MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Hamid BELGACEM

Transfert de la propriété du majorant minimal par la fonction racine .

soutenu publiquement le jour Mois Année devant le jury composé de :

Président :	Sidi Mohamed BAHRI	Prof .U. Mostaganem
Examinateur :	Mme SAIDANI	M.A.A . U. Mostaganem
Encadreur :	Mohand OULD ALI	Prof .U. Mostaganem

Année Universitaire : 2018 / 2019

M
A
S
T
E
R

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage, la patience et la volent durant toutes mes années d'études. Mes sincères remerciements s'adressent à mon encadreur Mr.OULD ALI.

Qui m'a fait l'honneur de m'encadrer en Master et de juger ce travail. Un grand merci pour votre disponibilité, votre implication et vos judicieux conseils. Veuillez trouver ici l'expression de ma profonde et sincère reconnaissance.

Je voudrais remercier les membres du jury d'avoir bien voulu présider mon travail, et M. et Mme ABLOUI pour leur aide et conseils .

Mes remerciements s'adressent également à tous mes enseignant(e)s en Licence et en Master.

Je tiens à remercier particulièrement,Ilyes,Aziz et Nour houda et Eman pour tous les conseils et pour toutes les corrections effectuées. Je remercie infiniment tous les étudiants de ma promotion et en particulier de ma spécialité Modélisation Contrôle et Optimisation qui m'ont tant soutenu et encouragé.

Enfin un grand merci à ma famille BELGACEM et surtout mon père et ma mère pour avoir aider à mener à terme ce travail.

A ma famille et mes amies.

Table des matières

Index des notations

$\mathbb{R}$	:	corps des nombres réels.
$\mathbb{C}$	:	corps des nombres complexes.
H	:	espace de Hilbert.
A^*	:	opérateur adjoint.

Introduction

En analyse fonctionnelle,la classe des opérateur positifs est un outil essentiel à l'etude de différents problémes de la théorie des opérateurs .

Cette notion d'opérateurs positifs est définie par une relation d'ordre partielle sur l'ensemble des opérateurs bornés , ce qui nous raméne à l'etude du concept du majorant .

Dans cette optique beaucoup de travaux on été menés, nous citerons :

- R.G. Douglas.[3] *qui a montré l'existence d'une étroite relation entre les notions de majoration, factorisation et l'inclusion des images.*

- W. N.Anderson,Jr.etG.E.Trapp,[5] *qui ont démontré l'existence de l'opérateur L(A) qui est le suprémum de tous les opérateurs positifs inferieurs à A dans l'image est dans le sous éspace vectoriel fixé S .*

- A. Aslanov,[7] *qui a montré l'existence du majorant minimal de deux opérateurs positifs.*

Dans ce travail on s'intéresse au Transfert de la propriété du majorant minimal par la fonction racine .Autrement on se pose la question suivante : Si T est un majorant minimal de deux opérateurs (A,B), est -ce que $\sqrt{T}$ est un majorant minimal de deux opérateurs $(\sqrt{A}, \sqrt{B})$?

Notre manuscrit se compose de quatre chapitres dont le contenu est comme suit :

- Le chapitre 1 est consacré aux rappels des différentes notions mathématiques dont on a besoin : Produit scalaire ; Norme ; espace de Hilbert .

- Le chapitre 2 est réservé aux opérateurs linéaires bornées sur les espaces de Hilbert.

- Le chapitre 3 est réservé à l'étude des tenseurs, où on a montré l'equivalence entre les tenseurs et les opérateurs de rang 1 puis on a donné quelques propriétés. .

- Le chapitre 4 donne la réponse à notre question ,où des conditions suffisantes sont données .

Chapitre 1

Rappel de notions de base

1 Produit scalaire

Définition 1.1

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, Un produit scalaire sur E noté < .,. > est une forme sesquilinéaire, hermitienne,définie positive :

$$\begin{array}{rcl} h : \mathrm{E} \times \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (u, v) & \longrightarrow & h(u, v) = \langle u, v \rangle \end{array}$$

Pour tout u,v ;w∈ $\mathbb{E}, \alpha, \beta$, on a

a) Sesquilinéaire :

$$h(\alpha u + \beta v, w) = \alpha h(u, w) + \beta h(v, w)$$

$$h(w, \alpha u + \beta v) = \overline{\alpha} h(w, u) + \overline{\beta} h(w, v)$$

b) Hermitienne :

$$h(u, v) = \overline{h(v, u)}$$

c) Définie positive

$$h(u, v) \geq 0$$

et

$$h(u, v) = 0_{\mathrm{E}} \Longleftrightarrow u = 0_{\mathrm{E}}$$

2 Norme

Définition 1.2 *on appelle norme sur l'espace vectoriel E noté $\|.\|_{\mathrm{E}}$, toute application de E dans $\mathbb{R}^{+}$ telle que :*

a) $\forall u \in \mathrm{E} : \|u\|_{\mathrm{E}} = 0 \Longleftrightarrow u = 0_{\mathrm{E}}$

b) $\forall u \in \mathrm{E}, \forall \alpha \in \mathbb{C} : \|\alpha u\|_{\mathrm{E}} = |\alpha| \|u\|_{\mathrm{E}}$

c) $\forall u, v \in \mathrm{E} : \|u + v\|_{\mathrm{E}} \leq \|u\|_{\mathrm{E}} + \|v\|_{\mathrm{E}}$

Remarque 1.1

Pour tout produit scalaire sur E ,on associe la norme :

$$\|.\|_E = \sqrt{\lessdot \gtrdot_E}$$

Définition 1.3

Soient E un $\mathbb{C}$*-espace vectoriel muni d'une norme* $\|.\|_E$ *et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de vecteurs dans E . la suite* $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *est dite de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \quad \varepsilon\rangle 0 \qquad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad \forall n, m \geq N_0 \quad : \quad \|x_n - x_m\|_E \langle \varepsilon$$

Remarque 1.2

Si toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ *converge dans E pour* $\|.\|_E$ *, alors E est dit complet et il est appelé espace de Banach*

Définition 1.4

Un $\mathbb{C}$ *- espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace de Hilbert si et seulement si il est complet.*

Théorème 1.1 *(Cauchy Shwartz)*

Soit(E,$\lessdot, \gtrdot$*) un espace préhilbertien, on a alors*

$$|\langle u, v\rangle|^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

On a l'égalité si et seulment si u et v sont liés.

Définition 1.5

On appelle espace de Hilbert noté H tout espace préhilbertien (H,$\lessdot, \gtrdot$*)complet pour la norme définie par le produit scalaire .*

3 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.6
Soit H un espace de Hilbert et soit $T : H \longmapsto H$ *une application :*

a) *T est linéaire ssi :*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x, y \in H, T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

b) *T est continue en* $x_0 \in H$ *ssi :*

$$\forall \epsilon \rangle 0, \exists \delta_0 \rangle 0, \forall x \in H, \|x - x_0\|_H \langle \delta_0 \Longrightarrow \|T(x) - T(x_0)\|_H \langle \epsilon$$

Définition 1.7
Soit H un espace de Hilbert et soit $T : H \longmapsto H$ *une application linéaire , T est continue sur H si elle est continue en tout* $x \in H$.

Proposition 1.1
Soit $T : H \longmapsto H$ *une application linéaire et Soit H un* $\mathbb{C}$ *- espace de Hilbert , alors les assertions suivants sont équivalentes :*

1) *T est bornée.*
2) *T est continue sur tout H.*
3) *T est continue en* $x = 0_H$.

Définition 1.8
Soient H_1, H_2 *deux espaces de Hilbert , Toute application linéaire et continue* $T : H_1 \longmapsto H_2$ *est appelé un Opérateur .*

On considère les notations suivantes :

- On note $£(H_1, H_2)$ *l'ensemble des Opérateurs linéaire définis de* H_1 *dans* H_2
$£(H_1, H_2)$ *est un espace vectoriel.*

- Si $H_1 = H_2$ *alors* $£(H_1, H_2) = £(H)$

-On note $\ker T$ *, le noyau de l'opérateur* $T \in £(H_1, H_2)$

$$\ker T = \{x \in H_1 : Tx = 0_{H_2}\}$$

-Im T est l'image de H_1 *par T c-à-d :*

$$ImT = \{y \in H_2 : y = T(x), x \in H_1\}$$

Définition 1.9
Soit $A \in £(H_1, H_2)$ *, A est dit borné si :*

$$\sup_{\|x\|_{H_1} \leq 1} \|A(x)\|_{H_2} \quad \langle \quad \infty$$

L'ensemble des opérateurs bornés de H_1 *dans* H_2 *est noté* $B(H_1, H_2)$ *ou B(H) si* $H_1 = H_2$.

