lambda_k}\right) - c_k(0)e^{-\frac{\vartheta}{2}t}\left(\sqrt{-\frac{\vartheta^2}{4} - \lambda_k}\right)$$

$$\times sin\left(t\sqrt{-\frac{\vartheta^2}{4} - \lambda_k}\right) - \frac{\vartheta}{2}sin\left(t\sqrt{-\frac{\vartheta^2}{4} - \lambda_k}\right) \times$$

$$\frac{\frac{dc_k(0)}{dt} + \vartheta c_k(0)/2}{\sqrt{\vartheta^2/4 + \lambda_k}} + e^{-\frac{\vartheta}{2}t}\left(\frac{dc_k(0)}{dt} + \vartheta c_k(0)/2\right)cos\left(t\sqrt{-\frac{\vartheta^2}{4} - \lambda_k}\right).$$

Rappelons que la norme suivante :

$$||\psi||_p = \left(\int_\Omega (\psi_x^2 + (-p+\nu)\psi^2)dx\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}(-\lambda_k + \nu)\left(\int_\Omega \psi(x)\varphi_k(x)dx\right)^2\right)^{1/2} \tag{3.54}$$

où ν est un nombre supérieur à $||p||_{L^\infty(\Omega)}$, est équivalent à la norme standard dans $H_0^1(\Omega)$ (voir [8]). Par conséquent, les séries (3.49)-(3.54) converge dans $C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$ pour tout $T > 0$.

Étape 2. On considère un état initial $(y_0, y_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), y_0 \neq 0, y_0 \geq 0$ dans Ω. On choisit

$$\overline{p}(x) = -\frac{\theta_{xx}(x)}{\theta(x)}, x \in \Omega. \tag{3.55}$$

Pour montrer le théorème il suffit de considérer tout ensemble non négatifs θ dense à tout ensemble des éléments non négatifs de $H_0^1(\Omega)$. Pour cela, il suffit de consédérer

1. $\theta \neq 0, \theta \geq 0, \theta \in C^1([0,1])$.
2. $\theta(0) = \theta(1) = 0$.
3. $\theta \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset C^1([0,1])$.
4. $\theta > 0$ dans Ω et $(\theta_{xx}/\theta) \in L^\infty(\Omega)$.

Notons que les valeurs propres et les fonctions propres orthonormales associées à $p(x) = \overline{p}(x)$ sont respectivement $\lambda_1 > \lambda_2 > ...$ et $\varphi_1, \varphi_2, ...$
Alors, les valeures propres données par (3.44)-(3.54) correspendant à $p(x) = \overline{p}(x) + a$ sont données par $\lambda_1 + a, \lambda_2 + a, ...$, tandis que les fonction propres restent les mêmes.
Notons que (3.55) implique que $\lambda_1 = 0$. D'autre part, on a :

$$c_1(0) = \int_\Omega y_0(x)\varphi_1(x)dx > 0,$$

puisque y_0 est positif et non identiquement nul.
Considérons le couple de contrôle de la forme $(\overline{p}+a,\vartheta)$ comme dans (3.48) , où a et ϑ sont des constantes.
Soit

$$\vartheta=\frac{\sqrt{-2\lambda_2}}{2}\in(0,\sqrt{-\lambda_2}), \tag{3.56}$$

cette valeur de ϑ restera la même jusqu'à la fin de la preuve du théorème.
Supposons que

$$a\in(-\vartheta^2/8,\vartheta^2/8). \tag{3.57}$$

Pour un tel couple (ϑ,a), on a

$$\frac{\vartheta^2}{4}+\lambda_1+a=\frac{\vartheta^2}{4}+a>0 \;\text{ et }\; \frac{\vartheta^2}{4}+\lambda_k+a<0 \;\text{ pour }\; k=2,... \tag{3.58}$$

On sélectionne

$$\nu=||\overline{p}||_{L^\infty(\Omega)}+\vartheta^2, \tag{3.59}$$

Ce qui garantit que la norme $||.||_{\overline{p}}$ soit équivalente à la norme standard dans $H_0^1(\Omega)$ pour tout a satisfaisant (3.57) .

