MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

MÉMOIRE

Master Académique

pour obtenir le diplôme de Master délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Analyse Fonctionnelle"

présenté et soutenu publiquement par

Ladjel HAMANI

le 27 Juin 2019

Sur l'Exposent de Convergence des zéros des Solutions des Equations Différentielles D'ordre $[p, q]$

Jury

Amina FERRAOUN,	Maître de conférence B	Président (Université de Mostaganem, Algérie)
Mansouria SAIDANI ,	Maître Assistante	Examinateur (Université de Mostaganem, Algérie)
Rabab BOUABDELLI ,	Maître de conférence B	Encadreur (Université de Mostaganem, Algérie)

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE (FSEI)
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie

MASTER

Remerciements

Tout d'abord je remercie ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté et le courage pour effectuer ce modeste travail

Je tiens à remercier Madame Rabab BOUABDELLI, Maître de conférence B à l'université de Mostaganem, qui a accepté de diriger ce mémoire, et a mis à ma disposition tous les moyens nécessaires, ainsi que ses conseils et sa présence pendant la réalisation de ce travail.

Madame Amina FERRAOUN, Maître de conférence B à l'université de Mostaganem, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Madame Mansouria SAIDANI, Maître assistant à l'université de Mostaganem, qui accepté d'analyser ce travail et me fait l'honneur d'être examinatrice.

Je tiens aussi à remercier Madame Souad LAZERGUI, Maître de conférence B à l'unviversité de Mostaganem pour son aide.

Tous les enseignants que j'ai renconté durant mon curcus universitaire sans oublier le personnel adminidtratif.

Je dédie ce mémoire à mes chèrs parents et toutes ma famille en général, ainsi qu'a mon proche entourage et à toute personne qui m'a soutenu, aidé ou contribué de près ou de loin.

Table des matières

Introduction

En mathématiques, et plus précisément en analyse complexe, la théorie de Nevanlinna décrit la distribution asymptotique des valeurs d'une fonctions méromorphes, plus précisément, pour une fonction méromorphe f d'une variable complexe, la distribution des solutions de l'équation $f(z) = a$ quand le nombre complexe a varie.

Si f est une fonction entière, cette distribution est comparable pour tous les a, sauf peut-être un, à la croissance de la fonction, qui est décrite par $\log M(r)$, où $M(r) = \max_{|z|=r} \left| f(z) \right|$. La notion de croissance utilisée ne convient plus pour les fonctions méromorphes, qui peuvent d'ailleurs avoir des pôles, le mathématicien finlandais Rolf Nevanlinna a définit en 1924 un substitut adapté, appelé "la fonction caractéristique de Nevanlinna" et prouvé les premiers théorèmes correspondants. Cette théorie a été ensuite étendue à nombreuse autres situations, telles que l'étude des équations différentielles complexes.

Dans cette direction, et en 1950-1960, H Wittich et ses étudiants se sont lancé dans l'étude de certaines équations différentielles. Un des résultats important dû à Wittich concernant la croissance des soluions des équations différentielles linéaires

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_0 f = 0, \tag{1.1}$$

est le suivant : les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ sont des polynômes si et seulement si toutes les solutions de l'équation précédente sont des fonctions entières d'ordre de croissance fini. Plusieurs mathématiciens ont étendu le résultat ci-dessus, en supposons que les coefficients A_j sont des fonctions entières ou méromorphes. L. Kinnunen ([15]) et J. Tu ([20]) ont étudié la croissance des solutions de l'équation (1.1) individuellement quand les coefficients sont des fonctions entières d'ordre itératif fini.

O. P. Juneja G.P. Kopoor, S.K. Bajpai ([12],[13]) ont étudié quelques propriétés des fonctions entières d'ordre $[p, q]$, et ont obtenu quelques résultats intéressants.

Notre but dans ce mémoire est d'utiliser les concepts des fonctions entières d'ordre $[p, q]$ pour étudier les points fixes des solutions des équations différentielles linéaires complexes.

Ce mémoire est composé de deux chapitres. Dans le premier chapitre, on citera quelques notions sur la théorie de Rolf Nevanlinna et les définitions nécessaires pour notre travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'exposant de convergence $[p, q]$ de $f^{(i)} - \varphi$, où f est une solution de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_0 f = 0,$$

et φ est une fonction à petite croissance.

Chapitre 1

Element de la théorie de Nevanlinna

Notre objectif dans ce chapitre est de donner les définitions de base de la théorie de Nevanlinna les fonctions méromorphes..

Définition 1.1 *Une fonction méromorphe est une fonction holomorphe dans tout le plan complexe, sauf éventuellement sur un ensemble de points isolés dont chacun est un pôle pour la fonction. En pratique, on peut considèrer une fonction méromorphe comme le quotient de deux fonctions entières .*

Example :

Les fonctions $\frac{\sin(z)}{z}$ et $\frac{1}{\cos(z)}$ sont des fonctions méromorphes.

1 La formule de poisson-Jensen : La naissance de la théorie de Nevanlinna

Théorème 1.1 ([5],[10]) *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le disque $|z| \leq \mathrm{R}$ $(0 < \mathrm{R} < \infty)$ et soient $a_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ et $b_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ respectivement, les zéros et les pôles de $f(z)$ dans $|z| < \mathrm{R}$, chaque zéros et pôles étant comptés selon leurs multiplicités. Si $z = re^{i\theta}$ est un point dans $|z| < \mathrm{R}$ distinct de a_j et b_k alors*

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\mathrm{R}e^{i\phi})| \frac{\mathrm{R}^2 - r^2}{\mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}r\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \log\left|\frac{\mathrm{R}(z - a_j)}{\mathrm{R}^2 - \overline{a_j}z}\right| - \sum_{k=1}^{n} \log\left|\frac{\mathrm{R}(z - b_k)}{\mathrm{R}^2 - \overline{b_k}z}\right| \tag{1.2}$$

Preuve. On pose

$$\mathrm{F}(\zeta) = f(\zeta)\frac{\prod_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{R}(\zeta - b_k)}{\mathrm{R}^2 - \overline{b_K}\zeta}}{\prod_{j=1}^{m} \frac{\mathrm{R}(\zeta - a_j)}{\mathrm{R}^2 - \overline{a_j}\zeta}}. \tag{1.3}$$

Alors $\mathrm{F}(\zeta)$ n'a pas de zéros et de pôles dans $|z| \leq \mathrm{R}$ et donc elle est analytique sur $|z| \leq \mathrm{R}$.

Choisissons une branche analytique de $\log\mathrm{F}(z)$ dans $|\zeta| \leq \mathrm{R}$ et en utilisant la formule de poisson, nous avons

$$\log\mathrm{F}(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\mathrm{F}(\mathrm{R}e^{i\phi}) \frac{\mathrm{R}^2 - r^2}{\mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}r\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi.$$

En prenant les parties réelles et en utilisant $Re(\log F(\zeta)) = \log|F(\zeta)|$, nous obtenons

$$\log|F(\zeta)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|F(Re^{i\phi})\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta-\phi) + r^2} d\phi. \tag{1.4}$$

Des équations (1.3) et (1.4), on trouve

$$\log\left|f(\zeta)\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|F(Re^{i\phi})\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\phi) + r^2} d\phi$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\log\left|\frac{R(\zeta-a_j)}{R^2-\overline{a_j}\zeta}\right| - \sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{R(\zeta-b_k)}{R^2-\overline{b_k}\zeta}\right|. \tag{1.5}$$

Ainsi, pour $\zeta = Re^{i\theta}$ et $|a| < R$, nous avons

$$\left|\frac{R(\zeta-a)}{R^2-\overline{a}\zeta}\right| = 1,$$

ce qui implique que

$$\log\left|\frac{R(\zeta-a)}{R^2-\overline{a}\zeta}\right| = 0,$$

pour $|\zeta| = R$ et ainsi de la formule (1.4) on obtient : $\log|F(\zeta)| = \log\left|f(\zeta)\right|$. De celà et de la relation(1.5), on obtient

$$\log\left|f(z)\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(Re^{i\phi})\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\phi) + r^2} d\phi$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\log\left|\frac{R(z-a_j)}{R^2-\overline{a_j}z}\right| - \sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{R(z-b_k)}{R^2-\overline{b_k}z}\right|,$$

en particulier pour $z = 0$, on obtient

$$\log\left|f(0)\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(Re^{i\phi})\right| d\phi + \sum_{j=1}^{m}\log\left|\frac{a_j}{R}\right| - \sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{b_k}{R}\right|.$$

■

Définition 1.2 ([5][10]) *Pour tout nombre réel $x \geq 0$, nous définissons*

$$\log^+ x = \max(\log x, 0) = \begin{cases} \log x & si\ x \geq 1 \\ 0 & si\ 0 \leq x < 1 \end{cases}.$$

Proposition 1.1 ([5]) *1.* $\log x \leq \log^+ x$ *pour* $x \geq 0$;

2. $\log^+ x \leq \log^+ y$ *pour* $x \leq y$;

3. $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$;

4. $\left|\log x\right| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}$;

5. $\log^+ \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \log^+ x_k$;

6. $\log^+ (\sum\limits_{k=1}^{n} x_k) \le \sum\limits_{k=1}^{n} \log^+ x_k + \log n$;

On définit maintenant les symbôles O et o.

Définition 1.3 ([16]) *Soient $f(r)$ et $g(r)$ des fonctions définies sur $[a,\infty)$ avec $f(r)$ une fonction complexe et $g(r)$ une fonction réelle et positive. On dit que $f(r) = \mathrm{O}(g(r))$ quand $r \to \infty$, s'il existe des constantes c, r_0 telles que $\left|f(r)\right| \le c\left|g(r)\right|$, $\forall r \ge r_0$. On dit que $f(r) = o(g(r))$, si $\frac{f(r)}{g(r)} \to 0$ quand $r \to \infty$.*

Exemple 1.1 $\sin(r) = o(r)$, *et* $\tanh(r) = \mathrm{O}(1)$, $r \to \infty$.

En utilisant la formule de Jensen et les définitions citées ci-dessus, Nevanlinna a révolutionné l'étude des fonctions méromorphes. Il l'a fait tout au long d'une série de publication en 1922-1925 à l'age de 26 ans.

Définition 1.4 ([5][16][23]) *Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t,a,f)$ le nombre de racines de l'equation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \le t$. Chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité et par $n(t,\infty,f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z| \le t$. Posons*

$$\mathrm{N}(r,a,f) = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt + n(0,a,f)\log r,\ a \neq 0,$$

$$\mathrm{N}(r,f) = \mathrm{N}(r,\infty,f) = \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt + n(0,\infty,f)\log r,$$

$$m(r,a,f) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{\left|f(re^{i\theta}) - a\right|} d\theta,\ a \neq \infty,$$

$$\textit{et}\ \ m(r,f) = m(r,\infty,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta$$

$\mathrm{N}(r,a,f)$ *est appelée fonction a-point de la fonction f dans le disque $|z| \le \mathrm{R}$ et $m(r,a,f)$ est dite la fonction de proximité de f. Ainsi, on peut définir la fonction caractéristique de Nevanlinna $\mathrm{T}(r,f)$ par la relation suivante*

$$\mathrm{T}(r,f) = m(r,f) + \mathrm{N}(r,f).$$

Exemple 1.2 *Soit $f(z) = e^z$. Nous avons $n(t,\infty,f) = 0$, car f n'admet pas de pôles. D'où* $\mathrm{N}(r,f) = 0$. *De plus, on a*

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|e^{re^{i\theta}}\right| d\theta,$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|e^{r\cos\theta}\right| d\theta,$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta d\theta = \frac{r}{\pi},$$

par conséquent

$$T(r, f) = \frac{r}{\pi}.$$

Exemple 1.3 *Soit* $f(z) = e^{a_n z^n}$*, avec* a_n *est un nombre complexe non nul.*

Posons $a_n = |a_n| e^{i\theta}$*,*$z = re^{i\theta}$*. Alors*

$$\left|f(z)\right| = e^{|a_n| r^n \cos(n\theta+\varphi)},$$

par conséquent

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(n\theta+\varphi)} d\theta.$$

Par un changement de variable, $u = n\theta + \varphi$*, on obtient*

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi n} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi n} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos u} du$$

$$= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos u} du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos u} du$$

$$= \frac{|a_n| r^n}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = \frac{|a_n|}{\pi} r^n$$

comme f *est entière, alors*

$$T(r, f) = m(r, f) = \frac{|a_n|}{\pi} r^n.$$

2 Premier Théorème Fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.2 ([5][16][23]) *Soit f une fonction méromorphe et soit*

$$f(z)-a=\sum_{i=m}^{\infty} \mathrm{C}_i z^i, \mathrm{C}_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{C},$$

le développent de laurent de $f-a$ à l'origine. Alors

$$\mathrm{T}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)=\mathrm{T}(r, f)-\log|\mathrm{C}_m|+\varphi(r, a).$$

où

$$|\varphi(r, a)| \leq \log 2+\log^+|a|.$$

Remarque 1.1 *Le premier théorème fondamental de R.Nevanlinna peut être formulé comme suit*

$$\mathrm{T}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)=\mathrm{T}(r, f)+\mathrm{O}(1), (r \to \infty)$$

pour tout $a \in \mathbb{C}$.