Proposition 1.2
Soit $A \in £(H_1, H_2)$ *, A est borné si :*

$$\exists M \geq 0 \quad ; \quad \|A(x)\|_{H_2} \leq M\|x\|_{H_1}, \forall x \in H_1$$

Preuve
- Supposons que A est borné alors :

$$\sup_{\|x\|_{H_1} \leq 1} \|A(x)\|_{H_2} \langle \infty \Longrightarrow, \forall x \in H_1 : \|x\|_{H_1} \leq 1, \exists M \geq 0 \|A(x)\|_{H_2} \leq M \quad < \quad \infty$$

Soit $x \in H_1$ tel que $x \neq 0$ et $v = \frac{x}{\|x\|_{H_1}}$. comme$\|v\| = 1$, alors :

$$\exists M \geq 0 \|A(v)\|_{H_2} = \frac{x}{\|x\|_{H_1}} \leq M \quad \langle \quad \infty$$

D'où :

$$\forall x \in H_1/\{0\}, \exists M > 0 \|A(v)\|_{H_2} \leq M\|x\|_{H_1}$$

Et ceci est toujours vérifié pour $x = 0$ car $\|A(0)\| = 0 \leq M\|0\|_{H_1}$ $\forall M > 0$
- Réciproquement si pour tout $x \in H_1$ il existe $M > 0$, tel que :
$\|A(x)\|_{H_2} \leq M\|x\|$, alors pour $x \in \{H_1 : \|x\| \leq 1\}$ on a :

$$\|A(x)\|_{H_2} \leq M \langle \infty \Longrightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|_{H_2} \leq \sup_{\|x\| \leq 1} M \langle \infty$$

Donc A est borné.

4 Norme de B(H)

On défnit la norme de B(H) par :
$\|T\|_{op} = \|T\|_{B(H)}$ tel que :

$$\|T\|_{op} = \sup\{\|T(x)\|_H, \forall x \in H, \|x\|_H \leq 1\}$$

$$= \inf\{k \geq 0 \|T(x)\|_H \leq k\|x\|_H, \forall x \in H\}$$
$$= \sup\{\frac{\|T(x)\|_H}{\|x\|_H}, \forall x \in H - \{0_H\}\}$$

A partir de cette définition , on déduit que pour tout $x \in H : \|T(x)\|_H \leq \|T\|_{B(H)}.\|x\|_H$

5 Adjoint d'un opérateur

Définition 1.10

Soient H_1 *et* H_2 *deux espace de Hilbert et* $A \in B(H_1, H_2)$ *alors il existe un unique opérateur noté* A^* *tel que* $A^* \in B(H_1, H_2)$ *appelé adjoint de A ,qui vérifie la relation suivante :*

$$\forall x \in H_1, \forall y \in H_2 : \langle A(x), y \rangle = \langle x, A^*(y) \rangle$$

- Si $A^* = A$ on dit que A est auto-adjoint.

Définition 1.11

Soient X;Y deux espaces de Hilbert et $(A_n)_{n\in N}$ *une suite d'opérateurs dans B(X,Y) , on définit les trois types de convergence suivants :*

1) *Convergence en norme :*
   $(A_n)_{n\in N}$ *converge en norme vers l'opérateur A si et seulement si :*

$$\|A_n - A\|_{B(X,Y)} \longrightarrow_{n\longmapsto\infty} 0 \Longleftrightarrow : A_n \rightrightarrows A$$

2) *Convergence forte :*
   $(A_n)_{n\in N}$ *converge fortement vers l'opérateur A si et seulement si :*

$$\|A_n(x) - A(x)\|_Y \longrightarrow_{n\longmapsto\infty} 0 \Longleftrightarrow : A_n \longrightarrow A$$

3) *Convergence faible :*
   $(A_n)_{n\in N}$ *converge faiblement vers l'opérateur A si et seulement si :*

$$\langle A_n(x), y \rangle \longrightarrow \langle A(x), y \rangle \forall x \in X, \forall y \in Y \Longleftrightarrow : A_n \longrightarrow A$$

Définition 1.12

Un opérateur $A \in B(H)$ *est dit de rang* $n \in N$ *si et seulement si dim Im(A) = n.*

6 Système orthogonal et système orthonormal

Définition 1.13

Soit $(e_i)_{i\in J}$ *une famille de vecteurs de l'espace de Hilbert H :*

1) *On dit que* $(e_i)_{i\in J}$ *est une famille orthogonale si et seulement :*

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall i, j \in J, i \neq j$$

2) *On dit que le système est orthonormal si*

$$\begin{cases} \langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall i, j \in J, i \neq j \\ \langle e_i, e_j \rangle = 1, \forall i, j \in J, i = j. \end{cases} \tag{1.1}$$

Chapitre 2

Opérateurs positifs

Définition 2.1
Un opérateur $A \in B(H)$ *est dit positif si et seulement si il est auto-adjoint et pour tout x dans H on a :*

$$\langle A(x), x \rangle \geq 0$$

Remarque 2.1
Si A est un opérateur positif , alors pour tout x dans H on a :

$$\forall x \in H \quad , \quad \langle A(x), x \rangle \in \mathbb{R}. \quad car \quad ; \quad \langle A(x), x \rangle = \langle x, A^*(x) \rangle = \langle x, A(x) \rangle = \overline{\langle A(x), x \rangle}$$

1 Somme finie d'opérateurs positifs

Lemme 2.1
Soit $\{A_n\}_{0 \leq n \leq N_0}$ *une famille finie d'opérateurs positifs sur H. Alors :*

$$A = \sum_{n=0}^{n=N_0} A_n$$

est un opérateur positif

Preuve
Soit $n \in \{0, 1, ..., N_0\}$. Comme les opérateurs A_n sont positifs on a :

$$A_n^* = A_n$$

$$\langle A_n(x), x \rangle \geq 0, \forall x \in H$$

Donc :

$$A^* = (\sum_{n=0}^{n=N_0} A_n)^* = \sum_{n=0}^{n=N_0} A_n^* = \sum_{n=0}^{n=N_0} A_n = A$$

et

$$\langle A(x), x\rangle = \langle \sum_{n=0}^{n=N_0} A_n(x), x\rangle = \sum_{n=0}^{n=N_0} \langle A_n(x), x\rangle \geq 0, \forall x \in H$$

D'où A est un opérateur positif.

Définition 2.2
Soient A et B deux opérateurs positifs sur H, on dit que A est inférieur ou égal à B (noté $A \leq B$*) ou B est un majorant de A si et seulement si :*

$$\langle (B - A)(x), x\rangle \geq 0 \quad , \quad \forall x \in H$$

Remarque 2.2
La relation $(\leq)$ *est une relation d'ordre partiel sur B(H)*

Définition 2.3
Soient T et B deux opérateurs positifs tels que $B \leq T$.
T est dit majorant minimal de B si et seulement si :

$$\forall C \in B(H) \qquad B \leq C \Longrightarrow T \leq C$$

2 Propriétés

Proposition 2.1
Soient A, B et C trois opérateurs positifs sur H. Alors on a les propriétés suivantes :

(1) $A \geq 0, B \geq 0 \Longrightarrow A - B \leq A$

(2) $A \leq B \Longrightarrow \|A\|_{B(H)} \leq \|B\|_{B(H)}$

(3) $B \geq 0 \Longrightarrow B^n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$

(4) $\forall n \in \mathbb{N}^*$:
$C \leq Id \Longrightarrow C^n \leq Id$

(5) $C^2 \leq Id \Longrightarrow C \leq Id$

(6) Si A est inversible,alors A^{-1} *est positif.*

Preuve.

(1) soit $x \in \mathrm{H}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} \geq 0, \mathrm{B} \geq 0 &\Longleftrightarrow \langle \mathrm{A}x, x\rangle \geq 0 et \langle \mathrm{B}x, x\rangle \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \langle \mathrm{A}x, x\rangle \geq 0 et - \langle \mathrm{B}x, x\rangle \leq 0 \\
&\Longrightarrow \langle \mathrm{A}x, x\rangle - \langle \mathrm{B}x, x\rangle \leq \langle \mathrm{A}x, x\rangle \\
&\Longrightarrow \langle (\mathrm{A}-\mathrm{B})(x), x\rangle \leq \langle \mathrm{A}x, x\rangle \\
&\Longleftrightarrow \langle [\mathrm{A}-(\mathrm{A}-\mathrm{B})](x), x\rangle \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{A}-\mathrm{B} \leq \mathrm{A}.
\end{aligned}$$

(2) Soit $x \in \mathrm{H}$, on a donc :

$$0 \leq \mathrm{A} \leq \mathrm{B} \Longleftrightarrow 0 \leq \langle \mathrm{A}(x), x\rangle \leq \langle \mathrm{B}(x), x\rangle \leq \|\mathrm{B}\|_{\mathrm{B(H)}} \times \|x\|^2$$

Alors :

$$\begin{aligned}
|\langle \mathrm{A}(x), x\rangle|^2 &\leq |\langle \mathrm{B}(x), x\rangle|^2 \\
&\leq \|\mathrm{B}\|^2_{\mathrm{B(H)}} \times \|x\|^2
\end{aligned}$$

D'où :

$$\sup_{\|\mathrm{X}\|\leq 1} \{|\langle \mathrm{A}(x), x\rangle|^2\} \leq \|\mathrm{B}\|^2_{\mathrm{B(H)}}$$

En utilisant l'inégalité ci-dessous qu'on démontrera dans la preuve du lemme (2.3) (équation (2.4)) :

$$\|\mathrm{A}\|^2_{\mathrm{B(H)}} \leq \{\sup_{\|\mathrm{X}\|\leq 1} \langle \mathrm{A}(x), x\rangle\}^2$$