Étape 3. Évaluation de $y(.,t)-\theta$ et $y_t(.,t)$:
On a

$$\begin{aligned}
||y(.,t)-\theta||_p^2 \le\; & 2(-a+\nu)\left(e^{(-\frac{\vartheta}{2}+\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k})t}\frac{\frac{dc_1(0)}{dt}+c_1(0)(-\frac{\vartheta}{2}+\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k})}{\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k}}-\int_\Omega\theta_1(x)\varphi_1(x)dx\right)^2\\
&+2(-a+\nu)\left(c_k=e^{(-\frac{\vartheta}{2}+\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k})t}\frac{-\frac{dc_1(0)}{dt}+c_1(0)(-\frac{\vartheta}{2}+\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k})}{\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k}}\right)^2\\
&\sum_{k=2}^{\infty}2(-\lambda_k-a+\nu)\left(c_k(0)e^{\frac{-\vartheta}{2}}cos\left(t\sqrt{\vartheta^2/4-\lambda_k-a}\right)\right)^2\\
&\sum_{k=2}^{\infty}2(-\lambda_k-a+\nu)\left(e^{\frac{-\vartheta}{2}}sin\left(t\sqrt{\vartheta^2/4-\lambda_k-a}\right)\frac{\frac{dc_1(0)}{dt}+\vartheta c_k(0)/2}{\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k-a}}\right)^2.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

En utilisant (3.58)-(3.59), pour $k=2,...$, on obtient

$$0<-\lambda_k-a+\nu\le-\lambda_k+||\overline{p}||_{L^\infty(\Omega)}+\frac{9\vartheta^2}{8},$$

$$0<\frac{3\vartheta^2}{8}-\lambda_2<\frac{3\vartheta^2}{8}-\lambda_2<-\vartheta^2/4-\lambda_k-a,$$

et

$$0 < -a + \nu \leq ||\overline{p}||_{L^\infty(\Omega)} + \frac{9\vartheta^2}{8}.$$

D'autre part, en utilisant ces estimations, on obtient à partir de (3.60) l'estimation :

$$||y(.,t) - \theta||_p^2 \leq (||\overline{p}||_{L^\infty(\Omega)} + \frac{9\vartheta^2}{8})\times$$

$$\left(e^{(-\frac{\vartheta}{2}+\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k})t} \frac{\frac{dc_1(0)}{dt} + c_1(0)(-\frac{\vartheta}{2} + \sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k})}{\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k}} - \int_\Omega \theta_1(x)\varphi_1(x)dx \right)^2$$

$$c_1(\vartheta)e^{-\vartheta t}||(y_0, y_1||_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}.$$

où $c_1(\vartheta)$ est une constate indépendante de a. De même manière, en utilisant les formules (3.49)-(3.54), on peut obtenir l'estimation :

$$||y(.,t)||_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2\left(e^{(-\frac{\vartheta}{2}+\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k})t} \left(-\frac{\vartheta}{2} + \sqrt{\vartheta^2/4+a} \right) \frac{\frac{dc_1(0)}{dt} + c_1(0)(-\frac{\vartheta}{2} + \sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k})}{\sqrt{\vartheta^2/4+\lambda_k}} \right)^2$$

$$c_2(\vartheta)e^{-\vartheta t}||(y_0, y_1||_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}.$$

où $c_2(\vartheta)$ est une constante indépendante de a.

Étape 4. On pose $\beta_1(a) = -\frac{\vartheta}{2} + \sqrt{\vartheta^2/4+a}, \beta_2(a) = \frac{\frac{v}{2}+\sqrt{\vartheta^2/4+a}}{\sqrt{\vartheta^2+4a}}$.
Alors

$$\lim \beta_1(a) = 0, \lim_{a\to 0^+} \beta_2(a) = 1. \tag{3.61}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} ||y(.,t) - \theta_1||_p^2 + ||y(.,t)||_{L^2(\Omega)}^2 &\leq 2(||\overline{p}||_{L^\infty(\Omega)} + \frac{5\vartheta^2}{4} \\ &\times \left(e^{\beta_1(a)t}\left(\frac{\frac{dc_1(0)}{dt}}{\sqrt{\vartheta^2+4a}} c_1(0)\beta_2(a) \right) - \int_\Omega \theta_1(x)\varphi_1(x)dx \right)^2 \\ &\left(e^{\beta_1(a)t}\beta_1(a)\left(\frac{\frac{dc_1(0)}{dt}}{\sqrt{\vartheta^2+4a}} c_1(0)\beta_2(a) \right) \right)^2 + \left(C_1(\vartheta) + C_2(\vartheta)\right) e^{-\vartheta t}||(y_0, y_1||_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \tag{3.62}$$

On considère

$$t_*(a) = \frac{1}{\beta_1(a)} \left(\ln \frac{\int_\Omega \theta_1(x)\varphi_1(x)dx}{\frac{\frac{dc_1(0)}{dt}}{\sqrt{\vartheta^2+4a}} + c_1(0)\beta_2(a)} \right),$$

on a alors

$$\lim_{a\to 0^+} t_*(a) = +\infty$$

et

$$e^{\beta_1(a)t_*(a)}\left(\frac{\frac{dc_1(0)}{dt}}{\sqrt{\vartheta^2+4a}}+c_1(0)\beta_2(a)\right)-\int_\Omega \theta_1(x)\varphi_1(x)dx=0,$$