Preuve. Soit $h(z)=f(z)-a$, alors $\mathrm{N}(r, h)=\mathrm{N}(r, f)$. Comme

$$\log^+|h|=\log^+|f-a| \leq \log^+|f|+\log^+|a|+\log(2),$$

et

$$\log^+|f|=\log^+|f-a+a| \leq \log^+|f-a|+\log^+|a|+\log(2),$$

alors l'intégration de ces inégalités donc

$$m(r, h) \leq m(r, f)+\log^+|a|+\log(2),$$

et

$$m(r, f) \leq m(r, h)+\log^+|a|+\log(2).$$

Donc

$$\varphi(r, a)=m(r, h)-m(r, f),$$

vérifie

$$|\varphi(r, a)| \leq \log^+|a|+\log(2).$$

Maintenant, en appliquant la formule de Jensen à h nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\left(r, \frac{1}{h}\right) &= \mathrm{T}(r, h)-\log|\mathrm{C}_m| \\ &= m(r, f)+\mathrm{N}(r, f)-\log|\mathrm{C}_m|+\varphi(r, a) \\ &= \mathrm{T}(r, f)-\log|\mathrm{C}_m|+\varphi(r, a). \end{aligned}$$

■

Proposition 1.2 ([5][16]) *Soient $f, f_1, \cdots, f_n$ des fonctions méromorphes et, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ telles que, $ad-bc \neq 0$.Alors*

1. $\mathrm{T}\left(r, \prod_{k=1}^{n} f_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{T}(r, f_k)$, $n \geq 1$
2. $\mathrm{T}(r, f^n)=n\mathrm{T}(r, f), n \in \mathbb{N}$
3. $\mathrm{T}\left(r, \sum_{k=1}^{n} f_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{T}(r, f_k)+\log(n)$, $n \geq 1$
4. $\mathrm{T}\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right)=\mathrm{T}(r, f)+\mathrm{O}(1)$ *en supposant que* $f \neq -\frac{d}{c}$.

Pour avoir plus finement la croissance des fonctions entières et méromorphes, on est amené à définir l'ordre, le type et l'exposant de convergence.

2.1 L'ordre, type et l'exposant de convergence d'une fonction méromorphe.

Définition 1.5 ([5][10][16]) *Soit f une fonction méromorphe alors l'ordre de croissance de f est défini par*

$$\sigma(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

Si f est une fonction entière, alors l'ordre de cette fonction est défini par

$$\sigma(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log M(r,f)}{\log r}.$$

Où $M(r,f)=\max\limits_{|z|=r}\left|f(z)\right|$.

Exemple 1.4 *1) Soit $f(z)=\cos(az^2)$, $a\in\mathbb{C}*$, donc*

$$\begin{aligned}
M(r,f) &= \max_{|z|=r}\left|f(z)\right| \\
&= \max_{|z|=r}\left|\cos(az^2)\right| \\
&= \max_{|z|=r}\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(az^2)^n}{(2n)!}\right| \\
&\le \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|a|^{2n}r^{4n}}{(2n)!}=\cosh(|a|r^2).
\end{aligned}$$

Soit $z_0=\sqrt{i}re^{\frac{-i\arg(a)}{2}}$. *Alors* $|z_0|=r$ *et*

$$\begin{aligned}
\left|f(z_0)\right| &= \left|\cos\left(|a|e^{i\arg(a)}ir^2e^{-i\arg(a)}\right)\right| \\
&= \cos(i|a|r^2) \\
&= \cosh(|a|r^2).
\end{aligned}$$

Donc

$$M(r,f)=\cosh(|a|r^2),$$

et par suite

$$\begin{aligned}
\sigma(f) &= \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log M(r,f)}{\log r} \\
&= \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log(\cosh(|a|r^2))}{\log r} \\
&= \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log\left(\frac{e^{|a|r^2}}{2}\right)}{\log r},\ \textit{car}\ \cosh(|a|r^2)\sim\frac{e^{|a|r^2}}{2},\ r\to+\infty, \\
&= \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log(|a|r^2-\log(2))}{\log r} \\
&= \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\left(|a|r^2\left(1-\frac{\log(2)}{|a|r^2}\right)\right)}{\log r} \\
&= \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log(|a|)+2\log r+\log\left(1-\frac{\log(2)}{|a|r^2}\right)}{\log r} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

2) pour la fonction $g(z) = e^{a_n z^n}$, *où* $a_n \in \mathbb{C}$, *on obtient*

$$\sigma(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log \frac{|a_n| r^n}{\pi}}{\log r} = n.$$

Définition 1.6 ([5]) *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe vérifiants* $0 < \sigma(f) = \sigma < \infty$, *alors le type de* $f(z)$ *est défini par*

$$\tau(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{T(r,f)}{r^{\sigma}}.$$

Pour $f(z)$ *une fonction entière, on définit le type de* $f(z)$ *par*

$$\tau(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(r,f)}{r^{\sigma}},$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} \left|f(z)\right|$.

Exemple 1.5 *1) soit* $f(z) = e^z$. *Alors* $M(r,f) = e^r$, $\sigma(f) = 1$. *Donc*

$$\begin{aligned}\tau(f) &= \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(r,f)}{r^{\sigma(f)}} \\ &= \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log(e^r)}{r} \\ &= 1.\end{aligned}$$

2) Soit $g(z) = \cos(z)$. *Alors* $M(r,g) = \cosh(r) \sim \frac{e^r}{2}$, $r \to +\infty$, $\sigma(g) = 1$, *et par suite*

$$\begin{aligned}\tau(f) &= \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(r,g)}{r^{\sigma(g)}} \\ &= \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\left(\frac{e^r}{2}\right)}{r} \\ &= \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\left(r - \log(2)\right)}{r} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Proposition 1.3 ([5][11]) *Soient* f *et* g *des fonctions méromorphes . Alors*

1) $\sigma(f+g) \leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$.

2) $\sigma(fg) \quad \leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$.

Remarque 1.2 *Dans 1) et 2) si* $\sigma(f) < \sigma(g)$, *alors* $\sigma(fg) = \sigma(f+g) = \sigma(f)$.

2.2 Exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe

Définition 1.7 ([15]) *L'exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe* f *est défini par*

$$\lambda(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

et $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ *désigne le nombre de zéros de la fonction* f *situés dans le disque* $|z| \leq t$.

Exemple 1.6 *Soit* $f(z) = e^z$. *On a,* $n\left(t, \frac{1}{f}\right) = 0$, *donc* $\lambda(f) = 0$.

Exemple 1.7 *Soit* $f(z) = e^z - 2$. *On a*

$$e^z - 2 \Leftrightarrow z = \ln(2) + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Donc

$$\begin{aligned} |z| &< t \Longrightarrow \sqrt{(\ln(2))^2 + 4k^2\pi^2} < t \\ &\Longrightarrow \frac{-\sqrt{t^2 - (\ln(2))^2}}{2\pi} < k < \frac{\sqrt{t^2 - (\ln(2))^2}}{2\pi} \\ &\Longrightarrow n\left(t, \frac{1}{f}\right) \sim \frac{\sqrt{t^2 - (\ln(2))^2}}{\pi} \sim \frac{t}{\pi},\ t \longrightarrow +\infty \\ &\Longrightarrow \mathrm{N}\left(t, \frac{1}{f}\right) = \frac{r}{\pi} + \mathrm{O}(1). \end{aligned}$$

D'où $\lambda(f) = 1$.

Définition 1.8 ([15]) *L'exposant de convergence des zéros distincts d'une fonction méromorphe f est défini par*

$$\overline{\lambda}(f) = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log \overline{\mathrm{N}}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

où

$$\overline{\mathrm{N}}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r$$

et $\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right)$ *désigne le nombre de zéros distincts de la fonction f situés dans le disque* $|z| \le t$.

Exemple 1.8 *On pose* $f(z) = \frac{(z-1)^2(z-2)^6}{(z-3)^5}$.
On a $\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) = 2$ *et* $\overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right) = 0$. *Donc* $\overline{\lambda}(f) = 0$.

Proposition 1.4 (Relation entre l'exposant de convergence et l'ordre) *[16]*
Pour toute fonction méromorphe $f \neq 0$, *on a*

$$\lambda(f) \le \sigma(f).$$

3 Indice de défaut de Nevanlinna

En 1929, Nevanlinna a généralisé le théorème de picard et il a introduit une quantité noté $\delta(a, f)$ pour mesurer le degré d'une fonction méromorphe pour lequel cette fonction rate une valeur a.

Définition 1.9 ([23]) *L'indice de défaut de Nevanlinna* $\delta(a) = \delta(a, f)$ *de la valeur a est défini par*

$$\delta(a, f) = \lim_{r\to+\infty} \inf \frac{m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{\mathrm{T}(r, f)} = 1 - \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{\mathrm{T}(r, f)}.$$

Si $\delta(a, f) > 0$ *alors a est appelée la valeur de défaut de f. Elle est aussi appelée valeur exceptionnelle au sens de Nevanlinna.*

Remarque 1.3 *On a toujours* $0 \leq \delta(a, f) \leq 1$.

Exemple 1.9 *Soit la fonction rationnelle*

$$f(z) = \frac{a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \cdots + a_0}{b_q z^q + b_{q-1} z^{q-1} + \cdots + b_0}.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(r, f) &= q \log r, \\ \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) &= p \log r, \end{aligned}$$

et

$$\mathrm{T}(r, f) = \max\{p, q\} \log r + \mathrm{O}(1).$$

Soit a un nombre complexe. Comme

$$f(z) - a = \frac{(a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \cdots + a_0) - a(b_q z^q + b_{q-1} z^{q-1} + \cdots + b_0)}{b_q z^q + b_{q-1} z^{q-1} + \cdots + b_0},$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &= \max\{p, q\} \log r, \ \textit{pour } p \neq q, \\ \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &= p \log r, \ \textit{pour } p = q, \ \textit{et } a_p \neq a b_q, \end{aligned}$$

et

$$\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \leq (p-1) \log r, \ \textit{pour } p = q, \ \textit{et } a_p = a b_q.$$

Alors, pour les fonctions rationnelles, on obtient les propriétés suivants :

1) Si $p > q$: ∞ *est l'unique valeur de défaut de* f.

2) Si $p < q$: 0 *est l'unique valeur de défaut de* f.

3) Si $p = q$: $\frac{a_p}{bq}$ *est l'unique valeur de défaut de* f.

3.1 La notion d'ordre $p-$itératif d'une fonction méromorphe

Si l'hyper-ordre d'une fonction entière où méromorphe est infini, alors on peut définir l'ordre $p-$itératif.

Pour tout $r \in \mathbb{R}$, on définit $\exp_1 r := e^r$ et $\exp_{p+1} r = \exp(\exp_p r)$, $p \in \mathbb{N}$. On définit aussi pour tout r suffisamment grand $\log_1 r := \log r$ et $\log_{p+1} r := \log(\log_p r)$, $p \in \mathbb{N}$. On note $\exp_0 r := r$, $\log_0 r := r$, $\log_{-1} r := \exp_1 r$ et $\exp_{-1} r := \log_1 r$.

En 1998, L. Kinnunen a donné la définition suivante de l'ordre $p-$itératif.

Définition 1.10 ([15]) *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe dans le plan complexe. On définit l'ordre* $p-$ *itératif de croissance de* f *par*

$$\sigma_p(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log_p \mathrm{T}(r, f)}{\log r}, \ (p \geq 1 \textit{ est un entier}),$$

et si f *est entière, alors*

$$\sigma_p(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log_{p+1} \mathrm{M}(r, f)}{\log r}, \ (p \geq 1 \textit{ est un entier}),$$

où $\mathrm{M}(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Exemple 1.10 1) *Soit* $g(z) = \frac{e^{e^{\sin(z)}}}{\cos(z)}$. *Alors* $\sigma_3(g) = 1$.

2) *Soit* $f(z) = \exp_q(z^2)$. *Alors* $\sigma_p(f) = \begin{cases} +\infty \text{ si } p < q, \\ 2 \text{ si } p = q, \\ 0 \text{ si } p > q. \end{cases}$

Définition 1.11 ([20]) *Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\sigma_p(f) = \sigma < \infty$, on définit le type $p-$itératif de $f(z)$ par*

$$\tau_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p M\left(r, f\right)}{\log r}, \ (p \geq 1 \text{ est un entier}).$$

4 L'exposant de convergence $p-$itératif

En 1998, Lisa Kinunnen a définit l'exposant de convergence $p-$itératif.

Définition 1.12 ([15]) *L'exposant de convergence p− itératif des zéros d'une fonction méromorphe $f(z)$ est défini par*

$$\lambda_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}, \ (p \geq 1 \text{ est un entier}),$$

et L'exposant de convergence p− itératif des zéros distincts d'une fonction méromorphe $f(z)$ est défini par

$$\overline{\lambda}_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}, \ (p \geq 1 \text{ est un entier}).$$

Exemple 1.11 *Soit* $f(z) = e^{e^z} + 3$, *donc* $\overline{\lambda}(f) = +\infty$, *et* $\overline{\lambda}_2(f) = 1$.

5 La notion d'ordre $[p, q]$-itératif d'une fonction

Définition 1.13 ([17]) *Soient p, q des entiers positifs vérifiant $p \geq q \geq 1$, et $f(z)$ est une fonction méromorphe. Alors l'ordre $[p, q]$ de $f(z)$ est défini par*

$$\sigma_{[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p T(r, f)}{\log_q r}.$$

Pour $f(z)$ une fonction entière, on définit l'ordre $[p, q]$ de $f(z)$ par

$$\sigma_{[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{p+1} M(r, f)}{\log_q r},$$

où $M(r, f) = \max_{|z|=r} \left|f(z)\right|$.

Remarque 1.4 *Pour $r \in [1, \infty)$ est suffisamment large, on définit* $\log_{i+1} r = \log_i(\log r)$, $(i \in \mathbb{N})$ *et* $\exp_{i+1} r = \exp_i(\exp r)$, $(i \in \mathbb{N})$, *et* $\exp_0 r = r = \log_0 r$, $\exp_{-1} r = \log r$.

Exemple 1.12 (page 7,[10]) *Pour la fonction* $f(z) = e^{e^z}$, *on a*

$$\mathrm{T}(r,f) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}}, r \to \infty.$$

D'où $\sigma_{[2,1]}(f) = 1$.