Et comme :

$$\{\sup_{\|\mathrm{X}\|\leq 1} \langle \mathrm{A}(x), x\rangle\}^2 \leq \sup_{\|\mathrm{X}\|\leq 1} \{|\langle \mathrm{A}(x), x\rangle|^2\}$$

On déduit que :

$$\|\mathrm{A}\|^2_{\mathrm{B(H)}} \leq \|\mathrm{B}\|^2_{\mathrm{B(H)}} \Longleftrightarrow \|\mathrm{A}\|_{\mathrm{B(H)}} \leq \|\mathrm{B}\|_{\mathrm{B(H)}}$$

(3) Montrons par récurrence que :

$$\mathrm{B} \geq 0 \Longleftrightarrow \mathrm{B}^n \geq 0 \forall \in \mathbb{N}^*$$

Soit$x \in \mathrm{H}$

- Pour n = 2 on a :

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{B}^2 x, x\rangle &= \langle \mathrm{B}[\mathrm{B}x], x\rangle \\
&= \langle \mathrm{B}x, \mathrm{B}^* x\rangle \\
&= \langle \mathrm{B}x, \mathrm{B}x\rangle \\
&= \|\mathrm{B}\|^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

- Supposons que :

$$\mathrm{B} \geq 0 \Longleftrightarrow \mathrm{B}^n \geq 0 \forall \in \mathbb{N}^*; 2 \leq n \leq \mathrm{N}_0$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\langle B^{N_0+1}x, x\rangle &= \langle B[B^{N_0}x], x\rangle \\
&= \langle B^{N_0}x, B^* x\rangle, B = B^* \\
&= \langle B^{N_0}x, Bx\rangle \\
&= \langle B^{N_0-1}[Bx], Bx\rangle \\
&= \langle B^{N_0-1}[Y], Y\rangle, (Y = Bx) \in H, B^{N_0-1} \geq 0 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Finalement

$$B \geq 0 \Longleftrightarrow B^n \geq 0 \forall \in \mathbb{N}^*$$

(4) Montrons par récurrence que :

$$C \leq Id \Longrightarrow C^n \leq Id, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Ce qui revient donc à montrer que :

$$Id - C \geq 0 \Longrightarrow Id - C^n \geq, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Soit $x \in H$

Pour n = 2, On a :

$$\begin{aligned}
\langle (Id - C^2)x, x\rangle &= \langle x - C^2 x, x\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \langle C^2 x, x\rangle \\
&= \|x\|^2 - \langle C^2 x, x\rangle \\
&\geq \|x\|^2 - \|C\|^2_{B(H)} \times \|x\|^2, (|\langle C^2 x, x\rangle| \leq \| \|^2_{B(H)} \times \|x\|^2) \\
&\geq (1 - \|C\|^2_{B(H)}) \times \|x\|^2
\end{aligned}$$

Et d'après la propriété (2) on a :

$$\begin{aligned}
C \leq Id \quad &\Longrightarrow \quad \|C\|_{B(H)} \leq \|Id\|_{B(H)} = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \|C\|^2_{B(H)} \leq 1
\end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$\langle (Id - C^2)x, x\rangle \geq \alpha \times \|x\|^2, \text{avec}, \alpha = (1 - \|x\|^2_{B(H)}) \geq 0$$

D'où :

$$\langle (Id - C^2)x, x\rangle \geq 0, \forall x \in H$$

- Supposons que :

$$C \leq Id \Longrightarrow C^n \leq Id, \forall \in \mathbb{N}^*; 2 \leq n \leq N_0$$

On a donc pour tout $x \in H$:

$$\begin{aligned}
\langle (Id - C^{N_0+1})x, x\rangle &= \langle x - C^{N_0+1}x, x\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \langle C^{N_0+1}x, x\rangle \\
&= \|x\|^2 - \langle C^{N_0+1}x, x\rangle \\
&= \|x\|^2 - \langle C[C^{N_0}]x, x\rangle \\
&= \|x\|^2 - \langle C^{N_0}x, C^* x\rangle, (C^* = C) \\
&= \langle C^{N_0-1}[Cx], Cx\rangle \\
&= \langle B^{N_0-1}[Y], Y\rangle, (Y = Cx) \in H
\end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} |\langle B^{N_0-1}Y, Y\rangle| &\leq \|C^{N_0-1}\|_{B(H)} \times \|Y\|^2 \\ &\leq \|C\|_{B(H)}^{N_0-1} \times \|Y\|^2 \\ &\leq \|Y\|^2, \forall Y \in H \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \|Y\|^2 = \|Cx\|^2 & \\ &\leq \|C\|_{B(H)} \times \|x\|^2 \\ &\leq \|x\|^2, \forall x \in H \end{aligned}$$

On a finalement :

$$\begin{aligned} \langle (Id - C^{N_0+1})x, x\rangle &\geq \|x\|^2 - \|Y\|^2 \\ &\geq 0, \forall x \in H \end{aligned}$$

D'ou :

$$C \leq Id \Longrightarrow C^n \leq Id, \forall \in \mathbb{N}^*$$

(5) pour prouver cette propriété montrons que :

$$Id < C \Longrightarrow Id < C^2$$

On a :

$$Id \leq C \Longleftrightarrow (C - Id) > 0$$

Donc d'après la propriété (3) :

$$\begin{aligned} (C - Id) \geq 0 &\Longrightarrow (C - Id)^2 \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow C^2 - 2C + Id > 0 \\ &\Longleftrightarrow C^2 > 2C - Id \end{aligned}$$

Et comme $Id < C$, on obtient $C^2 > Id$

(6) Soit $y \in H$ alors :

$$\begin{aligned} \langle A^{-1}y, y\rangle &= \langle x, Ax\rangle, avec, x \in H \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

3 Racine carrée d'un opérateur positif

Proposition 2.2

Soit A un opérateur positif sur un espace de Hilbert H, alors il existe un unique opérateur positif X noté $\sqrt{A}$ tel que :

$$X^2 = A$$

Pour démontrer cette proposition on aura besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.2
Soit A un opérateur positif, alors :

$$\|Ax\|^4 \leq \langle A^2x, x\rangle \times \langle Ax, x\rangle, \forall x \in H$$

Preuve.
soit A un opérateur positif et λ un nombre réel. On a alors :
pour tout $x \in H$

$$\begin{aligned}
\langle A[x+\lambda A(x)], [x+\lambda A(x)]\rangle &= \langle A(x)+\lambda A^2(x), [x+\lambda A(x)]\rangle \\
&= \langle Ax, [x+\lambda A(x)]\rangle + \langle \lambda A^2(x), [x+\lambda A(x)]\rangle \\
&= \langle A(x), x\rangle + \overline{\lambda}\langle A(x), A(x)\rangle + \langle A^2(x), [x+\lambda A(x)]\rangle \\
&= \langle A(x), x\rangle + \lambda\langle A(x), A(x)\rangle + \lambda\langle A^2(x), x\rangle + \lambda^2\langle A^2(x), A(x)\rangle \\
&= \langle A(x), x\rangle + \lambda\langle A(x), A(x)\rangle + \lambda\langle A(x), A^*(x)\rangle + \lambda^2\langle A^2(x), A(x)\rangle \\
&= \langle A(x), x\rangle + \lambda\langle A(x), A(x)\rangle + \lambda\langle A(x), A(x)\rangle + \lambda^2\langle A^2(x), A(x)\rangle \\
&= \lambda^2\langle A[A(x)], A(x)\rangle + 2\lambda\langle A(x), A(x)\rangle + \langle A(x), x\rangle \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Ce trinôme étant de signe constant doit avoir un discriminant négatif ou nul,ce qui nous donne :

$$\langle A(x), A(x)\rangle^2 - \langle A^2(x), A(x)\rangle \times \langle A(x), x\rangle \leq 0, \forall x \in H$$

donc :

$$\langle A(x), A(x)\rangle^2 \leq \langle A^2(x), A(x)\rangle \times \langle A(x), x\rangle, \forall x \in H$$

D'où :

$$\|A\|^4 \leq \langle A^2x, Ax\rangle \times \langle Ax, x\rangle, \forall x \in H$$

Lemme 2.3
soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite d'opérateurs positifs tels que :*

$$0 \leq A_1 \leq A_2 \cdots \leq A_n \leq \cdots \leq Id \tag{2.1}$$

Alors :
Pour tout $x \in H$, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy et on peut définir l'opérateur positif :

$$\begin{aligned}
A : H &\longrightarrow H \\
x &\longrightarrow A(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} A_n(x)
\end{aligned}$$

Tel que :

$$\|A\|_{B(H)} \leq 1$$

Preuve.
Montrons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'opérateur A_n est continu et $\|A\|_{B(H)} \leq 1$:

(1) D'une part ; d'aprés l'equation (2.1) : pour tout $x \in \mathrm{H}$

$$0 \leq \langle \mathrm{A}_1(x), x\rangle \leq \langle \mathrm{A}_2(x), x\rangle \leq \cdots \leq \langle \mathrm{A}_n(x), x\rangle \leq \cdots \leq \langle \mathrm{I}d(x), x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$