Par conséquent le premier terme à droite dans (3.62) est nul pour $t=t_*(a)$. Pour le second terme à droite dans (3.62) , on a :

$$\lim_{a\to 0^+}\left(e^{\beta_1(a)t_*(a)}\left(\frac{\frac{dc_1(0)}{dt}}{\sqrt{\vartheta^2+4a}}+c_1(0)\beta_2(a)\right)\right)^2=0.$$

Par conséquent, $\lim\limits_{a\to 0^+}\left(||y(.,t_*(a))-\theta||_p^2+||y(.,t_*(a))-\theta||_{L^2(\Omega)}^2\right)=0$, ce qui donne le résultat désiré. $\square$

Références bibliographiques

[1] J.M. Ball, J.E. Marsden et M. Slemrod. Controllability for distributed bilinear systems. *SIAM J. Control and Optim.,* vol.**20**, No. **4**, P 575-597. July, (1982).

[2] V. Barbu. Analysis and control of nonlinear infnite dimensional system. *Academic Press, Boston,* (1993).

[3] P. Cannarsa et G. Floridia. Approximate multiplicative controllability for degenerate parabolic problems with Robin boundary conditions,. *Communications in Applied and Industrial Mathematics,* (2011).

[4] E. F. Cara et E Zuazua. Null and approximate controllability for weakly blowing-up semilinear heat equations, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.***17**, 583-616, (2000).

[5] M. Chen. Exponential stabilization of a constrained bilinear system, *Automatica.* **34**, P. 989-992, (1998).

[6] C. Fabre, J.P. Puel et E. Zuazua. Approximate controllability for the semilinear heat equations.*Proceeding of the Royal Society of Edinburgh,* **125A**, P 31-61, (1995).

[7] K.J. Engel et R. Nagel. One parameter semigroups for linear evolution equations, *in Graduate in Mathematics,* vol.**194**, Springer-Verlag, New York, (1999).

[8] A. Y. Khapalov. Controllability of partial différential equations governed by multiplicative controls,*SpringerVerlag, Berlin Heidelberg,* (2010).

[9] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov et N.N. Uralceva. Linear and quasilinear equations of parabolic type, *Transl. Math. Mono.,* vol. **23**, AMS, Providence, RI, (1968).

[10] P. Lin, Z. Zhou et H. Gao. Exact controllability of the parabolic system with bilinear control. *Applied Mathematics Letters.* **19**,P 568-575, (2006).

[11] Lionel Rosier. A survey of controllability and stabilization results for partial différential equations. *RS-JESA.* **41**, P 365-411, (2007).

[12] E. Zuazua, Exact controllability for semilinear wave equations in one space dimensional. *Annales e l'I.H.P section C,* **10**, P 109-129, (1993).

[13] A.Y. Khapalov. Controllability of the semilinear parabolic equation governed by a multiplicative control in the reaction term : a qualitative approach, *SIAM J. Control Optim.* **41**, 1886-1990, (2003).

[14] P. Lin, Z. Zhou et H. Gao. Exact controllability of the parabolic system with bilinear control. *Applied Mathematics Letters.* **19**, 568-575, (2006).

[15] A. EL Jai, M. C Simon, E. Zerrik et A. J. Pritchard. Regional controllability of distributed parameter systems. *International Journal of Control,* **62 (6)** : 1351-1365, (1995).

[16] A. EL Jai et E. Zerrik. Regional observability of a thermal process. *Automatic Control,* **40, (4)** : 518-521, (1995).

[17] A. Y. Khapalov. Controllability of partial differential equations governed by multiplicative controls, Springer-Verlag,*Berlin Heidelberg,* (2010).

[18] Z. Zhou, P. Lin et H. Gao. Some results on exact controllability of the parabolic system taiwanese *journal of mathematics Vol.* **12**, No. 3, pp. 635-648, June, (2008).

[19] M. Ouzahra, Controllability of the wave equation with bilinear controls, *European Journal of Control Volume* **20**, Pages 57-63, Issue 2, March (2014).

[20] K. Ztot, E. H. Zerrik et H. Bourray. Regional control problem for distributed bilinear systems : approach and simulations. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.,* Vol. **21**, No. 3, 499-508, (2011).

[21] J.L. Lions. Contrôlabilité exacte, perturbation et stabilisation des systèmes distribues. *Masson, Paris.* (1988).

[22] H. Brezis; Analyze fonctionnelle. Théorie et application.

3.5 Conclusion

Dans cette mémoire, on a abordé le problème de contrôlabilité et de certaines classes de systèmes bilinéaires distribués.
Nous avons étudié le problème de contrôlabilité exacte de l'équation de la chaleur ainsi que l'équation d'onde avec et sans amortissement, en utilisant des contrôles bilinéaires explicites.