Exemple 1.13 *Soit* $g(z) = \exp_6 z^3$, *alors* $\sigma_{[6,1]}(g) = 3$ *et* $\sigma_{[7,2]}(g) = 1$.

Définition 1.14 ([17]) *Soient* p, q *des entiers positifs vérifiant* $p \geq q \geq 1$, *et* $f(z)$ *est une fonction méromorphe telle que* $0 < \sigma_{[p,q]}(f) = \sigma < \infty$, *alors le type* $[p,q]$ *de* $f(z)$ *est défini par*

$$\tau_{[p,q]} = \tau_{[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{p-1} \mathrm{T}(r,f)}{(\log_{q-1} r)^{\sigma}}.$$

Si $f(z)$ *est une fonction entière, on définit le type* $[p,q]$ *de* $f(z)$ *par*

$$\tau_{[p,q]} = \tau_{[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p \mathrm{M}(r,f)}{(\log_{q-1} r)^{\sigma}},$$

où $\mathrm{M}(r,f) = \max_{|z|=r} \left| f(z) \right|$.

Définition 1.15 ([17]) *Soit* $f(z)$ *est une fonction entière. L'exposant de convergence* $[p,q]$ *des zéros de* $f(z)$ *est défini par*

$$\lambda_{[p,q]} = \lambda_{[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p n\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log_q r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log_q r}$$

et l'exposant de convergence $[p,q]$ *des zéros distincts de* $f(z)$ *est défini par*

$$\overline{\lambda}_{[p,q]} = \overline{\lambda}_{[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p \overline{n}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log_q r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p \overline{\mathrm{N}}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log_q r}.$$

Si $\varphi(z)$ *est une fonction entière telle que* $\sigma_{[p,q]}(\varphi) < \sigma_{[p,q]}(f)$, *alors l'exposant de convergence* $[p,q]$ *des zéros et des zéros distincts de* $f(z)$ *est défini par*

$$\lambda_{[p,q]}(f-\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f-\varphi}\right)}{\log_q r}, \overline{\lambda}_{[p,q]}(f-\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p \overline{\mathrm{N}}\left(r, \frac{1}{f-\varphi}\right)}{\log_q r}$$

6 Mesure et densité

Définition 1.16 ([16]) *On définit la mesure linéaire d'un ensemble* $\mathrm{E} \subset [0, +\infty)$ *par*

$$m(\mathrm{E}) = \int_0^{+\infty} \chi_{\mathrm{E}}(t)\,dt$$

où χ_{E} *est la fonction caractéristique de l'ensemble* E.
Les densités supérieures et inférieures de l'ensemble E sont respectivement défini par

$$\overline{dens}\mathrm{E} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m(\mathrm{E} \cap [0,r])}{r}$$

$$\underline{dens}\mathrm{E} = \underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{m(\mathrm{E} \cap [0,r])}{r}$$

Exemple 1.14 *1) La mesure linéaire de l'ensemble* $E = [1, e] \cup [5, 8] \subset [0, \infty]$, *est* $m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)dt = \int_1^e dt + \int_5^8 dt = e + 2.$

2) La densité supérieure de l'ensemble $E = [1, +\infty)$ *est*

$$\overline{dens}E = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m(E \cap [0, r])}{r} = 1.$$

Définition 1.17 ([16]) *La mesure logarithmique d'un ensemble* $F \subset [1, +\infty)$ *est défini par*

$$m_l(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt$$

où χ_F *est la fonction caractéristique de l'ensemble* F.

Les densités logarithmiques supérieures et inférieures l'ensemble F *sont respectivement définies par*

$$\overline{\log dens}F = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m_l(F \cap [1, r])}{\log r}$$

$$\underline{\log dens}F = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m_l(F \cap [1, r])}{\log r}$$

Exemple 1.15 *1) La mesure logarithmique de l'ensemble* $F = [1, e^2] \subset [1, \infty)$ *est*

$$m_l(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt = \int_1^{e^2} \frac{dt}{t} = 2.$$

2) La densité logarithmique supérieure de l'ensemble $F = [e, +\infty)$ *est*

$$\overline{\log dens}F = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m_l(F \cap [1, r])}{\log r} = 1.$$

Lemme 1.1 (la dérivée logarithmique) *[5]*

Soit f *une fonction méromorphe transcendante. Alors*

$$m(r, \frac{f'}{f}) = S(r, f) = o(T(r, f)),$$

où

$$S(r, f) = O(\log T(r, f) + \log r),$$

à l'extérieure d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ *de mesure linéaire finie.*

Si f *est d'ordre finie, alors*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log r).$$

Corollaire 1.1 ([9]) *Soit* f *une fonction méromorphe transcendante et* $k \geq 1$ *un nombre entier. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r, f),$$

où

$$S(r, f) = O(\log T(r, f) + \log r)$$

à l'extérieure d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ *de mesure linéaire finie*

Si f *est d'ordre finie alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r).$$

Preuve.

On démontre par récurrence.

Le corollaire est vrai pour $k = 1$.

On suppose qu'il est vrai pour k et on montre qu'il est vrai pour $k+1$.

On a

$$m(r, f^{(k)}) = m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f} f\right) \leq m(r, f) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = m(r, f) + S(r, f).$$

Si f admet un pôle d'ordre λ en z_0, alors $f^{(k)}$ admet un pôle d'ordre $\lambda + k$ et on peut majorer l'ordre $\lambda + k \leq (k+1)\lambda$.

Donc

$$N(r, f^{(k)}) \leq (k+1)N(r, f).$$

D'où

$$\begin{aligned} T(r, f^{(k)}) &= m(r, f^{(k)}) + N(r, f^{(k)}) \\ &\leq m(r, f) + S(r, f) + (k+1)N(r, f) \\ &\leq (k+1)T(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right) &= m\left(r, \frac{(f^{(k)})'}{f^{(k)}}\right) = S(r, f^{(k)}) \\ &= O(\log T(r, f^{(k)}) + \log r) \\ &= O(\log T(r, f) + \log r) \\ &= S(r, f). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right) &= m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}} \frac{f^{(k)}}{f}\right) \\ &\leq m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) \\ &= S(r, f). \end{aligned}$$

Ainsi

$$m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right) = S(r, f).$$

■

Chapitre 2

Croissance et Oscillation Des Solutions Des équations Différentielles Linéaires à Coefficients Méromorphes D'ordre [p,q]

1 Historique

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions entières et méromorphes des équations différentielles linéaires à coefficients méromorphes d'ordre $[p,q]$ de la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_0 f = 0. \tag{2.1}$$

où A_j $(j = 0, \cdots, k-1)$, $(k \geq 2)$ sont des fonctions entières ou méromorphes.

Pour l'équation différentielle du second ordre

$$f'' + A(z)f' + B(z)f = 0 \tag{2.2}$$

où $A(z)$ et $B(z)$ $(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières, c'est intéressant d'étudier l'oscillation complexe des solutions de l'équation (2.2). De nombreux résultats importants en analysant cette équation. En 1996, Kwon([14]) à étudié l'hyper-ordre des solutions de l'équation (2.2) et a obtenu les résultats suivants.

Théorème 2.1 ([14]) *Soient* $A(z)$ *et* $B(z)$ *sont des fonctions entières telles que* $\sigma(A) < \sigma(B)$ *ou* $\sigma(B) < \sigma(A) < \frac{1}{2}$*, alors toute solution* $f \not\equiv 0$ *de* (2.2) *vérifie*

$$\sigma_2(f) \geq \max\{\sigma(A), \sigma(B)\}.$$

En 2006 Chen et Shon ([7]) ont étudié les zéros des solutions de l'équation (2.2) en relation avec les fonctions à petite croissance et les points fixes et ont obtenu quelques résultats comme suit.

Théorème 2.2 ([7]) *Soient* $A_j(z)(\not\equiv 0)(j = 1,2)$ *des fonctions entières avec* $\sigma(A_j) < 1$*, on suppose que* a, b *sont des nombres complexes vérifiant* $ab \neq 0$ *et* $\arg a \neq \arg b$ *ou* $a = cb$ $(0 < c < 1)$*, si* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *est une fonction entière d'ordre fini, alors toute solution non-triviale* f *de l'équation*

$$f'' + A_1(z)e^{az}f' + A_2(z)e^{bz}f = 0$$

vérifie

$$\overline{\lambda}(f - \varphi) = \overline{\lambda}(f' - \varphi) = \overline{\lambda}(f'' - \varphi) = \infty.$$

Théorème 2.3 ([7]) *Soient* $A_1(z)(\neq 0), \varphi(z) \neq 0, Q(z)$ *des fonctions entières avec* $\sigma(A_1) < 1$, $1 < \sigma(Q) < \infty$, *et* $\sigma(\varphi) < \infty$, *alors toute solution non-triviale de l'équation*

$$f^{''} + A_1(z)e^{az}f' + Q(z)f = 0,$$

vérifie

$$\overline{\lambda}(f-\varphi) = \overline{\lambda}(f^{'}-\varphi) = \overline{\lambda}(f^{''}-\varphi) = \infty,$$

avec $a \neq 0$, *un nombre complexe*

En 2012, Wu et Chen ([22]) ont étudié les points fixes des solutions des équations différentielles du second ordre avec des coefficients fonctions entières transcendantes et ont obtenu les théorèmes suivants.

Théorème 2.4 ([22]) *Soient* $A_j(z) \neq 0$, $(j = 0,1)$ *des fonctions entières,* $p(z)$ *un polynôme vérifiant* $\sigma(A_1) < \deg p(z)$ *et* $0 < \sigma(A_0) < \frac{1}{2}$, *et soit* $\varphi(z) \neq 0$ *une fonction entière d'ordre fini. Alors toute solution non triviale de l'équation*

$$f^{''} + A_1(z)e^{p(z)}f' + A_0(z)f = 0$$

vérifie $\overline{\lambda}(f-\varphi) = \infty$.

Théorème 2.5 ([22]) *D'après les hypothèses du Théorème 3.4, toute solution non triviale* f *de l'équation*

$$f^{''} + A_1(z)e^{p(z)}f^{'} + A_0(z)f = 0.$$

satisfait

i) $\overline{\lambda}(f-z) = \overline{\lambda}(f^{'}-z) = \overline{\lambda}(f^{''}-z) = \sigma(f) = \infty$;

ii) $g(z)$ *admet une infinité de points fixes et* $\overline{\lambda}(g-z) = \infty$, $g(z) = d_0f(z) + d_1f(z) + d_2f(z), d_0d_2 \neq 0$.

Un sujet intéressant se pose naturellement sur les problèmes des zéros concernant les fonctions à petites croissance et les points fixes des solutions de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_0f = 0. \tag{2.3}$$

avec $A_j(z)$, $(j = 0,1,\ldots,k-1)$ sont des fonctions entières.
En 2000, Belaïdi [13], Belaïdi et Elfarissi ([6], voir aussi ([8],[18],[19]) ont étudié les points fixes et la relation entre les fonctions à petite croissance et les polynômes différentielles des solutions de l'équation (2.3) et ont obtenu des résultats qui améliorent le Théorème 3.3.

2 Résultats

Récemment, la croissance des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre suppérieur à coefficients méromorphes d'ordre $[p,q]$ a été étudié et des résultats intéressants ont été obtenus par J. Liu, J. Tu; and L.Z. Shi en [4], [17].

Théorème 2.6 ([17]) *Soient* $A_j(z), (j = 0,1,\cdots,k-1)$ *des fonctions entières d'ordre fini et vérifiant une des conditions suivantes*

i) $\max\{\sigma_{[p,q]}(A_j) : j = 1,2,\cdots,k-1\} < \sigma_{[p,q]}(A_0) < \infty$;

ii) $\max\{\sigma_{[p,q]}(A_j) : j = 1,2,\cdots,k-1\} \leq \sigma_{[p,q]}(A_0) < \infty$; *et*

$\max\{\tau_{[p,q]}(A_j)|\sigma_{[p,q]}(A_j) = \sigma_{[p,q]}(A_0) > 0, j = 1,2,\cdots,k-1\} = \tau_1 < \tau_{[p,q]}(A_0) = \tau$. *Alors toute solution* $(f \neq 0)$ *de l'équation* (2.3)*, et pour toute fonction entière* $\varphi(z) \neq 0$.

vérifiant $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A_0)$ *on obtient*

$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f-\varphi) = \overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f'-\varphi) = \overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f''-\varphi) = \overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f^{(i)}-\varphi) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma(A_0)$, $(i \in \mathbb{N})$.

Théorème 2.7 ([17]) *Soient* $A_j(z)$, $j = 0,\cdots,k-1$ *des fonctions méromorphes vérifiant* $\max\{\sigma_{[p,q]}(A_j) : j = 1,\ldots,k-1\} < \sigma_{[p,q]}(A_0)$ *et* $\delta(\infty, A_0) > 0$. *Alors pour toute solution méromorphe* $(f \neq 0)$ *de l'équation* (2.3) *et pour toute fonction méromorphe* $\varphi(z) \neq 0$ *vérifiant* $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A_0)$ *on obtient*

$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f^{(i)}-\varphi) = \lambda_{[p+1,q]}(f^{(i)}-\varphi) \geq \sigma_{[p,q]}(A_0)$ $(i = 0,1,\ldots)$, *où* $f^{(0)} = f$.