Donc pour tout $x \in \mathrm{H}$ tel que $\|x\| \leq 1$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq \langle \mathrm{A}_n(x), x\rangle \leq 1$$

d'ou :

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \{\langle \mathrm{A}_n(x), x\rangle, \forall n \in \mathbb{N}^*\} \leq 1 \tag{2.2}$$

(2) D'autre part on a d'aprés le lemme (2.2)

$$\|\mathrm{A}x\|^4 \leq \langle \mathrm{A}^2 x, x\rangle \times \langle \mathrm{A}x, x\rangle, \forall x \in \mathrm{H} \tag{2.3}$$

En utilisant cette inégalité et en posant $y = \frac{\mathrm{A}_n(x)}{\|\mathrm{A}_n(x)\|}$ (pour $\mathrm{A}_n \neq 0$) , on obtient :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|\mathrm{A}x\|^4 \leq \langle \mathrm{A}^2 x, x\rangle \times \langle \mathrm{A}x, x\rangle, \forall x \in \mathrm{H}, x \neq 0$$

$$\langle \mathrm{A}x, x\rangle \times \left\langle \mathrm{A}\frac{\mathrm{A}_n(x)}{\|\mathrm{A}_n(x)\|}, \frac{\mathrm{A}_n(x)}{\|\mathrm{A}_n(x)\|} \right\rangle \times \|\mathrm{A}_n(x)\|^2, \forall x \in \mathrm{H}, x \neq 0$$

Donc on a :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|\mathrm{A}x\|^4 = \left\{ \sup_{\|x\|\leq 1} \|\mathrm{A}_n(x)\| \right\}^4 \leq (\sup_{\|x\|\leq 1} \|\mathrm{A}_n(x)\|^4)$$

$$\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \langle \mathrm{A}_n(x), x\rangle \times \sup_{\|y\|\leq 1} \langle \mathrm{A}_n(y), y\rangle \times \sup_{\|x\|\leq 1} \|\mathrm{A}_n(x)\|^2$$

$$\leq \left\{ \sup_{\|x\|\leq 1} \langle \mathrm{A}_n(x), x\rangle \right\}^2 \times \|\mathrm{A}_n\|^2_{\mathrm{B(H)}}$$

D'où :

$$\|\mathrm{A}_n\|_{\mathrm{B(H)}} \leq \left\{ \sup_{\|x\|\leq 1} \langle \mathrm{A}_n(x), x\rangle \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{2.4}$$

Des deux inégalités (2.2) et (2.4) on déduit que :

$$\|\mathrm{A}_n\|_{\mathrm{B(H)}} \leq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors l'opérateur A_n est continu pour tout entier naturel non nul.

Soit l'opérateur $\mathrm{A}_{m,n}$ définit par :

$$\mathrm{A}_{m,n} = \mathrm{A}_n - \mathrm{A}_m \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}^* \quad : \quad n > m.$$

On remarque que $\mathrm{A}^*_{m,n} = (\mathrm{A}_n - \mathrm{A}_m)^* = \mathrm{A}^*_n - \mathrm{A}^*_m = \mathrm{A}_n - \mathrm{A}_m = \mathrm{A}_{m,n}, alors \mathrm{A}_{m,n}$ est auto-adjoint et on a :

$$
\begin{aligned}
0 \leq A_m \leq A_n &\iff 0 \leq \langle A_m(x), x\rangle \leq \langle A_n(x), x\rangle \qquad \forall x \in H.\\
&\iff 0 \leq \langle A_n(x), x\rangle - \langle A_m(x), x\rangle \qquad \forall x \in H\\
&\iff 0 \leq \langle A_n(x) - A_m(x), x\rangle \qquad \forall x \in H.\\
&\iff 0 \leq \langle A_{n,m}(x), x\rangle \qquad \forall x \in H.
\end{aligned}
$$

Donc l'opérateur $A_{m,n}$ est positif et d'après le lemme (1.10) on a pour tout $x \in H$:

$$
\begin{aligned}
\|A_{n,m}(x)\|^4 &\leq \langle A_{n,m}(x), x\rangle \langle A^2_{n,m}(x), A_{n,m}\rangle, d\\
&\leq \langle A_{n,m}(x), x\rangle \|A^2_{n,m}(x)\| \|A_{n,m}(x)\|\rangle\rangle \qquad (Cauchy - Schwartz)\\
&\leq \langle A_{n,m}(x), x\rangle \|A_{n,m}(x)\|^3 \|x\|^2\\
&\leq \langle A_{n,m}(x), x\rangle \times \|x\|^2\rangle \qquad (\|A_{n,m}(x)\| \leq 1)
\end{aligned}
$$

D'où :
$\forall x \in H. \forall n, m \in \mathbb{N}^* telsquen > m$:

$$
\|A_n(x) - A_m(x)\|^4 \leq \langle A_n(x) - A_m(x), x\rangle \times \|x\|^2 \tag{2.5}
$$

Considérons la suite de fonctions réels $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que$\varphi_n(x) = \langle A_n(x), x\rangle \quad \forall x \in$ H .On remarque que pour tout $x \in H$ on a :

$$
\begin{aligned}
\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) &= \langle A_{n+1}(x), x\rangle - \langle A_n(x), x\rangle\\
&= \langle A_{n+1}(x) - A_n(x), x\rangle\\
&= \langle A_{n,n+1}(x), x\rangle\\
&\leq 0 \qquad (A_{m,n} \geq 0)
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\forall x \in H : \varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) \geq 0 \tag{2.6}
$$

D'autre part,pour $x \in H \qquad et \qquad n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$
\begin{aligned}
|\varphi_n(x)| &= |\langle A_n(x), x\rangle|\\
&\leq \|A_n(x)\| \times \|x\|\\
&\leq \|A_n\|_{B(H)} \times \|x\|^2\\
&\leq \|x\|^2 \qquad (\|A_n\|_{B(H)} \leq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*)
\end{aligned}
$$

Alors :

$$
\forall x \in H \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* : |\varphi_n(x)| \leq \|x\|^2 \tag{2.7}
$$

Des deux inégalités (2.6) et (2.7) on déduit que la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante au sens large et bornée par $\|x\|^2$ pour tout $x \in H$, donc elle est convergente d'ou de Cauchy dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$\forall x \in \mathrm{H} \quad , \quad \forall n,m \in \mathbb{N}^* \quad \forall \epsilon > 0, avec \quad n > m, \exists \mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}^* \qquad tel \quad que \qquad , \forall m \geq \mathrm{N}_0$:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \langle \mathrm{A}_n(x) - \mathrm{A}_m(x), x \rangle < \epsilon$$

En utilisant cette inégalité et l'équation (2.5) on obtient :

$$\forall x \in \mathrm{H} \quad \|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\|^4 \leq \langle \mathrm{A}_n(x) - \mathrm{A}_m(x), x \rangle \|x\|^2 \longrightarrow_{n \longmapsto \infty} 0$$

D'ou :

$\forall x \in \mathrm{H} \quad , \quad \forall n,m \in \mathbb{N}^* \quad \forall \epsilon > 0, avec \quad n > m, \exists \mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}^* \qquad tel \quad que \qquad , \forall m \geq \mathrm{N}_0$:

$$\|\mathrm{A}_n(x) - \mathrm{A}_m(x), x\| \leq \epsilon$$

Donc la suite $\{\mathrm{A}_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans H qui est complet,alors elle est convergente et on peut définir l'opérateur A par la simple limite comme suit :

$$\mathrm{A}(x) = \lim_{n \longmapsto \infty} \mathrm{A}_n(x)$$

Nous avons alors pour tout $x; y \in \mathrm{H}$:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{A}(x), y \rangle &= \langle \lim_{n \longmapsto \infty} \mathrm{A}_n(x), y \rangle \\
&= \lim_{n \longmapsto \infty} \langle \mathrm{A}_n(x), y \rangle \\
&= \lim_{n \longmapsto \infty} \langle x, \mathrm{A}_n(y) \rangle \qquad\qquad (\mathrm{A}_n^* = \mathrm{A}_n) \\
&= \langle x, \lim_{n \longmapsto \infty} \mathrm{A}_n(y) \rangle \\
&= \langle x, \mathrm{A}(y) \rangle
\end{aligned}$$

Donc l'opérateur A est auto-adjoint et on remarque que pour $y = x$:

$$\langle \mathrm{A}(x), x \rangle = \lim_{n \longmapsto \infty} \langle \mathrm{A}_n(x), y \rangle \geq 0$$

D'où A est positif et comme nous avons pour tout $x \in \mathrm{H}$:

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{A}(x)\|^2 = \langle \mathrm{A}(x), \mathrm{A}(x) \rangle &= \langle \lim_{n \longmapsto \infty} \mathrm{A}_n(x), \lim_{n \longmapsto \infty} \mathrm{A}_n(x) \rangle \\
&= \lim_{n \longmapsto \infty} \rangle \mathrm{A}_n(x), \mathrm{A}_n(x) \rangle \\
&= \lim_{n \longmapsto \infty} \|\mathrm{A}_n(x)\|^2 \\
&\leq \lim_{n \longmapsto \infty} \left[\|\mathrm{A}_n\|^2_{\mathrm{B(H)}} \times \|x\|^2 \right] \\
&\leq \|x\|^2 \qquad\qquad (\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{B(H)}} \leq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*)
\end{aligned}$$