Exemple 2.1 *Pour l'équation*

$$f'' + \frac{e^{2z}+e^z-1}{1-e^z} f' + \frac{-e^{2z}}{1-e^z} f = 0.$$

Nous pouvons facilement obtenir de cette équation une solution $f(z) = e^{e^z} + z$, *et les coefficients* $\frac{e^{2z}+e^z-1}{1-e^z}$, $\frac{-e^{2z}}{1-e^z}$ *sont méromorphes et vérifient* $\delta(\infty, \frac{-e^{2z}}{1-e^z}) = \frac{1}{2}$, *on prend* $\varphi(z) = e^z$, *alors* $\sigma_{[2,1]}(\varphi) < \sigma_{[1,1]}(\frac{-e^{2z}}{1-e^z})$. *Ainsi on obtient*

$$\overline{\lambda}_{[2,1]}(f'-\varphi) = \overline{\lambda}_{[2,1]}(e^{e^z}e^z) = 0 \neq 1 = \sigma_{[1,1]}(\frac{-e^{2z}}{1-e^z}).$$

Des Théorèmes 3.6 et 3.7, si $\varphi(z) = z$, nous avons les corollaires suivants.

Corollaire 2.1 ([17]) *Sous les hypothèses du Théorème 3.6, si* $\varphi(z) = z$. *Alors toute solution* $f \neq 0$ *de l'équation* (2.3)*, on a*

$$\begin{aligned}\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f-z) &= \overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f'-z) = \overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f''-z)\\ &= \overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f^{(i)}-z) = \sigma_{[p+1,q]}(f)\\ &= \sigma(A_0).\end{aligned}$$

Corollaire 2.2 ([17]) *Sous les hypothèses du Théorème 3.7, si* $\varphi(z) = z$, *alors pour toute solution méromorphe* $f \neq 0$ *de l'équation* (2.3)*, on a*

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f^{(i)}-z) = \lambda_{[p+1,q]}(f^{(i)}-z) \geq \sigma_{[p+1,q]}(A_0), (i \in \mathbb{N}), \textit{avec } f^{(0)} = f.$$

3 Lemmes préliminaires

Lemme 2.1 ([22]) *On suppose que* $f \neq 0$ *est une solution de l'équation* (2.3)*. On pose* $g = f - \varphi$, *alors* g *vérifie l'équation suivante*

$$g^{(k)} + A_{k-1}g^{(k-1)} + \cdots + A_0 g = -[\varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_0\varphi]. \tag{2.4}$$

Preuve. Comme $g = f - \varphi$, alors on a $g^{(k)} = f^{(k)} - \varphi^{(k)}$, et donc $f^{(k)} = g^{(k)} + \varphi^{(k)}$ et en remplacant dans l'équation (2.3), on trouve

$$g^{(k)} + \varphi^{(k)} + A_{k-1}\left(g^{(k-1)} + \varphi^{(k-1)}\right) + A_{k-2}(g^{(k-2)} + \varphi^{(k-2)}) + \cdots + A_0(g+\varphi) = 0,$$

donc

$$[g^{(k)} + A_{k-1}g^{(k-1)} + A_{k-2}g^{(k-2)} + \cdots + A_0 g] + \varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + A_{k-2}\varphi^{(k-2)} \cdots + A_0\varphi = 0.$$

Alors

$$g^{(k)} + A_{k-1}g^{(k-1)} + A_{k-2}g^{(k-2)} + \cdots + A_0 g = -[\varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + A_{k-2}\varphi^{(k-2)} + \cdots + A_0\varphi],$$

d'où le resultat. ■

Lemme 2.2 ([22]) *On suppose que $f \neq 0$ est une solution de l'équation* (2.3)*, on pose $g_1 = f^{'} - \varphi$, alors g_1 vérifie l'équation suivante*

$$g_1^{(k)} + U_{k-1}^1 g_1^{(k-1)} + \cdots + U_0^1 g_1 = -[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^1\varphi^{(k-1)} + \cdots + U_0^1\varphi]. \tag{2.6}$$

Où $U_j^1 = A_{j+1}^{'} + A_j - \frac{A_0^{'}}{A_0}A_{j+1}$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$ *et* $A_k = 1$.

Preuve.

Comme $g_1 = f^{'} - \varphi$, alors $f^{'} = g_1 + \varphi$, d'où

$$f^{(k+1)} = g_1^{(k)} + \varphi^{(k)}. \tag{2.6}$$

On dérive l'équation (2.3), on obtient

$$f^{(k+1)} + (A_{k-1}^{'}(z)f^{(k-1)} + A_{k-1}(z)f^{(k)}) + (A_{k-2}^{'}(z)f^{(k-2)} + A_{k-2}(z)f^{(k-1)}) + \cdots$$

$$\cdots + (A_1^{'}(z)f^{'} + A_1(z)f^{''}) + (A_0^{'}(z)f + A_0(z)f^{'}) = 0,$$

et par suite

$$\begin{aligned} f^{(k+1)} + A_{k-1}(z)f^{(k)} + (A_{k-1}^{'}(z) + A_{k-2}(z))f^{(k-1)} + \cdots \\ \cdots + (A_1^{'}(z) + A_0(z))f^{'} + A_0^{'}(z)f = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

On peut écrire l'équation (2.3) sous la forme

$$f = -\frac{1}{A_0(z)}(f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f^{'}). \tag{2.8}$$

En remplacant (2.8) dans (2.7), on obtient

$$f^{(k+1)} + A_{k-1}(z)f^{(k)} + (A_{k-1}^{'}(z) + A_{k-2}(z))f^{(k-1)} + \cdots + (A_1^{'}(z) + A_0(z))f^{'}$$

$$+A_0^{'}(z)\left(-\frac{1}{A_0(z)}(f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f^{'})\right) = 0,$$

c'est à dire

$$f^{(k+1)} + A_{k-1}(z)f^{(k)} + (A_{k-1}^{'}(z) + A_{k-2}(z))f^{(k-1)} + \cdots + (A_1^{'}(z) + A_0(z))f^{'}$$

$$-\frac{A_0^{'}(z)}{A_0(z)}f^{(k)} - \frac{A_0^{'}(z)}{A_0(z)}A_{k-1}(z)f^{(k-1)} - \cdots - \frac{A_0^{'}(z)}{A_0(z)}A_1(z)f^{'} = 0,$$

d'où

$$f^{(k+1)} + \left(A_{k-1}(z) - \frac{A_0^{'}(z)}{A_0(z)}\right)f^{(k)} + \left(A_{k-1}^{'}(z) + A_{k-2}(z) - \frac{A_0^{'}(z)}{A_0(z)}A_{k-1}(z)\right)f^{(k-1)}$$

$$+\cdots+\left(A_1^{'}(z)+A_0(z)-\frac{A_0^{'}(z)}{A_0(z)}A_1(z)\right)f^{'}=0. \tag{2.9}$$

En remplacant (2.6) dans (2.8) on trouve

$$g_1^{(k)}+\varphi^{(k)}+\left(A_{k-1}(z)-\frac{A_0^{'}(z)}{A_0(z)}\right)(g_1^{(k-1)}+\varphi^{(k-1)})$$
$$+\left(A_{k-1}^{'}(z)+A_{k-2}(z)-\frac{A_0^{'}(z)}{A_0(z)}A_{k-1}(z)\right)(g_1^{(k-2)}+\varphi^{(k-2)})$$
$$+\cdots+\left(A_1^{'}(z)+A_0(z)-\frac{A_0^{'}(z)}{A_0(z)}A_1(z)\right)(g_1+\varphi)=0.$$

Alors

$$g_1^{(k)}+\left(A_{k-1}(z)-\frac{A_0^{'}(z)}{A_0(z)}\right)g_1^{(k-1)}+\left(A_{k-1}^{'}(z)+A_{k-2}(z)-\frac{A_0^{'}(z)}{A_0(z)}A_{k-1}(z)\right)g_1^{(k-2)}$$
$$+\cdots+\left(A_1^{'}(z)+A_0(z)-\frac{A_0^{'}(z)}{A_0(z)}A_1(z)\right)g_1+$$
$$\varphi^{(k)}+\left(A_{k-1}(z)-\frac{A_0^{'}(z)}{A_0(z)}\right)\varphi^{(k-1)}+\left(A_{k-1}^{'}(z)+A_{k-2}(z)-\frac{A_0^{'}(z)}{A_0(z)}A_{k-1}(z)\right)\varphi^{(k-2)}$$
$$+\cdots+\left(A_1^{'}(z)+A_0(z)-\frac{A_0^{'}(z)}{A_0(z)}A_1(z)\right)\varphi=0,$$

si on pose

$$U_j^1=A_{j+1}^{'}+A_j-\frac{A_0^{'}}{A_0}A_{j+1},\ \text{avec } j=0,\cdots,k-1.\ \text{et } A_k=1$$

on trouve

$$g_1^{(k)}+U_{k-1}^1g_1^{(k-1)}+\cdots+U_0^1g_1=-[\varphi^{(k)}+U_{k-1}^1\varphi^{(k-1)}+\cdots+U_0^1\varphi].$$

■

Lemme 2.3 (**[22]**) *On suppose que* $f\neq 0$ *est une solution de l'équation* (2.3). *On pose* $g_2=f^{''}-\varphi$*, alors* g_2 *vérifie l'équation suivante*

$$g_2^{(k)}+U_{k-1}^2g_2^{(k-1)}+\cdots+U_0^2g_2=-[\varphi^{(k)}+U_{k-1}^2\varphi^{(k-1)}+\cdots+U_0^2\varphi], \tag{2.10}$$

où $U_j^2=U_{j+1}^{'}+U_j-\frac{U_0^{'}}{U_0}U_{j+1}$, $j=0,1,\ldots,k-1$ *et* $U_k^1=1$.

Preuve.

Comme $g_2=f^{''}-\varphi$, alors $g_2^{(k)}=f^{(k+2)}-\varphi^{(k)}$, d'où

$$f^{(k+2)}=g_2^{(k)}+\varphi^{(k)}. \tag{2.11}$$

On dérive l'équation (2.9), on trouve

$$f^{(k+2)}+(U_{k-1}^{1'}(z)f^{(k)}+U_{k-1}^1(z)f^{(k+1)})+(U_{k-2}^{1'}(z)f^{(k-1)}+U_{k-2}^1(z)f^{(k)})+\cdots$$

$$+U_1^{1'}(z)f'' + U_1^1(z)f^{(3)} + U_0^{1'}(z)f' + U_0^1(z)f'' = 0,$$

et par suite

$$f^{(k+2)} + U_{k-1}^1(z)f^{(k+1)} + (U_{k-1}^{1'}(z) + U_{k-2}^1(z))f^{(k)} + (U_{k-2}^{1'}(z) + U_{k-3}^1(z))f^{(k-1)} + \cdots$$
$$+ (U_1^{1'}(z) + U_0^1(z))f'' + U_0^{1'}(z)f' = 0. \tag{2.12}$$

On peut écrire l'équation (2.9) sous la forme

$$f' = -\frac{1}{U_0^1(z)}(f^{(k+1)} + U_{k-1}^1(z)f^{(k)} + \cdots + U_1^1 f''), \tag{2.13}$$

en remplacant (2.13) dans (2.12), on obtient

$$f^{(k+2)} + U_{k-1}^1(z)f^{(k+1)} + (U_{k-1}^{1'}(z) + U_{k-2}^1(z))f^{(k)} + (U_{k-2}^{1'}(z) + U_{k-3}^1(z))f^{(k-1)} + \cdots$$
$$+(U_1^{1'}(z) + U_0^1(z))f'' + U_0^{1'}(z)\left(-\frac{1}{U_0^1(z)}(f^{(k+1)} + U_{k-1}^1(z)f^{(k)} + \cdots + U_1^1(z)f'')\right) = 0,$$

d'où

$$f^{(k+2)} + \left(U_{k-1}^1(z) - \frac{U_0^{1'}}{U_0^1}\right)f^{(k+1)} + \left(U_{k-1}^{1'}(z) + U_{k-2}^1(z) - \frac{U_0^{1'}(z)}{U_0^1(z)}U_{k-1}^1(z)\right)f^{(k)}$$
$$+\left(U_{k-2}^{1'}(z) + U_{k-3}^1(z) - \frac{U_0^{1'}(z)}{U_0^1(z)}U_{k-2}^1(z)\right)f^{(k-1)} + \cdots$$
$$+\left(U_1^{1'}(z) + U_0^1(z) - \frac{U_0^{1'}(z)}{U_0^1(z)}U_1^1(z)\right)f'' = 0.$$

On pose

$$U_j^2 = U'_{j+1} + U_j^1 - \frac{U_0^{1'}}{U_0^1}U_{j+1}^1,\ j = 0, 1, \ldots, k-1\ et\ U_k^1 = 1,$$

on trouve

$$f^{(k+2)} + U_{k-1}^2(z)f^{(k+1)} + U_{k-1}^2(z)f^{(k)} + \cdots + U_0^2(z)f'' = 0, \tag{2.14}$$

en remplacant l'équation (2.11) dans (2.14) on trouve

$$g_2^{(k)} + \varphi^{(k)} + U_{k-1}^2(z)(g_2^{(k-1)} + \varphi^{(k-1)}) + U_{k-1}^2(z)(g_2^{(k-2)} + \varphi^{(k-2)})$$
$$+ \cdots + U_0^2(z)(g_2 + \varphi) = 0,$$

d'où

$$g_2^{(k)} + U_{k-1}^2 g_2^{(k-1)} + \cdots + U_0^2 g_2 = -[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^2\varphi^{(k-1)} + \cdots + U_0^2\varphi].$$

■

Lemme 2.4 ([22]) *On suppose que $f \neq 0$ est une solution de l'équation* (2.3)*, on pose $g_3 = f^{(3)} - \varphi$, alors g_3 vérifie l'équation suivante*

$$g_3^{(k)} + U_{k-1}^3 g_3^{(k-1)} + \cdots + U_0^3 g_3 = -[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^3\varphi^{(k-1)} + \cdots + U_0^3\varphi], \tag{2.15}$$

où $U_j^3 = U_{j+1}^{2'} + U_j^2 - \frac{U_0^{2'}}{U_0^2}U_{j+1}^2$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$ *et* $U_k^2 = 1$.

Preuve.

Comme $g_3 = f^{(3)} - \varphi$, alors $g_3^{(k)} = f^{(k+3)} - \varphi^{(k)}$, d'où

$$f^{(k+3)} = g_3^{(k)} + \varphi^{(k)}. \tag{2.16}$$

On dérive l'équation (2.14), on obtient

$$f^{(k+3)} + (U_{k-1}^{2'}(z) f^{(k+1)} + U_{k-1}^2(z) f^{(k+2)}) + (U_{k-2}^{2'}(z) f^{(k)} + U_{k-2}^2(z) f^{(k+1)}) + \cdots$$

$$+ U_1^{2'}(z) f^{(3)} + U_1^2(z) f^{(4)} + U_0^{2'}(z) f'' + U_0^2(z) f^{(3)} = 0,$$

d'où

$$f^{(k+3)} + U_{k-1}^2(z) f^{(k+2)} + (U_{k-1}^{2'}(z) + U_{k-2}^2(z)) f^{(k+1)} + (U_{k-2}^{2'}(z) + U_{k-3}^2(z)) f^{(k)} + \cdots$$

$$+ (U_1^{2'}(z) + U_0^2(z)) f^{(3)} + U_0^{2'}(z) f'' = 0. \tag{2.17}$$

On peut écrire l'équation (2.14) sous la forme

$$f'' = -\frac{1}{U_0^2(z)} (f^{(k+2)} + U_{k-1}^2(z) f^{(k+1)} + \cdots + U_1^2(z) f^{(3)}). \tag{2.18}$$

En remplacant (2.18) dans (2.17), on obtient

$$f^{(k+3)} + U_{k-1}^2(z) f^{(k+2)} + (U_{k-1}^{2'}(z) + U_{k-2}^2(z)) f^{(k+1)}$$

$$+ (U_{k-2}^{2'}(z) + U_{k-3}^2(z)) f^{(k)} + \cdots + (U_1^{2'}(z) + U_0^2(z)) f^{(3)}$$

$$+ U_0^{2'}(z) \left(-\frac{1}{U_0^2(z)} (f^{(k+2)} + U_{k-1}^2(z) f^{(k+1)} + \cdots + U_1^2(z) f^{(3)}) \right) = 0,$$

alors

$$f^{(k+3)} + \left(U_{k-1}^2(z) - \frac{U_0^{2'}(z)}{U_0^2(z)} \right) f^{(k+2)}$$

$$+ \left(U_{k-1}^{2'}(z) + U_{k-2}^2(z) - \frac{U_0^{2'}(z)}{U_0^2(z)} U_{k-1}^2(z) \right) f^{(k+1)}$$

$$+ \left(U_{k-2}^{2'}(z) + U_{k-3}^2(z) - \frac{U_0^{2'}(z)}{U_0^2(z)} U_{k-2}^2(z) \right) f^{(k)} + \cdots$$

$$+ \left(U_1^{2'}(z) + U_0^2(z) - \frac{U_0^{2'}(z)}{U_0^2(z)} U_1^2(z) \right) f^{(3)} = 0.$$

On pose

$$U_j^3 = U_{j+1}^{2'} + U_j^2 - \frac{U_0^{2'}}{U_0^2} U_{j+1}^2, \; j = 0, 1, \ldots, k-1 \; et \; U_k^2 = 1,$$

on trouve

$$f^{(k+3)} + U_{k-1}^3(z) f^{(k+2)} + U_{k-1}^3(z) f^{(k+1)} + \cdots + U_0^3(z) f^{(3)} = 0. \tag{2.19}$$

En remplacant l'équation (2.16) dans (2.19) on trouve

$$g_3^{(k)} + \varphi^{(k)} + U_{k-1}^3(z)(g_3^{(k-1)} + \varphi^{(k-1)}) + U_{k-1}^3(z)(g_3^{(k-2)} + \varphi^{(k-2)})$$

$$+ \cdots + U_0^3(z)(g_3 + \varphi) = 0,$$

d'où

$$g_3^{(k)} + U_{k-1}^3 g_2^{(k-1)} + \cdots + U_0^3 g_2 = -[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^3 \varphi^{(k-1)} + \cdots + U_0^3 \varphi].$$

■

Lemme 2.5 ([22]) *On suppose que $f \neq 0$ est une solution de l'équation* (2.3), *on pose $g_i = f^{(i)} - \varphi$, alors g_i vérifie l'équation suivante*

$$g_i^{(k)} + U_{k-1}^i g_i^{(k-1)} + \cdots + U_0^i g_i = -[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^i \varphi^{(k-1)} + \cdots + U_0^i \varphi], \tag{2.20}$$

où $U_j^i = U_{j+1}^{i-1'} + U_j^{i-1} - \frac{U_0^{i-1'}}{U_0^{i-1}} U_{j+1}^{i-1}$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$ *et* $U_k^{i-1} = 1$.

Preuve.

On montre le Lemme 3.5 par réccurence.
Pour $i = 1$, d'après le Lemme 3.2, $g_1 = f' - \varphi$ vérifie l'équation (2.20).
Pour $i = n + 1$.
On suppose que $g_n = f^{(n)} - \varphi$ vérifie l'équation (2.20), alors on a

$$g_n^{(k)} + U_{k-1}^n g_n^{(k-1)} + \cdots + U_0^n g_n = -[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^n \varphi^{(k-1)} + \cdots + U_0^n \varphi], \tag{2.21}$$

avec $U_j^n = U_{j+1}^{n-1'} + U_j^{n-1} - \frac{U_0^{n-1'}}{U_0^{n-1}} U_{j+1}^{n-1}$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$ et $U_k^{n-1} = 1$.
Comme g_n=$f^{(n)} - \varphi$, alors $g_n^{(k)} = f^{(k)} - \varphi^{(k)}$, ainsi

$$f^{(k)} = g_n^{(k)} + \varphi^{(k)}. \tag{2.22}$$

l'équation

$$g_n^{(k)} + U_{k-1}^n g_n^{(k-1)} + \cdots + U_0^n g_n = -[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^n \varphi^{(k-1)} + \cdots + U_0^n \varphi], \tag{2.23}$$

est équivalente à l'équation suivante

$$g_n^{(k)} + \varphi^{(k)} + U_{k-1}^n (g_n^{(k-1)} + \varphi^{(k-1)}) + \cdots + U_0^n (g_n + \varphi) = 0, \tag{2.24}$$

et en remplacant (2.22) dans (2.24), on trouve

$$f^{(k+n)} + U_{k-1}^n (z) f^{(k+n-1)} + U_{k-1}^n (z) f^{(k+n-2)} + \cdots + U_0^n (z) f^{(n)} = 0, \tag{2.25}$$

donc il suffit montrer que g_{n+1}=$f^{(n+1)} - \varphi$ vérifie l'équation (2.24).
Comme g_{n+1}=$f^{(n+1)} - \varphi$, alors $g_{n+1}^{(k)} = f^{(k+n+1)} - \varphi^{(k)}$, on obtient

$$f^{(k+n+1)} = g_n^{(k)} + \varphi^{(k)}. \tag{2.26}$$

On dérive l'équation (2.25), on obtient

$$\begin{aligned} f^{(k+n+1)} &+ (U_{k-1}^{n'}(z) f^{(k+n-1)} + U_{k-1}^n (z) f^{(k+n)}) \\ &+ (U_{k-2}^{n'}(z) f^{(k+n-2)} + U_{k-2}^n (z) f^{(k+n-1)}) + \cdots \\ &+ U_1^{n'}(z) f^{(n+1)} + U_1^n (z) f^{(n+2)} + U_0^{n'}(z) f^{(n)} + U_0^{(n)}(z) f^{(n+1)} = 0, \end{aligned} \tag{2.27}$$

d'où

$$\begin{aligned} f^{(k+n+1)} &+ U_{k-1}^n (z) f^{(k+n)} + (U_{k-1}^{n'}(z) + U_{k-2}^n (z)) f^{(k+n-1)} \\ &+ (U_{k-2}^{n'}(z) + U_{k-3}^n (z)) f^{(k+n-2)} + \cdots \\ &+ (U_1^{n'}(z) + U_0^n (z)) f^{(n+1)} + U_0^{n'}(z) f^{(n)} = 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

On peut écrire l'équation (2.25) sous la forme

$$f^{(n)} = -\frac{1}{U_0^n(z)}(f^{(k+n)} + U_{k-1}^n(z)f^{(k+n-1)} + \cdots + U_1^n(z)f^{(n+1)}). \tag{2.29}$$

En remplacant (2.29) dans (2.28), on trouve

$$\begin{gathered} f^{(k+n+1)} + U_{k-1}^n(z)f^{(k+n)} + (U_{k-1}^{n'}(z) + U_{k-2}^n(z))f^{(k+n-1)} \\ +(U_{k-2}^{n'}(z) + U_{k-3}^n(z))f^{(k+n-2)} + \cdots \\ +(U_1^{n'}(z) + U_0^n(z))f^{(n+1)} + \\ + U_0^{n'}(z)\left(-\frac{1}{U_0^n(z)}(f^{(k+n)} + U_{k-1}^n(z)f^{(k+n-1)} + \cdots + U_1^n(z)f^{(n)})\right) = 0, \end{gathered} \tag{2.30}$$

alors

$$\begin{gathered} f^{(k+n+1)} + \left(U_{k-1}^n(z) - \frac{U_0^{n'}(z)}{U_0^n(z)}\right)f^{(k+n)} \\ + \left(U_{k-1}^{n'}(z) + U_{k-2}^n(z) - \frac{U_0^{n'}(z)}{U_0^n(z)}U_{k-1}^n(z)\right)f^{(k+n-1)} \\ + \left(U_{k-2}^{n'}(z) + U_{k-3}^n(z) - \frac{U_0^{n'}(z)}{U_0^n(z)}U_{k-2}^n(z)\right)f^{(k+n-2)} + \cdots \\ + \left(U_1^{n'}(z) + U_0^n(z) - \frac{U_0^{n'}(z)}{U_0^n(z)}U_1^n(z)\right)f^{(n+1)} = 0, \end{gathered} \tag{2.31}$$

on pose

$$U_j^{n+1} = U_{j+1}^{n'} + U_j^n - \frac{U_0^{n'}}{U_0^n}U_{j+1}^n, \; j = 0, 1, \ldots, k-1 \; et \; U_k^n = 1,$$

on trouve

$$f^{(k+n+1)} + U_{k-1}^{n+1}(z)f^{(k+n)} + U_{k-1}^{n+1}(z)f^{(k+n-2)} + \cdots + U_0^{n+1}(z)f^{(n)} = 0. \tag{2.32}$$

En remplacant (2.26) dans (2.32) on trouve

$$g_{n+1}^{(k)} + \varphi^{(k)} + U_{k-1}^{n+1}(g_{n+1}^{(k-1)} + \varphi^{(k-1)}) + \cdots + U_1^{n+1}(g_{n+1}^{'} + \varphi^{'}) + U_0^{n+1}(g_{n+1} + \varphi) = 0,$$

d'où

$$g_{n+1}^{(k)} + U_{k-1}^{n+1}g_{n+1}^{(k-1)} + \cdots + U_0^{n+1}g_{n+1} = -[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^{n+1}\varphi^{(k-1)} + \cdots + U_0^{n+1}\varphi].$$

■

Lemme 2.6 ([17]) *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre $[p,q]$ vérifiant $\sigma_{[p,q]}(f) = \sigma_2$. Alors il existe un ensemble $E \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E$, on a*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log_p T(r,f)}{\log_q r} = \sigma_2, \; r \in E.$$

Lemme 2.7 ([17]) *Soient* $A_0(z), A_1(z), \ldots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières d'ordre fini qui vérifient* $\max\{\sigma_{[p,q]}(A_j) : j = 1,2,\ldots,k-1\} = \sigma_1 < \sigma_{[p,q]}(A_0) < \infty$, *et soient*

$$U_j^1 = A'_{j+1} + A_j - \frac{A'_0}{A_0} A_{j+1}$$

et

$$U_j^i = U_{j+1}^{i-1\prime} + U_j^{i-1} - \frac{U_0^{i-1\prime}}{U_0^{i-1}} U_{j+1}^{i-1}$$

avec $j = 0,1,2,\ldots,k-1, A_k = 1, U_k^{i-1} = 1$ *et* $i \in \mathbb{N}$. *Alors il existe un ensemble* E *de mesure logarithmique infinie tel que pour tout* $r \in E$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log_p m(r, U_0^i)}{\log_q r} = \sigma_{[p,q]}(A_0) > \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\max_{1\le j\le k-1}\{\log_p m(r, U_j^i)\}}{\log_q r} = \sigma_1. \qquad (2.33)$$

Preuve.