Alors :

$$\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{B(H)}} \leq 1$$

- Preuve de la proposition . (2.2) :

Le résultat étant évident pour l'opérateur nul , on considère $A \in B(H)$ tel que $A \neq 0_{B(H)}$

Existence :

i. Montrons d'abord que si A est un un opérateur positif non nul et $A' = \frac{A}{\|A\|_{B(H)}}$ Alors :

$$A' \leq Id$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$\begin{aligned} |\langle A(x), x\rangle| &\leq \|A(x)\|\,\|x\| && \forall x \in H \\ &\leq \|A\|_{B(H)}\|x\|^2 && \forall x \in H \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à :

$$-\|A\|_{B(H)}\|x\|^2 \leq \langle A(x), x\rangle \leq \|A\|_{B(H)}\|x\|^2 \qquad \forall x \in H$$

On distingue les trois cas suivants :

1) pour $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$,on a :

$$\begin{aligned} \langle A(x), x\rangle \leq \|A\|_{B(H)} &\Longrightarrow -\langle A(x), x\rangle \geq -\|A\|_{B(H)} \\ &\Longrightarrow -\frac{1}{\|A\|_{B(H)}}\langle A(x), x\rangle \geq -1 \qquad (A \neq 0_{B(H)} \Longrightarrow \|A\|_{B(H)} \neq 1) \\ &\Longrightarrow \langle x, x\rangle - \frac{1}{\|A\|_{B(H)}} \geq \langle x, x\rangle - 1 = 0 \qquad (\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 1) \end{aligned}$$

Donc en posant $A' = \frac{A}{\|A\|_{B(H)}}$, on peut établir la formule suivante :

$$\forall x \in H \quad \text{tel que} \quad \|x\| = 1 : \langle (Id - A')x, x\rangle = \langle x, x\rangle - \frac{1}{\|A\|_{B(H)}}\langle A(x), x\rangle \geq 0 \quad (2.8)$$

2) pour x=0 on a :

$$\langle (Id - A')(0), (0)\rangle = 0$$

3) pour $x \in H$ tel que $x \neq 0$,$\|x\| \neq 1$, on prend $y = \frac{x}{\|x\|}$ et on a :

$$\begin{aligned} \langle (Id - A')y, y\rangle &= \frac{1}{\|A\|^2_{B(H)}}\|A\|_{B(H)}\langle (Id - A')x, x\rangle \geq \langle y, y\rangle - 1 \\ &\geq \|y\|^2 - 1 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\langle (Id - A')x, x\rangle \qquad \forall x \in H \text{tel que :} \quad x \neq 0 \quad et \quad \|x\| \neq 1$$

Finalement l'équation (2.8) est vérifiée pour tout x dans H et on obtient $A' \leq Id$.

ii. Nous pouvons donc supposer dans la suite que :

$$X^2 = A \leq Id$$

D'après la propriété (5) des opérateurs positifs on a :

$$X^2 \leq Id \Longrightarrow X \leq Id$$

L'équation $X^2 = A$ s'ecrit alors en posant $A = Id - B$ et $X = Id - Y$ et on a :

$$\begin{aligned}
(Id - Y)^2 = Id - B &\iff (Id - Y)\circ(Id - Y) = Id - B \\
&\iff Id\circ(Id - Y) - Y\circ(Id - Y) = Id - B \\
&\iff Id\circ Id - (Id\circ Y) - (Id - Y) = Id - B \\
&\iff Id - 2Y + Y^2 = Id - B \\
&\iff Y = \frac{1}{2}(B + Y^2)
\end{aligned}$$

Ce qui nous ramène à résoudre l'équation :

$$Y = \frac{1}{2}(B + Y^2) \text{ avec :} 0 \leq Y \leq Id \quad et \quad 0 \leq B \leq Id \tag{2.9}$$

Pour celà considérons $Y_0 = 0$ et $Y_{n+1} = \frac{1}{2}(B + Y_n^2)$ et montrons que la suite$\{Y_n\}_{n\in N}$ converge vers la solution de l'équation (2.9) (méthode des approximations successives).

- Montrons d'abord que Y_n est un polynôme de B à coefficients réels positifs ou nul et qu'il en est de même pour $Y_n - Y_{n-1}$.
Ces propositions sont évidemment vraies pour n = 1 et comme :

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} - Y_n &= \frac{1}{2}(B + Y_n^2) - \frac{1}{2}(B + Y_{n-1}^2) \\
&= \frac{1}{2}(Y_n^2 - Y_{n-1}^2) \\
&= Y = \frac{1}{2}(Y_n + Y_{n-1})\circ(Y_n - Y_{n-1})
\end{aligned}$$

Elles se généralisent sans difficultés par récurrence.
Comme nous avons$B \geq 0$ on en déduit que $B^n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ (propriété (3) des opérateurs positifs)
Donc :

$$Y_n \geq 0 \quad et \quad Y_n - Y_{n-1} \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Alors on a :

$$0 \leq Y_0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_n \leq \ldots$$

Il nous reste à montrer que $Y_n \leq Id$, ce qui est vrai pour n = 0 et se généralise pour $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de la relation $Y_{n+1} = \frac{1}{2}(B+Y_n^2)$ et la propriété (4) des opérateurs positifs. Finalement les opérateurs $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ forment une suite d'opérateurs auto-adjoints tels que :

$$0 \leq Y_0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_n \leq \ldots \leq Id$$

Alors d'après le lemme (2.3) , cette suite converge fortement vers l'opérateur Y qui est continu , positif et vérifie :

$$\|Y\|_{B(H)} \leq 1 \qquad et \qquad Y = \frac{1}{2}(B + Y^2)$$

D'où l'existence de la solution X qui vérifie $X = Id - Y \geq 0$

Remarque 2.3 *On note que X et A commutent car :*

$$X \circ A = X \circ X^2 = X^3 = X^2 \circ X = A \circ X$$

Unicité :

Supposons qu'il existe un autre opérateur X_0 continu , positif tel que $X_0^2 = A$ et désignons par Z et Z_0 les racines carrées positives de X et de X_0 construite avec le même procédé précédent , nous avons donc :

Pour tout $x \in H$:

$$\begin{aligned}
\|Z(X-X_0)(x)\|^2 + \|Z_0(X-X_0)(x)\|^2 &= \langle [Z(X-X_0)](x), [Z(X-X_0)](x)\rangle \\
&+ \langle [Z_0(X-X_0)](x), [Z_0(X-X_0)](x)\rangle \\
&= \langle [Z^2(X-X_0)](x), (X-X_0)(x)\rangle \\
&+ \langle [Z_0^2(X-X_0)](x), (X-X_0)(x)\rangle \\
&= \langle [X(X-X_0)](x), (X-X_0)(x)\rangle \\
&+ \langle [X_0^2(X-X_0)](x), (X-X_0)(x)\rangle \\
&= \langle [(X+X_0)(X-X_0)](x), (X-X_0)(x)\rangle \\
&= \langle (X^2-X_0^2)(x), (X-X_0)(x)\rangle \qquad (XX_0 = X_0X) \\
&= \langle (A-A)(x), (X-X_0)(x)\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$Z(X-X_0)(x) = 0 \qquad et \qquad Z_0(X-X_0)(x) = 0 \qquad \forall x \in H$$

Donc :

$$\begin{aligned}
X(X-X_0)(x) &= ZZ(X-X_0)(x) = 0 \qquad \forall x \in H \\
X_0(X-X_0)(x) &= Z_0Z_0(X-X_0)(x) = 0 \qquad \forall x \in H
\end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\|(X-X_0)(x)\|^2 &= \langle (X-X_0)(x), Z(X-X_0)(x)\rangle \qquad \forall x \in H \\
&= \langle (X-X_0)^2(x), x\rangle \qquad \forall x \in H \\
&= \langle (X^2 - X_0X - XX_0 + X^2)(x), x\rangle \qquad \forall x \in H \\
&= \langle X(X-X_0)(x), x\rangle - \langle X_0(X-X_0)(x), x\rangle \qquad \forall x \in H \\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où :

$$X = X_0$$

Comme T est auto-adjoint et $X = \sqrt{T}$ c'est-à-dire ; $X^2 = T$. Alors :

$$(X^*)^2 = (X^* X^*) = (X^2)^* = T^* = T$$

Donc$(\sqrt{T})^* = X^* = \sqrt{T^*} = \sqrt{T}$, d'où :

$$(\sqrt{T})^* = \sqrt{T}$$

Chapitre 3

Tenseurs

1 Définition

Soient H un espace de Hilbert et a, b deux vecteurs non nuls de H . Alors on définit le tenseur $(a \otimes b)$ par :

$$(a \otimes b)(f) = \langle f, b \rangle .a \qquad \forall f \in \mathrm{H}$$

Théorème 3.1
Soient H un espace de Hilbert et T un opérateur borné non nul . Alors :

$$\mathrm{T} \text{ est un tenseur} \Longleftrightarrow \mathrm{T} \text{ est de rang } 1$$

Preuve.

$\Longrightarrow$) Montrons d'abord que $(a \otimes b)$ est bien défini :
Soient $x_1 ; x_2 \in \mathrm{H}$ tels que $x_1 = x_2$, alors :

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \langle x_1 - x_2, b \rangle .a = 0 \qquad \forall a, b \in \mathrm{H} \\
&\Longrightarrow \quad (\langle x_1, b \rangle - \langle x_2, b \rangle).a = 0 \qquad \forall a, b \in \mathrm{H} \\
&\Longrightarrow \quad \langle x_1, b \rangle .a - \langle x_2, b \rangle .a = 0 \qquad \forall a, b \in \mathrm{H} \\
&\Longrightarrow \quad \langle x_1, b \rangle .a = \langle x_2, b \rangle .a \qquad \forall a, b \in \mathrm{H}
\end{aligned}$$

Donc :

$$x_1 - x_2 = 0 \Longrightarrow (a \otimes b)(x_1) = (a \otimes b)(x_2)$$

D'ou :

$$(a \otimes b)(x_1) \neq (a \otimes b)(x_2) \Longrightarrow x_1 - x_2 \neq 0 \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathrm{H}$$

Comme $(a \otimes b)(f) = \langle f, b \rangle .a \quad , \quad \forall f \in \mathrm{H} \quad ,$ alors $\mathrm{I}m(a \otimes b) \subseteq \{\mathbb{C}_a\} \quad d'ou \quad \mathrm{I}m(a \otimes b)$ est de dimension 1 donc $(a \otimes b)$ est de rang un.

$\Longleftarrow$) Réciproquement,soit T un opérateur de rang un donc il existe un vecteur non nul

$a \in \mathrm{H}$ tel que $\mathrm{I}m(\mathrm{T}) \subseteq \{\mathbb{C}_a\}$ d'où :

$$\forall x \in \mathrm{H}, \exists \mathrm{C}_x \in \mathbb{C} \qquad tel \quad que \qquad \mathrm{T}(x) = \mathrm{C}_x.a \qquad avec : 0 \neq a \in \mathrm{H}$$

Considérons l'application :

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathrm{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longrightarrow & \psi(x) = \mathrm{C}_x \end{array}$$

On remarque que ψ est une forme linéaire continue,donc d'après le théorème de Riesz il existe $b \in \mathrm{H}$ tel que :

$$\psi(x) = \mathrm{C}_x.a = \langle x, b \rangle \qquad \forall x \in \mathrm{H}$$

Comme T est de rang un,on déduit queψ n'est pas identiquement nulle donc $b \neq 0$. Alors :

$$\psi(x) = \mathrm{C}_x.a = \langle x, b \rangle.a = (a \otimes b)(x) \qquad \forall x \in \mathrm{H}$$

D'où T est un tenseur .

2 Propriétés

(1) $(a \otimes b) \circ (c \otimes d) = \langle c, d \rangle (a \otimes d)$

(2) $\mathrm{T} \circ (a \otimes b)$=$(\mathrm{T}(a) \otimes b)$

(3) $(a \otimes b) \circ \mathrm{T} = a \otimes [\mathrm{T}^*(b)]$

(4) $(a \otimes b)^* = (b \otimes a)$

(5) $\ker(a \otimes b) = \{b\}^{\perp}$

(6) $0 \neq (a \otimes b) = (c \otimes d) \Longrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}^* : a = \alpha.c, b = \beta.det \alpha.\overline{\beta} = 1$

(7) $(a \otimes a)$ est un opérateur positif .

(8) $Soit \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+^* \qquad Alors :$

$$\alpha(u \otimes u) = (\alpha u \otimes u) = ((\sqrt{\alpha} u) \otimes (\sqrt{\alpha} u))$$

(9) Soit$\mathrm{R} \in \mathrm{B(H)}$ un opérateur positif et $a \in \mathrm{H}; \|a\| \leq 1$ Alors :

$$((\sqrt{\mathrm{R}} u) \otimes (\sqrt{\mathrm{R}} u)) \leq \mathrm{R}$$

Preuve.

Soient a, b,c,d des vecteurs non nuls dans H, on a alors :

(1) Pout tout f dans H :

$$\begin{aligned} (a \otimes b) \circ (c \otimes d)(f) &= (a \otimes b) \circ [\langle f, d \rangle.c] \\ &= \langle \langle f, d \rangle.c, b \rangle.a \\ &= \langle f, d \rangle \langle c, b \rangle.a \\ &= \langle c, b \rangle (\langle f, d \rangle.a) \\ &= \langle c, b \rangle (a \otimes b) \end{aligned}$$

(2) Pour tout opérateur $T \in B(H) et f \in H$:

$$\begin{aligned} T \circ (a \otimes b) &= T[(a \otimes b)(f)] = T[\langle f, b\rangle(a)] \\ &= \langle f, b\rangle T(a) \\ &= ((T(a) \otimes b)(f) \end{aligned}$$

D'ou :

$$T \circ (a \otimes b) = (T(a) \otimes b)$$

(3)

$$\begin{aligned} (a \otimes b) \circ T = (a \otimes b)[T(f)] &= \langle T(f), b\rangle .a \\ &= \langle f, T^* b\rangle .a \\ &= (a \otimes T^*(b))(f) \end{aligned}$$

(4) soit $g, f \in H$, on a donc :

$$\begin{aligned} \langle (a \otimes b)^*(f), g\rangle &= \langle f, [(a \otimes b)^*]^*(g)\rangle \\ &= \langle f, (a \otimes b)(g)\rangle \\ &= \langle f, \langle g, b\rangle .a\rangle \\ &= \langle b, g\rangle \langle f, a\rangle \\ &= \langle \langle f, a\rangle .b, g\rangle \\ &= \langle (b \otimes a)(f), g\rangle \end{aligned}$$

Donc :

$$(a \otimes b)^* = (b \otimes a)$$

(5) on a par définition :

$$\ker(a \otimes b) = \{f \in H \backslash (a \otimes b)(f) = 0\}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \ker(a \otimes b) &= \{f \in H \backslash \langle f, b\rangle (a) = 0\} \\ &= \{f \in H \backslash \langle f, b\rangle = 0\} \\ &= \{b\}^{\perp} \end{aligned}$$

(6) Montrons que :

$$0 \neq (a \otimes b) = (c \otimes d) \Longleftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}^* : a = \alpha.c, b = \beta.det \alpha.\overline{\beta} = 1$$

$\Longrightarrow$) comme $(a \otimes b) = (c \otimes d)$, alors d'après la propriété (4) on a :

$$(a \otimes b)^* = (c \otimes d)^*$$

- D'une part on remarque que :

$$(a \otimes b) = (c \otimes d) \Longleftrightarrow \langle x, b\rangle .a = \langle x, d\rangle .c \qquad \forall x \in H$$

Donc pour $x = b$, on a : $a = \frac{\langle b,d\rangle}{\|b\|^2}.c$ - D'autre part :

$$(b \otimes a) = (d \otimes c) \Longleftrightarrow \langle x, a\rangle.b = \langle x, c\rangle.d \qquad \forall x \in \mathrm{H}$$

Donc pour $x = a$, on a : $b = \frac{\langle b,d\rangle}{\|b\|^2}.c$ Alors :

$$(a \otimes b) = (c \otimes d) \Longrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}^* \, telque :: a = \alpha.c, b = \beta.d$$

D'ou

$$(a \otimes b) = (\alpha c \otimes \beta d) = (c \otimes d)$$

Alors :

$$\begin{array}{rcl} (\alpha c \otimes \beta d) & = & \langle x, \beta d\rangle.\alpha c \qquad \forall x \in \mathrm{H} \\ & = & \alpha.\overline{\beta}\langle x, d\rangle.c \qquad \forall x \in \mathrm{H} \\ & = & \alpha.\overline{\beta}(c \otimes d)(x) \qquad \forall x \in \mathrm{H} \end{array}$$

Finalement on déduit que $\alpha.\overline{\beta} = 1$
$\Longleftarrow$) Réciproquement si $a = \alpha.c, b = \beta.d$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$: $\alpha.\overline{\beta} = 1$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathrm{H} : (a \otimes b)(x) & = & (\alpha c \otimes \beta d)(x) \\ & = & \langle x, \beta d\rangle.\alpha c \\ & = & \alpha.\overline{\beta}\langle x, d\rangle.c \qquad \forall x \in \mathrm{H} \\ & = & (c \otimes d)(x) \qquad \forall x \in \mathrm{H} \end{array}$$

(7) $x \in \mathrm{H}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \langle (a \otimes a)(x), x\rangle & = & \langle \langle x, a\rangle.a, x\rangle \\ & = & \langle x, a\rangle.\langle a, x\rangle \\ & = & \langle x, a\rangle.\overline{\langle x, a\rangle} \\ & = & |\langle x, a\rangle|^2 \geq 0 \end{array}$$