On démontre le Lemme 3.7 par réccurence. Premièrement, quand $i = 1$ on a

$$U_j^1 = A'_{j+1} + A_j - \frac{A'_0}{A_0} A_{j+1},\ j = 0,1,\ldots,k-1 \text{ et } A_k = 1.$$

Quand $j = 0$, alors $U_0^1 = A'_1 + A_0 - \frac{A'_0}{A_0} A_1$.

$$U_0^1 = A'_1 + A_0 - \frac{A'_0}{A_0} A_1.$$

$$\Leftrightarrow U_0^1 = \frac{A_1}{A_1} A'_1 + A_0 - \frac{A'_0}{A_0} A_1.$$

$$\Leftrightarrow U_0^1 = A_0 + A_1 \left(\frac{A'_1}{A_1} - \frac{A'_0}{A_0} \right).$$

Donc on obtient

$$m(r, U_0^1) \le m(r, A_1) + m(r, A_0) + m\left(r, \frac{A'_1}{A_1}\right) + m\left(r, \frac{A'_0}{A_0}\right) + O(1). \qquad (2.34)$$

De l'identité $-A_0 = A'_1 - U_0^1 - \frac{A'_0}{A_0} A_1$, on obtient

$$m(r, A_0) \le m(r, A_1) + m(r, U_0^1) + m\left(r, \frac{A'_1}{A_1}\right) + m\left(r, \frac{A'_0}{A_0}\right) + O(1). \qquad (2.35)$$

Quand $j \neq 0, j = 1,2,\ldots,k-1$, et d'après les définitions de U_j^1 on trouve

$$m(r, U_j^1) \le m(r, A_{j+1}) + m(r, A_j) + m\left(r, \frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}}\right) + m\left(r, \frac{A'_0}{A_0}\right) + O(1). \qquad (2.36)$$

Comme $A_j(z)$ sont des fonctions entières avec $\max\{\sigma_{[p,q]}(A_j) : j = 1,2,\ldots,k-1\} < \sigma_{[p,q]}(A_0) < \infty$ alors d'après le Lemme 3.6, il existe un ensemble $E \subset [1,+\infty[$ de mesure logarithmique infinie et tel que pour tout $r \in E$, on a

$$m(r, A_{j+1}) = o(m(r, A_0))\ (j = 1,2,\ldots,k-1).$$

De cette équation et de l'équation (2.36), on trouve pour tout $r \in E$

$$\max_{1\le j\le k-1}\{m(r,U_j^1)\} \le \max_{1\le j\le k-1}\{m(r,A_j)\} + o(m(r,A_0)) + O(\log(rT(r,f))) + O(1). \tag{2.37}$$

D'après (2.41), (2.42), (2.44) et Lemme 3.6, Alors il existe un ensemble $E \subset [1,+\infty[$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E \subset [1,+\infty[$ on a

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\frac{\log_p m(r,U_0^1)}{\log_q r} &= \sigma_{[p,q]}(A_0)\\ &> \sigma_1 = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\max_{1\le j\le k-1}\{\log_p m(r,A_j)\}}{\log_q r} \ge \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\max_{1\le j\le k-1}\{\log_p m(r,U_j^1)\}}{\log_q r}, r \in E.\end{aligned}$$

Maintenant, supposons que (2.33) est vraie, pour $i \le n$, $n \in \mathbb{N}$, donc il existe un ensemble E de mesure logarithmique infinie tel que pour $r \in E$

$$\begin{aligned}\sigma_{[p,q]}(A_0) &= \lim_{r\to\infty}\frac{\log_p m(r,U_0^n)}{\log_q r}\\ &> \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\max_{1\le j\le k-1}\{\log_p m(r,U_j^n)\}}{\log_q r} = \sigma_1.\end{aligned} \tag{2.1}$$

On démontre que (2.33) est vraie pour $i = n+1$. Comme $i = n+1$, alors on a

$$U_j^{n+1} = U_{j+1}^{n\prime} + U_j^n - \frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n}U_{j+1}^n,$$

avec $j = 0,1,\dots,k-1; U_k^n = 1$. Quand $j = 0$, on a $U_0^{n+1} = U_1^{n\prime} + U_0^n - \frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n}U_1^n$. Alors on obtient

$$m(r,U_0^{n+1}) \le m(r,U_0^n) + m(r,U_1^n) + m\left(r,\frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n}\right) + m\left(r,\frac{U_1^{n\prime}}{U_1^n}\right) + O(1). \tag{2.40}$$

Comme $-U_0^n = U_1^{n'} - U_0^{n+1} - \frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n}U_1^n$, alors on a

$$m(r,U_0^n) \le m(r,U_0^{n+1}) + m(r,U_1^n) + m\left(r,\frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n}\right) + m\left(r,\frac{U_1^{n\prime}}{U_1^n}\right) + O(1). \tag{2.41}$$

Quand $j \neq 0$, de la définition de $U_j^{n+1}, j = 1,2,\dots,k-1$ et $U_k^n = 1$, on a

$$\begin{aligned}m(r,U_j^{n+1}) &\le m(r,U_{j+1}^n) + m(r,U_j^n)\\ &+ m\left(r,\frac{U_{j+1}^{n\prime}}{U_{j+1}^n}\right) + m\left(r,\frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n}\right) + O(1).\end{aligned} \tag{2.42}$$

Des équations (2.39) – (2.42), il existe un ensemble E de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E$

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\frac{\log_p m(r,U_0^{n+1})}{\log_q r} &= \lim_{r\to\infty}\frac{\log_p m(r,U_0^n)}{\log_q r} = \sigma_{[p,q]}(A_0)\\ &> \sigma_1 = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\max_{1\le j\le k-1}\{\log_p m(r,U_j^n)\}}{\log_q r}\\ &= \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\max_{1\le j\le k-1}\{\log_p m(r,U_j^{n+1})\}}{\log_q r}, r \in E.\end{aligned}$$

D'où, la preuve du Lemme 3.7 est complète. ∎

Lemme 2.8 ([17]) *Soient* $H_j(z)$ $(j=0,1,2,\ldots,k-1)$ *des fonctions méromorphes de l'ordre* $[p,q]$ *fini.*

Soit

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\max_{1\le j\le k-1}\left\{\log_p m(r,H_j)\right\}}{\log_q r}=\beta_1,$$

si il existe un ensemble E_1 *avec une mesure logarithmique infinie tel que*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\log_p m(r,H_0)}{\log_q r}=\beta_2>\beta_1,\ \textit{pour tout } r\in E_1,$$

alors toute solution méromorphe de l'équation

$$f^{(k)}+H_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+H_1f'+H_0f=0, \tag{2.43}$$

vérifie $\sigma_{[p+1,q]}(f)\ge\beta_2$.

Preuve. On peut écrire l'équation (2.43) sous la forme

$$H_0=-\left(\frac{f^{(k)}}{f}+H_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}+H_{k-2}\frac{f^{(k-2)}}{f}+\cdots+H_1\frac{f'}{f}\right), \tag{2.44}$$

d'après (2.44), on a

$$m(r,H_0)=m\left(r,-\left(\frac{f^{(k)}}{f}+H_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}+H_{k-2}\frac{f^{(k-2)}}{f}+\cdots+H_1f'\right)\right).$$

D'après les proriétés de la fonction de proximité, on obtient

$$\begin{aligned}
m(r,H_0) &\le m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,H_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}\right)+\cdots+m(r,H_1f')+O(1)\\
&\le m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m(r,H_{k-1})+m\left(r,\frac{f^{(k-1)}}{f}\right)+\cdots+m(r,H_1)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+O(1)\\
&\le m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k-1)}}{f}\right)+\cdots+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+\sum_{j=1}^{k-1}m(r,H_j)+O(1). \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

D'après le lemme de la dérivée logarithmique et (2.45), on trouve

$$m(r,H_0)\le O(\log(rT(r,f)))+\sum_{j=1}^{k-1}m(r,H_j),\ r\notin E_{2,} \tag{2.46}$$

Où $E_2\subset[1,+\infty[$ est un ensemble de mesure linéaire finie. D'après les hypothèses du Lemme 3.8, il existe un ensemble E_1 de mesure logarithmique infinie et d'après la définition de β_2, on obtient pout tout $\varepsilon>0$, il existe $R>1$ tel que pour tout $r>R$, on a

$$m(r,H_0)>\exp_p\{(\beta_2-\varepsilon)\log_q r\}.$$

On pose

$$\beta_j=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p m(r,H_j)}{\log_q r},\ \forall j=1,\ldots,k-1,$$

d'après la définition de la limite, on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 1$ tel que pour tout $r > R$, on a

$$m(r, H_j) < \exp_p\{(\beta_j + \varepsilon)\log_q r\},$$

donc

$$\beta_j < \beta_1 \Leftrightarrow \exp_p\{(\beta_j + \varepsilon)\log_q r\} < \exp_p\{(\beta_1 + \varepsilon)\log_q r\}, \tag{2.47}$$

d'après (2.46) et (2.47) et d'après les hypothèses de Lemme 3.8, il existe un ensemble E_1 de mesure logarithmique infinie pour tout $|z| = r \in E_1 - E_2$ on a

$$\exp_p\{(\beta_2 - \varepsilon)\log_q r\} \le O(\log(rT(r, f))) + (k-1)\exp_p\{(\beta_1 + \varepsilon)\log_q r\}, \tag{2.48}$$

et donc

$$\log_p \exp_p\{(\beta_2 - \varepsilon)\log_q r\} \le \log_p\{(O(\log(rT(r, f))) + (k-1)\exp_p\{(\beta_1 + \varepsilon)\log_q r\}$$

$$(\beta_2 - \varepsilon)\log_q r \le O(\log_p(\log r + \log T(r, f))) + (k-1)(\beta_1 + \varepsilon)\log_q r + O(1),$$

et pour $0 < 2\varepsilon < \beta_2 - \beta_1$, on trouve $\sigma_{[p+1,q]}(f) \ge \beta_2$. ■

Lemme 2.9 ([9]) *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcandente et $\alpha > 1$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E_7 \subset [1, \infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $M > 0$ qui dépend uniquement de α et (m, n), $(m, n \in \{0, \dots, k\}$ avec $m < n$ tels que pour tout $z = |r| \notin [0, 1] \cup E_7$, on a*

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f^{(m)}(z)}\right| \le M\left(\frac{T(\alpha r, f)}{r}\log^{\alpha} r)\log T(\alpha r, f)\right)^{n-m}.$$

Lemme 2.10 ([17]) *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre $[p, q]$ vérifiant $\sigma_{[p,q]}(f) = \sigma$, $\tau_{[p,q]}(f) = \tau$, $0 < \sigma < \infty$, $0 < \tau < \infty$. Alors pour tout $\beta < \tau$ donné, il existe un ensemble $E_4 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie, tel que pour tout $r \in E_4$, on a*

$$\log_p M(r, f) > \beta(\log_{q-1} r)^{\sigma}.$$

Lemme 2.11 ([17]) *Soient $A_0(z), A_1(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières d'ordre $[p, q]$ fini qui vérifie $\max\{\sigma_{[p,q]}(A_j) : j = 1, 2, \dots, k-1\} \le \sigma_{[p,q]}(A_0) = \sigma_2 < \infty$,*

et $\max\{\tau_{[p,q]}(A_j) | \sigma_{[p,q]}(A_j) = \sigma_{[p,q]}(A_0) > 0 : j = 1, 2, \dots, k-1\} = \tau_1 < \tau_{[p,q]}(A_0) = \tau$ et soient U_j^1, U_j^i, cités dans le Lemme 3.7. Alors pour tout $\varepsilon (0 < 2\varepsilon < \tau - \tau_1)$ donné, il existe un ensemble E_5 de mesure logarithmique infinie tel que

$$\left|U_j^i\right| \le \exp_p\{(\tau_1 + \varepsilon)(\log_{q-1} r)^{\sigma_2}\}, \ \left|U_0^i\right| \ge \exp_p\{(\tau_1 - \varepsilon)(\log_{q-1} r)^{\sigma_2}\}, \tag{2.49}$$

avec $i \ge 1$, $i \in \mathbb{N}$ et $j = 1, 2, \dots, k-1$.

Preuve.

On démontre le lemme en utilisant la démonstration par réccurence.

(1) En premier, on démontre que $U_j^i (j = 0, 1, \dots, k-1)$ vérifie (2.49) quand $i = 1$. D'après la définition de $U_j^1 = A'_{j+1} + A_j - \frac{A'_0}{A_0}A_{j+1}$ $(j \neq 0)$ et $U_0^1 = A'_1 + A_0 - \frac{A'_0}{A_0}A_1$, on a

$$\begin{aligned} |U_0^1| &\ge |A_0| - \left|A'_1 - \frac{A'_0}{A_0}A_1\right| \\ &\ge |A_0| - \left|A'_1\right| - |A_1|\left|\frac{A'_0}{A_0}\right| \\ &\ge |A_0| - |A_1|\left|\frac{A'_1}{A_1}\right| - |A_1|\left|\frac{A'_0}{A_0}\right|, \end{aligned}$$

d'où

$$\left|U_0^1\right| \geq |A_0| - |A_1| \left(\left| \frac{A_1^{'}}{A_1} \right| + \left| \frac{A_0'}{A_0} \right| \right), \tag{2.50}$$

et

$$\left|U_j^1\right| \leq \left|A_j\right| + \left|A_{j+1}\right| \left(\left| \frac{A_{j+1}^{'}}{A_{j+1}} \right| + \left| \frac{A_0'}{A_0} \right| \right),\ j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{2.51}$$