D'où :

$$(a \otimes a) \geq 0$$

(8) soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathrm{H}$,on a :
- D'une part :

$$\begin{array}{rcl} (\alpha u \otimes u)(x) & = & \langle x, u\rangle.\alpha u \\ & = & \alpha.\langle x, a\rangle.u \\ & = & \alpha(u \otimes u)(x) \end{array}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rcl} ((\sqrt{\alpha}u) \otimes (\sqrt{\alpha}u)) & = & \langle x, (\sqrt{\alpha}u)\rangle.(\sqrt{\alpha}u) \\ & = & \sqrt{\alpha}u..\overline{(\sqrt{\alpha}u)}.\langle x, u\rangle.u \\ & = & \alpha.\langle x, u\rangle.u \\ & = & \alpha.(u \otimes u) \end{array}$$

Donc :

$$(\alpha u \otimes u) = ((\sqrt{\alpha}u) \otimes (\sqrt{\alpha}u)) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

(9) Soient R un opérateur positif et $x, a \in \mathrm{H}$ avec $\|a\| \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\langle((\sqrt{\mathrm{R}}a) \otimes (\sqrt{\mathrm{R}}a))(x), x\rangle &= \langle\langle x, (\sqrt{\mathrm{R}}a)\rangle.(\sqrt{\mathrm{R}}a), x\rangle \\
&= \langle x, \sqrt{\mathrm{R}}a\rangle.\langle\sqrt{\mathrm{R}}a, x\rangle \\
&= \langle x, \sqrt{\mathrm{R}}a\rangle.\langle a, \sqrt{\mathrm{R}}x\rangle \\
&= |\langle x, \sqrt{\mathrm{R}}a\rangle|^2 \\
&\leq \|a\|^2.\|\sqrt{\mathrm{R}}x\|^2 \\
&\leq \langle\sqrt{\mathrm{R}}(x), \sqrt{\mathrm{R}}(x)\rangle \\
&= \langle(\sqrt{\mathrm{R}} \circ \sqrt{\mathrm{R}})(x), x\rangle \\
&= \langle \mathrm{R}(x), x\rangle
\end{aligned}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathrm{H} : \langle((\sqrt{\mathrm{R}}a) \otimes (\sqrt{\mathrm{R}}a))(x), x\rangle \leq \langle \mathrm{R}(x), x\rangle$$

D'où :

$$((\sqrt{\mathrm{R}}a) \otimes (\sqrt{\mathrm{R}}a)) \leq \mathrm{R}$$

Corollaire 3.1

Soit H un espace de Hilbert et R un opérateur borné non nul . Alors :

$$\mathrm{R} \text{ est positif de rang } 1 \Longleftrightarrow \mathrm{R} = (\mathrm{U} \otimes \mathrm{U})$$

Preuve.

$\Longrightarrow$) Comme R est de rang un alors d'après le lemme (3.1) il existe deux vecteurs non nuls u, v dans H tels que :

$$\mathrm{R} = (u \otimes v)$$

Donc $(u \otimes v) = \mathrm{R} = \mathrm{R}^* = (v \otimes u)$, et d'après la propriété (5) des tenseurs :

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}^* \setminus u = \beta.v, v = \alpha.\overline{\beta} = 1$$

D'ou :

$$\mathrm{R} = ((\alpha u) \otimes u)$$

Comme R est positif alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} \geq 0 &\Longleftrightarrow \langle \mathrm{R}(x), x\rangle \geq 0 && \forall x \in \mathrm{H} \\
&\Longleftrightarrow \langle((\alpha u) \otimes u)(x), x\rangle \geq 0 && \forall x \in \mathrm{H} \\
&\Longleftrightarrow \langle\langle x, u\rangle(\alpha u), x\rangle \geq 0 && \forall x \in \mathrm{H} \\
&\Longleftrightarrow \alpha.\langle x, u\rangle.\langle u, x\rangle \geq 0 && \forall x \in \mathrm{H} \\
&\Longleftrightarrow \alpha|\langle x, u\rangle|^2 \geq 0 && \forall x \in \mathrm{H}
\end{aligned}$$

Donc $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et en utilisant la propriété (8) des tenseurs on obtient :

$$\mathrm{R} = ((\alpha u) \otimes u) = ((\sqrt{\alpha}u) \otimes (\sqrt{\alpha}u)) = (\mathrm{U} \otimes \mathrm{U}) \text{ avec } \mathrm{U} = \alpha u \neq 0$$

$\Longleftarrow$)Réciproquement, si $\mathrm{R} = (\mathrm{U} \otimes \mathrm{U})$ alors d'après la propriété (7) et le lemme (3.1) il est positif de rang un.

Chapitre 4

Transfert de la propriété du majorant minimal par la fonction racine .

.

Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier le Transfert de la propriété du majorant minimal par la fonction racine , autrement dit nous nous posons la question suivante : si T est un majorant minimal de (A,B), est -ce que $\sqrt{T}$ est un majorant minimal de $(\sqrt{A}, \sqrt{B})$?

On verra par l'étude d'un exemple que la réponse à cette question est négative dans le cas général , par la suite nous donnons une condition suffisante qui assure l'existence de T.

Avant de commencer ce chapitre ,nous rappelons un théorème caractérisant le majorant minimal de deux opérateurs positifs dans le cas général et spécialement quand l'espace H est de dimensions finie .

Théorème 4.1 *[1, 4]*

Soient A , B deux opérateurs positifs et T un majorant de A et B. Alors :

$$T \text{ est majorant minimal (A,B)} \iff \mathrm{I}m(\sqrt{T-A}) \cap \mathrm{I}m(\sqrt{T-B}) = \{0_H\}.$$

Corollaire 4.1

Soient A et B deux opérateurs positifs sur un espace de Hilbert de dimension finie H , T est un majorant minimal de (A,B) , si et seulement si :

$$\ker(T-A) \oplus \ker(T-B) = H \tag{4.1}$$

Preuve. *Cette caractérisation s'obtient directement du théorème précédent en utilisant l'égalité suivante :*

$$
\begin{aligned}
(Im(\sqrt{T-A}) \cap Im(\sqrt{T-B}))^{\perp} &= \overline{ker\sqrt{T-A}} \oplus \overline{ker\sqrt{T-B}} \\
&= ker\sqrt{T-A} \oplus ker\sqrt{T-B} \\
&= ker(T-A) \oplus ker(T-B)
\end{aligned}
$$

Ce qui est vérifié dans les espaces de Hilbert de dimension finie .

Lemme 4.1

Soient A et T deux opérateurs positifs sur H ,si T un majorant de A Alors :

$$\ker(\sqrt{T}-\sqrt{A}) \subset \ker(T-A)$$

De plus si A et T commutent alors on a égalité

Preuve.

Soit $x \in \ker(\sqrt{T}-\sqrt{A})$,alors :

$$
\begin{aligned}
x \in \ker(\sqrt{T}-\sqrt{A}) &\Longrightarrow (\sqrt{T}-\sqrt{A})(x) = 0 \\
&\Longrightarrow \sqrt{T}(x) = \sqrt{A}(x) \\
&\Longrightarrow \|\sqrt{T}x\|^2 = \|\sqrt{A}x\|^2 \\
&\Longrightarrow \langle \sqrt{T}x, \sqrt{T}x\rangle = \langle \sqrt{A}x, \sqrt{A}x\rangle \\
&\Longrightarrow \langle \sqrt{T}\sqrt{T}x, x\rangle = \langle \sqrt{A}\sqrt{A}x, x\rangle \\
&\Longrightarrow \langle Tx, x\rangle = \langle Ax, x\rangle \\
&\Longrightarrow \langle Tx, x\rangle - \langle Ax, x\rangle = 0 \\
&\Longrightarrow \langle (T-A)x, x\rangle = 0 \\
&\Longrightarrow \langle \sqrt{(T-A)}x, \sqrt{(T-A)}x\rangle = 0 \\
&\Longrightarrow \|\sqrt{(T-A)}x\|^2 = 0 \\
&\Longrightarrow \sqrt{(T-A)}x = 0 \\
&\Longrightarrow \sqrt{(T-A)}.\sqrt{(T-A)}x = 0 \\
&\Longrightarrow (T-A)x = 0 \\
&\Longrightarrow x \in \ker(T-A)
\end{aligned}
$$

Soit $x \in \ker(T-A)$,alors :

$$
\begin{aligned}
x \in \ker(T-A) &\Longrightarrow (T-A)(x) = 0 \\
&\Longrightarrow (\sqrt{T}+\sqrt{A})(\sqrt{T}-\sqrt{A})(x) = 0 \qquad car \quad \sqrt{T} \quad et \quad \sqrt{A} \quad commute
\end{aligned}
$$

Comme l'opérateur $(\sqrt{T}+\sqrt{A})$ est défine positif alors il est injectif , d'où :

$$(\sqrt{T}-\sqrt{A})(x) = 0$$

Donc $x \in \ker(\sqrt{T}-\sqrt{A})$.

Donnons maintenait un exemple montrant que la répons à la question est négative en général .