D'après les Lemme 3.9, Lemme 3.10 et (2.50) – (2.51), pour tout $\varepsilon(0 < 4\varepsilon < \tau - \tau_1)$, il existe un ensemble E_5 de mesure logarithmique infinie tel que

$$\begin{aligned}
\left|U_0^1\right| \quad &\geq \quad -2M\exp_p\left\{\left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{8}\right)(\log_{q-1} r)^{\sigma_2}\right\}(T(2r, A_0))^2 \\
&\quad + \exp_p\left\{\left(\tau - \frac{\varepsilon}{4}\right)(\log_{q-1} r)^{\sigma_2}\right\}, \\
&\geq \quad -2M\exp_p\left\{\left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{8}\right)(\log_{q-1} r)^{\sigma_2}\right\}\left(\exp_p\left\{\left(\sigma_2 + \frac{\varepsilon}{8}\right)(\log_q 2r)^{\sigma_2}\right\}\right)^2 \\
&\quad + \exp_p\left\{\left(\tau - \frac{\varepsilon}{4}\right)(\log_{q-1} r)^{\sigma_2}\right\}, \geq \exp_p\left\{\left(\tau - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\log_{q-1} r)^{\sigma_2}\right\},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left|U_j^1\right| \quad &\leq \quad 2M\exp_p\left\{\left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)(\log_{q-1} r)^{\sigma_2}\right\}(T(2r, A_0))^2 \\
&\quad + \exp_p\left\{\left(\tau + \frac{\varepsilon}{4}\right)(\log_{q-1} r)^{\sigma_2}\right\}, \\
&\leq \quad 2M\exp_p\left\{\left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)(\log_{q-1} r)^{\sigma_2}\right\}\left(\exp_p\left\{\left(\sigma_2 + \frac{\varepsilon}{8}\right)(\log_q 2r)^{\sigma_2}\right\}\right)^2 \\
&\quad + \exp_p\left\{\left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)(\log_{q-1} r)^{\sigma_2}\right\}, \leq \exp_p\left\{\left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)(\log_{q-1} r)^{\sigma_2}\right\},\ j \neq 0,
\end{aligned}$$

avec $M > 0$ une constante, pas nécessairement la même à chaque fois.
(2) Maintenant, on montre que U_j^i $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ vérifie (2.49).
Quand $i = 2$. D'après $U_0^2 = U_1^{1'} + U_0^1 - \frac{U_0^{1'}}{U_0^1}U_1^1$ et

$$U_j^2 = U_{j+1}^{1'} + U_j^1 - \frac{U_0^{1\prime}}{U_0^1}U_{j+1}^1, j = 0, 1, \ldots, k-1, U_k^1 = 1,$$

on obtient

$$\left|U_0^2\right| \geq \left|U_0^1\right| - \left|U_1^1\right| \left(\left| \frac{U_1^{1'}}{U_1^1} \right| + \left| \frac{U_0^{1\prime}}{U_0^1} \right| \right), \tag{2.54}$$

et

$$\left|U_j^2\right| \leq \left|U_j^1\right| + \left|U_{j+1}^1\right| \left(\left| \frac{U_{j+1}^{1'}}{U_{j+1}^1} \right| + \left| \frac{U_0^{1\prime}}{U_0^1} \right| \right),\ j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{2.55}$$

D'après les conclusions de (1) et le Lemme 3.9 et le Lemme 3.10 et les équations (2.64) – (2.63), on obtient pour tout $|z| = r \in E_5$

$$\begin{aligned}
\left|U_0^2\right| \quad &\geq \quad -2M\exp_p\left\{\left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)(\log_{q-1} r)^{\sigma_2}\right\}\left(\exp_p\left\{\left(\sigma_2 + \frac{\varepsilon}{2}\right)(\log_q 2r)\right\}\right)^2 \\
&\quad + \exp_p\left\{\left(\tau - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\log_{q-1} r)^{\sigma_2}\right\} \geq \exp_p\left\{(\tau - \varepsilon)(\log_{q-1} r)^{\sigma_2}\right\},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left|U_j^2\right| &\leq 2M\exp_p\left\{\left(\tau_1+\frac{\varepsilon}{2}\right)(\log_{q-1}r)^{\sigma_2}\right\}\exp_p\left\{\left(\sigma_2+\frac{\varepsilon}{8}\right)(\log_q 2r)\right\}\\ &\quad+\exp_p\left\{\left(\tau_1+\frac{\varepsilon}{2}\right)(\log_{q-1}r)^{\sigma_2}\right\}\\ &\leq \exp_p\left\{(\tau_1+\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\sigma_2}\right\},\ j\neq 0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

(3) Supposons que (2.49) est vraie pour $i\leq n, n\in\mathbb{N}$, c'est à dire, pour tout $\varepsilon(0<4\varepsilon<\tau-\tau_1)$ donné, il existe un ensemble E_5 de mesure logarithmique tel que

$$\left|U_j^i\right|\leq\exp_p\{(\tau_1+\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\sigma_2}\},\ \left|U_0^i\right|\geq\exp_p\{(\tau-\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\sigma_2}\},\tag{2.58}$$

avec $i\leq n,\ j=1,2,\ldots,k-1$.

De $U_0^{n+1}=U_1^{n'}+U_0^n-\frac{U_0^{n'}}{U_0^n}U_1^n$ et $U_j^{n+1}=U_{j+1}^{n'}+U_j^n-\frac{U_0^{n'}}{U_0^n}U_{j+1}^n$ $(j=1,\ldots,k-1), U_k^n=1$, on a

$$\left|U_0^{n+1}\right|\geq\left|U_0^n\right|-\left|U_1^n\right|\left(\left|\frac{U_1^{n'}}{U_1^n}\right|+\left|\frac{U_0^{n'}}{U_0^n}\right|\right),\tag{2.59}$$

et

$$\left|U_j^{n+1}\right|\leq\left|U_j^n\right|-\left|U_{j+1}^n\right|\left(\left|\frac{U_{j+1}^{n'}}{U_{j+1}^n}\right|+\left|\frac{U_0^{n'}}{U_0^n}\right|\right),\ j=1,2,\ldots,k-1.\tag{2.60}$$

Alors, d'après le Lemme 3.9 et Lemme 3.10 et (2.58) – (2.60), pour tout $|z|=r\in E_5$ on a

$$\begin{aligned}\left|U_j^{n+1}\right| &\leq 2M\exp_p\left\{(\tau_1+\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\sigma_2}\right\}\left(\exp_p\left\{\left(\sigma_2+\frac{\varepsilon}{8}\right)(\log_q 2r)\right\}\right)^2\\ &\quad+\exp_p\{(\tau_1+\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\sigma_2}\}\\ &\leq \exp_p\{(\tau_1+2\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\sigma_2}\},\ j\neq 0,\end{aligned}\tag{2.4}$$

et

$$\begin{aligned}\left|U_0^{n+1}\right| &\geq -2M\exp_p\left\{(\tau_1+\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\sigma_2}\right\}\left(\exp_p\left\{\left(\sigma_2+\frac{\varepsilon}{8}\right)(\log_q 2r)\right\}\right)^2\\ &\quad+\exp_p\left\{(\tau-\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\sigma_2}\right\}\\ &\geq \exp\left\{(\tau-2\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\sigma_2}\right\}.\end{aligned}$$

D'où la preuve du Lemme 3.11. ■

Lemme 2.12 ([17]) *Soient* $B_0,B_1,\ldots,B_{k-1}$ *des fonctions méromorphes avec* $\max\{\sigma_{[p,q]}(B_j): j=1,2,\ldots,k-1\}=\sigma_4<\sigma_{[p,q]}(B_0)=\sigma_3$ *et* $\delta(\infty,B_0)=\lim_{r\to\infty}\inf\frac{m(r,B_0)}{T(r,B_0)}>0$. *Alors toute solution méromorphe* $f\neq 0$ *de l'équation*

$$f^{(k)}+B_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+B_1f'+B_0f=0,\tag{2.62}$$

vérifie $\sigma_{[p+1,q]}(f)\geq\sigma_3$.

Preuve. On assume que $f(z)\neq 0$ une soluion méromorphe de l'équation (2.62).

On peut écrire l'équation (2.62) sous la forme

$$B_0=-\left(\frac{f^{(k)}}{f}+B_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}+B_{k-2}\frac{f^{(k-2)}}{f}+\cdots+B_1\frac{f'}{f}\right),\tag{2.63}$$

d'après (2.63), on a

$$m(r,\mathrm{B}_0)=m\left(r,-\left(\frac{f^{(k)}}{f}+\mathrm{B}_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}+\mathrm{B}_{k-2}\frac{f^{(k-2)}}{f}+\cdots+\mathrm{B}_1 f'\right)\right),$$

donc

$$m(r,\mathrm{B}_0)\le m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k-1)}}{f}\right)+\cdots+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+\sum_{j=1}^{k-1}m(r,\mathrm{B}_j)+\mathrm{O}(1), \tag{2.64}$$

d'après le lemme de la dérivée logarithmique et (2.64) on trouve

$$m(r,\mathrm{B}_0)\le \mathrm{O}(\log(r\mathrm{T}(r,f)))+\sum_{j=1}^{k-1}\mathrm{T}(r,\mathrm{B}_j),\ r\notin \mathrm{E}_6, \tag{2.65}$$

où $\mathrm{E}_6\subset[1,+\infty[$ est un ensemble avec une mesure linéaire finie. D'aprés le Lemme 3.6, il existe un ensemble E avec une mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z|=r\in \mathrm{E}$, on a

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log_p \mathrm{T}(r,\mathrm{B}_0)}{\log_q r}=\sigma_3,\ r\notin \mathrm{E}.$$

La définition de

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log_p \mathrm{T}(r,\mathrm{B}_0)}{\log_q r}=\sigma_3,$$

implique pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\mathrm{R}>1$ tel que pour tout $r>\mathrm{R}$, on a

$$\mathrm{T}(r,\mathrm{B}_0)>\exp_p\{(\sigma_3-\varepsilon)\log_q r\}, \tag{2.66}$$

et la définition de

$$\lim_{r\to+\infty}\inf\frac{m(r,\mathrm{B}_0)}{\mathrm{T}(r,\mathrm{B}_0)}=\delta,$$

implique pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\mathrm{R}>1$ tel que pour tout $r>\mathrm{R}$, on a

$$m(r,\mathrm{B}_0)>(\mathrm{T}(r,\mathrm{B}_0))(\delta-\varepsilon). \tag{2.67}$$

Comme $\delta(\infty,\mathrm{B}_0)>0$, alors pour tout $\varepsilon(0<2\varepsilon<\min\{\delta,\sigma_3-\sigma_4\}$ donné et pour tout $r\in\mathrm{E}$ et d'après (2.66), on obtient

$$m(r,\mathrm{B}_0)\ge(\delta-\varepsilon)\exp_p\{(\sigma_3-\varepsilon)\log_q r\}. \tag{2.68}$$

On pose $\mathrm{B}_j=\sigma_{[p,q]}(\mathrm{B}_j),\ \forall j=1,2,\dots k-1$, on a $\mathrm{B}_j\le\max\{\sigma_{[p,q]}(\mathrm{B}_j), j=1,2,\dots,k-1\}=\sigma_4<\sigma_3$.

Alors d'après la définition de

$$\mathrm{B}_j=\sigma_{[p,q]}(\mathrm{B}_j)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p \mathrm{T}(r,\mathrm{B}_j)}{\log_q r}=\sigma_3,\forall j=1,2,\dots k-1,$$

on obtient, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\mathrm{R}>1$ tel que pour tout $r>\mathrm{R}$, on a

$$\mathrm{T}(r,\mathrm{B}_j)<\exp_p\{(\sigma_3+\varepsilon)\log_q r\},\ \forall j=1,2,\dots k-1. \tag{2.69}$$

D'après (2.65) – (2.68) et (2.69), on a

$$(\delta-\varepsilon)\exp_p\{(\sigma_3-\varepsilon)\log_q r\}\le \mathrm{O}(\log(r\mathrm{T}(r,f)))$$

$$+(k-1)\exp_p\{(\sigma_4+\varepsilon)\log_q r\}, r\in E-E_6,$$

ce qui implique

$$(\sigma_3-\varepsilon)\leq O\Big(\frac{\log_{p+1} r}{\log_q r}+\frac{\log_{p+1} T(r,f)}{\log_q r}\Big)+(\sigma_4+\varepsilon)+\frac{\log_p(k-1)}{\log_q r}+O(1), \tag{2.70}$$

avec $r\in E-E_6$. D'après la relation (2.70), on trouve $\sigma_{[p+1,q]}(f)\geq\sigma_3=\sigma_{[p,q]}(B_0)$. ■

Lemme 2.13 *[17]*

Soient $B_j(z)$ $j=0,1,\dots k-1$ *des fonctions méromorphes d'ordre* $[p,q]$. *S'il existe des constantes positives* $\sigma_5,\beta_3,\beta_4(0<\beta_3<\beta_4)$ *et un ensemble logarithmique infinie tels que*

$$\max\{\left|B_j(z)\right|, j=1,2,\dots k-1\}\leq\exp_p\{\beta_3(\log_{q-1} r)^{\sigma_5}\},$$

et

$$|B_0(z)|\geq\exp_p\{\beta_4(\log_{q-1} r)^{\sigma_5}\}$$

pour tout $|z|=r\in E_8$. *Alors toute solution méromorphe* $f\neq 0$, *de l'équation* (2.62) *vérifie* $\sigma_{[p+1,q]}(f)\geq\sigma_5$.

Preuve.

On assume que $f\neq 0$, est une solution méromorphe de l'équation (2.62). Donc on peut écrire l'équation (2.62) sous la forme

$$B_0=-\frac{f^{(k)}}{f}-\sum_{j=1}^{k-1}B_j\frac{f^{(j)}}{f}.$$

Alors

$$|B_0|\leq\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right|+\sum_{j=1}^{k-1}\left|B_j\right|\left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|. \tag{2.71}$$

D'après le Lemme 3.9, il existe un ensemble E_7 de mesure logarithmique finie tel que pour $|z|=r\notin E_7$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|\leq M\left[T(2r,f)\right]^{2j}, j=1,2,\dots,k, \tag{2.72}$$

avec $M>0$ une constante. D'après (2.71) et (2.72) et d'après les hypothèses du Lemme 3.13, pour tout $|z|=r\in E_8-E_7$, on a

$$\exp_p\{\beta_4(\log_{q-1} r)^{\sigma_5}\}\leq Mk\left[T(2r,f)\right]^{2k}\exp_p\{\beta_3(\log_{q-1} r)^{\sigma_5}\}, \tag{2.73}$$

comme $0<\beta_3<\beta_4$ et (2.73), on a $\sigma_{[p+1,q]}(f)\geq\sigma_5$. ■

Lemme 2.14 *[17]*

Soient $A_0,A_1,\dots,A_{k-1},F\neq 0$ *des fonctions méromorphes, si* f *est une solution méromorphe de l'équation*

$$f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=F$$

qui vérifie $\max\{\sigma_{[p,q]}(F),\sigma_{[p,q]}(A_j):j=0,1,\dots,k-1\}<\sigma_{[p,q]}(f)$, *alors*

$$\sigma_{[p,q]}(f)=\lambda_{[p,q]}(f)=\overline{\lambda}_{[p,q]}(f).$$

Lemme 2.15 ([17]) *Soient* $A_j(z)$ $(j=0,1,\dots,k-1)$ *des fonctions entières vérifiants* $\max\{\sigma_{[p,q]}(A_j):j=1,\dots,k-1\}\leq\sigma_{[p,q]}(A_0)<\infty$, *et*

$\max\{\tau_{[p,q]}(A_j)|\sigma_{[p,q]}(A_j)=\sigma_{[p,q]}(A_0)>0\}<\tau_{[p,q]}(A_0)$.

Alors toute solutions non triviale f *de l'équation* (2.3) *vérifie*

$$\sigma_{[p+1,q]}(f)=\sigma_{[p,q]}(A_0).$$

4 Preuve des Théorèmes

4.1 Preuve du Théorème 3.6

On considère deux cas. **Cas1.**

Supposons que $\max\{\sigma_{[p,q]}(A_j) : j = 1,2,\dots,k-1\} < \sigma_{[p,q]}(A_0) < \infty$.

(i) Premièrement, on montre que $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\varphi) = \sigma_{[p+1,q]}(f)$. On suppose que $f \neq 0$ est une solution de l'équation (2.3). D'après le Lemme 3.15, on a $\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0)$. Posons $g = f - \varphi$.

Comme $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A_0)$, alors $\sigma_{[p+1,q]}(g) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0)$ et $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(g) = \overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\varphi)$. D'après le Lemme 3.1, on obtient que g satisfait l'équation (2.4). Posons

$$F = \varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_0\varphi.$$

Si $F = 0$, alors d'après le Lemme 3.15, on a $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) = \sigma_{[p,q]}(A_0)$, on obtient une contradiction, alors $F \neq 0$. D'après le Lemme 3.4 et les hypothèses du cas1, on a

$$\sigma_{[p+1,q]}(F) \leq \max\{\sigma_{[p+1,q]}(\varphi), \sigma_{[p+1,q]}(A_0)\} = \max\{\sigma_{[p+1,q]}(\varphi), 0\}.$$

Comme $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A_0)$, alors

$$\max\{\sigma_{[p+1,q]}(F), \sigma_{[p+1,q]}(A_j) : j = 0,1,2,\dots,k-1\} < \sigma_{[p+1,q]}(f).$$

D'après le Lemme 3.14, on trouve

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(g) = \lambda_{[p+1,q]}(g) = \sigma_{[p+1,q]}(g) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Donc, on obtient

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\varphi) = \lambda_{[p+1,q]}(f-\varphi) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

(ii) Deuxièment, on prouve que $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f^{'}-\varphi) = \sigma_{[p+1,q]}(f)$. Posons $g_1 = f^{'} - \varphi$, alors $\sigma_{[p+1,q]}(g_1) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0)$. D'après le Lemme 3.2, on obtient que g_1 satisfait l'équation (2.5) posons

$$F_1 = \varphi^{(k)} + U_{k-1}^1\varphi^{(k-1)} + \cdots + U_0^1\varphi,$$

où U_j^1 $(j = 0,1,\dots,k-1)$ définit le Lemme 3.2. Si $F_1 = 0$, par Lemme 3.7 et Lemme 3.8, on a $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) \geq \sigma_{[p,q]}(A_0)$, ainsi on obtient une contradiction avec $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A_0)$. Donc $F_1 \neq 0$.

D'après la définition de U_j^1 $(j = 0,1,\dots,k-1)$, on trouve $\sigma_{[p+1,q]}(U_j^1) \leq \sigma_{[p+1,q]}(A_j)$ $(j = 0,1,\dots,k-1)$ $\sigma_{[p+1,q]}(F_1) \leq \max\{\sigma_{[p+1,q]}(\varphi), \sigma_{[p+1,q]}(U_j^1) : j = 0,1,\dots,k-1\}$. Comme $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A_0)$ et $\max\ \{\sigma_{[p+1,q]}(F_1), \sigma_{[p+1,q]}(U_j^1) : j = 0,1,\dots,k-1\} < \sigma_{[p,q]}(A_0) = \sigma_{[p+1,q]}(g_1)$. D'après le Lemme 3.14, on obtient $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f^{'}-\varphi) = \lambda_{[p+1,q]}(f^{'}-\varphi) = \sigma_{[p+1,q]}(f)$.

(iii) On prouve que $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f^{(i)}-\varphi) = \sigma_{[p+1,q]}(f)$ $(i \geq 2, i \in \mathbb{N})$. Posons $g_i = f^{(i)} - \varphi$, alors $\sigma_{[p+1,q]}(g_i) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0)$. D'après le Lemme 3.3, nous avons g_i satisfait l'équation (2.20). posons

$$F_i = \varphi^{(k)} + U_{k-1}^i\varphi^{(k-1)} + \cdots + U_0^i\varphi,$$

où U_j^i $(j = 0,1,\dots,k-1)$ dans le Lemme 3.3. Si $F_i = 0$, par le Lemme 3.7 et Lemme 3.8, on a $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) \geq \sigma_{[p,q]}(A_0)$, une contradiction avec $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A_0)$. Donc $F_i \neq 0$. D'après le Lemme 3.14, on obtient $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f^{(i)}-\varphi) = \lambda_{[p+1,q]}(f^{(i)}-\varphi) = \sigma_{[p+1,q]}(f)$. **Cas2.**

Supposons que $\max\{\sigma_{[p,q]}(A_j) : j = 1,2,\ldots,k-1\} \leq \sigma_{[p,q]}(A_0) < \infty$, et $\max\{\tau_{[p,q]}(A_j) | \sigma_{[p,q]}(A_j) = \sigma_{[p,q]}(A_0) > 0\} < \tau_{[p,q]}(A_0)$.

(i) Montrons que $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\varphi) = \sigma_{[p+1,q]}(f)$. On suppose que $f \neq 0$ est une solution de (2.3) .D'après le Lemme 3.15, on a $\sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0) > 0$. Posons $g = f - \varphi$.

Comme $\varphi \neq 0$ est fonction entière satisfait $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A_0)$, alors on a $\sigma_{[p+1,q]}(g) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0)$ et $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(g) = \overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\varphi)$.par le Lemme 3.1, on obtient que g satisfait l'équation (2.4).

Si $F = 0$, alors d'après le Lemme 3.15, on a $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) = \sigma_{[p,q]}(A_0)$, on obtient une contradiction, alors $F \neq 0$. Sous les hypothèses du Cas2, on obtient

$$\max\{\sigma_{[p+1,q]}(F), \sigma_{[p+1,q]}(A_j) : j = 0,1,\ldots,k-1\} < \sigma_{[p+1,q]}(g) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

Du Lemme 3.14 (ii), on a

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\varphi) = \lambda_{[p+1,q]}(f-\varphi) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0).$$

(ii) Maintenant, on prouve que $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f'-\varphi) = \sigma_{[p+1,q]}(f)$. Posons $g_1 = f'-\varphi$, comme $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A_0)$, alors on a $\sigma_{[p+1,q]}(g_1) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0)$. D'après le Lemme 3.2, on obtient que g_1 satisfait l'équation (2.5). Si $F_1 = 0$, par Lemme 3.11 et Lemme 3.13, on a $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) \geq \sigma_{[p,q]}(A_0)$, une contradiction avec $\sigma_{[p+1,q]}(\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A_0)$. Donc $F_1 \neq 0$.

D'après le Lemme 3.14, on obtient $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f'-\varphi) = \lambda_{[p+1,q]}(f'-\varphi) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0)$.

Similaire au argument de cas (1) (iii) (v) et en utilisant les Lemmes 3.1-3.11 et (2.3.13), on obtient

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f^{(i)}-\varphi) = \lambda_{[p+1,q]}(f^{(i)}-\varphi) = \sigma_{[p+1,q]}(f) = \sigma_{[p,q]}(A_0), (i \in \mathbb{N})$$

d'où la preuve du Théorème 3.6 est complète.

4.2 Preuve du Théorème 3.7

D'après les conditions du Théorème 3.7, on peut facilement obtenir les conclusions du Théorème 3.7 en utilisant les mêmes arguments comme dans le Théorème 3.6 et le Lemme 3.12.

Conclusion

Plusieurs chercheurs ont étudié la croissance et l'exposant de convergence des zéros des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients entières ou méomorphes.

Dans ce mémoire, on a étudié quelques résultats sur l'exposant de convergence $[p,q]$ des zéros de $f^{(i)} - \varphi$,où f est une solution de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_0 f = 0,$$

et A_j $(j = 0,1,2\ldots,k-1)$ sont des fonctions entières ou méromorphes. On remarque que ces équations sont peu étudiées car toutes leurs solutions ne sont pas toujours des fonctions méromorphes. Une question naturelle se pose : Est-il possible d'obtenir des résultats similaires lorsque les coefficients sont des fonctions analytiques ? et ces résultats restent t-ils valabes dans le cas des équations différentielle non homogènes ?.

Bibliographie

[1] S.Bank, I.Laine ; *On the oscillation theory of* $f'' + Af = 0$ *where* A *is entire*, Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982), 351-363.

[2] S.Bank, I.Laine ; *On the zeros of meromorphic solution of second order linear differential equations*, Comment. Math. Helv. 58(1983) , 656-677.

[3] B. Belaïdi ; *Growth and oscillation theory of solutions of some linear differential equations*, Mathematički Vesnik 60 (4) (2008) , 233-246.

[4] B. Belaïdi ; *Growth of solutions to linear differential equations with analytic coefficients of* $[p,q]-$*order in the unit disc*, Electron. J. Diff. Equ. 2011 (2011), No 156, 1-11.

[5] B. Belaïdi ; *Fonctions entières et théorie de Nevanlinna*, Editions ElDjazair, 2017. 4, 5, 6, 8, 9, 10, 15

[6] B. Belaïdi, A. ElFarissi ; Differential polynomials generated by some complex linear differential equations with meromorphic coefficients, Glasnik Matematiĉki 43 (2) (2008), 363-373.

[7] Z.X.chen, and K.H. Shon ; *The relation between solutions of a class of second order differential equation with functions of small growth*, Chinese. Ann. Math. 27(A4) (2006), 431-442(Chinese). 17, 18

[8] A. El Farissi, and M Benbachir ; *Oscillation of fixed points of solutions of some linear differential equations*, Electron. J. Diff. Equ. 2013 (2013) , No. 41, pp. 1-9. 18

[9] G.G.Gundersen, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates* ,Journal of the london mathematical society, Vol s2-37, no. 121, pp.88-104, 1998. 15, 29

[10] W.K. Hayman, *Meromorphic functions*, Clarendon, Oxford, 1964. 4, 5, 9, 14

[11] S.Hellerstein, J. Miles and J. Rossi, *On the growth of solutions of* $f'' + gf' + hf = 0$, Trans. Amer. Math. Soc., 324 (1991), p.p. 693-706. 10

[12] O.P. Juneja, G. P. Kapoor ; and S. K. Bajpai ; *On the* $[p,q]$ *- order and lower* $[p,q]$ *- of an entire function*, J. Reine Angew. Math. 282 (1976), 53-67.

[13] O.P. Juneja, G. P. Kapoor ; and S. K. Bajpai ; *On the* $[p,q]$ *- order and lower* $[p,q]$ *- of an entire function*, J. Reine Angew. Math. 290 (1977), 180-190. 18

[14] K. H. Kown ; *On the growth of entire functions satisfying second order linear differential equation*, Bull. Korean. Math. Soc. 3 (1996), 487-496. 17

[15] L. Kinnunen, *Linear differential equations with solutions of finite iterated order*, Southeast. Asian. Bull of Math. (1998), 22 , pp. 385-405. 10, 11, 12, 13

[16] I. Laine ; *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter, Berlin, 1993. 6, 8, 9, 11, 14, 15

[17] J. Liu, J. Tu ; and L.Z. Shi ; *Linear differential equations with entire coefficients of* $[p, q]$*-order in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl. 372(2010), 55-67. 13, 14, 18, 19, 25, 26, 28, 29, 31, 33

[18] M. S. Liu ; and X. M. Zhang ; *Fixed points of meromorphic functions of higher order linear differential equations*, Ann.Acad Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 31 (2006), 191-211. 18

[19] J. Tu, and T . Long ; *Oscillation of complex high order linear differential with coefficients of finite iterated order*, Electron. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.66 (2009), 1-13 18

[20] Tu, J., Z-X Xuan, and H-Y Xu, *On the iterated exponent of convergence of zeros of* $f^{(i)} - \varphi$, Adv, Differ, Equ, 2013, 1-15 (2013). 13

[21] Z. J. Wu, and Y. X. Chen ; *The fixed points of solutions of some second order differential equation*, Acta Math. Scientia 32 (A) 2012, 779-784.

[22] H. Y. Xu, J. Tu, and X. M. Zheng ; *On the hyper exponent of convergence of zeros of* $f^{(j)} - \varphi$ *of higher order linear differential equations*, Advances in Difference Equations 2012, 114. 18, 19, 20, 21, 22, 24

[23] C. C. Yang and H. X. Yi, Uniqueness *Theory of Meromorphic Functions*, Kluwer Academic Publishers. 2003. 6, 8, 11