Contre exemple

Soient les deux opérateur A et B définis sur $\mathbb{C}^2$ par les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Après calcul , on a obtient :

$\sqrt{B} = \frac{B}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{A} = A$

Supposons T un opérateur positif tel que T est un majorant minimal de (A,B) et $\sqrt{T}$ est un majorant minimal de $(\sqrt{A}, \sqrt{B})$.

On a nécessairement :

$$dim \ker(T - A) = dim \ker(T - B) = 1 \tag{4.2}$$

En effet :

Comme T est un majorant minimal de (A,B) , alors d'après le théorème (4.1) , on a :

$$T \text{ est majorant minimal } (A,B) \iff Im(\sqrt{T - A}) \cap Im(\sqrt{T - B}) = \{0_{\mathbb{C}^2}\}.$$

Et comme $dim\mathbb{C}^2 = 2$, alors

$$\ker(T - A) \oplus \ker(T - B) = \mathbb{C}^2 \tag{4.3}$$

équivaut à :

$$dim \ker(T - A) + dim \ker(T - B) = 2 \tag{4.4}$$

Supposons que :

$$dim \ker(T - A) = 0 \tag{4.5}$$

D'où :

$$dim \ker(T - B) = 2 \tag{4.6}$$

Donc :

$$\begin{aligned} dim \ker(T - B) = 2 &\Longrightarrow \forall Z \in \mathbb{C}^2 \quad , \quad (T - B)(Z) = 0. \\ &\Longrightarrow \forall Z \in \mathbb{C}^2 \quad , \quad TZ = BZ \end{aligned}$$

Or $T \geq A \Longrightarrow B \geq A$

Donc :

$$\forall Z \in \mathbb{C}^2; AZ \leq BZ$$

D'où :

$$\forall Z \in \mathbb{C}^2; \langle AZ, Z \rangle \leq \langle BZ, Z \rangle$$

Contradiction avec A et B non-Comprables .

Comme $dim \ker(T - A) = 1$, alors dim Im(T-A)=1

De même on a : dim Im(T-B)=1

D'après la remarque précédente il existe deux vecteurs a,b linéairement indépendants tels que

$$T = A + (a \otimes a) \tag{4.7}$$

$$T = B + (b \otimes b) \tag{4.8}$$

De la même manière , $\sqrt{T}$ est un majorant minimal de $(\sqrt{A}, \sqrt{B})$ alors il existe deux vecteurs a',b' linéairement indépendants tels que

$$\sqrt{T} - \sqrt{A} = (a' \otimes a') \tag{4.9}$$

$$\sqrt{T} - \sqrt{B} = (b' \otimes b') \tag{4.10}$$

D'après le théorème (3.1)
On a :

$\ker(a' \otimes a') = \{a'\}^{\perp}$ (Propriétés de tenseur (5))

$\ker(a \otimes a) = \{a\}^{\perp}$ (Propriétés de tenseur (5))

D'après la relation

$$\ker(\sqrt{T} - \sqrt{A}) = \{a'\}^{\perp} \subset \ker(T - A) = \{a\}^{\perp}$$

On déduit que a' et a sont liés c'est à dire :

$$\exists \alpha \neq 0 \qquad a' = \alpha a$$

Par suite :

$$\sqrt{T} = A + |\alpha|^2 (a \otimes a)$$

D'où :

$$\begin{aligned} T = A + (a \otimes a) = \sqrt{T}^2 &= (A + |\alpha|^2 (a \otimes a))^2 \\ &= A^2 + |\alpha|^4 (a \otimes a).(a \otimes a) + |\alpha|^2 (Aa \otimes a) + |\alpha|^2 (a \otimes Aa) \\ &= A^2 + |\alpha|^4 \| a \|^2 (a \otimes a) + |\alpha|^2 (Aa \otimes a) + |\alpha|^2 (a \otimes Aa) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} T &= (1 - |\alpha|^4 \| a \|^2)(a \otimes a) \\ &= |\alpha|^2 [(Aa \otimes a) + (a \otimes Aa)] \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} (Aa \otimes a) + (a \otimes Aa) &\geq 0 && (\text{ Propriétés de tenseur (7) et } \alpha \neq 0) \\ \langle ((Aa \otimes a) + (a \otimes Aa))x, x \rangle &\geq 0 && \forall x \in H \\ \langle \langle x, a \rangle . Aa + \langle x, Aa \rangle . a, x \rangle &\geq 0 && \forall x \in H \\ \langle x, a \rangle . \langle Aa, x \rangle + \langle x, Aa \rangle . \langle a, x \rangle &\geq 0 && \forall x \in H \\ Re(\langle x, a \rangle . \langle Aa, x \rangle) &\geq 0 && (*) \end{aligned}$$

Comme les vecteurs (Aa) et (a) sont libres alors , il existe $x \in H$ tel que

$$\langle x, a \rangle = 1 \qquad \text{et} \qquad \langle x, Aa \rangle = -1$$

Donc $\{a^*, (Aa)^*\}$ et une base duale pour :

$$x = a^* + (Aa)^*$$

Convient ,contradiction avec (*)

Donc (a) est un vecteur propre de A , de même(b) est un vecteur propre de B donc a et b sont des vecteurs propre de T , Alors (a) deux vecteur propre distinctes Alors A+B

$Aa + \| a \|^2 a = Ba \qquad \Longrightarrow$ (a) est un vecteur propre de B.

Or A , B n'est pas de vecteur propre comment ; contradiction c'est finis , n'est pas de duale T .

Condition suffisante :

Théorème 4.2

Si T est un majorant minimal de (A,B), qui commute avec eux alors $\sqrt{T}$ est un majorant minimal de ($\sqrt{A}, \sqrt{B}$)

preuve :

Comme T est un majorant minimal de (A,B) alors :

$$\ker(T - A) \oplus \ker(T - B) = H \tag{4.11}$$

Or comme T commute avec A et B alors d'après le lemme (4.1) ,on a :

$$\ker(\sqrt{T}-\sqrt{A})\oplus\ker(\sqrt{T}-\sqrt{B})=H \tag{4.12}$$

Ce qui donne que $\sqrt{T}$ est un majorant minimal de $(\sqrt{A},\sqrt{B})$

Corollaire 4.2

Si I est un majorant minimal de (A,B) Alors I est un majorant minimal de ($\sqrt{A},\sqrt{B}$)

Preuve :

Il suffit d'applique le théorème précédent pour T = I

Corollaire 4.3

Si A et B sont deux opérateurs positifs qui commutent tels que $(Im(\sqrt{A})\cap Im(\sqrt{B}))=\{0_H\}$.

Alors $\sqrt{A+B}$ *est un majorant minimal de (* $\sqrt{A},\sqrt{B}$ *)*

Preuve :

On a :

$$Im(\sqrt{A})\cap Im(\sqrt{B}))=\{0_H\} \iff \ker((A+B)-B)\oplus\ker((A+B)-A)=\{0_H\}$$

Ceci est équivalent à dire que (A+B) est un majorant minimal de(A,B) commute avec A et B .

De plus comme A et B commutent , alors (A+B) commute avec A et B .

En appliquant le théorème (4.2) pour T=A+B on obtient que $\sqrt{A+B}$ est un majorant minimal de ($\sqrt{A},\sqrt{B}$)

Conclusion

Dons ce travail on a pu répondre partiellement à la question du transfert de la propriété du majorant minimal de(A,B) .

En perspective de ce travail ,nous proposons de voir d'autres condition suffisantes ou nécessaires et suffisantes qui garantissent ce transfert .

Bibliographie

[1] **T.k.Bacha,** *Caractérisation d'un Majorant Minimal de deux Opérateurs Positifs.,* memoire de master (2014). 25

[2] **H. Kesser.** *Recherche d'un Majorant Minimal de deux Opérateurs Positifs.,* memoire de master (2017).

[3] **R.G. Douglas.** (Année), *On majorization,factorization and rang inclusion of operators in Hilbert space* **Proc.Amer.Math.Soc.,17**, 413 – 416. (1966),

[4] **G. Cassier, M. Ould Ali,** *On the set of upper bounds for a finite family of self-adjoint operators* . **prépublication hal-00980617**,2016, 1 – 14. 25

[5] **W. N.Anderson,Jr.etG.E.Trapp,** *Shorted Operators.II* . **,SIAM,Vol.28(1)**,(1975), 60 – 71.

[6] **C. D.Aliprantis and O.Burkinshaw,.** (Année), *Positive operators,* Springer,(2006), iv-58.

[7] **A. Aslanov,** *Existence of the Minimum and Maximum of Two Self-Adjoint Operators* , **Mathematica Balkanica , New Series ; Vol.19, 2005, Fasc3-4,, Numéro**, 255 – 265.

[8] **F. Kubo,T.Ando,** *Means of positif linear operators* , **Mathh.Ann.,246,**,(1980), 205-224.

Transfert de la propriété du majorant minimal par la fonction racine .

Résumé : Dans Ce travail ,On étudie le Transfert de la propriété du majorant minimal par la fonction racine . C'est à dire, Si T est un majorant minimal de (A,B), est -ce que $\sqrt{T}$ est un majorant minimal de $(\sqrt{A}, \sqrt{B})$

Mots-Clés. Racine carrée d'Opérateur , majorant minimal Opérateur ,Espace de Hilbert .